arXiv:2601.09901v1 [math.GT] 14 Jan 2026

图乘积的莫尔斯局部到整体性质

JOSHUA PERLMUTTER

Abstract. 莫尔斯局部到整体性质推广了双曲空间中拟测地线的局部到整体性质。我们证明，无限莫尔斯局部到整体群的图乘积具有莫尔斯局部到整体性质。为此，我们将[ABD21] 针对具有干净容器的相对分层双曲群所提出的最大化过程加以推广。在图乘积满足的温和条件下，我们证明，嵌入到相对分层双曲空间中的稳定嵌入，恰好是那些在轨道映射下拟等距嵌入顶层双曲空间的嵌入。这表明，任何没有孤立顶点的无限群的图乘积都是莫尔斯可检测的。

1. 引言

双曲空间的一项基本性质是，局部为拟测地线的路径本身必定是整体拟测地线。事实上，[Gro87，命题 7.2.E] 表明，这一拟测地线性质可以作为双曲空间的定义。双曲空间中拟测地线的另一项关键性质称为莫尔斯引理 [Gro87，命题 7.2.A], 指出，具有相同端点的拟测地线必定彼此紧密跟随。非双曲空间中也可能存在莫尔斯拟测地线，即满足莫尔斯引理的拟测地线。事实上，如果所有测地线都是一致莫尔斯的，那么该空间就是双曲的。鉴于这两种性质在双曲空间中的密切关系，自然会问，非双曲空间中的莫尔斯拟测地线是否仍满足拟测地线的局部到整体性质。Russell、Spriano 和 Tran [RST22] 引入了度量空间的莫尔斯局部到整体性质 ，正是为了研究这一问题。

粗略地说，如果一个度量空间中的每条局部上为莫尔斯拟测地线的路径都是全局莫尔斯拟测地线，那么该空间就具有莫尔斯局部到整体性质。若一个群的凯莱图具有这一性质，则称该群为莫尔斯局部到整体群，因为这一性质是拟等距不变量 [RST22]。已知许多具有莫尔斯局部到整体性质的群与空间：无限群的直积 [RST22]；分层双曲群 [RST22]；相对于莫尔斯局部到整体群双曲的群 [RST22]；内射度量空间 [SZ24]；以及任何具有 σ-紧致 Morse 边界的 $C'(1/9)$-小消去群 [HSZ24]。

双曲空间有若干性质，其证明仅依赖于局部拟测地线是全局拟测地线这一事实，因此这些性质的类似结论也适用于 Morse 局部到整体空间。运用这一技巧及其他方法，研究表明 Morse 局部到整体空间具有许多稳健性质：

Date: 2026年1月16日。

• 稳定子群的组合定理 [RST22, 定理 3.1]; • 三分律 [RST22, 推论 4.9]; • 卡当–哈达玛型定理 [RST22, 定理 3.15]; • 稳定子群的增长率间隙 [CRSZ22, 定理 5.1]; • 莫尔斯测地词构成的正则语言 [CRSZ22, 定理 3.2]; • 强 σ-紧致 Morse 边界 [HSZ24, 定理 4.3]。

莫尔斯局部到整体群与空间仍是一个活跃的研究领域，研究者既在探寻 Morse 局部到整体条件所蕴含的新性质，也在寻找新的莫尔斯局部到整体群与空间的例子。Russell-Spriano-Tran 提出，莫尔斯局部到整体群的图乘积本身是否也是莫尔斯局部到整体群 [RST22，问题 3]。Green 引入了图乘积 [Gre90]。作为右角阿廷群概念的推广，图乘积将有限生成群赋给有限单纯图中的每个顶点。图乘积随后由所有顶点群的自由积构成，并满足如下关系：当且仅当两个不同顶点群所对应的顶点由一条边连接时，这两个顶点群中的元素才彼此交换。因此，图乘积构成了群的自由积与直积之间的桥梁。我们的主要结果针对无限莫尔斯局部到整体群的情形，回答了 [RST22，问题3] ：

定理1.1。 无限莫尔斯局部到整体群的图乘积是莫尔斯局部到整体群。

事实上，我们在推论 5.3 中证明，若一个不含孤立顶点的图乘积中每个顶点群都是无限群，则该群具有 Morse 局部到整体性质。特别是，只要图乘积不含孤立顶点，每个顶点群都可以是不具有 Morse 局部到整体性质的群，而所得的图乘积仍将具有 Morse 局部到整体性质。

尽管图乘积本身是一个内容丰富的研究领域，但为了证明定理1.1，我们转而依赖这样一个事实：图乘积是相对分层双曲群 [BR22，定理 4.22]。相对分层双曲群与空间由 [BHS17] 和 [BHS19] 引入，旨在推广映射类群的层级结构。相对分层双曲群与空间由一族双曲空间及其间的三种关系构成：嵌套、正交和横截性。嵌套构成一个偏序，其中存在一个最大的元素，称为顶层空间。定理 1.1 的证明结构推广了 [RST22，定理 4.20], 中的论证；该论证证明了分层双曲空间具有 Morse 局部到整体性质，而这一结果又依赖于 Abbott-Behrstock-Durham 为分层双曲空间引入的一种称为最大化的程序。由于图乘积是相对分层双曲群，我们首先推广 [ABD21，定理 3.7]。

定理 1.2. 每个具有有界域二分性和干净容器的相对分层双曲空间，都存在一种具有相对无界乘积的相对分层双曲结构。

有界域二分性和干净容器这两项技术假设并不苛刻，例如，每个图乘积都满足这些假设；精确定义见第 3.2 节。

定理 1.2 所构造的新相对分层双曲结构称为最大化结构。接下来，我们将证明，最大化结构中的顶层空间是一个双曲空间，能够捕捉

整体空间中莫尔斯拟测地线的几何。这样的空间称为莫尔斯可检测空间 [RST22], , 拥有莫尔斯可检测空间足以证明一个空间具有 Morse 局部到整体性质 [RST22, 定理 4.18]。在我们的论证中，我们重点关注稳定嵌入，莫尔斯拟测地线就是其中一个例子。稳定嵌入是一种拟等距嵌入，并具有额外性质：任意两条端点位于该嵌入像中的拟测地线，都包含在彼此的一致邻域内。

定理 1.3. 设 $\mathcal{X}$是一个测地度量空间，且 $(\mathcal{X}$、$\mathfrak{S})$ 是具有 $|\mathfrak{S}| > 1$、干净容器、有界域二分性和无界极小乘积的相对层次双曲空间。拟等距嵌入 $\gamma\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 是稳定嵌入，当且仅当 $\pi_S \circ \gamma$ 是到 $\mathcal{T}_S$中的拟等距嵌入，其中 $\mathcal{T}_S$ 是最大化结构的顶层空间。

值得注意的是，Balasubramanya-Chesser-Kerr-Mangahas-Trins 同时且独立地证明了一个与定理 1.3 类似的结果，该结果给出了一个空间，可用于检测没有孤立顶点的无限群的图乘积的稳定子群 [BCK$^+$25，定理 1.2]。由于他们的结果依赖于专门针对稳定子群而非一般稳定嵌入的工具， [BCK$^+$25，定理 1.2]本身并不能说明他们构造的空间是莫尔斯可检测空间。

概要。第 2 节介绍本文所需的背景知识。我们首先讨论拟测地线和稳定嵌入，并在第 2.1 节末尾引出 Morse 局部到整体性质。第 2.2 节给出相对分层双曲群与空间的定义及其基本性质。第 2.3 节将更深入地讨论层级路径，包括修改标准定义，并解释为何这种修改不会妨碍我们使用基于原始定义的某些结果。第 2.4 节介绍图乘积的定义及其基本性质，包括 [BR22, 定理 4.22] 中关于图乘积的相对层次结构。第 3 节旨在将 [ABD21] 的方法和结果推广到相对层次双曲空间。为此，我们在第 3.1 节补充 [CRHK24, 命题 20.1] 的证明细节，以说明其可推广到相对层次双曲空间。随后，我们在第 3.2 节将 [ABD21, 定理 3.7] 中的最大化过程加以推广，并证明定理 1.2。第 3.3 节则推广 [ABD21, 定理 4.4]。第 4 节的主要目标是将 [ABD21, 推论 6.2] 推广到具有某些良好性质的相对层次双曲空间，并证明定理 1.3。最后，第 5 节证明，不含孤立顶点的无限群的图乘积满足这些良好性质，因此具有 Morse 局部到整体性质，并据此证明定理1.1。

致谢。 作者感谢他的博士导师 Carolyn Abbott。作者还要感谢 Jacob Russell 提出这一问题，并提供指导和见解。作者的部分研究经费来自美国国家科学基金会资助项目 DMS-2106906。

2. Background

2.1. **莫尔斯局部到整体性质**。 本节首先回顾关于拟等距和度量空间的一些基本定义。

定义 2.1。 设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$为度量空间。映射 $\gamma\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$是一个 (λ, ε)-拟等距嵌入，如果对任意 $x, y \in \mathcal{Y}$

$$\frac{1}{\lambda} \cdot d_{\mathcal{Y}}(x, y) - \varepsilon \leqslant d_{\mathcal{X}}(\gamma(x), \gamma(y)) \leqslant \lambda \cdot d_{\mathcal{Y}}(x, y) + \varepsilon.$$

定义 2.2。 A (λ, ε)-拟测地线 是将闭子集 $I \subseteq \mathbb{R}$ 嵌入度量空间的一种 (λ, ε)-拟等距嵌入。A $(1, 0)$-拟测地线称为一条测地线。

定义 2.3。 如果度量空间 $\mathcal{X}$ 中的任意两点都能由一条 (λ, ε)-拟测地线连接，则称其为 (λ, ε)-拟测地线空间 。如果常数 λ 和 ε 并不重要，我们就简称 $\mathcal{X}$ 为拟测地线空间。类似地，如果 $\mathcal{X}$ 中的任意两点都能由一条测地线连接，则称 $\mathcal{X}$ 为测地空间。

我们将遵循 [RST22] 所确立的 Morse 定义惯例。以下定义看起来比通常归于 [Gro87], 的标准定义更强，但实际上根据 [RST22, 引理 2.4]，二者等价。

定义 2.4。 设 $M\colon [1, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ 为一个函数。若对所有 $s < t \in I$, 只要 α是端点为 $\gamma(s)$ 和 $\gamma(t)$的 (k, c)-拟测地线，则 α 与 $\gamma|_{[s,\ t]}$之间的豪斯多夫距离不超过 $M(k, c)$，那么 (λ, ε)-拟测地线 $\gamma\colon I \to X$就称为 $(M; \lambda, \varepsilon)$-莫尔斯拟测地线。函数 M称为莫尔斯控制函数。

Morse这一概念源于这样一个事实：在双曲空间中，所有拟测地线都是莫尔斯的。

命题 2.5 ([Gro87，命题 7.2.A])。 设 X 是一个 δ-双曲空间。 X 中的一条(λ, ε)-拟测地线是 M-莫尔斯拟测地线，其中 M取决于 λ、 ε和 δ。

与莫尔斯拟测地线的定义密切相关的是稳定子群这一概念。 [DT15] 定义该概念，旨在推广双曲群的拟凸子群。

定义 2.6. 设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$为度量空间，并设存在映射 $\iota\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$。若 ι是一个 $(M$，且$\lambda, \varepsilon)$-稳定嵌入，则称其为 ι的 (λ, ε)-拟等距嵌入，并且存在函数 $M\colon [1, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$，使得 $\mathcal{X}$中任意两条端点位于 $\iota(\mathcal{Y})$ 内的 (k, c)-拟测地线都包含在彼此的 $M(k, c)$-邻域内。我们称 M 为稳定性控制函数。

定义 2.7. 设 G 为有限生成群。若子群 $H \leqslant G$ 的包含映射 $H \hookrightarrow G$对于 H 和 G 分别选取的某些（任意）凯莱图而言是稳定嵌入，则称 $H \leqslant G$ 为稳定子群 。

以下引理是关于稳定嵌入几何的有用工具。

引理 2.8。 设 $\mathcal{X}$ 为一个度量空间。任意 $(M;\ \lambda, \varepsilon)$-莫尔斯拟测地线 $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ 都是一个 $(M;\ \lambda, \varepsilon)$-稳定嵌入。

证明。 这直接由定义 2.4 得出。 □

引理 2.9。 设 $\mathcal{X}$ 是一个测地双曲度量空间。任意 (λ, ε)-拟等距嵌入 $\gamma\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 都是一个 $(M;\ \lambda, \varepsilon)$-稳定嵌入，其中某个稳定性控制函数 M仅取决于双曲性常数。

证明。 根据定义， γ是一个 (λ, ε)-拟等距嵌入。取两条端点位于 $\gamma(\mathcal{Y})$ 中的 (k, c)-拟测地线 α 和 β。取一条连接 α 和 β端点的测地线 η。根据命题 2.5， η 是 M-Morse 的，其中某个莫尔斯控制函数仅取决于 $\mathcal{X}$的双曲性常数。根据 Morse 的定义， α和 β之间的豪斯多夫距离至多为 $2M(k, c)$，因此 γ是一个 $(2M; \lambda, \varepsilon)$-稳定嵌入。□

引理 2.10. 设 $\mathcal{Y}$是一个测地度量空间，且 $\gamma\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$是一个 $(M; \lambda, \varepsilon)$- 稳定嵌入。那么，对于任意端点位于 $\gamma(\mathcal{Y})$中的 (k, c)-拟测地线 α ，它都包含在某条 $(M'; \lambda, \varepsilon)$-莫尔斯拟测地线$\beta \subset \gamma(\mathcal{Y})$的 $M'(k, c)$ 邻域内，其中 M'取决于 M、 λ和 ε。

证明。取一条 (k, c)-拟测地线 α，其端点为 $\gamma(x)$ 和 $\gamma(y)$，其中 $x, y \in \mathcal{Y}$。空间 $\mathcal{Y}$ 是测地的，因此取一条端点为 x和 y的测地线 $\eta\colon I \to \mathcal{Y}$。映射 γ是一个 $(M; \lambda, \varepsilon)$-稳定嵌入，因此也是拟等距嵌入，所以 $\gamma \circ \eta$ 是 $\gamma(\mathcal{Y})$中的一条 (λ, ε)-拟测地线。此外，$\gamma \circ \eta$ 的端点为 $\gamma(x)$ 和$\gamma(y)$。因此， $\gamma \circ \eta$和 α彼此包含在半径为 $\max(\lambda, k)$、$\max(\varepsilon, c)$的 M(邻域内。因此，取 $\beta = \gamma \circ \eta$和 $M'(k, c) = M(\max(\lambda, k), \max(\varepsilon, c))$即可完成证明。□

我们现在回顾局部拟测地线的定义，然后讨论这类嵌入具有全局性质的情形。

定义 2.11. 设 $\mathcal{X}$ 是一个度量空间， $I \subseteq \mathbb{R}$ 闭， $\lambda \geqslant 1$、 $\varepsilon \geqslant 0$ 且 $L \geqslant 0$。映射 $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ 是一个 $(L;$ 若对任意满足$|s - t| \leqslant L$ 的 $s, t \in I$，限制映射 $\gamma|_{[s,\ t]}$ 是一条 (λ, ε)- 拟测地线，则称其为 $\lambda, \varepsilon)$-局部拟测地线。此外，若存在一个莫尔斯控制函数 M，使得 $\gamma|_{[s,\ t]}$ 是一条 $(M; \lambda, \varepsilon)$-莫尔斯拟测地线，则 γ 是一条$(L; M; \lambda, \varepsilon)$-局部莫尔斯拟测地线。

关于双曲空间，最基本的事实之一是，局部拟测地线也必定是全局拟测地线。

命题 2.12 ([Gro87, 命题 7.2.E])。 设 X 是一个测地度量空间。当且仅当对任意 $\lambda \geqslant 1$ 和 $\varepsilon \geqslant 0$ ，存在 $\lambda' \geqslant 1$、$\varepsilon' \geqslant 0$和 $L \geqslant 0$，使得任意 $(L;$ λ、$\varepsilon)$-局部拟测地线都是全局的 $(\lambda'$、$\varepsilon')$-拟测地线时， $\mathcal{X}$ 是 δ-双曲的。

正是基于双曲空间的这一事实， [RST22] 定义了莫尔斯局部到整体性质。

定义 2.13。 设 $\mathcal{X}$ 是一个拟测地度量空间。若对任意 $\lambda \geqslant 1$、 $\varepsilon \geqslant 0$和莫尔斯控制函数 M，都存在$\lambda' \geqslant 1$、 $\varepsilon' \geqslant 0$、 $L \geqslant 0$以及莫尔斯控制函数 M'，使得任意 $(L;$ $M;$ $\lambda,$ $\varepsilon)$-局部莫尔斯拟测地线都是全局的 $(M';$ $\lambda',$ $\varepsilon')$-莫尔斯拟测地线，则称 $\mathcal{X}$ 具有莫尔斯局部到整体性质。凯莱图具有莫尔斯局部到整体性质的有限生成群称为莫尔斯局部到整体群。

值得注意的是，无论选择哪种生成集，一个群都是 Morse 局部到整体的，因为 Morse 局部到整体性质是拟等距不变量，正如 [RST22] 中所解释的那样。下面的定义展示了一类重要的 Morse 局部到整体群。

定义 2.14. 若对每个莫尔斯控制函数 M以及 $\lambda \geqslant 1, \varepsilon \geqslant 0$，都存在 $B \geqslant 0$，使得每条 $(M; \lambda, \varepsilon)$- 莫尔斯拟测地线 $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ 的直径均为 $_{\mathcal{X}}(\gamma) \leqslant B$，则度量空间 $\mathcal{X}$ 称为莫尔斯有界。若某个有限生成集 S对应的 $\mathsf{Cay}(G, S)$ 为莫尔斯有界，则有限生成群 G 称为莫尔斯有界。

莫尔斯受限群显然具有 Morse 局部到整体性质，并且在本文的主要结果中发挥着重要作用。无限空间的直积是莫尔斯有界的，因此度量空间中的“长”莫尔斯拟测地线必须避开那些可分解为无限空间直积的子空间。

构造莫尔斯局部到整体群的另一种方法，是取莫尔斯局部到整体群的自由积。这直接由 [RST22，定理 5.1], 得出，该定理指出，若一个度量空间对莫尔斯局部到整体空间是双曲的，那么它本身就是莫尔斯局部到整体空间。莫尔斯局部到整体性质在自由积下保持不变，这一事实将在后文中发挥作用。

证明一个度量空间具有 Morse 局部到整体性质的关键技巧之一，是证明存在一个双曲空间，能够捕捉原空间中的所有 Morse 拟测地线，如下述定义所示。

定义 2.15。若存在一个 δ-双曲空间 $\mathcal{Y}$（称为莫尔斯可检测空间），以及一个粗Lipschitz映射 $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，使得对于每个 $(\lambda,\ \varepsilon)$- 拟测地线 $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$，下述结论成立，则称度量空间 $\mathcal{X}$ 为莫尔斯可检测：

(1) 如果 γ是 M-Morse，那么 $\pi \circ \gamma$是 $(k,\ c)$-拟测地线，位于 $\mathcal{Y}$中，其中 $(k,\ c)$由 λ、 ε、 δ和 M决定。**(2)** 如果 $\pi \circ \gamma$是位于 $\mathcal{Y}$中的 $(k,\ c)$-拟测地线，那么 γ是 M-Morse，其中 M由 k、 c、 λ、 ε和 δ决定。

寻找莫尔斯可检测空间，是 [RST22] 证明分层双曲空间具有 Morse 局部到整体性质所采用的方法。这一结果依赖于以下事实。

定理 2.16 （[RST22，定理 4。18]）。 如果 $\mathcal{X}$ 是莫尔斯可检测的，那么 $\mathcal{X}$ 具有 *Morse* 局部到整体性质。

对于我们的主要结果，我们也将采用这一技巧，并最终证明，由无限群构成的图乘积的凯莱图是莫尔斯可检测的，因而具有 Morse 局部到整体性质。

2.2.**相对分层双曲群与空间**。现在我们给出相对分层双曲群的定义和基本性质。该概念最初由 [BHS17] 和 [BHS19]引入。

定义 2.17. 设 $E > 0$。若拟测地度量空间 $\mathcal{X}$ 满足以下十二条公理，则称其为一个 E- 相对分层双曲空间 （ E- 相对 HHS ）。此时，存在一个指标集 $\mathfrak{S}$ 以及测地空间 $\{(CW, d_W) \mid W \in \mathfrak{S}\}$。 $\mathfrak{S}$ 中的元素称为域，而 E 是层级常数。满足以下公理的指标集及相关测地空间称为 $\mathcal{X}$上的相对 *HHS* 结构。

(1)（投影）对于每个 $W \in \mathfrak{S}$，存在一个投影 $\pi_W\colon \mathcal{X} \to 2^{CW} - \varnothing$，使得对于所有 $x \in \mathcal{X}$，$\pi_W(x)$ 在 CW中的直径至多为 E。此外，对于所有 $W \in \mathfrak{S}$，每个 π_W都是 (E, E)-粗利普希茨的，并且 $CW \subseteq \mathcal{N}_E(\pi_W(\mathcal{X}))$。

(2)（嵌套）若 $\mathfrak{S} \neq \varnothing$，则 $\mathfrak{S}$ 配备偏序 $\sqsubseteq$，并包含唯一的 $\sqsubseteq$-极大元素。与该 $\sqsubseteq$-极大元素相关联的测地空间称为顶层空间。当 $V \sqsubseteq W$ 时，域 V嵌套于 W 中。对于每个 $W \in \mathfrak{S}$，我们将所有满足 $V \sqsubseteq W$ 的 $V \in \mathfrak{S}$ 组成的集合记为 $\mathfrak{S}_W$。此外，对于所有 $V,\ W \in \mathfrak{S}$，若 $V \sqsubsetneq W$，则存在指定的非空子集 $\rho_W^V \subseteq CW$，满足

$\mathrm{diam}(\rho_W^V) \leqslant E$。称集合 ρ_W^V 为从 V 到 W 的相对投影。

(3) (正交性) $\mathfrak{S}$ 有一种称为正交的对称关系。若 V 与 W正交，我们记作 $V \perp W$，并要求 V和 W 不可按 $\sqsubseteq$比较。此外，每当 $V \sqsubseteq W$且 $W \perp U$时，我们要求 $V \perp U$。我们用 $\mathfrak{S}_W^{\perp}$表示所有满足 $V \perp W$的 $V \in \mathfrak{S}$ 的集合。

(4) (横截性) 若 $V, W \in \mathfrak{S}$ 不正交，且二者互不嵌套，则记作 $V \pitchfork W$，并称域 V, W 是横截的。此外，对于所有 $V, W \in \mathfrak{S}$，若 $V \pitchfork W$，则存在非空集合 $\rho_W^V \subseteq CW$ 和 $\rho_V^W \subseteq CV$，其直径均至多为 E。仿照投影公理，将集合 ρ_W^V 称为从 V到 W的相对投影 。

(5) (双曲性) 对于每个 $W \in \mathfrak{S}$，若 CW 不是 E-双曲的，则 W 是 $\sqsubseteq$-极小的。

(6) (有限复杂度) 任意一组两两 $\sqsubseteq$可比较元素的基数至多为 E。

(7) (容器) 对每个满足 $\mathfrak{S}_W \cap \mathfrak{S}_U^{\perp} \neq \varnothing$ 的 $W \in \mathfrak{S}$ 和 $U \in \mathfrak{S}_W$，都存在$Q \subsetneq W$，使得当 $V \in \mathfrak{S}_W \cap \mathfrak{S}_U^{\perp}$ 时，$V \sqsubseteq Q$。域 Q 称为 W 中 U 的容器。

(8) (唯一性) 存在函数 $\theta\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$，使得对所有 $r \geqslant 0$，若$x, y \in \mathcal{X}$ 且 $\mathsf{d}_{\mathcal{X}}(x, y) \geqslant \theta(r)$，则存在 $W \in \mathfrak{S}$，使得 $\mathsf{d}_W(\pi_W(x), \pi_W(y)) \geqslant r$。我们称 θ 为 $\mathfrak{S}$的唯一性函数。

(9) (有界测地像) 对所有满足 $V \subsetneq W$ 的 $x, y \in \mathcal{X}$ 和 $V, W \in \mathfrak{S}$，若 $\mathsf{d}_V(\pi_V(x), \pi_V(y)) \geqslant E$，则对于任意 CW-测地线 $[\pi_W(x), \pi_W(y)]$，交集

$$[\pi_W(x), \pi_W(y)] \cap \mathcal{N}_E(\rho_W^V) \neq \varnothing.$$

(10) (大链接) 对所有 $W \in \mathfrak{S}$和 $x, y \in \mathcal{X}$，存在 $\{V_1, \ldots\ldots, V_m\} \subseteq \mathfrak{S}_W \backslash \{W\}$，使得 $m \leqslant E \cdot \mathsf{d}_W(\pi_W(x), \pi_W(y)) + E$；并且对所有 $U \in \mathfrak{S}_W \backslash \{W\}$，要么对某个 i有 $U \in \mathfrak{S}_{V_i}$，要么 $\mathsf{d}_U(\pi_U(x), \pi_U(y)) \leqslant E$。

(11) (一致性) 若 $V \pitchfork W$，则

$$\min\{\mathrm{d}_W(\pi_W(x), \rho_W^V), \mathrm{d}_V(\pi_V(x), \rho_V^W)\} \leqslant E$$

对所有 $x \in \mathcal{X}$。此外，若 $U \sqsubseteq V$且 $V \subsetneq W$或 $V \pitchfork W$和 $W \perp U$，则 $\mathsf{d}_W(\rho_W^U, \rho_W^V) \leqslant E$。

(12) (部分实现) 若 $\{V_i\}$ 是 $\mathfrak{S}$ 的两两正交元素的有限集合，且对每个 i都有 $p_i \in CV_i$，则存在 $x \in \mathcal{X}$，使得：• 对所有 i，有 $\mathsf{d}_{V_i}(\pi_{V_i}(x), p_i) \leqslant E$；• 对每个 i和每个 $W \in \mathfrak{S}$，若 $V_i \subsetneq W$或 $W \pitchfork V_i$，则 $\mathsf{d}_W(\pi_W(x), \rho_W^{V_i}) \leqslant E$。

相对分层双曲空间的概念也可以应用于有限生成群。

定义 2.18。设 G 是一个有限生成群，$\mathcal{X}$ 是关于某个有限生成集的 G 的凯莱图。若满足以下条件，则群 G 是一个 E- 相对分层双曲群 （E-相对 HHG）：

(1) 存在一个指标集 $\mathfrak{S}$，使得 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是相对层次双曲空间。

(2) 存在一个 G 在 $\mathfrak{S}$ 上的双射作用，使得关系 $\sqsubseteq$、$\perp$ 和 $\pitchfork$保持不变，并且 $\mathfrak{S}$ 包含有限多个 G-轨道。

(3) 对所有 $W \in \mathfrak{S}$ 和 $g \in G$，存在一个等距映射 $g_W \colon CW \to C(gW)$，使得：

• 对所有 $h \in G$，映射 $(gh)_W = g_{hW} \circ h_W$。• 对所有 $x \in \mathcal{X}$，$d_{gW}(g_W \circ \pi_W(x),\ \pi_{gW}(g \cdot x)) \leqslant E$。• 对所有 $V \in \mathfrak{S}$，如果 $V \pitchfork W$或 $V \sqsubsetneq W$，那么 $d_{gW}(g_W(\rho_W^V),\ \rho_{gW}^{gV}) \leqslant E$。

相对层次双曲空间最基本的性质之一是，可以根据到相关测地空间的投影来确定底层空间中的距离。这一概念由下面的定理形式化，称为距离公式。

定理 2.19 ([BHS19, 定理 6.10])**.** 设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个 E-相对层次双曲空间。则存在一个常数 $s_0 \geqslant 0$，它取决于 E，并称为距离公式阈值；对于任意 $s \geqslant s_0$，存在常数 K, C （取决于 s 和E），使得对于任意 $x, y \in \mathcal{X}$，

$$d_{\mathcal{X}}(x, y) \asymp_{K,C} \sum_{U \in \mathfrak{S}} \{\{d_U(\pi_U(x), \pi_U(y))\}\}_s.$$

由于距离公式存在一个最小阈值，只有当相关测地空间中的距离达到该阈值时，才会影响底层空间中的距离，因此自然可以定义一个概念，只纳入那些对于 $\mathcal{X}$ 中给定的一对点具有较大投影的域，其相关测地空间亦然。

定义 2.20。设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个相对层次双曲空间。若域 $U \in \mathfrak{S}$ 满足以下条件，则称其对于点 $x, y \in \mathcal{X}$ 是 C-相关的

$$d_U(\pi_U(x), \pi_U(y)) \geqslant C.$$

相对分层双曲空间领域中的另一个重要概念是分层拟凸性。这一概念推广了双曲空间拟凸子空间的思想。

定义 2.21。设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个 E-相对层次双曲空间。那么，对于某个 k，若满足以下条件，则称 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$是 k-分层拟凸的：$[0, \infty) \to [0, \infty)$:

(1) 对所有满足 CU 的 $U \in \mathfrak{S}$，若其为一个 E-双曲空间，则投影 $\pi_U(\mathcal{Y})$ 是$k(0)$-拟凸的；(2) 对每个 $\sqsubseteq$-极小的 $U \in \mathfrak{S}$，若 CU 不是一个 E-双曲空间，则 $CU = \mathcal{N}_{k(0)}(\pi_U(\mathcal{Y}))$ 或 $\operatorname{diam}(\pi_U(\mathcal{Y})) \leqslant k(0)$；(3) 对每个 $x \in \mathcal{X}$和每个 $R \geqslant 0$，若对于每个 $U \in \mathfrak{S}$均有 $d_U(\pi_U(x), \pi_U(\mathcal{Y})) \leqslant R$，则 $d_{\mathcal{X}}(x, \mathcal{Y}) \leqslant k(R)$。

与相对层次双曲空间中的层次准凸空间这一概念密切相关的子空间，称为嵌套和正交部分元组。这些空间共同构成相对层次双曲空间中的标准乘积区域，它们可以充当

该空间中双曲性的障碍。要定义标准乘积区域，我们必须先考察相关测地空间中称为相容元组的某些点集。

定义 2.22。设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个 E-相对层次双曲空间。设

$$\vec{b} \in \prod_{U \in \mathfrak{S}} 2^{CU}$$

是一个元组，使得每个坐标 b_U 在 CU 中的直径至多为 E。若元组 $\vec{b}$ 满足一致性，则

- 对于任意 $V, W \in \mathfrak{S}$，若 $V \pitchfork W$，则 $\min\{d_W(b_W, \rho_W^V),\ d_V(b_V, \rho_V^W)\} \leqslant E$；
- 对于任意 $V, W \in \mathfrak{S}$，若 $V \sqsubsetneq W$，则 $d_W(b_W, \rho_W^V) \leqslant E$。

现在我们可以定义部分元组集，它们共同构成标准乘积区域。

定义 2.23。设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是相对层次双曲空间。对于任意 $U \in \mathfrak{S}$,

- 嵌套部分元组 $\mathbf{F}_U$ 是 $\prod_{V \in \mathfrak{S}_U} 2^{CV}$ 中相容元组的集合；
- 正交部分元组 $\mathbf{E}_U$ 是 $\prod_{V \in \mathfrak{S}_U^{\perp}} 2^{CV}$ 中相容元组的集合。

命题 2.24。设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个 E-相对层次双曲空间。对于任意 $U \in \mathfrak{S}$，存在 $C \geqslant 0$，仅依赖于 E，使得对于任意 $\vec{a} \in \mathbf{F}_U$ 和 $b \in \mathbf{E}_U$，存在 $x \in \mathcal{X}$，使得对于任意 $V \in \mathfrak{S}$,

- 若 $V \sqsubseteq U$，则 $d_V(x, a_V) \leqslant C$；
- 若 $V \perp U$，则 $d_V(x, b_V) \leqslant C$；
- 若 $V \pitchfork U$ 或 $U \sqsubsetneq V$，则 $d_V(x, \rho_V^U) \leqslant C$.

此外，通过设定 $\phi_U(\vec{a}, b) = x$，可以定义良好的映射 $\phi_U\colon\ \mathbf{F}_U \times \mathbf{E}_U \to \mathcal{X}$。

证明。 [BHS19, 构造 5.10] 中的论证可原封不动地套用。 □

定义 2.25。设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个相对层次双曲空间。对任意 $U \in \mathfrak{S}$，令 ϕ_U 为命题 2.24 中的映射。则 $\phi_U(\mathbf{F}_U \times \mathbf{E}_U)$ 是 U 的乘积区域，记作 $\mathbf{P}_U$。

定义 2.26。设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个相对层次双曲空间。对任意 $U \in \mathfrak{S}$，令 ϕ_U 为命题 2.24 中的映射。对任意 $\vec{e} \in \mathbf{E}_U$ 和任意 $\vec{f} \in \mathbf{F}_U$，称 $\phi_U(\mathbf{F}_U \times \{\vec{e}\})$ 和 $\phi_U(\{\vec{f}\} \times \mathbf{E}_U)$ 为切片。

记号 2.27。在提及切片时，我们稍微滥用记号，省略 ϕ_U，分别将它们记作 $\mathbf{F}_U \times \{\vec{e}\}$ 和 $\{\vec{f}\} \times \mathbf{E}_U$。

值得注意的是，对于固定的 U，距离公式意味着任意切片 $\mathbf{F}_U \times \{\vec{e}_1\}$ 和 $\mathbf{F}_U \times \{\vec{e}_2\}$ 都是一致拟等距的。对于 $\mathbf{E}_U$ 的切片，情况也相同。

需要注意的是，根据其定义，对于任意的 $U, V \in \mathfrak{S}$ 满足 $U \perp V$ 的情形，空间 CU 粗嵌入到 $\mathbf{F}_U$ 中，而空间 CV 粗嵌入到 $\mathbf{E}_U$ 中。因此，若 CU 和 CV 分别是直径无穷的空间，则任意切片 $\mathbf{F}_U \times \{\vec{e}\}$ 和 $\{\vec{f}\} \times \mathbf{E}_U$ 作为 $\mathcal{X}$ 的子空间都是无界的。在这种情况下，我们称

$\mathbf{F}_U$ 和$\mathbf{E}_U$ 无界。此外，若$\mathbf{F}_U$ 和$\mathbf{E}_U$ 均无界，则$\mathbf{P}_U$分解为无界因子的直积。

由于乘积区域可以是含有无界因子的直积，因此可能会妨碍 $\mathcal{X}$ 的双曲性。通过将乘积区域锥化，我们得到一个新的相关空间，称为分解空间。

定义 2.28。 设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个相对层次双曲空间。设 $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$。分解空间$\mathcal{X}_{\mathfrak{T}}$ 是对 $\mathcal{X}$ 中的切片$\mathbf{F}_V \times \{\vec{e}\}$ 进行锥化所得，其中遍历所有 $\vec{e} \in \mathbf{E}_V$ 以及所有 $V \in \mathfrak{T}$。

根据 [BHS17]，第 1.2.1 节中的构造，任意切片$\mathbf{F}_U \times \{\vec{e}\}$、任意切片 $\{\vec{f}\} \times \mathbf{E}_U$ 以及$\mathbf{P}_U$ 都是统一分层拟凸的。此外，这一构造证明了 $\mathcal{X}$ 的分层拟凸子空间存在门映射。

命题 2.29。 设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个 E-相对层次双曲空间。设 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ 是 k-分层拟凸的。那么存在一个常数 $\mu \geqslant 1$，仅依赖于 E 和 k，使得对于任意 $x \in \mathcal{X}$，存在一点 $y \in \mathcal{Y}$，使得对于任意 $U \in \mathfrak{S}$

- 如果 CU是 E-双曲的，那么 $d_U(\pi_U(y), p_U \circ \pi_U(x)) \leqslant \mu$，其中 p_U是将 CU 投影到 $\pi_U(\mathcal{Y})$上的粗投影；或者• 如果 CU 不是 E- 双曲的，且 $\pi_U\colon \ \mathcal{Y} \to CU$ 是 $k(0)$-粗满射的，那么 $d_U(\pi_U(y), \pi_U(x)) \leqslant \mu$。

于是存在一个映射 $\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}\colon \ \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，定义为 $\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x) = y$。此外，映射 $\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}$是 (μ, μ)-粗利普希茨的。

证明。 </style}常数 μ 的存在性由 [BHS17 第 1.2 节的构造得出。映射是粗利普希茨的这一事实可直接由 [BHS19 引理 5 的论证得到（可能需要增大常数 μ）。□

定义 2.30。 设 $(\mathcal{X}, \ \mathfrak{S})$ 为相对层次双曲空间。对于任意分层拟凸空间 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$，映射 $\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}$ 是到 $\mathcal{Y}$上的门映射。

与一般的分层拟凸子空间相比，与乘积区域相关的额外结构和术语，使得能够更清晰地表述其门映射的性质。下述命题沿用了 [Rus22, 命题 2.23] 的语言。

命题 2.31 ([BHS19, 引理 5.5],[BHS21, 引理 1.20])。 设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是相对层次双曲空间。则存在常数 $\mu \geqslant 1$，使得对于任意 $U \in \mathfrak{S}$，门映射 $\mathfrak{g}_U\colon \ \mathcal{X} \to \mathbf{P}_U$ 满足

(1) $\mathfrak{g}_U$ 是 (μ, μ)-粗利普希茨的；(2) 对于所有 $p \in \mathbf{P}_U$, $d_{\mathcal{X}}(\mathfrak{g}_U(p), p) \leqslant \mu$；(3) 对于所有 $x \in \mathcal{X}$和 $V \in \mathfrak{S}$，若 $U \perp V$或 $U \sqsubsetneq V$，则 $d_V(\pi_V \circ \mathfrak{g}_U(x), \rho_V^U) \leqslant \mu$；否则 $d_V(\pi_V \circ \mathfrak{g}_U(x), \pi_V(x)) \leqslant \mu$；以及(4) 对于所有 $x \in \mathcal{X}$和 $p \in \mathbf{P}_U$, $d_{\mathcal{X}}(x, \mathfrak{g}_U(x)) + d_{\mathcal{X}}(\mathfrak{g}_U(x), p) \leqslant \mu \cdot d_{\mathcal{X}}(x, p) + \mu$。

2.3. **层级路径**。 相对层次双曲空间的一个显著特点是，任意两点之间都可以用质量一致的拟测地线连接，这种拟测地线称为层级路径。层级路径在相对层次双曲空间中向所有相关测地空间的投影都具有良好的性质，是研究相对层次双曲空间中莫尔斯拟测地线最重要的工具之一。

为了进行论证，我们需要一个比 [BHS19，定义 4.2]中的层级路径定义稍强的定义。层级路径的构造在

证明中满足这一更强条件： [BHS19，定理 6.11] ，如命题 2.34 所示。

定义 2.32。 设 X 是一个度量空间。设 $f\colon [0,\ell]\to X$ 是一条拟测地线。那么，若存在一个 $L\in\mathbb{N}$ 和一个严格递增函数 $g\colon [0,L]\to[0,\ell]$，使得 f 是一个 (λ,λ)-无参数化准测地线

- $g(0)=0$,
- $g(L)=\ell$,
- $f\circ g$ 是一条 (λ,λ)-拟测地线，并且
- $\forall\, j\in[0,L-1]\cap\mathbb{Z}$, $d_X(f\circ g(j), f\circ g(j+1))\leqslant\lambda$。

对于以下定义，请注意，第三个条件是本文中层级路径所要求的额外性质。

定义 2.33。 对于 $\lambda\geqslant 1$，若一条（不一定连续的）路径 $\gamma\colon [0,\ \ell]\to\mathcal{X}$ 满足以下条件，则称其为 $(\lambda,\ \lambda)$-层级路径：

(1) γ 是一条 $(\lambda,\ \lambda)$-拟测地线。(2) 对任意 $U\in\mathfrak{S}$，路径 $\pi_U\circ\gamma$ 是一条未参数化的 $(\lambda,\ \lambda)$-拟测地线。(3) 对任意 $U\in\mathfrak{S}$，$\pi_U(\gamma)$ 包含在连接 $\pi_U\circ\gamma(0)$ 和 $\pi_U\circ\gamma(\ell)$ 的 CU中的某条测地线的 λ-邻域内。

下述命题等价于 Tao24 的备注 2.9], ，该备注未给出证明。为完整起见，我们在此给出证明。

命题 2.34。 给定一个相对层次双曲空间 $(\mathcal{X},\mathfrak{S})$，存在一个常数 $D>0$，使得对于任意两点 $x,y\in\mathcal{X}$，都存在一条 (D,D)-层级路径，按定义 *2.33* 的意义连接 x 和 y 。

证明。 固定 $x,\ y\in\mathcal{X}$。按照 [BHS19 定理 6.11], 的证明，对于给定的$\theta\geqslant 0$以及每个 $U\in\mathfrak{S}$，固定一条测地线 γ_U，从 $\pi_U(x)$ 到 $\pi_U(y)$，位于 CU 中。定义

$$M_\theta(x,y):=\{p\in\mathcal{X}\mid\forall\, U\in\mathfrak{S},\ d_U(\pi_U(p),\gamma_U)\leqslant\theta\}.$$

[BHS19 命题 6.15] 表明，$(M_\theta(x、\ y)、\ \mathfrak{S})$ 是一个层次双曲空间，其关系如 $(\mathcal{X}、\ \mathfrak{S})$ 所示，并且一致常数不依赖于 x 和 y。然而，对于 $(M_\theta(x、\ y)、\ \mathfrak{S})$，双曲空间就是测地线 $\gamma_U\subset CU$。此外，π'_U在 $(M_\theta(x、\ y)、\ \mathfrak{S})$ 中的投影等于 $\pi_U\circ r$，其中 $r\colon\ \mathcal{X}\to M_\theta(x、\ y)$ 是一个由 [BHS19 引理 6.12]给出的C-粗利普希茨收缩。因此，应用[BHS19 定理 4.4], 可知，存在一个 D_0 ，使得 x 和 y 由一条$(D_0、\ D_0)$-层级路径 $\alpha\colon\ [0、\ \ell]\to M_\theta(x、\ y)$ 连接，其意义如 [BHS19 定义 4.2]所述。

现在我们希望证明 α 满足定义 2.33 中的三个条件，即对于 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$。对于条件（1），$\alpha$是 $(D_0,\ D_0)$-层级路径，位于 $(M_\theta(x,\ y),\ \mathfrak{S})$中，因此它是 $(D_0,\ D_0)$-拟测地线，位于 $M_\theta(x,\ y)$中。由于 $M_\theta(x,\ y)$是 $\mathcal{X}$的子空间，并带有子空间度量，因此 α是 $\mathcal{X}$中的 $(D_0,\ D_0)$-拟测地线，满足第一个条件。

对于条件 (2)，我们要证明，对于任意的 $U\in\mathfrak{S}$, $\pi_U(\alpha)$，(D',D') 是某个 D' 的无参数化准测地线。不失一般性，设 $[0,\ell]$是 α的定义域。由于 α 是 $(M_\theta(x$中的一条 (D_0,D_0)-层级路径，$y),\mathfrak{S}),\pi'_U(\alpha)$ 是 $\gamma_U\subset CU$ 中的一条 (D_0,D_0)-无参数化准测地线。因此，根据无参数化准测地线的定义，存在严格递增函数 $g\colon [0,L]\to[0,\ell]$，满足 $L\in\mathbb{N}$，使得 $g(0)=0$, $g(L)=\ell$, $\pi'_U\circ\alpha\circ g$ 是 $\gamma_U\subset CU$ 中的一条(D_0,D_0)-拟测地线，并且对每个 $j\in[0,L-1]\cap\mathbb{Z}$,

$$d_U(\pi'_U\circ\alpha\circ g(j),\pi'_U\circ\alpha\circ g(j+1))\leqslant D_0.$$

现在我们证明，对于同一个函数 g，复合函数 $\pi_U \circ \alpha \circ g$ 是 CU 中的一条 $(D',\ D')$-拟测地线，并且对每个 $j \in [0,\ L-1] \cap \mathbb{Z}$,

$$d_U(\pi_U \circ \alpha \circ g(j), \pi_U \circ \alpha \circ g(j+1)) \leqslant D'.$$

取两点 $t_1,\ t_2 \in [0,\ L]$。由于 $\pi'_U \circ \alpha \circ g$是一条拟测地线，且 $\pi'_U = \pi_U \circ r$,

$$\frac{1}{D_0}|t_2 - t_1| - D_0 \leqslant d_U(\pi_U \circ r \circ \alpha \circ g(t_1), \pi_U \circ r \circ \alpha \circ g(t_2)) \leqslant D_0|t_2 - t_1| + D_0. \quad (1)$$

对于不等式的一侧，利用 (1) 以及 π_U 是 $(E,\ E)$-粗利普希茨映射这一事实,

$$\begin{aligned} d_U(\pi_U \circ \alpha \circ g(t_1), \pi_U \circ \alpha \circ g(t_2)) \leqslant & d_U(\pi_U \circ \alpha \circ g(t_1), \pi_U \circ r \circ \alpha \circ g(t_1)) \\ & + d_U(\pi_U \circ r \circ \alpha \circ g(t_1), \pi_U \circ r \circ \alpha \circ g(t_2)) \\ & + d_U(\pi_U \circ r \circ \alpha \circ g(t_2), \pi_U \circ \alpha \circ g(t_2)) \\ \leqslant & D_0|t_2 - t_1| + D_0 \\ & + E \cdot d_{\mathcal{X}}(\alpha \circ g(t_1), r \circ \alpha \circ g(t_1)) + E \\ & + E \cdot d_{\mathcal{X}}(r \circ \alpha \circ g(t_2), \alpha \circ g(t_2)) + E \\ \leqslant & D_0|t_2 - t_1| + D_0 + 2(EC + E). \end{aligned}$$

对于上面的最后一个不等式，我们用到了 $\alpha \subset M_\theta(x,\ y)$ 这一事实以及 r的定义。对于不等式的另一侧，

$$\begin{aligned} d_U(\pi_U \circ \alpha \circ g(t_1), \pi_U \circ \alpha \circ g(t_2)) \geqslant & d_U(\pi_U \circ r \circ \alpha \circ g(t_1), \pi_U \circ r \circ \alpha \circ g(t_2)) \\ & - d_U(\pi_U \circ \alpha \circ g(t_1), \pi_U \circ r \circ \alpha \circ g(t_1)) \\ & - d_U(\pi_U \circ r \circ \alpha \circ g(t_2), \pi_U \circ \alpha \circ g(t_2)) \\ \geqslant & \frac{1}{D_0}|t_2 - t_1| - D_0 \\ & - E \cdot d_{\mathcal{X}}(\alpha \circ g(t_1), r \circ \alpha \circ g(t_1)) - E \\ & - E \cdot d_{\mathcal{X}}(r \circ \alpha \circ g(t_2), \alpha \circ g(t_2)) - E \\ \geqslant & \frac{1}{D_0}|t_2 - t_1| - D_0 - 2(EC + E). \end{aligned}$$

因此，$\pi_U \circ \alpha \circ g$是 CU中的一条 $(D_0,\ D_0 + 2(EC + E))$-拟测地线。对于条件 (2) 的最后一个分量，取 $j \in [0,\ L-1] \cap \mathbb{Z}$。由于 $\pi_U \circ \alpha \circ g$ 是一条$(D_0,\ D_0 + 2(EC + E))$-拟测地线，我们有

$$\begin{aligned} d_U(\pi_U \circ \alpha \circ g(j), \pi_U \circ \alpha \circ g(j+1)) &\leqslant D_0|j + 1 - j| + D_0 + 2(EC + E) \\ &= 2(D_0 + EC + E). \end{aligned}$$

因此，对于 $D' = 2(D_0 + EC + E)$，该条件成立。

最后，对于条件 (3)，根据构造，α 完全位于 $M_\theta(x,\ y)$ 中。因此，根据 $M_\theta(x,\ y)$ 的定义，对于任意 $U \in \mathfrak{S}$，$\pi_U(\alpha)$ 都包含在 γ_U 的 $(\theta + 1)$-邻域内，而 γ_U 是连接 $\pi_U(x)$ 和 $\pi_U(y)$的测地线。因此，取常数 $D = \max\{\theta,\ D'\}$ 后，α 便是连接 x和 y 的 $(D,\ D)$-层级路径，符合定义 2.33 的要求。□

尽管本文不会用到，但在任意层次双曲空间中构造两点之间的层级路径这一结果本身也很有意义，见 [BHS19，定理 4.4]；该构造同样满足定义 2.33 中的条件 (3)。我们将其形式化为以下命题。

命题 2.35。 给定一个层次双曲空间 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$，存在常数 $D > 0$，使得对于任意两点 $x, y \in \mathcal{X}$，都存在一条 (D, D)-层级路径，按照定义 *2.33* 的意义连接 x 和 y 。

证明。根据 [BHS19，命题 4.12]，，存在一个 $K > 0$，使得 x 与 y 可由一条路径 γ 连接；按照 [BHS19] 的术语，该路径对所有 $U \in \mathfrak{S}$ 都是 $(K、K)$-良路径。在 [BHS19，命题 4.12]，的证明中，存在 θ 和 K，使得连接 x 与 y 的 $(K、K)$-良路径完全位于 $H_\theta(x、y)$ 中。该集合定义为所有满足下述条件的 $p \in \mathcal{X}$ 组成的集合：对于任意 $W \in \mathfrak{S}$，$\pi_W(p)$ 到连接 $\pi_W(x)$ 与 $\pi_W(y)$ 的 CW 中某条测地线的距离至多为 θ。给定 K，[BHS19，引理 4.18] 给出一个 $r > 0$，使得任何连接 x 与 y 的 K-单调、$(r、K)$-适当离散路径都是一条 $(\lambda、\lambda)$-层级路径，其中 λ 是 $r、K$ 和层级双曲空间常数的函数。[BHS19，引理 4.11] 通过取一条子路径 γ' 对 γ 作出修改，该子路径是一条 K-单调、$(r、K)$-适当离散路径。因此，γ' 是一条包含于 $H_\theta(x、y)$ 中的 $(\lambda、\lambda)$-层级路径。取一个大于上述所有常数的 D 后，γ' 是一条满足定义 2.33 中条件 (3) 的 $(D、D)$-层级路径。□

在本文余下部分中，我们使用“层级路径”一词时，采用定义 2.33 中的含义。鉴于命题 2.34，这不会造成任何一般性的损失。

2.4. **图乘积**。本文的主要结果是证明：无限 Morse 局部到整体群的图乘积也是 Morse 局部到整体群，因此本节将介绍图乘积的一些基本方面。不过需要指出的是，本文的大部分工作都围绕相对分层双曲群展开，而图乘积只是其中一个特定的子集。因此，下面对图乘积的介绍仅涵盖本文所使用的基本工具，而对图乘积整体的研究远远超出了本文的范围。

定义 2.36。设 Γ 是一个有限单纯图，其顶点集为 $V(\Gamma)$，边为 $E(\Gamma)$。对每个顶点 $v \in V(\Gamma)$，关联一个有限生成群 G_v。图乘积 G_Γ 定义如下

$$G := \left(\underset{v \in V(\Gamma)}{*} G_v \right) \Big/ \langle\langle \{[g,h] \mid g \in G_v,\ h \in G_u,\ \{v,u\} \in E(\Gamma)\} \rangle\rangle .$$

因此，图乘积是介于群的自由积与直积之间的一种构造。之所以可以在相对分层双曲群的框架下研究图乘积，是因为有如下结果。

定理 2.37 ([BR22，定理 4。22])。 设 G_Γ 是有限生成群的一个图乘积。那么，G_Γ 是一个相对分层双曲群。

[BR22，定理 4.22] 的证明是构造性的，因此我们依赖这一特定的层级结构，在第 5 节中进一步推导有关图乘积的结论。现在，我们将讨论构成图乘积层级结构的关键要素，正如 [BR22]中所做的那样。首先回顾图的一些基本定义。

定义 2.38。 设 Γ 是一个有限单纯图。若子图 $\Lambda \subseteq \Gamma$ 中的任意顶点 $v、u \in \Lambda$ 在 Λ 中相连，当且仅当它们在 Γ中相连，则称 $\Lambda \subseteq \Gamma$ 为诱导的。

定义 2.39。 设 Γ 是一个有限单纯图。设 $\Lambda \subseteq \Gamma$ 是一个诱导子图。 Λ的链接 记为 $\mathrm{lk}(\Lambda)$ ，它是 $\Gamma - \Lambda$ 的诱导子图，其顶点与 Γ中的 Λ的每个顶点都相连。 Λ的星 记为 $\mathrm{st}(\Lambda)$，它是由 $\Lambda \cup \mathrm{lk}(\Lambda)$给出的 Γ 的诱导子图。

有了这些基本定义，我们现在可以描述图乘积的相对分层双曲结构中的域，以及嵌套关系和正交关系。对于下一个定义，需要注意的是，每个诱导子图 $\Lambda \subseteq \Gamma$ 都会诱导出一个子群 $G_\Lambda \leqslant G_\Gamma$，该子群同样是一个图乘积。

记号 2.40。 设 G_Γ 是一个图乘积， $\Lambda \subseteq \Gamma$ 是一个诱导子图。对于任意 $g \in G_\Gamma$，令 $g\Lambda$ 表示陪集 gG_Λ。

定义 2.41。 设 G_Γ 是一个图乘积， $\Lambda \subseteq \Gamma$ 是一个诱导子图。对于任意 $g,\ h \in G_\Gamma$，若 $g^{-1}h \in G_{\mathrm{st}(\Lambda)}$，则陪集 $g\Lambda$ 和 $h\Lambda$ 是平行的。平行陪集的等价类称为平行类，记作 $[g\Lambda]$。

定理 2.42 ([BR22，定理 4。22])。 设 G_Γ 为一个图乘积。则 G_Γ 具有相对分层双曲结构，其中

- 域： 域是平行类，因此指标集为 $\mathfrak{S} = \{[g\Lambda] \mid g \in G_\Gamma,\ \Lambda \subseteq \Gamma\}$；
- 嵌套： $[g\Lambda] \sqsubseteq [h\Omega]$ 当且仅当 $\Lambda \subseteq \Omega$并且存在一个群元素$k \in G_\Gamma$ 使得 $[g\Lambda] = [k\Lambda]$ 和 $[h\Omega] = [k\Omega]$；
- 以及正交： $[g\Lambda] \perp [h\Omega]$ 当且仅当 $\Lambda \subseteq \mathit{lk}(\Omega)$ 并且存在一个群元素 $k \in G_\Gamma$ 使得 $[g\Lambda] = [k\Lambda]$ 和 $[h\Omega] = [k\Omega]$。

关于图乘积及其相对分层双曲结构的背景介绍虽然简短，但足以使本文第 5 节中的证明能够自洽地完成。

3. Constructing a Maximized Relative HHS Structure

本节的目标是将 ABD21] 的构造推广到相对分层双曲空间。具体而言，我们将证明，若一个具有干净容器的相对层次双曲空间满足有界域二分性，那么它就具有一种相对 HHS 结构，其中具有相对无界乘积；这相当于相对 HHS 中 ABD21] 的无界乘积；参见定理 3.14。由于所有相对分层双曲群都满足有界域二分性，这一结果为任何具有干净容器的相对 HHG 的凯莱图提供了一种具有相对无界乘积的相对 HHS 结构。该结构本身就是一种有用的工具，并且将在第 5 节中证明无穷 Morse 局部到整体群的图乘积仍是 Morse 局部到整体群时发挥核心作用。

3.1. 活跃子路径。

关于层级路径，我们将利用的一项性质是：对于相关域，它们具有“活跃子路径”。也就是说，如果层级路径的端点对 CU 的投影足够大，那么该层级路径就有一条“较长”的子路径，包含在乘积区域$\mathbf{P}_U$的一致邻域内。该结论最初发表于 [BHS19, 命题 5.17], ，但其中存在错误。该结论的修正版见 [RST23, 命题 4.24]。修正版的略微修改版本

也见于 [CRHK24, 命题 20.1]。此外, [CRHK24] 讨论了文献中使用该结论错误版本的情形, 以及如何纠正这些情形。

下面的命题将层级路径的活跃子路径性质推广到相对层次双曲空间的情形。论证与[CRHK24, 命题 20.1], 相同, 但这里仍将其完整详细地重述, 以说明该构造满足第三条要点（ [CRHK24, 命题 20.1]中并未直接陈述这一点）, 并证明论证的任何环节都不需要 $\sqsubset$-极小测地空间的双曲性。我们也借此机会补充论证细节。第三条要点将在本文后文中发挥重要作用, 因此我们将其明确陈述。

命题 3.1。 设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 为相对层次双曲空间。对于所有 $\lambda \geqslant 1$, 存在 ν_λ 使得以下结论成立。设 $x, y \in \mathcal{X}$, 设 γ 为一条从 x 到 y的 (λ, λ)-层级路径, 并设 $U \in \mathfrak{S}$ 对点 x 和 y $200\lambda E$-相关。则 γ 有一个子路径 β, 使得

- $\beta \subset \mathcal{N}_{\nu_\lambda}(\mathbf{P}_U)$ 在与 β 不相交的 γ 的任何子路径上都是 ν_λ-粗常值的, 并且• 直径$_U(\pi_U(\beta)) \geqslant d_U(\pi_U(x), \pi_U(y)) - 24(\lambda E + E)$。

证明。 不失一般性, 设 $\gamma\colon \{0, \dots, n\} \to \mathcal{X}$ 是一条 2λ-离散路径, 并令 $x_i = \gamma(i)$ （ $0 \leqslant i \leqslant n$）, 于是对所有 i, 都有 $d_{\mathcal{X}}(x_i, x_{i+1}) \leqslant 2\lambda$。

由于投影映射 π_U 是 (E, E)-粗利普希茨的, 对所有 i, 我们有

$$d_U(\pi_U(x_i), \pi_U(x_{i+1})) \leqslant E \cdot d_{\mathcal{X}}(x_i, x_{i+1}) + E \leqslant 2\lambda E + E.$$

由于 U 对于 x 和 y是 $200\lambda E$-相关的, 存在指标 i, i', 使得 $0 < i < i' < n$, 并且

- i 在满足 $d_U(\pi_U(x_0), \pi_U(x_i)) > 10(\lambda E + E)$ 的条件下取最小值; • i' 在满足 $d_U(\pi_U(x_{i'}), \pi_U(x_n)) > 10(\lambda E + E)$. 的条件下取最大值

现在我们将估计 $d_{\mathcal{X}}(x_i、\mathbf{P}_U)$ 和 $d_{\mathcal{X}}(x_{i'}、\mathbf{P}_U)$, 从而得到 $\beta = \gamma|_{[i,\ i']}$。这些距离将利用距离公式来估计, 该公式表明

$$d_{\mathcal{X}}(x_i, \mathbf{P}_U) \asymp_{k,c} \sum_{V \in \mathfrak{S}} \{\{d_V(\pi_V(x_i), \pi_V(\mathbf{P}_U))\}\}_{s_0+\mu}, \tag{2}$$

其中, s_0是 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 的距离公式阈值, μ是命题 2.31 中的门映射常数。如果 $V \sqsubseteq U$ 或 $U \perp V$, 那么根据命题 2.31,

$$d_V(\pi_V(x_i), \pi_V(\mathbf{P}_U)) \leqslant d_V(\pi_V(x_i), \pi_V(\mathfrak{g}_{\mathbf{P}_U}(x_i))) \leqslant \mu.$$

(2) 中的求和项仅当域 $V \in \mathfrak{S}$ 满足 $V \sqsupsetneq U$或 $V \pitchfork U$时才非零。令 C为命题 2.24 中针对 U的常数。如果 $U \sqsubsetneq V$或 $U \pitchfork V$, 那么$\pi_V(\mathbf{P}_U) \subseteq \mathcal{N}_C(\rho_V^U)$。因此考虑以下两种情形。

情形 1: 假设 $U \sqsubsetneq V$。根据构造,

$$d_U(\pi_U(x_0), \pi_U(x_i)) > 10(\lambda E + E) > E.$$

设 α 是 CV 中从 $\pi_V(x_0)$ 到 $\pi_V(x_i)$的一条测地线。由 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 的有界测地线像公理, 存在一点 $a \in \alpha$, 使得 $d_V(a,\ \rho_V^U) \leqslant E$。令 $M\colon\ [1,\ \infty) \times [0,\ \infty) \to [0,\ \infty)$ 为 CV 中 α 的莫尔斯控制函数。因为 γ 是一条 $(\lambda,\ \lambda)$-层级路径, $\pi_V(\gamma|_{[0,\ i]})$ 是一条端点位于 α上的非参数化 $(\lambda,\ \lambda)$-拟测地线。特别地, γ 的一个子路径（经过重新参数化）是一条端点位于 α上的 $(\lambda,\ \lambda)$-拟测地线, 因此存在一个整数 $j \in [0,\ i]$, 使得

$d_V(\pi_V(x_j),\ a) \leqslant M(\lambda,\ \lambda)$，这进一步意味着 $d_V(\pi_V(x_j),\ \rho_V^U) \leqslant E + M(\lambda,\ \lambda)$。类似地，存在 $j' \in [i',\ n]$，使得 $d_V(\pi_V(x_{j'}),\ \rho_V^U) \leqslant E + M(\lambda,\ \lambda)$。根据定义，$\mathrm{diam}(\rho_V^U) \leqslant E$，因此 $d_V(\pi_V(x_j),\ \pi_V(x_{j'})) \leqslant 3E + 2M(\lambda,\ \lambda)$。

接下来，由于 γ 是一个 $(\lambda,\ \lambda)$-层级路径，$\pi_V(\gamma|_{[j,\ j']})$ 包含在连接 $\pi_V(x_j)$ 与 $\pi_V(x_{j'}$ 的测地线 η 的 λ-邻域中）。特别地，存在一点 $q \in \eta$ 使得 $d_V(\pi_V(x_i),\ q) \leqslant \lambda$。因此

$$\begin{aligned} d_V(\pi_V(x_i), \rho_V^U) &\leqslant d_V(\pi_V(x_j), \pi_V(x_i)) + d_V(\pi_V(x_j), \rho_V^U) \\ &\leqslant d_V(\pi_V(x_j), \pi_V(x_i)) + E + M(\lambda, \lambda) \\ &\leqslant d_V(\pi_V(x_j), q) + d_V(\pi_V(x_i), q) + E + M(\lambda, \lambda) \\ &\leqslant d_V(\pi_V(x_j), \pi_V(x_{j'})) + \lambda + E + M(\lambda, \lambda) \\ &\leqslant 3E + 2M(\lambda, \lambda) + \lambda + E + M(\lambda, \lambda) \\ &= 4E + \lambda + 3M(\lambda, \lambda). \end{aligned}$$

通过完全相同的论证，$d_V(x_{i'},\ \rho_V^U) \leqslant 4E + \lambda + 3M(\lambda,\ \lambda)$。令 $K = 4E + \lambda + 3M(\lambda,\ \lambda)$，我们得到 $d_V(\rho_V^U,\ \pi_V(x_i)) \leqslant K$ 以及 $d_V(\rho_V^U,\ \pi_V(x_{i'})) \leqslant K$，如所求。

情形 2：假设 $U \pitchfork V$。根据 $d_V(\pi_V(x_0),\ \pi_V(x_n))$是否大于 $3E$，分为两种子情形。

情形 2a：假设 $d_V(\pi_V(x_0),\ \pi_V(x_n)) > 3E$。根据一致性公理，$d_V(\pi_V(x_0),\ \rho_V^U) \leqslant E$或 $d_U(\pi_U(x_0),\ \rho_U^V) \leqslant E$。考虑 $d_V(\pi_V(x_0),\ \rho_V^U) \leqslant E$ 的情形。此外，一致性意味着 $d_V(\pi_V(x_n),\ \rho_V^U) \leqslant E$或 $d_U(\pi_U(x_n),\ \rho_U^V) \leqslant E$。然而，$d_V(\pi_V(x_n),\ \rho_V^U) \leqslant E$ 不可能成立，因为 $\mathrm{diam}(\rho_V^U) \leqslant E$，因此三角不等式将推出

$$d_V(\pi_V(x_0), \pi_V(x_n)) \leqslant d_V(\pi_V(x_0), \rho_V^U) + d_V(\pi_V(x_n), \rho_V^U) + \mathrm{diam}(\rho_V^U) \leqslant 3E,$$

这与初始假设矛盾。因此，$d_V(\pi_V(x_0),\ \rho_V^U) \leqslant E$ 且$d_U(\pi_U(x_n),\ \rho_U^V) \leqslant E$。由于 i 是满足 $d_U(\pi_U(x_0),\ \pi_U(x_i)) > 10(\lambda E + E)$ 的极小元素，我们有

$$d_U(\pi_U(x_0), \pi_U(x_{i-1})) \leqslant 10(\lambda E + E),$$

因此，根据三角不等式

$$\begin{aligned} d_U(\pi_U(x_0), \pi_U(x_i)) &\leqslant d_U(\pi_U(x_0), \pi_U(x_{i-1})) + d_U(\pi(x_i), \pi(x_{i-1})) \\ &\leqslant 10(\lambda E + E) + d_U(\pi(x_i), \pi(x_{i-1})) \\ &\leqslant 10(\lambda E + E) + E \cdot d_{\mathcal{X}}(x_i, x_{i-1}) + E \\ &\leqslant 10(\lambda E + E) + E \cdot 2\lambda + E \\ &= 12\lambda E + 11E \\ &\leqslant 12(\lambda E + E). \end{aligned} \tag{3}$$

同样，$d_U(\pi_U(x_{i'}),\ \pi_U(x_n)) \leqslant 12(\lambda E + E)$。此外

$$d_U(\pi_U(x_0), \rho_U^V) + \mathrm{diam}(\rho_U^V) + d_U(\pi_U(x_n), \rho_U^V) \geqslant d_U(\pi_U(x_0), \pi_U(x_n)) > 200\lambda E,$$

这意味着

$$d_U(\pi_U(x_0), \rho_U^V) > 200\lambda E - E - E = 200\lambda E - 2E,$$

so

$$d_U(\pi_U(x_i), \rho_U^V) + d_U(\pi_U(x_0), \pi_U(x_i)) \geqslant d_U(\pi_U(x_0), \rho_U^V) > 200\lambda E - 2E,$$

这进一步意味着

$$d_U(\pi_U(x_i), \rho_U^V) > 200\lambda E - 2E - 12(\lambda E + E) = 188\lambda E - 14E > E.$$

因此，根据一致性， $d_V(\pi_V(x_i), \rho_V^U) \leqslant E$。此外，

$$d_U(\pi_U(x_{i'}), \pi_U(x_n)) > 10(\lambda E + E) \qquad \text{and} \qquad d_U(\pi_U(x_n), \rho_U^V) \leqslant E$$

共同意味着

$$d_U(\pi_U(x_{i'}), \rho_U^V) > 10(\lambda E + E) - E > E.$$

因此，一致性意味着 $d_V(\pi_V(x_{i'}), \rho_V^U) \leqslant E$。如果一致性最初给出的是 $d_U(\pi_U(x_0), \rho_U^V) \leqslant E$，那么对称论证将意味着 $d_V(\pi_V(x_i), \rho_V^U) \leqslant E$ 以及 $d_V(\pi_V(x_{i'}), \rho_V^U) \leqslant E$。

情形 2b：设 $U \pitchfork V$，并假设 $d_V(\pi_V(x_0), \pi_V(x_n)) \leqslant 3E$。注意，根据上面的论证，$d_U(\pi_U(x_0), \pi_U(x_i)) \leqslant 12(\lambda E + E)$ 且 $d_U(\pi_U(x_{i'}), \pi_U(x_n)) \leqslant 12(\lambda E + E)$。那么由于 $d_U(\pi_U(x_0), \pi_U(x_n)) > 200\lambda E$，

$$d_U(\pi_U(x_i), \pi_U(x_{i'})) > 200\lambda E - 24(\lambda E + E).$$

此外，采用与情形 2a 中类似的论证，若 $d_U(\pi_U(x_i), \rho_U^V) \leqslant E$ 且 $d_U(\pi_U(x_{i'}), \rho_U^V) \leqslant E$，则

$$d_U(\pi_U(x_i), \pi_U(x_{i'})) \leqslant d_U(\pi_U(x_i), \rho_U^V) + d_U(\pi_U(x_{i'}), \rho_U^V) + \operatorname{diam}(\rho_U^V) \leqslant 3E,$$

这与 $d_U(\pi_U(x_i), \pi_U(x_{i'})) > 200\lambda E - 24(\lambda E + E)$ 矛盾。因此， $\pi_U(x_i)$, $\pi_U(x_{i'})$ 中至少有一个与 ρ_U^V 的距离为 $> E$。不失一般性，设 $d_U(\pi_U(x_i), \rho_U^V) > E$。那么一致性意味着 $d_V(\pi_V(x_i), \rho_V^U) \leqslant E$。由于 γ 是一条 (λ, λ)-层级路径， $\pi_V(\gamma)$ 位于连接 $\pi_V(x_0)$ 与 $\pi_V(x_n)$ 的测地线 ζ 的 λ-邻域内。因此，存在点 $z, w \in \zeta$，使得 $d_V(\pi_V(x_i), z) \leqslant \lambda$ 且 $d_V(\pi_V(x_{i'}), w) \leqslant \lambda$。利用三角不等式，

$$\begin{aligned}
d_V(\pi_V(x_{i'}), \rho_V^U) &\leqslant d_V(\pi_V(x_i), \pi_V(x_{i'})) + d_V(\pi_V(x_i), \rho_V^U) \\
&\leqslant d_V(\pi_V(x_i), \pi_V(x_{i'})) + E \\
&\leqslant d_V(\pi_V(x_i), z) + d_V(z, \pi_V(x_{i'})) + E \\
&\leqslant \lambda + d_V(z, \pi_V(x_{i'})) + E \\
&\leqslant \lambda + d_V(z, w) + d_V(w, \pi_V(x_{i'})) + E \\
&\leqslant \lambda + d_V(\pi_V(x_0), \pi_V(x_n)) + \lambda + E \\
&\leqslant 3E + 2\lambda + E \\
&= 4E + 2\lambda.
\end{aligned}$$

结合情形 1 和 2 的结果，存在一个常数 $K' = K'(\lambda, E)$，使得如果 $V \pitchfork U$ 或 $V \supsetneq U$，

$$d_V(\pi_V(x_i), \rho_V^U), d_V(\pi_V(x_{i'}), \rho_V^U) \leqslant K'. \tag{4}$$

现在令 $\nu_1 = \kappa^\times(K') + C$，其中 $\kappa^\times$ 是一个依赖于相对 HHS 常数的函数，使得 $\mathbf{P}_U$、$\mathbf{E}_U$ 和 $\mathbf{F}_U$ 都是 $\kappa^\times$-分层拟凸的。因此，(4) 和 $\pi_V(\mathbf{P}_U) \subseteq \mathcal{N}_C(\rho_V^U)$ 一起保证了 x_i, $x_{i'} \in \mathcal{N}_{\nu_1}(\mathbf{P}_U)$。$\mathbf{P}_U$ 的分层拟凸性，加上 γ 是一条 (λ, λ)-层级路径这一事实，意味着可以增大 ν_1，增大量仅依赖于 λ 和相对 HHS 常数，从而得到 ν_λ，使得对 $i \leqslant j \leqslant i'$ 有 $x_j \in \mathcal{N}_{\nu_\lambda}(\mathbf{P}_U)$。

令 $\beta = \gamma|_{i,\dots,i'}$，则存在一个 ν_λ，使得 $\beta \subset \mathcal{N}_{\nu_\lambda}(\mathbf{P}_U)$。这就完成了第一个要点的证明。对于第二个要点，注意对于 $j < i$ 和 $j' > i'$，

$$d_U(\pi_U(x_0), \pi_U(x_j)) \leqslant 10(\lambda E + E) \quad \text{and} \quad d_U(\pi_U(x_{j'}), \pi_U(x_n)) \leqslant 10(\lambda E + E),$$

因此（必要时增大 ν_λ），π_U 在与 β不相交的 γ 的任意子路径上都是 ν_λ-粗常值的。对于最后一个要点，根据 (3)，

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}_U(\pi_U(\beta)) + 24(\lambda E + E) &= 12(\lambda E + E) + \operatorname{diam}_U(\pi_U(\beta)) + 12(\lambda E + E) \\
&\geqslant d_U(\pi_U(x), \pi_U(x_i)) + \operatorname{diam}_U(\pi_U(\beta)) + d_U(\pi_U(x_i'), \pi_U(y)) \\
&\geqslant d_U(\pi_U(x), \pi_U(x_i)) + d_U(\pi_U(x_i), \pi_U(x_i')) + d_U(\pi_U(x_i'), \pi_U(y)) \\
&\geqslant d_U(\pi_U(x), \pi_U(y)), \\
\implies \operatorname{diam}_U(\pi_U(\beta)) &\geqslant d_U(\pi_U(x), \pi_U(y)) - 24(\lambda E + E),
\end{aligned}$$

证明得证。 □

3.2. **最大化**。我们首先修改 [ABD21 定理 3.7] 中的论证，使其适用于相对层次双曲空间情形。在对相对层次双曲空间 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 施加一些温和条件后，我们将构造一个域子集 $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{S}$，使得这一对 $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ 构成相对层次双曲空间，并具有如下额外性质：粗略地说，所有乘积区域的因子都是无界的。这意味着证明将验证新的这一对 $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ 满足全部十二条相对层次双曲空间公理。

初始的相对层次双曲空间将满足一些温和条件，即具有干净容器和有界域二分性。值得注意的是，每个相对 HHG 都会自动具有有界域二分性，这也是它被视为温和条件的原因。我们稍后将证明图乘积具有干净容器。

定义 3.2. 设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个相对分层双曲空间。对于每个 $W \in \mathfrak{S}$ 和满足 $\mathfrak{S}_W \cap \mathfrak{S}_U^\perp \neq \varnothing$ 的 $U \in \mathfrak{S}_W$，容器公理给出一个域 $Q \subsetneq W$，使得当 $V \in \mathfrak{S}_W \cap \mathfrak{S}_U^\perp$时，$V \sqsubseteq Q$。若对于每个 U，容器均满足 $Q \perp U$，则 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 具有干净容器。

请注意，[ABD21，定理 3.7] 中并未出现干净容器这一假设。然而，该定理依赖于附录中的 [ABD21，定理 A.1]，其证明有误。完整讨论见 [ABR25]。

定义 3.3. 若存在 $M > 0$，使得任何满足 $\operatorname{diam}(CU) > M$ 的 $U \in \mathfrak{S}$ 都满足 $\operatorname{diam}(CU) =8$，则称相对层次双曲空间 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 具有 M-有界域二分性。若 M 的取值并不重要，则称 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 具有有界域二分性。

我们还必须定义无界乘积的概念，这是所构造的结构所具有的额外性质。

定义 3.4. 若相对 HHS $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 具有有界域二分性，且满足如下性质：如果 $U \in \mathfrak{S} - \{S\}$ 的$\mathbf{F}_U$ 无界，那么$\mathbf{E}_U$ 也无界，则称其具有无界乘积。若相对 HHS 具有有界域二分性，且满足如下性质：如果 $U \in \mathfrak{S} - \{S\}$的$\mathbf{F}_U$ 无界且不是 $\sqsubseteq$-极小的，那么$\mathbf{E}_U$ 也无界，则称其具有相对无界乘积。若每个 $\sqsubseteq$-极小的 $U \in \mathfrak{S}$ 只要$\mathbf{F}_U$无界，其$\mathbf{E}_U$ 也无界，则称相对 HHS 具有无界极小乘积。

前面的定义包含三个不同但彼此相关的概念。定理 3.14 将构造一个具有相对无界乘积的相对 HHS 结构。我们将在推论 5.3 中证明，没有孤立顶点的无限群的图乘积具有无界极小乘积。相对无界乘积与无界极小乘积共同蕴含真正的无界乘积，这是定理 4.3 中的必要步骤；该定理证明了新结构的顶层空间是一个莫尔斯可检测空间。

我们将进行的构造会生成一种层级结构，其中每个既非 $\sqsubseteq$-极大、也非 $\sqsubseteq$-极小的域都具有一个因子无界的乘积区域。我们首先找出满足这一性质的域的子集，并证明它对嵌套封闭。

定义 3.5。 设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个相对层次双曲空间。设 $M > 0$，并定义 $\mathfrak{S}^M \subset \mathfrak{S}$ 为满足下列条件的域 $U \in \mathfrak{S}$ 的集合：存在 $V \in \mathfrak{S}$ 和 $W \in \mathfrak{S}_V^{\perp}$，使得：

- $U \sqsubseteq V$• diam
$(CV) > M$• diam
$(CW) > M$。

定义 3.6。 若对于任意 $U \in \mathfrak{U}$ 和 $V \sqsubseteq U$，都有 $V \in \mathfrak{U}$，则称集合 $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{S}$ 对嵌套封闭。

引理 3.7. 对于任意 $M > 0$，集合 $\mathfrak{S}^M$ 对嵌套封闭。

证明。 [ABD21 中引理 3.1] 的论证可逐字照用。 □

下一个命题表明，给定一个相对层次双曲空间，适当域上的嵌套偏元组本身也可以赋予相对层次双曲空间的结构。该命题是验证定理 3.14 中大链接公理 (10) 的关键环节。此命题基于 [BHS19 中的命题 5.11], ，该命题证明了对任意层次双曲空间，此结果均成立。

命题 3.8. 设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个 E-相对层次双曲空间。存在一个常数 F，其仅取决于 E，使得对于任意 $U \in \mathfrak{S}$ 以及赋有子空间度量的切片 $\mathbf{F}_U \times \{\vec{e}\} \subset \mathcal{X}$，空间 $(\mathbf{F}_U, \mathfrak{S}_U)$ 是一个 F-相对层次双曲空间。

证明。 证明可逐字照用 [BHS19 中命题 5.11] 的论证。 □

以下引理和命题为引理 3.13 做铺垫，而引理 3.13 又用于证明定理 3.14 中的有界测地线像公理 (9)。引理 3.9、引理 3.11 和命题 3.12 分别是 [BHS19, Lemma 2.1], [BHS19, Lemma 2.14], 以及 [BHS17, Proposition 2.4], 的略微推广；这些结果是在非相对情形下证明的。

引理 3.9. 设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个相对层次双曲空间，且 $U_1, U_2, ..., U_k \in \mathfrak{S}$ 两两正交。那么 $k \leqslant E$。

证明。 [BHS19, Lemma 2.1] 中的论证可以原样照搬。 □

定义 3.10. 设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个相对层次双曲空间。层级 ℓ_U 归纳定义如下。若 U 是 $\sqsubseteq$-极小的，则 $\ell_U = 1$。对于任意非 $\sqsubseteq$-极小元素 $V, \in \mathfrak{S}$,$\ell_V = k+1$ 若 k 是满足存在某个 $W \sqsubsetneq V$ 且 $\ell_W = k$ 的最大整数。此外，定义 $\mathfrak{T}_U^{\ell}$ 为满足 $\ell_U - \ell_V = \ell$ 的 $V \in \mathfrak{S}_U$ 集合。

引理 3.11. 给定一个相对层次双曲空间 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$，设 χ 为 $\mathfrak{T}_U^\ell$ 的两两正交元素集合的最大基数。那么存在一个对 $\mathfrak{T}_U^\ell$ 的相关元素集合的 χ-着色，使得非横截元素具有不同的颜色。

证明。 论证与 [BHS19, 引理 2.14]完全相同，因为整个过程中并未用到 $\sqsubset$-极小元素的双曲性。□

命题 3.12。 固定一个相对层次双曲空间 $(\mathcal{X}、\ \mathfrak{S})$，并设 $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{S}$ 在$\widehat{}$嵌套下封闭。空间 $(\mathcal{X}_\mathfrak{U}、\ \mathfrak{S} - \mathfrak{U})$ 是一个相对层次双曲空间，其关联的 $C(*)$、 π_*、ρ_*^*、 $\sqsubseteq$、 $\perp$、 $\pitchfork$ 与原结构相同。

证明。 证明与 [BHS17, 命题 2.4], 完全相同，只需注意到[BHS17, 引理 2.8（唯一性）] 需要活跃子路径（命题 3.1），以及层级路径定义（定义 2.33）中的条件 (3)；我们将在命题 2.34 中证明相对情形下这一点。□

与引理 3.11 和命题 3.12 一样，引理 3.13 是 ABD21 引理 3. 的一个修改版本，适用于相对层次双曲空间的情形。论证相同，但为完整起见，并展示其不要求 $\sqsubseteq$-最小测地空间是双曲的，下面将完整给出论证。

引理 3.13. 设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是相对层次双曲空间，并考虑一个对嵌套封闭的集合 $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$。设 $\lambda \geqslant 1$，且令 ν_λ 为命题 *3.1* 中的相关常数。对于任意 $x, y \in \mathcal{X}$，令 γ 为 (λ, λ) 中连接 x 与$\hat{}y$ 的一条层级路径。将 $\gamma \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{X}_\mathfrak{T}$ 纳入后得到的路径是一条非参数化拟测地线。此外，若对于每个属于 x 和 y 的 $200\lambda E$-相关域 $W \in \mathfrak{T}$，以及每个 $e \in \mathbf{E}_W$，我们通过移除 γ 中除首个和末个位于$\mathbf{F}_W \times \{e\}$ 的 ν_λ-邻域内的顶点以外的所有顶点来修改 γ，那么新路径$\hat{}\gamma$ 就是 $(\mathcal{X}_\mathfrak{T}, \mathfrak{S} - \mathfrak{T})$ 的一条层级$\hat{}$路径。

证明。 证明采用按复杂度归纳。固定 $x, y \in \mathcal{X}$ 以及一条连接它们的 (λ, λ)-层级路径。考虑所有对 x 和 y 而言 $200\lambda E$-相关的 $\sqsubseteq$-极小元素 $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{T}$。由命题 3.1 可知，对每个 $U \in \mathfrak{U}$，都存在一条子路径 $\beta_U \subset \gamma$，它包含于 $\mathbf{P}_U$ 的 ν_λ-邻域中。根据 $\mathbf{P}_U$ 的定义， β_U 经过一组切片$\mathbf{F}_U \times \{\vec{e}\}$的 ν_λ-邻域。接下来，考虑 $\mathfrak{T}_S^{\ell_S - 1} \subset \mathfrak{S}$。由引理 3.9 可知， $\mathfrak{T}_S^{\ell_S - 1}$ 中两两正交元素集合的最大基数为 E。由引理 3.11 可知，存在一种 E-着色，将 $\mathfrak{T}_S^{\ell_S - 1}$ 中的相关元素着色，使得非横截元素具有不同的颜色。由于 $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{T}_S^{\ell_S - 1}$ 以及 $\mathfrak{U}$ 中的每个元素都与 $200\lambda E$-相关，因此存在一种 E-着色对 $\mathfrak{U}$ 进行着色，使得同一颜色的所有域两两横截。

从 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 出发，我们按颜色逐一处理。对于第一种颜色 c_1，该颜色的所有域按定义都是 $\sqsubseteq$-极小的，因此，颜色为 c_1的域集合对嵌套封闭。通过将这些域锥化来创建分解空间。根据命题 3.12，这个分解空间是一个相对层次双曲空间；在该空间中，对于 x 和 y 而言， $\sqsubseteq$-极小的 $200\lambda E$-相关域恰好是原来的那些域，但不包括迄今为止已锥化的域。由于这条路径仍然单调地穿过乘积区域中 $200\lambda E$-相关域的某些切片 $\mathbf{F}_U \times \{\vec{e}\}$ 的 ν_λ 邻域，因此它在这个新的分解空间中是一条无参数化准测地线。因此，路径 $\hat{}\gamma$ 是一条准测地线，因而也是新分解空间中的一条 (C, C)-层级路径，其中 C 仅取决于 λ、 $\mathfrak{T}$ 以及

来自 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 的层级常数。一旦 $\mathfrak{U}$ 的颜色处理完毕，就沿嵌套格向上移动一步并重复。由于 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 的复杂度和着色数都由 E 控制，这一过程至多经过 E^2 步便会终止。最后，将 $\mathfrak{T}$ 中与 x 和 y 无关的任何 $\hat{}$ 域锥化，从而得到空间 $(\mathcal{X}_{\mathfrak{T}},\ \mathfrak{S}-\mathfrak{T})$。经过最后这一步，$\hat{}\gamma$ 仍是一条一致的优质层级路径，因为它仍然是一条准测地线。□

现在我们已经准备好构造新的相对 HHS 结构。证明遵循[ABD21, 定理 3.7], 但我们借此机会补充证明中遗漏的一些细节，并纠正其中的一些小错误。

定理 3.14。 每个具有有界域二分性和干净容器的相对分层双曲空间，都具有一个带有相对无界乘积的相对分层双曲结构。

证明。 设 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 为一个具有 M-有界域二分性的 E-相对分层双曲空间。不妨设 $E \geqslant M$。因此， $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 中任何有限直径的相关测地空间都是 E-双曲的。令 $\mathfrak{T}$ 表示 $\sqsubseteq$- 极大元素 S 以及 $\sqsubseteq$- 极小元素，其中 $\mathfrak{S}$ 具有无限直径的测地空间，并令 $\mathfrak{S}$ 的子集由所有同时满足$\mathbf{F}_U$ 和$\mathbf{E}_U$ 无界的 $U \in \mathfrak{S}$ 组成。为方便起见，定义

$$\mathrm{Unb} = \{U \in \mathfrak{T} \mid \text{both } \mathbf{F}_U \text{ and } \mathbf{E}_U \text{ are unbounded}\},$$

$$\mathsf{Min} = \{U \in \mathfrak{T} \mid U \text{ 是 } \sqsubseteq\text{-极小的，} \mathbf{E}_U \text{ 有界，而} \mathbf{F}_U \text{ 无界}\}.$$

So,

$$\mathfrak{T} = \{S\} \sqcup \mathrm{Unb} \sqcup \mathrm{Min}.$$

我们从取 $\mathfrak{T}$ 作为指标集开始，在 $\mathcal{X}$上定义新的相对分层双曲结构。对每个 $U \in \mathfrak{T} - \{S\}$ ，我们令其关联的测地空间 $\mathcal{T}_U$ 为 CU。注意，对于非$\sqsubseteq$-极小的 $U \in \mathfrak{T}$，空间 $\mathcal{T}_U$ 将是双曲的，因为 CU 是双曲的。

对于顶层域 S，我们如下得到一个双曲空间 $\mathcal{T}_S$ 。根据引理 3.7， $\mathfrak{S}^M$ 对嵌套封闭，因此

$$\mathfrak{S}^{M+} = \mathfrak{S}^M \cup \{U \in \mathfrak{S} \mid U \text{ is } \sqsubseteq\text{-minimal with unbounded } \mathbf{F}_U\}$$

$\hat{}$也对嵌套封闭。根据 [BHS17，命题 2.4]， $\mathcal{X}_{\mathfrak{S}^{M+}}$ 是一个指标集为 $\mathfrak{S}-\mathfrak{S}^{M+}$的层级双曲空间，因为 $\mathfrak{S}^{M+}$ 对嵌套封闭，并且包含所有非 E-双曲的 $\sqsubseteq$-极小域。任取正交的$U,\ V \in \mathfrak{S} - \mathfrak{S}^{M+}$。若 $\mathsf{diam}(CU) > M$且 $\mathsf{diam}(CV) > M$，则根据定义$U,\ V \in \mathfrak{S}^{M+}$，这就产生矛盾。因此， $\widehat{\mathcal{X}}_{\mathfrak{S}^{M+}}$ 具有这样的性质：任意一对正交域中，不会同时有两个域的测地空间直径大于 M。于是，根据 [BHS17，推论 2.16], ，它是双曲的，其双曲常数仅依赖于$\hat{}$、 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$和 M。我们令 $\mathcal{T}_S = \mathcal{X}_{\mathfrak{S}^{M+}}$。

为避免混淆，我们用记号 d_S 表示 $\mathcal{T}_S$ 中的距离，用记号d_{CS} 表示 CS中的距离。此外， π_{CS} 表示从 $\mathcal{X}$ 到 CS的投影，而 π_S 表示从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{T}_S$的投影。

当 $U \neq S$ 时，投影的定义与原相对分层双曲空间中的定义相同。我们将投影 π_S 取为因子映射 $\mathcal{X} \to \mathcal{T}_S$。如果 $U \in \mathfrak{T}$ 且 $U \neq S$，则相对投影的定义如 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 所示。对于剩余情况，相对投影 ρ_S^V 定义为 $\mathbf{F}_V$ 在

因子映射 $\mathcal{X} \to \mathcal{T}_S$ 下的像。

(1) 投影：唯一需要检验的情形是顶层域 S。由于 π_S是因子映射，对于所有 $x \in \mathcal{X}$、$\pi_S(x) \neq \varnothing$ 以及 $\mathsf{diam}(\pi_S(x)) = 0$。此外，$\pi_S$ 是$(1,\ 0)$-粗利普希茨且 $\mathcal{T}_S = \hat{}\,\mathcal{X}_{\mathfrak{S}^{M+}} \subseteq \mathcal{N}_2(\pi_S(\mathcal{X}))$，因此该公理成立。

(2) 嵌套：偏序继承自 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$。投影由构造给出。直径界继承自 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$，但 $V \in \mathfrak{T}$ 的 ρ_S^V 情形除外。根据构造，ρ_S^V 是 $\mathbf{F}_V$ 在因子映射$\mathcal{X} \to \mathcal{T}_S$下的像，且 $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}^{M+}$，因此 ρ_S^V的直径有界。

(3) 正交：该公理仅涉及非 $\sqsubseteq$-极大的域，因此根据构造，它继承自 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$。

(4) 横截性：该公理只涉及非 $\sqsubseteq$-极大的域，因此根据构造，它从 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 继承而来。

(5) 双曲性：如上所示，$\mathcal{T}_S$ 是双曲的；根据构造，对于任何非 $\sqsubseteq$-极小的 $U \in \mathfrak{T} - \{S\}$，$CU$ 都是双曲的。

(6) 有限复杂度：这直接源于这样一个事实：$\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{S}$ 以及 $\mathfrak{T}$ 上的偏序继承自 $\mathfrak{S}$。

(7) 容器：固定 $W \in \mathfrak{T}$ 和满足 $\mathfrak{T}_W \cap \mathfrak{T}_U^{\perp} \neq \varnothing$的 $U \in \mathfrak{T}_W$。接着固定 $V \in \mathfrak{T}_W \cap \mathfrak{T}_U^{\perp}$。根据 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$的容器公理，存在一个域 $Q \sqsubsetneq W$使得 $V \sqsubseteq Q$。此外，$(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 具有干净容器，因此 $Q \perp U$。域U和 V包含于 $\mathfrak{T} = \{S\} \sqcup \mathsf{Unb} \sqcup \mathsf{Min}$ 中，并且二者都不是 S，因为它们彼此正交。根据 Unb 和 Min 的构造，空间 $\mathbf{F}_U$ 和$\mathbf{F}_V$是无界的。由于 $V \sqsubseteq Q$ 和 $U \perp Q$，空间 $\mathbf{F}_Q$ 和 $\mathbf{E}_Q$ 是无界的。因此 $Q \in \mathsf{Unb} \subset \mathfrak{T}$，该公理得以满足。

(8) 唯一性：根据 [BHS17，推论 2.9],存在一个映射

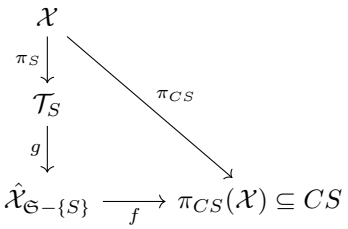
$$f \colon \hat{\mathcal{X}}_{\mathfrak{S}-\{S\}} \to CS$$

它是一个 $(C,\ C)$-准等距。固定 $r > 0$，并令

$$r' = Cr + C^2 + M + E'r + E^2,$$

其中，E' 是 $(\mathcal{T}_S,\ \mathfrak{S}-\mathfrak{S}^{M+})$ 的层级常数。定义 $\theta'(r) = \theta(r')$，其中 θ 是 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 的唯一性函数。固定 $x,\ y \in \mathcal{X}$使得 $\mathsf{d}_{\mathcal{X}}(x,\ y) \geqslant \theta'(r)$。根据 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 的唯一性公理，存在 $U \in \mathfrak{S}$ 使得 $\mathsf{d}_{CU}(\pi_{CU}(x),\ \pi_{CU}(y)) \geqslant r' \geqslant r$。

若 $U \in \mathfrak{T} - \{S\}$，则公理成立，因为 $\mathcal{T}_U = CU$，因此假设$U = S$。注意到 $\pi_S \colon \mathcal{X} \to \mathcal{T}_S$ 是 1-利普希茨的，且存在一个 1-利普希茨映射 $\hat{}g \colon \mathcal{T}_S \to \mathcal{X}_{\mathfrak{S}-\{S\}}$。此外，根据 [BHS17, Corollary 2.9], 的证明中的构造，以下图表可交换：



因此，

$$\begin{aligned} d_S(\pi_S(x), \pi_S(y)) &\geqslant d_{\hat{\mathcal{X}}_{\mathfrak{S}-\{S\}}}(g \circ \pi_S(x), g \circ \pi_S(y)) \\ &\geqslant \frac{1}{C}\mathrm{d}_{CS}(f \circ g \circ \pi_S(x), f \circ g \circ \pi_S(y)) - C \\ &= \frac{1}{C}\mathrm{d}_{CS}(\pi_{CS}(x), \pi_{CS}(y)) - C \\ &\geqslant \frac{r'}{C} - C \\ &\geqslant r. \end{aligned}$$

因此，这种情况下公理成立。

最后，假设 $U \in \mathfrak{S} - \mathfrak{T}$（注意，这种方法不同于 [ABD21] 中的方法）。存在两种可能： $U \in \mathfrak{S}^{M+}$ 或 $U \in \mathfrak{S} - \mathfrak{S}^{M+}$。若 $U \in \mathfrak{S}^{M+}$，则根据定义，$\mathbf{E}_U$ 无界。由于 $U \notin \mathfrak{T}$，$\mathbf{F}_U$必定有界，特别是， CU必定有界。然而， $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 具有 M-有界域二分性，而 $d_U(\pi_U(x),\ \pi_U(y)) \geqslant r' > M$，因此 CU不可能有界。于是， $U \in \mathfrak{S} - \mathfrak{S}^{M+}$。回想一下， $(\mathcal{T}_S,\ \mathfrak{S} - \mathfrak{S}^{M+})$ 是一个 E'-层次双曲空间，其中 CU 和 π_U 与原结构中的相同。特别地， $\pi'_U\colon\ \mathcal{T}_S \to CU$是 $(E',\ E')$-粗利普希茨的，且 $\pi_U = \pi'_U \circ \pi_S$。因此，

$$\begin{aligned} d_S(\pi_S(x), \pi_S(y)) &\geqslant \frac{1}{E'} d_U(\pi'_U \circ \pi_S(x), \pi'_U \circ \pi_S(y)) - E' \\ &= \frac{1}{E'} d_U(\pi_U(x), \pi_U(y)) - E' \\ &\geqslant \frac{r'}{E'} - E' \\ &\geqslant r. \end{aligned}$$

这满足最后一种情况。

(9) 有界测地像： 令 $\lambda \geqslant D$，其中 D 是命题 2.34 中的常数。此外，令 ν_λ 为命题 3.1 中与 λ 相关联的常数。由于 $\mathcal{T}_S$ 是双曲的，令 M 为莫尔斯控制函数，使得 $\mathcal{T}_S$ 中的任意测地线都是 M-Morse 的。最后，令 C 为引理 3.13 中的常数，使得任意 $(\lambda,\ \lambda)$-层级路径 γ，若位于 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 中，均可修改为 $(C,\ C)$-层级路径 $\hat{}\gamma$，位于 $(\hat{}\mathcal{X}_{\mathfrak{S}^{M+}},\ \mathfrak{S} - \mathfrak{S}^{M+}) = (\mathcal{T}_S,\ \mathfrak{S} - \mathfrak{S}^{M+})$ 中。现在定义

$$E' = 200\lambda E + \nu_\lambda + M(C, C).$$

我们将证明，对于所有 $x,\ y \in \mathcal{X}$以及 $V,\ W \in \mathfrak{T}$若有 $V \sqsubsetneq W$，则

$$\mathrm{d}_V(\pi_V(x), \pi_V(y)) \geqslant E',$$

那么，从 $\pi_W(x)$ 到 $\pi_W(y)$ 的每条 CW-测地线都会与 E'-邻域相交于ρ^V_W。若 $W \neq S$，则根据有界测地线像公理可得此结论，该公理由 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$应用于 V 和 W。

因此考虑 $W = S$ 且 $V \sqsubsetneq S$的情形。固定 x、$y \in \mathcal{X}$，使得 $d_V(\pi_V(x)$、$\pi_V(y)) \geqslant E'$，并令 γ 为 $\mathcal{T}_S$ 中从 $\pi_S(x)$ 到 $\pi_S(y)$的一条测地线。由命题 2.34，存在一条 $(\lambda$、$\lambda)$-层级路径 α，位于 $\mathcal{X}$ 中，端点为 x 和y。由引理 3.13，存在 $\hat{}\alpha \subset \pi_S(\alpha)$，它是某个 $(C$、$C)$-拟测地线，其中 C 仅取决于 λ、$\mathfrak{S}^{M+}$以及来自 $(\mathcal{X}$、$\mathfrak{S})$的层级常数。由命题 3.1，α 有一个子路径 β，使得 $\beta \subset \mathcal{N}_{\nu_\lambda}(\mathbf{P}_V)$。由于 $\hat{}\alpha$ 是一条 $(C$、$C)$-拟测地线，其端点位于 γ上，而 γ是 M-Morse 的，因此对于任意点 $a \in \pi_S(\beta) \subset \hat{}\alpha$，存在一点 $b \in \gamma$，使得 $d_S(a$、$b) \leqslant M(C$、$C)$。此外，这样的点 $a \in \pi_S(\beta) \subset \hat{}\alpha$ 必然存在，因为根据引理 3.13 中对 $\hat{}\alpha$ 的构造，$\pi_S(\beta)$ 的初始顶点和最终顶点都在 $\hat{}\alpha$中。因此，利用$\rho^V_S = \pi_S(\mathbf{F}_V)$这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} d_S(\gamma, \rho^V_S) &\leqslant d_S(\pi_S(\beta), \rho^V_S) + d_S(\pi_S(\beta), \gamma) \\ &\leqslant d_S(\pi_S(\beta), \rho^V_S) + M(C, C) \\ &= d_S(\pi_S(\beta), \pi_S(\mathbf{F}_V)) + M(C, C) \\ &= d_S(\pi_S(\beta), \pi_S(\mathbf{P}_V)) + M(C, C) \\ &\leqslant d_{\mathcal{X}}(\beta, \mathbf{P}_V) + M(C, C) \\ &\leqslant \nu_\lambda + M(C, C) \\ &\leqslant E', \end{aligned}$$

因此，这条公理得到满足。

(10) 大链接：首先定义常数

$$\hat{E} = E'(K_0 + 1) + E'(1 + N(1 + s_0) + C_0) + M \cdot E, \tag{5}$$

其中 $E' = \max(E, F)$, F是任意 $(\mathbf{F}_U, \mathfrak{S}_U)$ 对应的相对 HHS 常数（见命题 3.8），N 由下文的过程定义，而 K_0, C_0, s_0 来自层次双曲空间 $(\mathcal{T}_S, \mathfrak{S} - \mathfrak{S}^{M+})$的距离公式。我们将证明，对于所有$W \in \mathfrak{T}$和 $x, y \in \mathcal{X}$，都存在 $\{V_1, \ldots, V_m\} \subseteq \mathfrak{T}_W - \{W\}$，使得 $m \leqslant \hat{}\, \hat{}E \cdot \mathsf{d}_W(\pi_W(x), \pi_W(y)) + E$；并且对于所有 $U \in \mathfrak{T}_W - \{W\}$，要么存在某个 i使得 $U \in \mathfrak{T}_{V_i}$，要么 $\mathsf{d}_U(\pi_U(x), \pi_U(y)) \leqslant \hat{}E$。

固定 $W \in \mathfrak{T}$和 $x, y \in \mathcal{X}$。若 W是 $\sqsubseteq$-极小的，则集合 $\mathfrak{T}_W - \{W\} = \varnothing$，因此该条件显然满足。接下来，假设 $W \in$无界。考虑由 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$对应的大链接公理给出的集合 $\{T_i\} \subset \mathfrak{S}_W - \{W\}$。由于 $T_i \sqsubsetneq W$且$\mathbf{E}_W$无界，所以对所有 i，$\mathbf{E}^{T_i}$ 都无界。对于任意满足 $d_T(\pi_T(x), \pi_T(y)) > M \cdot E,$的 $T \in \mathfrak{T}_W - \{W\}$，$(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 对应的大链接公理推出

$$d_T(\pi_T(x), \pi_T(y)) = d_{CT}(\pi_T(x), \pi_T(y)) > M \cdot E \geqslant E,$$

因此 $T \sqsubseteq T_j$ 对于某个 j成立。此外，根据有界域二分性质，$d_T(\pi_T(x)$, $\pi_T(y)) > M \cdot E \geqslant M$意味着 $\mathbf{F}_T$是无界的，因此 $T \sqsubseteq T_j$意味着 $\mathbf{F}^{T_j}$是无界的。于是 $T_j \in \mathfrak{T}$。因此，此类 $T_j \in \mathfrak{T}$ 的集合基数小于或等于 $|\{T_i\}|$，从而满足大链接公理的相应条件。

对于最后一种情况，令 $W = S$；注意，这种情况在 [ABD21] 中没有讨论。令 $A^1_1 = \{T^1_i\} \subseteq \mathfrak{S} - \{S\}$ 为大链接

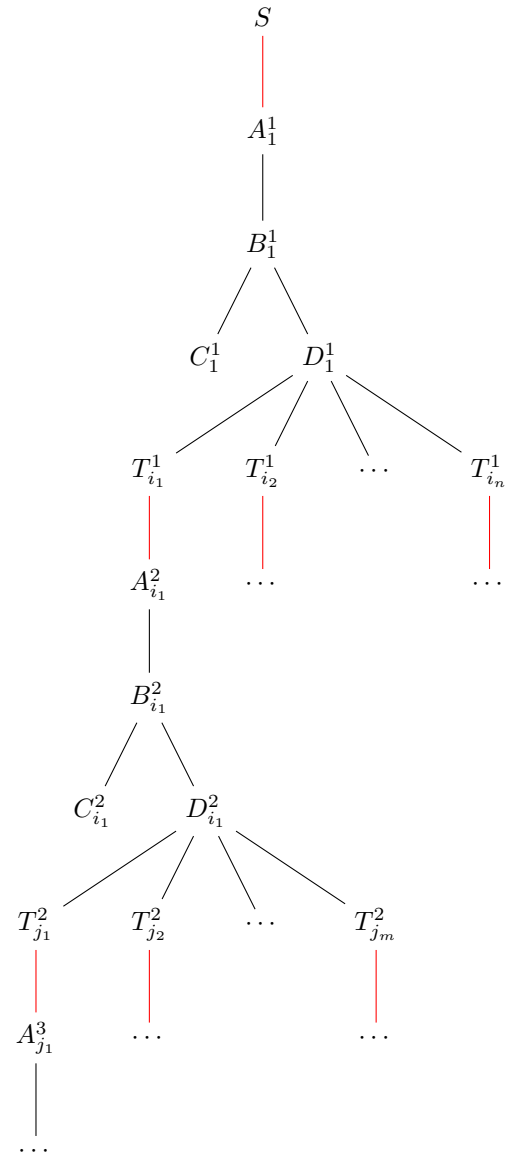


FIGURE 1. 如大链接公理所述，构造嵌套链的过程。所有黑线均表示集合包含（将 T_q^p与 $\{T_q^p\}$等同）。红线表示在顶端的 T_q^p 域应用大链接公理，因此， A_q^{p+1}下方的每个单独域都嵌套在其上方的 T_q^p 中。

公理为 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$。对于任意满足 $d_T(\pi_T(x),\ \pi_T(y)) > E,$ 的 $T \in \mathfrak{T} - \{S\}$，关于 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 的大链接公理推出，对于某个 i，有 $T \sqsubseteq T_i^1 \in A_1^1$。定义子集 $B_1^1 \subseteq A_1^1$ 为所有满足以下条件的 T_i^1: 存在 $T \in \mathfrak{T}$，使得 $d_T(\pi_T(x),\ \pi_T(y)) > E$ 且 $T \sqsubseteq T_i^1$。令 $C_1^1 = B_1^1 \cap \mathfrak{T}$，并令 $D_1^1 = B_1^1 - C_1^1$。如果 $D_1^1 = \varnothing$，那么我们就完成了。

反之，假设 $D_1^1 \neq \varnothing$。对于每个 $T_i^1 \in D^1$，命题 3.8 表明$(\mathbf{F}^{T_i^1}, \mathfrak{S}_{T_i^1})$是一个 F-相对层次双曲空间。对 $(\mathbf{F}^{T_i^1}, \mathfrak{S}_{T_i^1})$应用大链接公理，其中取 $W = T_i^1$、$\mathfrak{g}_{\mathbf{F}_{T_i^1}}(x)$和 $\mathfrak{g}_{\mathbf{F}_{T_i^1}}(y)$，得到一个域集合 $A_i^2 = \{T_j^2\} \subseteq \mathfrak{S}_{T_i^1} - \{T_i^1\}$。注意，根据 [BHS17，注 1.16]，，对于任意 $T \sqsubseteq T_i^1$，都有 $\pi_T \circ \mathfrak{g}_{\mathbf{F}_{T_i^1}}(x) = \pi_T(x)$。因此，对于每个满足 $T \subsetneq T_i^1$且$d_T(\pi_T(x)$的 $T \in \mathfrak{T}$，都有$\pi_T(y)) > F$，从而 $d_T(\pi_T(\mathfrak{g}_{\mathbf{F}_{T_i^1}}(x)), \pi_T(\mathfrak{g}_{\mathbf{F}_{T_i^1}}(y))) > F$，所以存在某个 $T_j^2 \in A_i^2$使得 $T \sqsubseteq T_j^2$。接下来，以类似方式构造集合 B_i^2、C_i^2和 D_i^2。如果 $D_i^2 = \varnothing$，则可以终止这一过程。然而，如果存在某个 $T_j^2 \in D_i^2$，则重复上述步骤，并注意到 $T_j^2 \subsetneq T_i^1$。此外，注意到这一过程的下一步将涉及对 F-相对层次双曲空间 $(\mathbf{F}^{T_j^2}, \mathfrak{S}_{T_j^2})$ 应用大链接公理，其中取 $W = T_j^2$、 $\mathfrak{g}_{\mathbf{F}_{T_j^2}}(x)$和 $\mathfrak{g}_{\mathbf{F}_{T_j^2}}(y)$。重复这一过程便得到一条链

$$T \sqsubseteq T_\ell^n \subsetneq T_k^{n-1} \subsetneq \cdots \subsetneq T_j^2 \subsetneq T_i^1 \subsetneq S.$$

注意，在每一步中，我们都可以通过选择 D_q^p中的不同元素来改变索引 $i, j, k,$ 等，因此实际上可以得到许多这样的链。根据$(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$的有限复杂度，任何这样的链中至多有 E项，因此对所有索引 ℓ，D_ℓ^{E-1}必为空。此外，大链接公理意味着在每一步中，每个集合 A_q^p都是有限的，因此这一过程中得到的链只有有限条。有限条有限长度的链意味着这一过程中产生的域总数（由下式给出）

$$\mathfrak{A} = \bigcup_p \bigcup_q A_q^p,$$

是有限的。令 $N = |\mathfrak{A}|$。回忆一下，集合 $C_q^p \subseteq A_q^p$ 由大链接公理给出的域组成，这些域属于 $\mathfrak{T}$ ，并且包含一个与x相关的域 $\mathfrak{T}$，且 y。此外，令

$$\mathfrak{C} = \bigcup_p \bigcup_q C_q^p.$$

因此， $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{T} - \{S\}$ 是一个有限域集合，使得对于所有 $T \in \mathfrak{T} - \{S\}$，$\hat{}\,\hat{}$ 要么存在某个 $U \in \mathfrak{C}$使得 $T \sqsubseteq U$，要么 $\mathfrak{d}_T(\pi_T(x), \pi_T(y)) \leqslant F \leqslant E$，其中 E如式（5）所示。

最后，我们将证明

$$|\mathfrak{C}| \leqslant \hat{E} \cdot d_{\mathcal{T}_S}(\pi_S(x), \pi_S(y)) + \hat{E}.$$

回忆一下， $E' = \mathsf{max}(E,\ F)$。由大链接公理，

$$|\mathfrak{C}| \leqslant E' \cdot d_{CS}(\pi_{CS}(x), \pi_{CS}(y)) + E' + \sum_{\substack{T_j \in \mathfrak{A} \\ T_j \notin \mathfrak{T}}} E' \cdot d_{T_j}(\pi_{T_j} \circ \mathfrak{g}_{\mathbf{F}_{T_j}}(x), \pi_{T_j} \circ \mathfrak{g}_{\mathbf{F}_{T_j}}(y)) + E'.$$

回忆一下，对于任意域 $T_j \in \mathfrak{S}$，我们有 $\pi_{T_j} \circ \mathfrak{g}_{\mathbf{F}_{T_j}}(x) = \pi_{T_j}(x)$，因此，

$$|\mathfrak{C}| \leqslant E' \cdot d_{CS}(\pi_{CS}(x), \pi_{CS}(y)) + E' + \sum_{\substack{T_j \in \mathfrak{A} \\ T_j \notin \mathfrak{T}}} E' \cdot d_{T_j}(\pi_{T_j}(x), \pi_{T_j}(y)) + E'.$$

那么，由定义可知， $\mathfrak{A}$ 含有 N 个元素，

$$|\mathfrak{C}| \leqslant E' \cdot d_{CS}(\pi_{CS}(x), \pi_{CS}(y)) + E' + NE' + \sum_{\substack{T_j \in A \\ T_j \notin \mathfrak{T}}} E' \cdot d_{T_j}(\pi_{T_j}(x), \pi_{T_j}(y)),$$

重新排列后可得

$$|\mathfrak{C}| \leqslant E' \cdot d_{CS}(\pi_{CS}(x), \pi_{CS}(y)) + E' + NE' + E' \cdot \sum_{\substack{T_j \in \mathfrak{A} \\ T_j \notin \mathfrak{T}}} d_{T_j}(\pi_{T_j}(x), \pi_{T_j}(y)).$$

回顾一下，$(\mathcal{T}_S,\ \mathfrak{S} - \mathfrak{S}^{M+})$ 是一个层次双曲空间，其中相关的 $C(*)$、π_*、ρ^*_*、$\sqsubseteq$、$\perp$、$\pitchfork$与 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$中的相同。对于任意满足 $T_j \notin \mathfrak{T}$的 $T_j \in \mathfrak{A}$，由于存在满足 $T \subsetneq T_j$的$T \in \mathfrak{T}$，因此 T_j 不可能在 $\mathfrak{S}$中是 $\sqsubseteq$-极小的。此外，T_j不能包含于任何满足 $W \perp V$且 $\mathsf{diam}(CW) > M$的 $V \in \mathfrak{S}$中，因为这将意味着 $T_j \in \mathsf{Unb} \subset \mathfrak{T}$。因此，$T_j \in \mathfrak{S} - \mathfrak{S}^{M+}$。$(\mathcal{T}_S,\ \mathfrak{S} - \mathfrak{S}^{M+})$ 的距离公式蕴含

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{T_j \in \mathfrak{A} \\ T_j \notin \mathfrak{T}}} d_{T_j}(\pi_{T_j}(x), \pi_{T_j}(y)) &\leqslant Ns_0 + \sum_{U \in \mathfrak{S} - \mathfrak{S}^{M+}} \{\{d_U(\pi_U(x), \pi_U(y))\}\}_{s_0} \\ &\leqslant K_0 \cdot d_S(\pi_S(x), \pi_S(y)) + C_0 + Ns_0.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}|\mathfrak{C}| &\leqslant E' \cdot d_{CS}(\pi_{CS}(x), \pi_{CS}(y)) + E' + NE' + E' \cdot \sum_{\substack{T_j \in \mathfrak{A} \\ T_j \notin \mathfrak{T}}} d_{T_j}(\pi_{T_j}(x), \pi_{T_j}(y)) \\ &\leqslant E' \cdot d_{CS}(\pi_{CS}(x), \pi_{CS}(y)) + E' + NE' + E'(K_0 \cdot d_S(\pi_S(x), \pi_S(y)) + C_0 + Ns_0) \\ &\leqslant E' \cdot d_S(\pi_S(x), \pi_S(y)) + E' + NE' + E'(K_0 \cdot d_S(\pi_S(x), \pi_S(y)) + C_0 + Ns_0) \\ &\leqslant E'(K_0 + 1) \cdot d_S(\pi_S(x), \pi_S(y)) + E'(1 + N(1 + s_0) + C_0) \\ &\leqslant \hat{E} \cdot d_S(\pi_S(x), \pi_S(y)) + \hat{E},\end{aligned}$$

所以该公理得到满足。

（11）一致性：如果 $V \pitchfork W$，那么以下结论仍然成立：

$$\min\{\mathrm{d}_W(\pi_W(x), \rho^V_W), \mathrm{d}_V(\pi_V(x), \rho^W_V)\} \leqslant E$$

对所有 $x \in \mathcal{X}$。此外，若对于 $W \neq S$，$U \sqsubseteq V$和 $V \subsetneq W$ 或 $V \pitchfork W$和 $W \perp U$，则 $\mathsf{d}_W(\rho^U_W,\ \rho^V_W) \leqslant E$。

因此，剩下要证明的是，若 $U \sqsubseteq V$和 $V \subsetneq S$，则 $\mathsf{d}_S(\rho^U_S,\ \rho^V_S) \leqslant E$；请注意，[ABD21]中未讨论这种情况。根据定义，ρ^V_S 是$\mathbf{F}_V$在因子映射 $\mathcal{X} \to \mathcal{T}_S$下的像。此外，$U \subsetneq V$蕴含$\mathbf{F}_U \subset \mathbf{F}_V$，因此 $\rho^U_S \subset \rho^V_S$。所以，$\mathsf{d}_S(\rho^U_S,\ \rho^V_S) = 0 \leqslant E$，该条件得到满足。

（12）部分实现：设 $\{V_i\}$ 是 $\mathfrak{T}$ 的一组有限两两正交元素，且对每个 i都有 $p_i \in CV_i$。首先假设 $\{V_i\} = \{S\}$，并令 $p \in \mathcal{T}_S$为选定的点。由于 $\mathcal{T}_S$是 $\mathcal{X}$的锥化，存在一点 $x \in \mathcal{X}$使得 $d_S(\pi_S(x),\ p) \leqslant 1$，因此在此情形下该公理得到满足。

现在假设 $\{V_i\} \neq \{S\}$。令 $x \in \mathcal{X}$ 为部分实现公理针对 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$所给出的点。由于 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$和 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{T})$中的相关测地空间相同，因此对所有 i，$d_{V_i}(\pi_{V_i}(x),\ p_i) \leqslant E$仍然成立。此外，对所有$i$ 以及所有满足 $W \neq S$、且 $V_i \subsetneq W$ 或 $W \pitchfork V_i$的域 $W \in \mathfrak{S}$，$d_W(\pi_W(x),\ \rho^{V_i}_W) \leqslant E$仍然成立。

剩下要证明的是，对于任意 i， $d_S(\pi_S(x),\ \rho_S^{V_i}) \leqslant E'$ 成立；请注意， [ABD21]并未涵盖这种情况。根据 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$的部分实现，

$$d_{CS}(\pi_{CS}(x), \rho_{CS}^{V_i}) \leqslant E.$$

令 $a = \mathfrak{g}_{V_i}(x) \in \mathbf{P}_{V_i}$，其中 $\mathfrak{g}_{V_i}$ 是到 $\mathbf{P}_{V_i}$上的门映射。于是由命题 2.31，

$$d_{CS}(\pi_{CS}(a), \rho_{CS}^{V_i}) \leqslant \mu.$$

$\rho_{CS}^{V_i}$ 的直径小于或等于 E，因此

$$d_{CS}(\pi_{CS}(x), \pi_{CS}(a)) \leqslant 2E + \mu. \tag{6}$$

我们将使用层次双曲空间 $(\mathcal{T}_S, \mathfrak{S}-\mathfrak{S}^{M+})$ 的距离公式来界定 $d_S(\pi_S(x), \pi_S(a))$。令 K, C 为定理 2.19 中的常数，使得对所有 $w, z \in \mathcal{T}_S$，

$$\frac{1}{K} \cdot d_S(w, z) - C \leqslant \sum_{U \in \mathfrak{S}-\mathfrak{S}^{M+}} \{\{d_U(\pi_U(w), \pi_U(z))\}\}_{s_0+M+2E+\mu},$$

其中 s_0 是距离公式阈值。反设

$$d_S(\pi_S(x), \pi_S(a)) > K + KC.$$

Thus

$$1 = \frac{1}{K}\cdot(K+KC)-C < \frac{1}{K}\cdot d_S(\pi_S(x), \pi_S(a))-C \leqslant \sum_{U \in \mathfrak{S}-\mathfrak{S}^{M+}} \{\{d_U(\pi_U(x), \pi_U(a))\}\}_{s_0+M+2E+\mu}.$$

因此存在某个 $U \in \mathfrak{S} - \mathfrak{S}^{M+}$ 使得

$$d_U(\pi_U(x), \pi_U(a)) \geqslant s_0 + M + 2E + \mu > 2E + \mu, \tag{7}$$

因此 (6) 推出 $U \neq S$。此外，由 (7) 以及 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 的有界域二分性质可知，$\mathbf{F}_U$ 无界。由于 $V_i \sqsubsetneq S$ 是 $\mathfrak{T}$ 的一个元素，域 U 不可能与 V_i 正交，否则 $U \in \mathfrak{S}^{M+}$。此外，基于以下原因， U 不可能嵌套于 V_i。若 $U = V_i \in (\mathfrak{T} - \{S\}) \subset \mathfrak{S}^{M+}$，则会产生矛盾。若 $U \sqsubsetneq V_i$，则 V_i 不是 $\sqsubseteq$-极小的，因此 $\mathbf{E}_{V_i}$ 无界，于是 $U \in \mathfrak{S}^{M+}$。因此， $U \pitchfork V_i$ 或 $V_i \sqsubsetneq U$。无论哪种情况， $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 的部分实现公理都推出

$$d_U(\pi_U(x), \rho_U^{V_i}) \leqslant E.$$

根据命题 2.31，由于 $a = \mathfrak{g}_{V_i}(x)$，

$$d_U(\pi_U(a), \rho_U^{V_i}) = d_U(\pi_U \circ \mathfrak{g}_{V_i}(x), \rho_U^{V_i}) \leqslant \mu.$$

最后，根据定义，$\operatorname{diam}(\rho_U^{V_i}) \leqslant E$，因此

$$\begin{aligned} d_U(\pi_U(x), \pi_U(a)) &\leqslant d_U(\pi_U(x), \rho_U^{V_i}) + \operatorname{diam}(\rho_U^{V_i}) + d_U(\rho_U^{V_i}, \pi_U(a)) \\ &\leqslant E + E + \mu \\ &= 2E + \mu, \end{aligned}$$

这与 (7) 矛盾。因此，

$$d_S(\pi_S(x), \pi_S(a)) \leqslant K + KC.$$

此外，由于 $a \in \mathbf{P}_{V_i}$，我们有 $\pi_S(a) \in \rho_S^{V_i}$。因此，

$$d_S(\pi_S(x), \rho_S^{V_i}) \leqslant K + KC.$$

然后取 $E' = K + KC + E$ 即可完成这最后一条公理。 □

定义 3.15. 我们将定理 3.14 中的过程称为最大化，并称新结构 $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$ 为最大化结构。

3.3. **有界投影当且仅当收缩**。对相对层次双曲空间执行最大化过程后，会构造出一种新结构，在该结构中，具有有界投影的子空间与收缩子空间等价。这一等价关系是证明最大化结构中的顶层空间是莫尔斯可检测空间的基础。我们首先定义有界投影和收缩的概念。

定义 3.16。设 $D > 0$，并设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 为相对层次双曲空间。若子空间 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ 对每个 $U \in \mathfrak{S} - \{S\}$ 都满足 $\operatorname{diam}_U(\pi_U(\mathcal{Y})) < D$，则称其具有 D-有界投影。

定义 3.17。度量空间 $\mathcal{X}$ 中的子空间 $\mathcal{Y}$ 称为 D-收缩的，如果存在映射 $\pi_{\mathcal{Y}}$: $X \to \mathcal{Y} \subset X$ 及常数 $D > 0$ 和 $A > 1$，满足：

(1) for any $x \in \mathcal{Y}$, we have $d_X(x, \pi_{\mathcal{Y}}(x)) < D$;
(2) if $x, y \in X$ with $d_X(x, y) < 1$, then $d_X(\pi_{\mathcal{Y}}(x), \pi_{\mathcal{Y}}(y)) < D$; and
(3) for all $x \in X$, if we set $R = \dfrac{1}{A} \cdot d_X(x, \mathcal{Y})$, then $\operatorname{diam}_X(\pi_{\mathcal{Y}}(B_R(x))) \leqslant D$.

下面的定理推广了 [ABD21，定理 4.4]，并说明了在何种条件下，收缩性与具有有界投影等价。尽管这份证明遵循了与 [ABD21], 类似的思路，我们仍借此机会补充缺失的细节。

定理 3.18。设 $\mathcal{X}$ 是一个测地度量空间，且令 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 为一个具有 $|\mathfrak{S}| > 1$ 的 E-相对层次双曲空间。对于任意 $D > 0$ 和 $K \geqslant 1$，存在一个仅依赖于 D 和 $(\mathcal{X}、\mathfrak{S})$ 的 $D' > 0$，使得对于每个 $(K、K)$-拟等距嵌入 $\gamma\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$，以下结论成立：若 $\gamma(\mathcal{Y})$ 具有 D-有界投影，则 $\gamma(\mathcal{Y})$ 是D'-收缩的。此外，若 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 具有有界域二分性、干净容器和无界极小乘积，则 $\mathcal{X}$ 具有一个带无界乘积的相对分层双曲结构 $(\mathcal{X}, \mathfrak{T})$；并且，若 γ 是一个$(M;\ K, K)$-稳定嵌入，则 $\gamma(\mathcal{Y})$ 具有 D'-有界投影。

证明。固定 $D > 0$和 $K \geqslant 1$。令 $\gamma\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$为一个 $(K,\ K)$-拟等距嵌入，并令 $\gamma(\mathcal{Y})$ 具有 D-有界投影。

断言 3.18.1。集合 $\gamma(\mathcal{Y})$ 是 $\mathcal{X}$的层次准凸子集

断言的证明。由于 $\gamma(\mathcal{Y})$具有 D-有界投影，定义 2.21 的前两个条件对所有 $U \in \mathfrak{S} - \{S\}$显然都满足。现在我们证明 $\pi_S \circ \gamma(\mathcal{Y})$是拟凸的。固定两个点 $\pi_S(a)$, $\pi_S(b) \in \pi_S \circ \gamma(\mathcal{Y})$。距离公式蕴含存在 k', c' 使得

$$d_{\mathcal{X}}(a, b) \asymp_{k', c'} \sum_{U \in \mathfrak{S}} \{\{d_U(\pi_U(a), \pi_U(b))\}\}_{s_0 + D} = d_S(\pi_S(a), \pi_S(b)), \tag{8}$$

其中 s_0 是定理 2.19 中 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 的距离公式阈值。由于 γ是拟等距嵌入，复合映射 $\pi_S \circ \gamma$是从 $\mathcal{Y}$到双曲的（因为 $|\mathfrak{S}| > 1$）空间 CS的 (K', K')-拟等距嵌入，其中某个常数为K'。因此，根据引理 2.9，$\pi_S \circ \gamma$ 是稳定嵌入，故为拟凸。对于条件 (3)，固定某个 $x \in \mathcal{X}$和 $R \geqslant 0$，使得对每个 $U \in \mathfrak{S}$都有 $d_U(\pi_U(x), \pi_U \circ \gamma(\mathcal{Y})) \leqslant R$。因此，存在一点 $\pi_S(x') \in \pi_S \circ \gamma(\mathcal{Y})$ 使得$d_S(\pi_S(x), \pi_S(x')) \leqslant R + 1$。根据 (8)，

$$d_{\mathcal{X}}(x, \gamma(\mathcal{Y})) \leqslant d_{\mathcal{X}}(x, x') \leqslant k' \cdot d_S(\pi_S(x), \pi_S(x')) + c' \leqslant k'(R + 1) + c',$$

因此条件 (3) 得证。 ■

由于 $\gamma(\mathcal{Y})$ 是分层拟凸的，命题 2.29 表明，存在常数 $\mu \geqslant 1$ 以及一个 (μ, μ)-粗利普希茨门映射 $\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}\colon \mathcal{X} \to \gamma(\mathcal{Y})$。空间 CS是 E-双曲的，因此命题 2.29 表明，对于所有 $x \in \mathcal{X}$，都有 $d_S(\pi_S \circ \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x), p_S \circ \pi_S(x)) \leqslant \mu$，其中 p_S是 $CS \to \pi_S \circ \gamma(\mathcal{Y})$的（粗）投影。我们将证明，$\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}$ 满足定义 3.17 中的三个条件，且常数 D' 将在证明过程中确定。

对于条件 (1)，首先固定某个 $x \in \gamma(\mathcal{Y})$。于是 $\pi_S(x) \in \pi_S \circ \gamma(\mathcal{Y})$。根据 [DK18，引理 11.53]，$d_S(\pi_S(x), p_S \circ \pi_S(x)) \leqslant \Delta$，其中 Δ 取决于 E 以及 $\gamma(\mathcal{Y})$的拟凸常数。定义常数

$$L = s_0 + D + E + \mu + 2.$$

由于 $\gamma(\mathcal{Y})$ 具有 D-有界投影，取距离公式阈值为 L，便存在依赖于 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 的 K_1 和 C_1，使得

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{X}}(x, \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x)) &\leqslant K_1 \cdot d_S(\pi_S(x), \pi_S \circ \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x)) + C_1 \\ &\leqslant K_1(d_S(\pi_S(x), p_S \circ \pi_S(x)) + d_S(p_S \circ \pi_S(x), \pi_S \circ \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x))) + C_1 \\ &\leqslant K_1(\Delta + \mu) + C_1. \end{aligned}$$

因此，对于常数 $D_1 = K_1(\Delta + \mu) + C_1$，条件 (1) 得到满足。

对于常数 $D_2 = 2\mu$，条件 (2) 得到满足，因为 $\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}$ 是 (μ, μ)-粗利普希茨的：对于任意满足 $d_{\mathcal{X}}(x, y) < 1$的 $x, y \in \mathcal{X}$，

$$d_{\mathcal{X}}(\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x), \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(y)) \leqslant \mu \cdot d_{\mathcal{X}}(x, y) + \mu < 2\mu.$$

最后，我们将验证条件 (3)。固定某个 $x \in \mathcal{X}$，令 $A = 2K_1(C_1 + K_1)$，并固定任意满足下式的点 $y \in \mathcal{X}$

$$d_{\mathcal{X}}(x, y) < \frac{1}{A} d_{\mathcal{X}}(x, \gamma(\mathcal{Y})).$$

若 $d_{\mathcal{X}}(x, y) < 1$，则由条件 (2) 可知结论成立。因此，假设 $d_{\mathcal{X}}(x, y) \geqslant 1$。由于 $\gamma(\mathcal{Y})$ 具有 D-有界投影，对于任意 $U \in \mathfrak{S} - \{S\}$，距离公式推出

$$d_{\mathcal{X}}(\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x), \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(y)) \leqslant K_1 \cdot d_S(\pi_S \circ \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x), \pi_S \circ \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(y)) + C_1.$$

于是由三角不等式可得

$$d_{\mathcal{X}}(\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x), \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(y)) \leqslant K_1 \cdot d_S(p_S \circ \pi_S(x), p_S \circ \pi_S(y)) + 2\mu K_1 + C_1. \tag{9}$$

因此，只需给出 $\pi_S(x)$ 和 $\pi_S(y)$ 在 $\pi_S \circ \gamma(\mathcal{Y})$上的最近点投影之间距离的界。

设 K_2, C_2 为阈值 $2L$对应的距离公式常数。于是利用距离公式，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{U\in\mathfrak{S}}\{\{d_U(\pi_U(x),\pi_U\circ\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x))\}\}_{2L} &\geqslant \frac{1}{K_2}d_{\mathcal{X}}(x,\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x))-C_2\\ &\geqslant \frac{1}{K_2}d_{\mathcal{X}}(x,\gamma(\mathcal{Y}))-C_2\\ &> \frac{A}{K_2}d_{\mathcal{X}}(x,y)-C_2\\ &= \frac{K_2(C_2+C_1+2K_1)}{K_2}d_{\mathcal{X}}(x,y)-C_2\\ &= (C_2+C_1+2K_1)\cdot d_{\mathcal{X}}(x,y)-C_2\\ &= 2K_1\cdot d_{\mathcal{X}}(x,y)+(C_2+C_1)\cdot d_{\mathcal{X}}(x,y)-C_2\\ &\geqslant 2K_1\cdot d_{\mathcal{X}}(x,y)+(C_2+C_1)-C_2\\ &= 2K_1\cdot d_{\mathcal{X}}(x,y)+C_1\\ &\geqslant \frac{2K_1}{K_1}\sum_{U\in\mathfrak{S}}\{\{d_U(\pi_U(x),\pi_U(y))\}\}_L-C_1+C_1\\ &= 2\sum_{U\in\mathfrak{S}}\{\{d_U(\pi_U(x),\pi_U(y))\}\}_L\\ &\geqslant \sum_{U\in\mathfrak{S}}\{\{d_U(\pi_U(x),\pi_U(y))+L\}\}_{2L}.\end{aligned}$$

因此，存在某个 $W\in\mathfrak{S}$ 使得

$$d_W(\pi_W(x),\pi_W\circ\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x))\geqslant d_W(\pi_W(x),\pi_W(y))+L. \tag{10}$$

首先，假设 $W=S$。空间 CS 是 E-双曲的。由三角不等式和 (10)，我们有

$$\begin{aligned}d_S(\pi_S(x),\pi_S\circ\gamma(\mathcal{Y}))&\geqslant d_S(\pi_S(x),p_S\circ\pi_S(x))\\ &\geqslant d_S(\pi_S(x),\pi_S\circ\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x))-d_S(\pi_S\circ\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x),p_S\circ\pi_S(x))\\ &\geqslant d_S(\pi_S(x),\pi_S\circ\mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x))-\mu\\ &\geqslant d_S(\pi_S(x),\pi_S(y))+L-\mu\\ &> d_S(\pi_S(x),\pi_S(y))+1.\end{aligned}$$

因此，从 $\pi_S(x)$ 到 $\pi_S(y)$ 的任意测地线都与 $\pi_S\circ\gamma(\mathcal{Y})$不相交。由于 $\pi_S\circ\gamma(\mathcal{Y})$是到一个 E-双曲空间中的拟等距嵌入，双曲几何中一个众所周知的事实是，$d_S(p_S\circ\pi_S(x),\ p_S\circ\pi_S(y))$ 被仅依赖于 E的某个统一常数所界，我们将其记为 Q_1。由 (9) 可知，在这种情况下，条件 (3) 对常数 $D_3^1=K_1Q_1+2\mu K_1+C_1$成立。

现在，假设情况相反， $W\neq S$ 和

$$d_S(\pi_S(x),p_S\circ\pi_S(x))<d_S(\pi_S(x),\pi_S(y))+L.$$

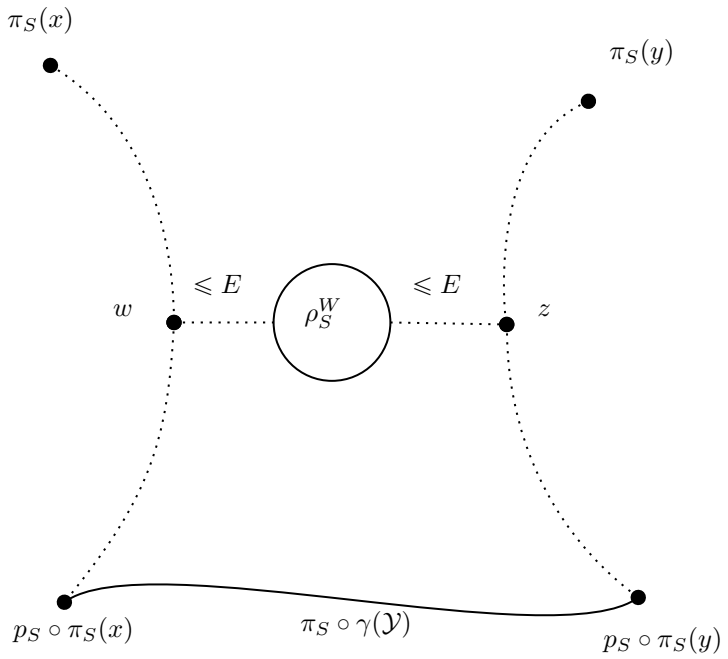


FIGURE 2. CS 的图示，见$\gamma(\mathcal{Y})$为 D'-收缩时条件 (3) 的证明。

由于 $\gamma(\mathcal{Y})$ 具有 D有界投影，由三角不等式可知

$$\begin{aligned} d_W(\pi_W(y), \pi_W \circ \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(y)) \geqslant & d_W(\pi_W(x), \pi_W \circ \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x)) \\ & - d_W(\pi_W(x), \pi_W(y)) \\ & - d_W(\pi_W \circ \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x), \pi_W \circ \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(y)) \\ \geqslant & d_W(\pi_W(x), \pi_W(y)) + L - d_W(\pi_W(x), \pi_W(y)) - D \\ = & L - D \\ \geqslant & E + \mu. \end{aligned}$$

此外，由 (10) 可得，

$$d_W(\pi_W(x), \pi_W \circ \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x)) \geqslant d_W(\pi_W(x), \pi_W(y)) + L \geqslant L \geqslant E + \mu.$$

由于 $d_W(\pi_W(x),\ \pi_W \circ \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(x)) \geqslant E+\mu$和 $d_W(\pi_W(y),\ \pi_W \circ \mathfrak{g}_{\mathcal{Y}}(y)) \geqslant E+\mu$，针对 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$的有界测地线像公理表明，任何连接$\pi_S(x)$ 与 $p_S \circ \pi_S(x)$ （以及连接 $\pi_S(y)$ 与 $p_S \circ \pi_S(y)$）的测地线都必须与E邻域相交。令

$$w \in [\pi_S(x), p_S \circ \pi_S(x)] \cap \mathcal{N}_E(\rho_S^W) \qquad \text{and} \qquad z \in [\pi_S(y), p_S \circ \pi_S(y)] \cap \mathcal{N}_E(\rho_S^W),$$

如图 2 所示。因此 $d_S(w,\ z) \leqslant 3E$。根据定义，$p_S \circ \pi_S(x) = p_S(w)$ 和 $p_S \circ \pi_S(y) = p_S(z)$。若 $d_S(w,\ p_S \circ \pi_S(x)) > 3E$，则同样有 $d_S(p_S \circ \pi_S(x),\ p_S \circ \pi_S(y))$，其上界为某个仅依赖于 E 的一致常数，我们将其记为 Q_2。由 (9) 可知，在此情形下，条件 (3) 对常数 $D_3^2 = K_1 Q_2 + 2\mu K_1 + C_1$成立。

反之，假设 $d_S(w,\ p_S\circ\pi_S(x))\leqslant 3E$。由于 p_S 是一个最近点投影，

$$d_S(z,p_S\circ\pi_S(y))\leqslant d_S(z,w)+d_S(w,p_S\circ\pi_S(x))\leqslant 6E.$$

因此，

$$d_S(p_S\circ\pi_S(x),p_S\circ\pi_S(y))\leqslant d_S(p_S\circ\pi_S(x),w)+d_S(w,z)+d_S(z,p_S\circ\pi_S(y))\leqslant 12E.$$

使用 (9) 完成了条件 (3) 最后一种情形关于常数$D_3^3\ =\ (12E\ +\ 2\mu)K_1\ +\ C_1$的证明。取 $D'\ =\ \max\{D_1,\ D_2,\ D_3^1,\ D_3^2,\ D_3^3\}$，我们证明了如果 $\gamma(\mathcal{Y})$ 具有 D-有界投影，那么 $\gamma(\mathcal{Y})$ 是 D'-收缩的。

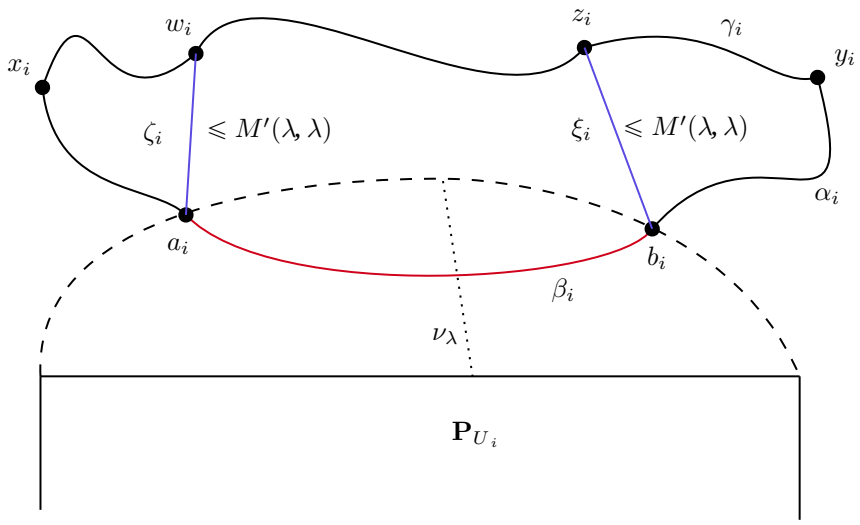


FIGURE 3. 在证明 $\gamma(\mathcal{Y})$ 具有 D'-有界投影时，对 $\mathcal{X}$ 的描绘。

现在我们可以证明该定理的“此外”部分了。设 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$是一个具有 $|\mathfrak{S}|>1$、有界定义域二分性、干净容器和无界极小乘积的 E-相对分层双曲空间。根据定理 3.14，我们得到一个新的结构 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{T})$ 它具有相对无界乘积，其中 $\mathfrak{T}=\{S\}\sqcup$ Unb $\sqcup$ Min。由于 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 具有无界极小乘积，Min 为空，因此实际上 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{T})$ 具有无界乘积。

反设 $\gamma(\mathcal{Y})$ 对于任意 D'都不具有 D'-有界投影。于是存在一个域序列 $U_i\in\mathfrak{T}-\{S\}$，使得当 $i\to\infty$时，直径$(\pi_{U_i}\circ\gamma(\mathcal{Y}))\to\infty$。选取点对序列 $x_i,\ y_i\in\gamma(\mathcal{Y})$，使得 $d_{U_i}(\pi_{U_i}(x_i),\ \pi_{U_i}(y_i))=K_i$，其中当 $i\to\infty$时，$K_i\to\infty$。取充分大的 λ，使得命题 3.1 和命题 2.34 成立。于是，对每一对 $x_i,\ y_i$，存在一条连接它们的 $(\lambda,\ \lambda)$-层级路径 α_i。路径 α_i 是一条 $(\lambda,\ \lambda)$-拟测地线，其端点位于 $(M$的像上；$K,\ K)$-稳定嵌入 γ，因此根据引理 2.10，它包含于 $\gamma(\mathcal{Y})$的 $M'(\lambda,\ \lambda)$-邻域中，其中 M'仅取决于 M和 K。

根据命题 3.1，存在一个子路径 $\beta_i \subset \alpha_i$ ，使得 $\beta_i \subset \mathcal{N}_{\nu_\lambda}(\mathbf{P}_{U_i})$。此外，根据命题 3.1 的第三个要点，

$$\mathrm{diam}_{U_i}(\pi_{U_i}(\beta_i)) \geqslant d_{U_i}(\pi_{U_i}(x_i), \pi_{U_i}(y_i)) - 24(\lambda E + E) \geqslant K_i - 24(\lambda E + E).$$

此外，由于投影映射 π_{U_i} 是 $(E,\ E)$-粗略 Lipschitz 的，我们有

$$\mathrm{diam}_{\mathcal{X}}(\beta_i) \geqslant \frac{1}{E}\mathrm{diam}_{U_i}(\pi_{U_i}(\beta_i)) - E \geqslant \frac{K_i}{E} - 24(\lambda + 1) - E.$$

因此，$\mathrm{diam}_{\mathcal{X}}(\beta_i) \to \infty$ as $i \to \infty$，从而存在点 $a_i,\ b_i \in \beta_i$ 使得 $d_{\mathcal{X}}(a_i,\ b_i) \to \infty$ as $i \to \infty$。令 $w_i,\ z_i \in \gamma(\mathcal{Y})$ 为满足 $d_{\mathcal{X}}(a_i,\ w_i) \leqslant M'(\lambda,\ \lambda)$ 且 $d_{\mathcal{X}}(b_i,\ z_i) \leqslant M'(\lambda,\ \lambda)$的点。由三角不等式，

$$d_{\mathcal{X}}(w_i, z_i) \geqslant d_{\mathcal{X}}(a_i, b_i) - 2M'(\lambda, \lambda),$$

所以 $d_{\mathcal{X}}(w_i, z_i) \to \infty$ as $i \to \infty$。令 $\zeta_i = [w_i, a_i]$ 和 $\xi_i = [z_i, b_i]$ 为 $\mathcal{X}$中的测地线。拼接路径 $\zeta_i * \beta_i|_{[a_i,b_i]} * \xi_i$ 是一条端点位于 $\gamma(\mathcal{Y})$中的 $(\lambda, \lambda + 2M'(\lambda, \lambda))$-拟测地线。引理 2.10 表明，存在一条 $(M';\ K, K)$-莫尔斯拟测地线$\eta_i \subset \gamma(\mathcal{Y})$，它包含于 $\zeta_i * \beta_i|_{[a_i,b_i]} * \xi_i$的 $M'(\lambda, \lambda + 2M'(\lambda, \lambda))$-邻域内，因此也包含于 P_{U_i}的 $(M'(\lambda, \lambda + 2M'(\lambda, \lambda)) + M'(\lambda, \lambda) + \nu_\lambda)$-邻域内。

由于 $d_{\mathcal{X}}(w_i,\ z_i) \to \infty$ 正如 $i \to \infty$，我们已经证明，任意长的$(M';\ K,\ K)$-Morse 拟测地线 η_i 都与具有无界因子的直积一致地相距有界。根据 [DSZ25，定理 A.3]，，这样的直积一致地莫尔斯有界，因此这就构成了矛盾，从而证明了“此外”这一结论，并完成了定理的证明。□

4. Stability in a Relative HHS

本节的主要目标是证明，在许多情况下，由定理 3.14 得到的最大化相对 HHS 结构所对应的顶层空间CS 是莫尔斯可检测空间。为证明 CS 是莫尔斯可检测空间，我们必须证明， $\mathcal{X}$ 中的拟等距嵌入投影到 CS 中的拟等距嵌入，当且仅当它们是稳定嵌入。

下面的引理表明，在相对层次双曲空间中，投影到 CS中的拟等距嵌入与具有有界投影等价。请注意，对相对层次双曲空间没有任何额外假设，例如有界域二分性、干净容器或无界乘积。

引理 4.1。设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是相对层次双曲空间，且 $\gamma\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 是拟等距嵌入。当且仅当 $\gamma(\mathcal{Y})$ 具有有界投影时，投影 $\pi_S \circ \gamma$ 是到 CS 中的拟等距嵌入。

证明。设 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$ 是一个 E-相对层次双曲空间。若 $|\mathfrak{S}| = 1$，则该陈述显然成立，因此设 $|\mathfrak{S}| > 1$，特别地， CS 是双曲的。设 $\gamma\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 是一个(λ, ε)-拟等距嵌入。对于第一个方向，假设 $\gamma(\mathcal{Y})$ 具有 D-有界投影。若 s_0 是定理 2.19 中 $(\mathcal{X}, \mathfrak{S})$的最小距离公式阈值，则存在常数 K, C，使得对于任意 $x, y \in \gamma$

$$d_{\mathcal{X}}(x, y) \asymp_{K,C} \sum_{U \in \mathfrak{S}} \{\{d_U(\pi_U(x), \pi_U(y))\}\}_{s_0+D+1} = \{\{d_S(\pi_S(x), \pi_S(y))\}\}_{s_0+D+1}.$$

固定两个点 $t_1, t_2 \in \mathcal{Y}$。若 $d_S(\pi_S \circ \gamma(t_1), \pi_S \circ \gamma(t_2)) \geqslant s_0 + D + 1$，则

$$d_S(\pi_S \circ \gamma(t_1), \pi_S \circ \gamma(t_2)) \asymp_{K,C} d_{\mathcal{X}}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \asymp_{\lambda,\varepsilon} d_{\mathcal{Y}}(t_1, t_2).$$

若 $d_S(\pi_S\circ\gamma(t_1),\pi_S\circ\gamma(t_2))<s_0+D+1$，则显然

$$d_S(\pi_S\circ\gamma(t_1),\pi_S\circ\gamma(t_2))\leqslant d_{\mathcal{Y}}(t_1,t_2)+s_0+D+1.$$

对于另一个拟测地线不等式，首先注意到存在一个唯一性函数θ，它与 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$相关联。如果 $d_{\mathcal{X}}(\gamma(t_1),\ \gamma(t_2))\geqslant\theta(s_0+D+1)$，那么唯一性公理意味着存在某个域 $W\in\mathfrak{S}$，使得

$$d_W(\pi_W\circ\gamma(t_1),\pi_W\circ\gamma(t_2))\geqslant s_0+D+1.$$

然而，这与假设 $d_S(\pi_S\circ\gamma(t_1),\ \pi_S\circ\gamma(t_2))<s_0+D+1$ 以及 γ 具有 D-有界投影这一事实相矛盾。于是我们有

$$\frac{1}{\lambda}d_{\mathcal{Y}}(t_1,t_2)-\varepsilon-\theta(s_0+D+1)\leqslant d_{\mathcal{X}}(\gamma(t_1),\gamma(t_2))-\theta(s_0+D+1)\leqslant d_S(\pi_S\circ\gamma(t_1),\pi_S\circ\gamma(t_2)),$$

因此，令 $k,\ c$ 为上述不等式中相应常数的最大值，则对于 $k,\ c,\ \pi_S\circ\gamma$ 是一个 $(k,\ c)$-拟等距嵌入；其常数取决于 λ、ε以及 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$的层级常数。

对于反向证明，设 $\pi_S\circ\gamma$ 是一个到CS 中的 (k,c)-拟等距嵌入。我们将证明 $\gamma(\mathcal{Y})$ 具有常数为

$$D=E(\lambda k(4M(k,c)+9E+4+c)+\varepsilon)+3E,$$

其中 M 是 E-双曲空间中测地线的莫尔斯控制函数。任取两点 $x,y\in\gamma(\mathcal{Y})$ 以及任意一个域 $U\in\mathfrak{S}-\{S\}$。若 $d_U(\pi_U(x),\pi_U(y))\leqslant E$，则结论成立；因此反设 $d_U(\pi_U(x),\pi_U(y))>E$。

设 α 是一条从 $\pi_S(x)$到 $\pi_S(y)$的 CS-测地线。有界测地线像公理意味着 α 必须与 ρ_S^U的 E-邻域相交。令 $A\subseteq\alpha$ 为ρ_S^U的 E-邻域中的点集。注意，$\operatorname{diam}(A)\leqslant 3E$，因为 ρ_S^U 的直径至多为 E。现在根据 $d_S(\pi_S(x),A)$ 和 $d_S(\pi_S(y),A)$的大小，需要考虑三种情况。

情形 1： 令 $d_S(\pi_S(x),A)\leqslant M(k,c)+3E+2$和 $d_S(\pi_S(y),A)\leqslant M(k,c)+3E+2$。于是由三角不等式可得

$$d_S(\pi_S(x),\pi_S(y))\leqslant d_S(\pi_S(x),A)+\operatorname{diam}(A)+d_S(A,\pi_S(y))\leqslant 2M(k,c)+9E+4.$$

然而，$\pi_S\circ\gamma$是一个 (k,c)-拟等距嵌入，而 γ是一个 (λ,ε)-拟等距嵌入。取满足 $\gamma(s_1)=x$ 和 $\gamma(s_2)=y$的 $s_1,s_2\in\mathcal{Y}$，由 π_U 是 (E,E)-粗利普希茨可得

$$\begin{aligned}d_U(\pi_U(x),\pi_U(y))&\leqslant E\cdot d_{\mathcal{X}}(x,y)+E\\&\leqslant E(\lambda\cdot d_{\mathcal{Y}}(s_1,s_2)+\varepsilon)+E\\&\leqslant E(\lambda k(d_S(\pi_S(x),\pi_S(y))+c)+\varepsilon)+E\\&\leqslant E(\lambda k(2M(k,c)+9E+4+c)+\varepsilon)+E\\&\leqslant D,\end{aligned}$$

这就完成了第一种情形的证明。

情形 2： 设 $d_S(\pi_S(x),A)>M(k,c)+3E+2$和 $d_S(\pi_S(y),A)>M(k,c)+3E+2$。选取一点 $z\in A$，使得 $d_S(\pi_S(x),z)<d_S(\pi_S(x),A)+0.5$。令$z'\in\alpha$ 为满足以下条件的点

$$d_S(\pi_S(x),z')=d_S(\pi_S(x),z)-M(k,c)-3E-1,\tag{11}$$

这是因为 $d_S(\pi_S(x),\ A)>M(k,\ c)+3E+2$ 的存在。同样，选取一点$w\in A$使得 $d_S(\pi_S(y),\ w)<d_S(\pi_S(y),\ A)+0.5$，并令 $w'\in\alpha$ 为满足 $d_S(\pi_S(y),\ w')=d_S(\pi_S(y),\ w)-M(k,\ c)-3E-1$的点。

由于 $\pi_S \circ \gamma$ 是映入 E-双曲空间CS的 (k,c)-拟等距嵌入，依据引理 2.9，$\pi_S \circ \gamma$ 是某个 $(M'; k,c)$-稳定嵌入，其中 M' 依赖于 k, c 和 E。根据引理 2.10，存在一个 $(M''; k,c)$-莫尔斯拟测地线 $\eta \subset \pi_S \circ \gamma(\mathcal{Y})$，其端点位于 α上，其中 M'' 依赖于 M',k 和 c。接着，由于 α 是 E-双曲空间中的一条测地线，存在点 $a, b \in \gamma(\mathcal{Y})$ 使得 $d_S(\pi_S(a), z') \leqslant M(k,c)$ 且 $d_S(\pi_S(b), w') \leqslant M(k,c)$。考虑一条从 $\pi_S(a)$ 到 $\pi_S(x)$ 的 CS-测地线。反设沿着这条测地线存在一点 q，它位于 ρ_S^U 的 E-邻域内。那么 $d_S(q,z) \leqslant 3E$。利用 (11)，我们有

$$\begin{aligned} d_S(\pi_S(x), z) &\leqslant d_S(\pi_S(x), q) + d_S(q, z) \\ &\leqslant d_S(\pi_S(x), \pi_S(a)) + 3E \\ &\leqslant d_S(\pi_S(x), z') + d_S(\pi_S(a), z') + 3E \\ &\leqslant d_S(\pi_S(x), z') + M(k,c) + 3E \\ &= d_S(\pi_S(x), z) - M(k,c) - 3E - 1 + M(k,c) + 3E \\ &= d_S(\pi_S(x), z) - 1, \end{aligned}$$

这与假设矛盾。因此，没有从 $\pi_S(x)$ 到 $\pi_S(a)$ 的 CS-测地线与 ρ_S^U的 E-邻域相交，因此有界测地线像公理推出$d_U(\pi_U(x),\ \pi_U(a)) < E$。同样的论证可推出 $d_U(\pi_U(y),\ \pi_U(b)) < E$。由三角不等式，

$$\begin{aligned} d_S(\pi_S(a), \pi_S(b)) &\leqslant d_S(\pi_S(a), z') + d_S(z', z) + \operatorname{diam}(A) + d_S(w, w') + d_S(w', \pi_S(b)) \\ &\leqslant M(k,c) + (M(k,c) + 3E + 1) + 3E + (M(k,c) + 3E + 1) + M(k,c) \\ &= 4M(k,c) + 9E + 2. \end{aligned}$$

令 $t_1,\ t_2 \in \mathcal{Y}$满足 $\gamma(t_1) = a$和 $\gamma(t_2) = b$。由于 π_U是 $(E,\ E)$-粗利普希茨的，映射 γ 是一个 $(\lambda,\ \varepsilon)$- 拟等距嵌入，而 $\pi_S \circ \gamma$ 是一个 $(k,\ c)$- 拟等距嵌入，因此我们有

$$\begin{aligned} d_U(\pi_U(x), \pi_U(y)) &\leqslant d_U(\pi_U(x), \pi_U(a)) + d_U(\pi_U(a), \pi_U(b)) + d_U(\pi_U(y), \pi_U(b)) \\ &\leqslant d_U(\pi_U(a), \pi_U(b)) + 2E \\ &\leqslant E \cdot d_{\mathcal{X}}(a, b) + E + 2E \\ &\leqslant E(\lambda \cdot d_{\mathcal{Y}}(t_1, t_2) + \varepsilon) + 3E \\ &\leqslant E(\lambda k(d_S(\pi_S(a), \pi_S(b)) + c) + \varepsilon) + 3E \\ &\leqslant E(\lambda k(4M(k,c) + 9E + 2 + c) + \varepsilon) + 3E \\ &\leqslant D, \end{aligned}$$

完成第二种情况。

情形 3： 假设 $d_S(\pi_S(x), A)$ 或 $d_S(\pi_S(y), A)$ 中只有一者大于$M(k,\ c) + 3E + 2$。不失一般性，设 $d_S(\pi_S(x), A) > M(k,c) + 3E + 2$。按照情形 (2) 中的论证，构造点 $z, z' \in \alpha$ 和 $a \in \gamma(\mathcal{Y})$。根据三角不等式，

$$\begin{aligned} d_S(\pi_S(a), \pi_S(y)) &\leqslant d_S(\pi_S(a), z') + d_S(z', z) + \operatorname{diam}(A) + d_S(A, \pi_S(y)) \\ &\leqslant M(k,c) + (M(k,c) + 3E + 1) + 3E + (M(k,c) + 3E + 2) \\ &= 3M(k,c) + 9E + 3. \end{aligned}$$

再次设 $t_1, t_2 \in \mathcal{Y}$ 满足 $\gamma(t_1) = a$ 和 $\gamma(t_2) = y$。与情形 2 中一样，我们有

$$\begin{aligned} d_U(\pi_U(x), \pi_U(y)) &\leqslant d_U(\pi_U(x), \pi_U(a)) + d_U(\pi_U(a), \pi_U(y)) \\ &\leqslant E + d_U(\pi_U(a), \pi_U(y)) \\ &\leqslant E + E \cdot d_{\mathcal{X}}(a, y) + E \\ &\leqslant E(\lambda \cdot d_{\mathcal{Y}}(t_1, t_2) + \varepsilon) + 2E \\ &\leqslant E(\lambda k(d_S(\pi_S(a), \pi_S(y)) + c) + \varepsilon) + 2E \\ &\leqslant E(\lambda k(3M(k, c) + 9E + 3 + c) + \varepsilon) + 2E \\ &\leqslant D, \end{aligned}$$

完成第三种情形。因此，无论是哪种情形，γ 都具有 D有界投影。□

下面的结果结合定理 3.18 和引理 4.1，说明对于相对层次双曲空间 $\mathcal{X}$ 上给定的适当初始条件，由定理 3.14 得到的最大化相对层次双曲空间结构的顶层空间是针对 $\mathcal{X}$ 的莫尔斯可检测空间，因此 $\mathcal{X}$ 具有 Morse 局部到整体性质。

定理 4.2。设 $\mathcal{X}$是一个测地度量空间，且 $(\mathcal{X}、\mathfrak{S})$ 是具有 $|\mathfrak{S}| > 1$、干净容器、有界域二分性和无界极小乘积的相对层次双曲空间。拟等距嵌入 $\gamma\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 是稳定嵌入，当且仅当 $\pi_S \circ \gamma$ 是到 $\mathcal{T}_S$ 中的拟等距嵌入，其中 $\mathcal{T}_S$ 是最大化结构的顶层空间。

证明。设 $\gamma\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 是一个拟等距嵌入。首先，假设 γ 是稳定嵌入。根据定理 3.18，$\gamma(\mathcal{Y})$ 具有 D' 有界投影。因此，引理 4.1 蕴含 $\pi_S \circ \gamma$ 是一个拟等距嵌入。

反过来，假设 $\pi_S \circ \gamma$ 是一个拟等距嵌入。引理 4.1 表明，$\gamma(\mathcal{Y})$ 具有 D有界投影。由定理 3.18 可知，对于某个 D'，$\gamma(\mathcal{Y})$ 是 D'收缩的。由于 $\gamma(\mathcal{Y})$ 是收缩的，根据 [DT15，推论 4.3]，它是一个稳定嵌入。□

推论 4.3。设 $\mathcal{X}$是一个测地度量空间，且 $(\mathcal{X}、\mathfrak{S})$ 是一个相对层次双曲空间，具有 $|\mathfrak{S}| > 1$、干净容器、有界域二分性和无界极小乘积。则 $\mathcal{X}$ 具有 *Morse* 局部到整体性质。

证明。 E-相对 HHS $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 具有有界域二分性和无界极小乘积，因此由定理 3.14 可知，存在一个 E'-相对 HHS 结构 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{T})$，其具有无界乘积。此外，$\mathfrak{T}$的构造给出了一个 $(E',\ E')$-粗利普希茨映射 $\pi_S\colon \mathcal{X} \to \mathcal{T}_S$，其中 $\mathcal{T}_S$ 是 E'-双曲的。我们将证明 $\mathcal{X}$ 是莫尔斯可检测的。

对于定义 2.15 的第一个条件，固定一个 $(M;\ \lambda,\ \varepsilon)$-莫尔斯拟测地线$\gamma\colon I \to \mathcal{X}$。根据引理 2.8，$\gamma$ 是一个稳定嵌入。因此，定理 4.2 意味着$\pi_S \circ \gamma$是一个 $(k,\ c)$-拟测地线，其中 k 和 c 由 λ、ε、M 以及 $(\mathcal{X},\ \mathfrak{S})$ 的层级常数所决定。

对于第二个条件，设 $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$be 一条 (λ, ε)-拟测地线，使得 $\pi_S \circ \gamma$is 是 (k, c)-拟测地线，且位于 CS 中。定理 4.2 表明 $\gamma$is 是一个 M'-稳定嵌入，因此特别地，对于某个莫尔斯控制函数 M'，它是 M'-Morse。由此，定义 2.15 的条件 (2) 得到满足。因此，我们证明了 $\mathcal{X}$ is 是莫尔斯可检测的，故根据定理 2.16，它具有 Morse 局部到整体性质。□

5. The Morse Local-to-Global Property for Graph Products

本节最终将证明，无限 Morse 局部到整体群的图乘积也具有 Morse 局部到整体性质。首先，我们在定理 3.14 中指出，初始相对 HHS 结构应当具有干净容器：这是因为由此得到的结构确实是一个相对 HHS，而且图乘积作为层双曲群来看时也具有干净容器，正如下述命题所示。

命题 5.1. 图乘积具有带干净容器的相对 *HHG* 结构。

证明。设 G_Γ 是一个图乘积。为 G_Γ 赋予定理 2.37 中的相对 HHG 结构。考虑平行类 $[h\Omega] \subsetneq [g\Lambda]$ 和 $[k\Pi]$，使得$[k\Pi] \sqsubseteq [g\Lambda]$ 且 $[k\Pi] \perp [h\Omega]$。那么，由 [BR22, Lemma 4.6] 可得容器$[a(\mathsf{lk}(\Omega) \cap \Lambda)]$，其中 $a \in G_\Gamma$ 满足 $[a\Lambda] = [g\Lambda]$ 且 $[a\Omega] = [h\Omega]$。显然，$\mathsf{lk}(\Omega) \cap \Lambda \subset \mathsf{lk}(\Omega)$，并且根据构造，$[a\Omega] = [h\Omega]$，因此由[BR22, Theorem 3.23]可知，$[a(\mathsf{lk}(\Omega) \cap \Lambda)] \perp [h\Omega]$。因此，$G_\Gamma$ 具有干净容器。□

命题 5.2。没有孤立顶点的无限群的图乘积具有一个带有 $|\mathfrak{S}| > 1$、干净容器、有界域二分性和无界极小乘积的相对 *HHG* 结构。

证明。设 G 是一个图乘积，其对应的有限单纯图为 Γ，且没有孤立顶点，并设 G 的所有顶点群都是无限的。根据 [BR22] 定理 4.，G 上存在一个相对 HHG 结构；在 [BR22], 的语言中，其域是陪集的平行类 $g\Lambda$，其中 Λ 是对应于子图 $\Lambda \subseteq \Gamma$ 的子群。特别地，由于 Γ 没有孤立顶点，它包含多于一个顶点，因此 $|\mathfrak{S}| > 1$。此外，根据相对 HHG 的定义，G 具有有界域二分性，并根据命题 5.1 具有干净容器。最后，设 $[g\Lambda] \in \mathfrak{S}$ 是一个带有 $\mathbf{F}^{[g\Lambda]}$ 无界的 $\sqsubseteq$-极小域。域 $[g\Lambda]$ 是 $\sqsubseteq$-极小的，这意味着 Λ 不包含真子图，因此它是单个顶点。此外，Γ 没有孤立顶点，因此存在另一个与 Λ 相连的顶点，我们将其子图记为 Ω。于是根据 [BR23], 定理 3.，域 $[g\Lambda]$ 和 $[g\Omega]$ 正交。由于根据假设每个顶点都对应于一个无限群，$C([g\Omega])$ 是无界的，因此 $\mathbf{E}^{[g\Lambda]}$ 是无界的。因此，G 具有无界极小乘积。于是，G 的凯莱图是一个测地度量空间，并且是一个具有 $|\mathfrak{S}| > 1$、干净容器、有界域二分性和无界极小乘积的相对层次双曲空间。□

以下推论可由命题 5.2 和推论 4.3 立即得出。

推论 5.3。没有孤立顶点的无限群的图乘积具有 *Morse* 局部到整体性质。

对于没有孤立顶点的图乘积，最大化结构中的顶层空间可以明确描述。正如下述推论所描述的，这个空间已知是双曲的，见 [Gen24，命题 6。4] 和[BR22，引理 4。1]。推论 5.4 也与 [BCK+25，定理 1. 相呼应；该定理由他人同时独立证明，并为没有孤立顶点的无限群图乘积提供了一个类似的空间。

推论 5.4。 设 G_Γ 是没有孤立顶点的无限群图乘积。设 S 是 G_Γ的有限生成集，且 $H \leqslant G_\Gamma$ 是一个有限生成子群。那么， H 稳定，当且仅当 H 到

$$\mathrm{Cay}\left(G_\Gamma, \bigcup_{\{\Lambda\subset\Gamma \mid \mathrm{lk}(\Lambda)\neq\varnothing\}} G_{\mathrm{st}(\Lambda)} - \{\mathrm{id}\}\right)$$

是拟等距嵌入。

证明。设 $(G_\Gamma, \mathfrak{S})$ 是 G_γ 上的相对 HHG 结构，并设 $(G_\Gamma, \mathfrak{T})$ 是命题 5.2 和定理 3.14 给出的具有无界乘积的相对 HHG 结构。设 $\mathcal{T}_S$ 是 $(G_\Gamma, \mathfrak{T})$ 的顶层空间，因此由定理 4.2 可知，子群 $H \leqslant G_\Gamma$ 稳定，当且仅当 H 到 $\mathcal{T}_S$ 的轨道映射是拟等距嵌入。剩下只需证明， $\mathcal{T}_S$ 是通过对具有非空链接的诱导子图所关联的子群进行锥化而得到的。按照定理 3.14 中的构造，顶层空间 $\mathcal{T}_S$ 是通过对所有满足 F_U 和 E_U 均无界的 U 的切片 $\mathrm{F}_U \times \{\vec{e}\}$ 进行锥化而得到的，因此这些域的乘积区域将被锥化。对于由无限群构成的多顶点连通图积，每个平行类的 F_U 都是无界的，因为 F_U 包含至少一个顶点群的凯莱图，而所有顶点群都是无限的。若某个平行类 $U = [g\Lambda]$ 的 E_U 无界，则必须存在另一个平行类 $V = [h\Omega]$ ，使得 $[g\Lambda] \perp [h\Omega]$ ，且 $\mathfrak{T}_V$ 包含一个关联测地空间无限的域。只要 $[h\Omega]$ 存在，这种情况就总会发生，因为每个顶点群都是无限的。回顾定义 2.42， $[g\Lambda] \perp [h\Omega]$ 当且仅当 $\Lambda \subseteq \mathrm{lk}(\Omega)$ ，并且存在一个群元素 $k \in G_\Gamma$ 使得$[g\Lambda] = [k\Lambda]$ 且 $[h\Omega] = [k\Omega]$。因此， E_U 无界的平行类恰好是具有非空链接的平行类。由于与某个平行类的乘积区域相关联的域，恰好是其诱导子图的星中的那些域，因此所得空间恰好就是推论陈述中的空间。□

值得注意的是， [BCK+25中的定理 1.2] 所述空间与本文中的空间拟等距。 [BCK+25中定理 1.2] 所述空间是棱柱复形的接触图；按照 [BCK+25 引理 2.8]中的说法，它与将 [Gen17, GM19], 中顶点的星图的陪集锥化后得到的空间拟等距。我们则将所有具有非空链接的诱导子图的星图的陪集锥化。

命题 5.5。 设 G_Γ 是一个连通图乘积。那么

$$\mathrm{Cay}\left(G_\Gamma, \bigcup_{\{\Lambda\subset\Gamma \mid \mathrm{lk}(\Lambda)\neq\varnothing\}} G_{\mathrm{st}(\Lambda)} - \{\mathrm{id}\}\right) \simeq_{\mathrm{Q.I.}} \mathrm{Cay}\left(G_\Gamma, \bigcup_{v\in V(\Gamma)} G_{\mathrm{st}(v)} - \{\mathrm{id}\}\right).$$

证明。 将这些锥化

$$A = \mathrm{Cay}\left(G_\Gamma, \bigcup_{\{\Lambda\subset\Gamma \mid \mathrm{lk}(\Lambda)\neq\varnothing\}} G_{\mathrm{st}(\Lambda)} - \{\mathrm{id}\}\right); B = \mathrm{Cay}\left(G_\Gamma, \bigcup_{v\in V(\Gamma)} G_{\mathrm{st}(v)} - \{\mathrm{id}\}\right).$$

由于 G_Γ 是一个连通图乘积，单个顶点是一个链接非空的子图，因此 A 是 B的锥化。接下来要证明，对于任意链接非空的 $\Lambda \subset \Gamma$，完全包含在 $G_{\mathrm{st}(\Lambda)}$ 中的任何词，其长度在 B中都由一个统一常数界定。设 $g = g_1 g_2 \cdots g_n$ 是 G_Γ中的某个词

完全包含在 $G_{\mathrm{st}(\Lambda)} = G_\Lambda \times G_{\mathrm{lk}(\Lambda)}$中。 g 的每个元素要么包含在 G_Λ 中，要么包含在 $G_{\mathrm{lk}(\Lambda)}$中，并且 g 可以写成 $g = h_1k_1h_2k_2\cdots h_mk_m$，其中 $h_i \in G_\Lambda$且 $k_i \in G_{\mathrm{lk}(\Lambda)}$，对 $i \in \{1,2,...,m\}$成立。由于 G_Λ 和 $G_{\mathrm{lk}(\Lambda)}$ 中的元素彼此交换， g可以重新排列为 $h_1h_2\cdots h_mk_1k_2\cdots k_m$。固定顶点 v, w，使得 $v \in \mathrm{lk}(\Lambda)$且 $w \in \Lambda$。于是 $h_1h_2\cdots h_m \in \mathrm{st}(v)$ 且 $k_1k_2\cdots k_m \in \mathrm{st}(w)$。因此， g 在 B中的长度为2，所以 A 和 B 拟等距。□

最后，我们将推论 5.3 推广到含有孤立顶点的图乘积情形，其中每个顶点群都是无限的 Morse 局部到整体群。

推论 5.6. 无限 *Morse* 局部到整体群的图乘积是 *Morse* 局部到整体群。

证明。设 Γ 是与图乘积 G 相关联的有限单纯图。根据图乘积的定义， G 是其连通分支的自由积。因此，若与 Γ 的每个连通分支相关联的子群都是 Morse 局部到整体群，那么由 [RST22，定理 5.1] 可知， G 是 Morse 局部到整体群。设 H 是与单个连通分支 $\Lambda \subseteq \Gamma$ 相关联的子群。若 Λ 是单个顶点，则根据假设， H 是 Morse 局部到整体群。若 Λ 包含多个顶点，则 H 是不含孤立顶点的无限群的图乘积，并由推论 5.3 可知是 Morse 局部到整体群。□

References

[ABD21] Carolyn Abbott、Jason Behrstock 和 Matthew Durham。分层双曲群中最大的无挠拟作用与稳定性。*Mathematical Society Series B* 8 3 66 104, 2021 *Transactions of the American* ，

，（）：–。[ABR25] Carolyn Abbott 、 Jason Behrstock 和 Jacob Russell。分层双曲边界的结构不变性质。 *Journal of topology and analysis*，17(03)：859–903，2025。[BCK+25] Sahana H. Balasubramanya、Marissa Chesser、Alice Kerr、Johanna Mangahas 和 Marie Trin。图乘积的稳定子群。 *arXiv preprint arXiv:2511.11176*，2025。[BHS17] Jason Behrstock、Mark F. Hagen 和 Alessandro Sisto。分层双曲空间与群的渐近维数和小消去。 *Proceedings of the London Mathematical Society*，114(5)：890–926，2017。[BHS19] Jason Behrstock、Mark F. Hagen 和 Alessandro Sisto。分层双曲空间 II：组合定理与距离公式。 *Pacific Journal of Mathematics* 299 2 257 ，（）：–338，2019。[BHS21] Jason Behrstock、Mark F. Hagen 和 Alessandro Sisto。分层双曲空间中的拟平坦。 *Duke Mathematical Journal*，170(5)：909–996，2021。[BR22] Daniel Berlyne 和 Jacob Russell。图乘积的层次双曲性。*Groups Geometry and Dynamics*，16(2)：523–580，2022。[CRHK24] Montserrat Casals-Ruiz、Mark F. Hagen 和 Ilya Kazachkov。分层双曲群的实立方化与渐近锥。*https://www.wescac.net/cones july 2024-public.pdf* 2024 *Preprint available at* 。[

CRSZ22] Matthew Cordes、Jacob Russell、Davide Spriano 和 Abdul Zalloum。Morse 测地线的正则性与稳定子群的增长。 *Journal of Topology* 15 3 1217 1247, ，（）：–。2022

[DK18] Cornelia Drutu 和 Michael Kapovich。 *Geometric group theory*，第 63 卷。美国数学学会，2018。[DSZ25] Cornelia Drutu、Davide Spriano 和 Stefanie Zbinden。具有有界梳理的空间中的弱 Morse 性质。 *arXiv preprint arXiv:2503.21325*，2025。[DT15] Matthew Durham 和 Samuel J. Taylor。映射类群中的凸余紧性与稳定性。 *Algebraic & Geometric Topology*，15(5)：2837–2857，2015。

[Gen17] Anthony Genevois. *Cubical-like geometry of quasi-median graphs and applications to geometric group theory* 2017 。博士论文，艾克斯-马赛大学，。[Gen24] Anthony Genevois. *Automorphisms of graph products of groups and acylindrical hyperbolicity* 301 2024 ，第 卷。美国数学学会，。[GM19] Anthony Genevois 和 Alexandre Martin。从几何视角看群的图乘积的自同构。*Proceedings of the London Mathematical Society*，119(6)：1745–1779，2019。[Gre90] Elisabeth R. Green。*Graph products of groups*。博士论文，利兹大学，1990。[Gro87] Mikhael Gromov。双曲群。载于 *Essays in group theory*，第 75–263 页。施普林格，1987。[HSZ24] Vivian He、Davide Spriano 和 Stefanie Zbinden。Morse 局部到整体群中 Morse 边界的 σ-紧性及其在平稳测度中的应用。*arXiv preprint arXiv:2407.18863*，2024。[RST22] Jacob Russell、Davide Spriano 和 Hung Cong Tran。Morse 拟测地线的局部到整体性质。*Mathematische Zeitschrift*，300(2)：1557–1602，2022。[RST23] Jacob Russell、Davide Spriano 和 Hung Cong Tran。分层双曲空间中的凸性。*Algebraic & Geometric Topology*，23(3)：1167–1248，2023。[Rus22] Jacob Russell。从层次双曲性到相对双曲性。*Research Notices* 2022 1 575 624, 2022 *International Mathematics* ，（）：–。[SZ24] Alessandro Sisto 和 Abdul Zalloum。内射空间的 Morse 子集是强收缩的。*Groups, Geometry, and Dynamics*，2024。[Tao24] Bingxue Tao。相对分层双曲群的 (qt) 性质。*preprint arXiv:2412.20065* 2024 *arXiv* 。