arXiv:2601.09934v1 [math.OA] 14 Jan 2026

适用于相空间量子力学的分布代数。II. Moyal代数上的拓扑

约瑟夫·C·V´arilly 和若´é M. Gracia-Bond´ıa

哥斯达黎加大学数学学院，哥斯达黎加圣何塞 11501

《数学物理学杂志》**29**（1988），880–887

摘要

Moyal $*$代数的拓扑可以通过三种方式定义：可以将该代数视为构型空间或相空间本身上的光滑衰减函数空间上的算子代数；也可以通过分布的希尔伯特空间（或其他巴拿赫空间）滤子来构造 $*$代数。我们证明由此得到的三种拓扑彼此等价。因此，通过用巴拿赫子空间对温和分布空间进行滤子化，我们给出相空间函数通过 Weyl对应规则对应于迹类算子的新的充分条件。

1 引言

在上一篇文章 [1]（下文简称**I**）中，我们为量子力学的相空间表述奠定了一个颇有前景的数学框架。本文将得到一些不那么直接的结果，这与**I**中所概述计划的初步阶段相一致。

通过将 Moyal $*$-代数 $\mathcal{M}$ 刻画为一族巴拿赫空间的适当定义的极限，可以获得大量信息；这些空间构成了相空间上温和分布空间的一个滤子。事实上，我们引入了这一滤子的若干变体，具体取决于采用希尔伯特代数还是其他类型的巴拿赫代数。

为 $\mathcal{M}$定义一种恰当的拓扑显然十分重要。出于物理上的原因，原则上我们应在 $\mathcal{M}$上考虑两种拓扑，具体取决于我们是希望将该理论与通常量子力学联系起来，还是希望在其自然背景下研究 $\mathcal{M}$ 中的动力学。由滤子给出了 $\mathcal{M}$ 上的第三种拓扑。我们将证明这三种拓扑是等价的。

本文结构如下。第 2 节回顾扭曲乘积和 Wigner积分变换，后者将扭曲乘积与核函数的复合联系起来。我们说明这一变换和核定理如何在 $\mathcal{M}$ 与代数 $\mathcal{L}_b(\mathcal{S}_1)$ 之间建立联系。我们还简述 Wigner变换和扭曲乘积如何为 Stone–von Neumann定理给出一种构造性证明。第 3 节介绍两种拓扑

在 $\mathcal{M}$上，首先将 $\mathcal{M}$ 视为构型空间上测试函数空间上的算子代数，其次将其视为相空间上函数上的算子代数；并证明这两种拓扑等价。第 4 节介绍（相空间上的）温和分布空间的滤子，并用这些滤子刻画 $\mathcal{M}$ 。基于这一刻画，我们得到 $\mathcal{M}$上的第三种拓扑，并证明它与前两种拓扑等价。第 5 节中，我们给出一些条件，这些条件意味着相空间上的某些函数在量子力学的通常表述中对应于迹类算子。

2 扭曲乘积与核定理

在相空间量子力学的通常方法中，通过函数与算子之间的 Weyl 对应 [2–4]， L^2 函数对应于希尔伯特–施密特算子；由于这些算子具有 L^2 核，我们可以通过某种将 $L^2(\mathrm{R}^{2N})$ 映射到自身的变换，把扭曲乘积与积分核的复合联系起来。事实证明，这种变换正是 Wigner [5, 6] 提出的方案，用于将相空间上的“分布函数”与 Schr¨odinger 波函数联系起来。此外，它将 **I** 中的扭曲厄米基映射为$L^2(\mathrm{R}^{2N})$上的普通厄米特基。我们还可以基于 Cressman [7]的观察继续推进：Wigner 变换使我们能够将核定理迁移到扭曲乘积演算中，从而用更熟悉的空间来刻画 Moyal $*$-代数 $\mathcal{M}$。

我们沿用**I**中的记号。此外，我们用 $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}(\mathrm{R})$ 和 $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}(\mathrm{R}^2)$ 表示 R 和 R^2，上快速衰减光滑函数的空间，并用 $\mathcal{S}_1', \mathcal{S}_2'$ 表示它们的温和分布对偶空间。当 $\phi, \psi \in \mathcal{S}_1$ 时，我们定义 $\phi \otimes \psi \in \mathcal{S}_2$为 $(\phi \otimes \psi)(q, p) := \phi(q)\psi(p)$。若 E, F是局部凸空间，则 $\mathcal{L}(E, F)$ 表示从 $E \to F$ 到 $E \to F$ 的连续线性映射空间；当 $E = F$ 时，我们将其简记为 $\mathcal{L}(E)$。

若 $f, g \in \mathcal{S}_2$ [或若 $f, g \in L^2(\mathrm{R}^2)$]，，我们记作

$$(f \circ g)(x, y) := \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x, z) g(z, y)\, dz$$

这就是 f和 g的“核乘积”。我们还通过以下方式引入从 $\mathcal{S}_2$ 映到 $\mathcal{S}_2$ 的映射 R、 Φ、W：

$$\begin{aligned}
(Rf)(x, y) &:= \left(\frac{x + y}{\sqrt{2}}, \frac{x - y}{\sqrt{2}} \right) \\
(\Phi f)(x, y) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x, z) e^{-iyz}\, dz \\
(Wf)(x, y) &:= (R\Phi^{-1} f)(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x + y}{\sqrt{2}}, z \right) e^{i(x-y)z/\sqrt{2}}\, dz.
\end{aligned}$$

显然， R 和“部分傅里叶变换” Φ，因而 W 都是从$\mathcal{S}_2$ 到其自身的 Fr´echet 空间同构，并可延拓为 $L^2(\mathrm{R}^2)$上的酉算子。我们称 W 为$\mathcal{S}_2$上的*Wigner*变换。它将 $\mathcal{S}_2$上的扭曲乘积与核乘积相互交织：

$$W(f \times g) = Wf \circ Wg. \tag{1}$$

事实上，由于 $W^{-1} = \Phi R^{-1} = \Phi R$，经过直接计算可得，对于 f， $g \in \mathcal{S}_2$， $W^{-1}(Wf \circ Wg) = f \times g$。恒等式 (1) 给出了魏尔算子形式体系与扭曲乘积演算之间的联系。

事实上，还有更强的结论：若集合 $\{\ f_{mn}\colon\ m,\ \ n\in\mathbb{N}\}$ 表示 $\mathcal{S}_2$ 在$\mathbf{I}$ 中讨论的“扭曲厄米基”：

$$f_{mn}(q,p)=2(-1)^n\sqrt{\frac{n!}{m!}}(q-ip)^{m-n}L_n^{m-n}(q^2+p^2)e^{-(q^2+p^2)/2} \tag{2}$$

(若 $m\geqslant n$； $f_{mn}:=f_{nm}^*$ 否则）；且若 $h_m\in\mathcal{S}_1$ 表示厄米函数

$$h_m(x):=\frac{1}{\sqrt{2^{m-1}m!}}H_m(x)e^{-x^2/2},$$

那么直接计算可得

$$W(f_{mn})=h_m\otimes h_n. \tag{3}$$

我们可以按通常方式，利用对偶将 W 延拓到 $\mathcal{S}_2'$。事实上，写作$W:=\overline{R\Phi}$，我们得到

$$\langle Wf,g\rangle=\langle R\Phi^{-1}f,g\rangle=\langle\Phi^{-1}f,Rg\rangle=\langle f,\Phi^{-1}Rg\rangle=\langle f,\overline{W}^{-1}g\rangle\quad\text{for}\quad f,g\in\mathcal{S}_2,$$

因此我们定义 WT 对 $T\in\mathcal{S}_2'$ 的作用为

$$\langle WT,h\rangle:=\langle T,\overline{W}^{-1}h\rangle\quad\text{for}\quad h\in\mathcal{S}_2.$$

类似地，我们可以定义 $W\!T,\ h:=T,\ W^{-1}h$。由于 $W^{-1}\colon\ \mathcal{S}_2\to\mathcal{S}_2$ 是一个拓扑同构，其转置 $W\colon\ \mathcal{S}_2'\to\mathcal{S}_2'$ 也是如此（其中 $\mathcal{S}_2'$ 赋有强对偶拓扑 [8,9]）。

现在 $\mathcal{S}_2$ 按以下方式作用于 $\mathcal{S}_1$

$$(f\cdot\phi)(x):=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(x,y)\phi(y)\,dy.$$

注意，对于 $f\in\mathcal{S}_2$、$\phi,\ \psi\in\mathcal{S}_1$，有 $f\cdot\ \phi,\ \psi\ =\frac{1}{\sqrt{2}}f,\ \psi\otimes\phi$。因此，对于$T\in\mathcal{S}_2'$、$\phi\in\mathcal{S}_1$，我们可以通过转置来定义 $T\cdot\ \phi$:

$$\langle T\cdot\phi,\psi\rangle:=\frac{1}{\sqrt{2}}\langle T,\psi\otimes\phi\rangle.$$

注记1。我们还注意到

$$(\phi\mid WT\cdot\psi)=\frac{1}{2}\langle T,\overline{W}^{-1}(\phi^*\otimes\psi)\rangle. \tag{4}$$

事实上，

$$(\phi\mid WT\cdot\psi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi^*,WT\cdot\psi\rangle=\frac{1}{2}\langle WT,\phi^*\otimes\psi\rangle=\frac{1}{2}\langle T,\overline{W}^{-1}(\phi^*\otimes\psi)\rangle.$$

恒等式 (4) 是莫亚尔联系，它连接了魏尔算子形式体系与维格纳函数的微积分。我们可以这样理解它：要计算可观测量T 在由态矢量 ψ,ϕ表示的纯态之间的跃迁概率，可以求算子 $WT\cdot$ 与右矢 $|\psi$ 和左矢 $\phi|$ （按狄拉克的术语）的内积；或者等价地，可以求 T 相对于维格纳“分布函数”的期望值

$$\overline{W}^{-1}(\phi^*\otimes\psi)=\int_{\mathbb{R}}\phi^*\left(\frac{q+t}{\sqrt{2}}\right)\psi\left(\frac{q-t}{\sqrt{2}}\right)e^{ipt}\,dt.$$

˜此外，若 $f, g, h \in \mathcal{S}_2$ 且若 $f(q,p) := f(p,q)$，则

$$\langle f \circ g, h\rangle = \langle f, h \circ \tilde{g}\rangle = \langle g, \tilde{f} \circ h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint f(q,t)g(t,p)h(q,p)\, dt\, dq\, dp$$

˜因此，通过转置，$T \circ f$定义为：$T \circ f, h := T, h \circ f$，其中 $T \in \mathcal{S}_2', f \in \mathcal{S}_2$.

引理 1. 若 $T \in \mathcal{S}_2', f \in \mathcal{S}_2$，且 $\phi, \psi \in \mathcal{S}_1$，则

(i) $W(T \times f) = WT \circ Wf$;
(ii) $T \circ (\phi \otimes \psi) = (T \cdot \phi) \otimes \psi$。

证明。由于 $WW^{-1}h = R\Phi^{-2}Rh = \tilde{h}$，我们得到

$$\begin{aligned}\langle W(T \times f), h\rangle &= \langle T, f \times \overline{W}^{-1}h\rangle = \langle \overline{W}T, W(f \times \overline{W}^{-1}h)\rangle \\ &= \langle \overline{W}T, Wf \circ \tilde{h}\rangle = \langle \widetilde{WT}, Wf \circ \tilde{h}\rangle \\ &= \langle WT, h \circ \widetilde{Wf}\rangle = \langle WT \circ Wf, h\rangle\end{aligned}$$

对于$h \in \mathcal{S}_2$。此外，

$$\begin{aligned}\langle T \circ (\phi \otimes \psi), h\rangle &= \langle T, h \circ (\psi \otimes \phi)\rangle = \langle T, (h \cdot \psi) \otimes \phi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle T \cdot \phi, h \cdot \psi\rangle = \langle (T \cdot \phi) \otimes \psi, h\rangle.\end{aligned}$$

□

记 $(ZT)(\phi) := T \cdot \phi$，温和分布的核定理 [9]指出，$Z$是从 $\mathcal{S}_2'$ 到 $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_1')$ 的同构。现在我们有以下定理。

定理 1. $ZW(\mathcal{M}_L) = \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$；此外，$\mathcal{M}_L$ 在扭曲乘积下构成一个代数，并且$ZW : \mathcal{M}_L \to \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ 是一个代数同构。

证明。 $T \in \mathcal{M}_L$当且仅当对所有 $f \in \mathcal{S}_2$，$T \times f \in \mathcal{S}_2$；这又当且仅当对所有形如 $W^{-1}(\phi \otimes \psi)$ 且$\phi, \psi \in \mathcal{S}_1$的 f，$T \times f \in \mathcal{S}_2$，因为 $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_1$ 在 $\mathcal{S}_2$ 中稠密，且 $f \mapsto T \times f$ 连续（见 **I**）。因此 $T \in \mathcal{M}_L$ 当且仅当

$$W(T \times W^{-1}(\phi \otimes \psi)) = WT \circ (\phi \otimes \psi) = (WT \cdot \phi) \otimes \psi = ZWT(\phi) \otimes \psi \in \mathcal{S}_2$$

对所有 $\phi, \psi \in \mathcal{S}_1$，$ZWT(\phi) \in \mathcal{S}_1$ 当且仅当对所有 $\phi \in \mathcal{S}_1$成立。这个结论成立是因为约化映射$\chi \otimes \psi \mapsto R, \psi\chi$对于任意 $R \in \mathcal{S}_1'$，均可通过线性和连续性延拓到完备射影张量积 $\mathcal{S}_1 \widehat{\otimes} \mathcal{S}_1 \simeq \mathcal{S}_2$，因此连续地将 $\mathcal{S}_2$ 映射到 $\mathcal{S}_1$。

与前面一样取 T, f，并令 $\chi \in \mathcal{S}_1$，则有

$$\begin{aligned}ZW(T \times f)(\chi) &= Z(WT \circ Wf)(\chi) = Z(WT \circ (\phi \otimes \psi))(\chi) \\ &= Z((WT \cdot \phi) \otimes \psi)(\chi) = ((WT \cdot \phi) \otimes \psi) \cdot \chi \\ &= WT \cdot \phi\langle \psi, \chi\rangle = WT \cdot (Z(\phi \otimes \psi)(\chi)) \\ &= ZWT(ZWf(\chi))\end{aligned}$$

并且，由于 $W(\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_1)$ 在 $\mathcal{S}_2]$ 中稠密，我们得到 $ZW(T \times f) = ZW(T)ZW(f)$，对任意 $f \in \mathcal{S}_2$, $T \in \mathcal{S}_2'$ 均成立。若 $S \in \mathcal{M}_L$，则有

$$\begin{aligned}\langle ZW(T \times S)(\phi), \psi \rangle &= \langle W(T \times S) \cdot \phi, \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle W(T \times S), \psi \otimes \phi \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle T, S \times \overline{W}^{-1}(\psi \otimes \phi) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle T, S \times W^{-1}(\phi \otimes \psi) \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \overline{W}T, WS \circ (\phi \otimes \psi) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \overline{W}T, ZWS(\phi) \otimes \psi \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle WT, \psi \otimes ZWS(\phi) \rangle = \langle ZWT(ZWS(\phi)), \psi \rangle\end{aligned}$$

对任意 $\psi \in \mathcal{S}_1$。特别地，若 $R \in \mathcal{M}_L$，则得到 $ZW(R \times S) = ZW(R)ZW(S) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$，并且由于 ZW 是单射：$\mathcal{S}_2' \to \mathcal{L}(\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_1')$，我们得出 $R \times S \in \mathcal{M}_L$，因此 $\mathcal{M}_L$ 实际上是一个代数，而 $ZW\mathcal{M}_L \to \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ 是一个双射同态。□

注 2。通过类似的论证，或者更直接地注意到 $(WT)^* = W(T^*)$，可以证明 $ZW\mathcal{M}_R \to \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ 是一个代数同构。

在继续之前，我们注意到 Wigner变换给出了 Stone–von Neumann定理的直接构造性证明。我们将 $(\mathcal{S}_2, \times)$ 视为一个算子代数，并考察其左正则表示 $\pi(f)g := f \times g$。若 $f_0(u) := 2e^{-u^2}$/ 2</style}，则定义 $\omega\colon \mathcal{S}_2 \to \mathbb{C}$ 为$\omega(g) := (f_0 \mid g \times f_0)$。该 ω 在 $\mathcal{S}_2$ 上是线性且连续的，并且 $\omega(g^* \times g) = \|g \times f_0\| \geqslant 0$。由于高斯函数 f_0 具有性质 $f_0 \times g \times f_0 = (f_0 \mid g)\, f_0$，我们有 $\omega(g) := (f_0 \mid g)$。

利用正泛函 ω，我们可以对 $\mathcal{S}_2$ 应用 Gelfand–Naımark–Segal 构造。我们注意到 $\mathcal{K} := \{ g \in \mathcal{S}_2 :\ g \times f_0 = g \}$ 和 $\mathcal{K}_0 := \{ g \in \mathcal{S}_2 :\ g \times f_0 = 0 \}$ 是 $\mathcal{S}_2$ 中的闭左理想；若 $\eta\colon \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_2/\mathcal{K}_0$ 是典范投影，则 $\mathcal{S}_2/\mathcal{K}_0$ 成为一个预希尔伯特空间，其内积为

$$(\eta(g) \mid \eta(f)) := \omega(g^* \times f) = (g \times f_0 \mid f \times f_0),$$

其完备化记作 $\mathcal{H}_\omega$，并且 $\eta(g) \mapsto \eta(f \times g)$ 可扩张为算子 $\pi_\omega(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\omega)$，满足 $\|\pi_\omega(f)\| \leqslant \|f\|$。

容易验证，若 $n \neq 0$，则 $\eta(f_{mn}) = 0$ 属于 $\mathcal{H}_\omega$；而集合 $\{ \eta(f_{m0}) :\ m \in \mathbb{N} \}$ 是 $\mathcal{H}_\omega$ 的标准正交基。现在，$\sum_{m,\ n=0}^{\infty} c_{mn} f_{mn}$ 属于 $\mathcal{K}$ 当且仅当 $c \in \boldsymbol{s}$（见 **I**），且对于 $n \neq 0$，$c_{mn} = 0$。因此，若在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上赋予范数，则 $\eta\colon \mathcal{K} \to \mathcal{H}_\omega$ 是等距映射，故可扩张为酉映射 $V\colon \mathcal{K} \to \mathcal{H}_\omega$，其中 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{K}$ 的 L^2-闭包。

若 $g = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} f_{mn} \in \mathcal{S}_2$ 且 $\pi_\omega(g) = 0$，则对所有 n，我们有

$$0 = \eta(g \times f_{n0}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{mn} \eta(f_{m0}),$$

因此所有 $c_{mn} = 0$：故 $\pi_\omega\colon \mathcal{S}_2 \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_\omega)$ 是 $\mathcal{S}_2$ 的忠实表示。利用舒尔引理，我们可以验证 π_ω 是不可约的。

定义投影算子 $P\colon L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R})$，其定义为 $P(\phi \otimes \psi) := (h_0 \mid \psi)\phi$；并定义 $Q\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}h_0$，其定义为 $Q(\phi) := \phi \otimes h_0$。于是 $PWV^{-1}\colon \mathcal{H}_\omega \to L^2(\mathbb{R})$ 是酉算子，逆算子为 $VW^{-1}Q$，且 $PWV^{-1}(\eta(f_{m0})) = h_m$。由此可计算得

$$PW(q \times f_{m0}) = \sqrt{m}\, h_{m-1} + \sqrt{m+1}\, h_{m+1} = \sqrt{2}\, q h_m,$$

类似地， $PW(p \times f_{m0}) = -\sqrt{2}\, i\hbar d h_m/dq$，因此

$$PW(q \times f) = \sqrt{2}\, qPWf, \quad PW(p \times f) = -\sqrt{2}\, i \frac{d}{dq} PWf \quad \text{for} \quad f \in \mathcal{K}.$$

我们将 $\pi_s(f) := PWV^{-1}\pi_\omega(f)VW^{-1}Q$ 记作 $f \in \mathcal{S}_2$；我们可以将 π_s 称为 $\mathcal{S}_2$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的薛¨丁格表示 。这就引出了 Stone–von Neumann定理，在当前语境下，该定理指出，扭曲乘积代数 $\mathcal{S}_2$ 的任意表示都等价于 π_s的一个重数表示；我们将证明左正则表示 π 满足这一结论，这可直接由 GNS 构造得出。将 π 分解的酉等价变换正是 Wigner 变换。

定理2. $W\pi(f)W^{-1} = \pi_s(f) \otimes \mathbb{1}$，对所有 $f \in \mathcal{S}_2$。

证明。 由引理 1，对于 $\phi, \psi \in \mathcal{S}_1$ 我们得到

$$\begin{aligned} W\pi(f)W^{-1}(\phi \otimes \psi) &= W(f \times W^{-1}(\phi \otimes \psi)) \\ &= Wf \circ (\phi \otimes \psi)) = (Wf \cdot \phi) \otimes \psi \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} \pi_s(f)\phi &= PWV^{-1}\pi_\omega(f)VW^{-1}(\phi \otimes h_0) \\ &= PWV^{-1}V(f \times W^{-1}(\phi \otimes h_0)) = Wf \cdot \phi \end{aligned}$$

对所有 $\phi, \psi \in \mathcal{S}_1$。由 S 于函数 $\phi \otimes \psi$ 生成了 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的一个稠密子空间，故得证。 □

注记 3. 在前面的讨论中，我们可以用 $\mathcal{S}_1$ 替换 $L^2(\mathbb{R})$，用 $\mathcal{S}_2$ 替换 $L^2(\mathbb{R}^2)$，并用 $\mathcal{M}_L$ 替换 $\mathcal{S}_2$。于是， PWV^{-1} 是从 $\mathcal{S}_2/\mathcal{K}_0$ 到 $\mathcal{S}_1$ 的 Fr´échet 空间同构，因此我们可以将表示 π_ω 和 π_s 扩展到 $\mathcal{M}_L$ （分别作用于 $\mathcal{S}_2/\mathcal{K}_0$ 和 $\mathcal{S}_1$）。现在令 π 表示 $\mathcal{M}_L$ 在其左理想 $\mathcal{S}_2$ 上的左正则表示，则定理2仍然成立；此外，我们还可以将 $\pi_s(q)\phi = \sqrt{2}\, q\phi$, $\pi_s(p)\phi = -\sqrt{2}\, i\, d\phi/dq$ 写作 $\phi \in \mathcal{S}_1$，从而使 Schr¨ödinger 表示 π_s 呈现出熟悉的形式，差别仅在于一个归一化因子。

注记 4. 从证明中可以看出，

$$(\pi_s(f)\phi)(x) = (Wf \cdot \phi)(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \iint_{\mathbb{R}^2} f\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, z\right) e^{i(x-y)z/\sqrt{2}} \phi(y)\, dz\, dy. \tag{5}$$

因此，算子 $\pi_s(f)$ 是与“符号” f 相联系的伪微分算子（按 H¨örmander [10] 的意义）。用更时髦的说法，这正是 Weyl量子化规则。若 $f = p^2/2m + V(q)$，由式 (5) 很容易至少形式上得到“Schr¨ödinger 算子”:$\pi_s(f) = -(2/m)\, \Delta + V(q)$。

3 $\mathcal{M}$上的算子拓扑

现在 $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$ 带有一个自然拓扑，即来自 $\mathcal{S}_1$ [上的有界子集上的一致收敛拓扑；在此拓扑下，它是一个完备的、核的、自反的局部凸空间 [11, 12],，通常记作 $\mathcal{L}_b(\mathcal{S}_1)$]。这是局部凸代数的标准例子，它既不是 Fr´échet 代数，也不是 DF 代数。令 $\mathcal{T}_1$ 为 $\mathcal{M}_L$ 上的唯一局部凸拓扑，使得 $ZW\colon (\mathcal{M}_L, \mathcal{T}_1) \to \mathcal{L}_b(\mathcal{S}_1)$ 是一个同胚。

为 $\mathcal{M}_L$ 赋予拓扑的第二种方法如下。若 $(\varepsilon_u\tau_u f)\,(v) := e^{iu'Jv} f(v-u)$，我们在 **I** 中证明了，对于所有 $T \in \mathcal{S}_2'$、$f \in \mathcal{S}_2$、$u \in \mathrm{R}^2$，有 $\varepsilon_u\tau_u(T \times f) = T \times (\varepsilon_u\tau_u f)$；此外还证明，若 $L\colon \mathcal{S}_2 \to \mathcal{E}(\mathrm{R}^2)$ 是一个与每个 $\varepsilon_u\tau_u$ 交换的连续线性映射，则对所有 $f \in \mathcal{S}_2$，均有 $L(f) = T \times f$，其中某个 $T \in \mathcal{S}_2'$。因此，记 $L_T(f) := T \times f$，可得

$$\{ L_S : S \in \mathcal{M}_L \} = \{ L \in \mathcal{L}_b(\mathcal{S}_2) : L\,\varepsilon_u\tau_u = \varepsilon_u\tau_u\,L \text{ for all } u \in \mathbb{R}^2 \}.$$

令 $\mathcal{T}_2$ 表示 $\mathcal{M}_L$ 上的拓扑，使得 $S \mapsto L_S$ 是从 $(\mathcal{M}_L, \mathcal{T}_2)$ 到 $\mathcal{L}_b(\mathcal{S}_2)$ 的这个闭子空间上的同胚，其中下标 b 表示 $\mathcal{S}_2$上有界子集的一致收敛拓扑。于是，我们有以下定理。

定理 3. $\mathcal{M}_L$ 上的拓扑 $\mathcal{T}_1$ 与 $\mathcal{T}_2$ 一致。

接下来，我们定义 $\mathcal{M}_R$ 上的拓扑，使得 $S \mapsto S^*$ 是从 $\mathcal{M}_L$ 到 $\mathcal{M}_R$的拓扑同构。最后，我们在交集 $\mathcal{M}_L \cap \mathcal{M}_R$上赋予 $\mathcal{M}$ 自然拓扑，即使两个包含映射 $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_L$、$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_R$ 都连续的最弱局部凸拓扑。根据$\mathcal{T}_1$的定义，我们已知 $\mathcal{M}$ 是一个完备、核的、半自反的局部凸 $*$ 代数，具有分别连续乘法和连续对合；另一方面，通过 $\mathcal{T}_2$，$\mathcal{M}$可视为 $\mathcal{S}_2$上的算子 $*$代数。这对于求解形如以下形式的 Schr¨丁格方程尤其有用

$$2i\,\frac{\partial U}{\partial t} = H \times U(t); \quad U(0) = \mathbb{1},$$

其中 $H \in \mathcal{M}$, $U(t) \in \mathcal{M}$ 对 $t \in \mathrm{R}$，使用算子半群理论。注意，半群性质给出 $U(s+t) = U(s)U(t)$。在此公式中，H表示一个与时间无关的哈密顿量，而 $U(t)$ 是与该哈密顿量相关的“扭曲指数” [13, 14] 或“演化函数” [15]，它与传统表述中的格林函数类似，包含系统的动力学信息。

定理 *3* 的证明。对于 $i = 1, 2$，令 $\mathcal{T}_i'$为 $W(\mathcal{M}_L)$ 上的局部凸拓扑，使得$W\colon (\mathcal{M}_L, \mathcal{T}_i) \to (W(\mathcal{M}_L), \mathcal{T}_i')$ 是一个同胚。只需证明 $\mathcal{T}_1' = \mathcal{T}_2'$。

$\mathcal{T}_1'$ 的一个零邻域的基本邻域具有如下形式

$$(A;V)_1 := \{ T \in W(\mathcal{M}_L) : T \cdot \phi \in V \text{ for all } \phi \in A \}$$

其中，A 是 $\mathcal{S}_1$ 的一个有界子集，而 V 是 $\mathcal{S}_1$中的一个零邻域。$\mathcal{T}_2'$ 的一个零邻域的基本邻域具有如下形式

$$(B;U)_2 := \{ T \in W(\mathcal{M}_L) : T \circ f \in U \text{ for all } f \in B \}$$

其中，B 是 $\mathcal{S}_2$ 中的有界子集，且 U 是 $\mathcal{S}_2$中的零邻域。由于 $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{S}_1$ [9]，只需考虑形如 $B = A_1 \otimes A_2$的 B，其中 A_1、A_2 是 $\mathcal{S}_1$中的有界子集；以及形如 $U = \Gamma(V_1 \otimes V_2)$的 U，即 $V_1 \otimes V_2$的闭绝对凸包，其中 V_1、V_2是 $\mathcal{S}_1$中的零邻域。由于 A_2 有界，我们可以找到 $r > 0$，使得 $A_2 \subset rV_2$；由于$r^{-1}V_1 \otimes rV_2 = V_1 \otimes V_2$，我们还可以假设 $A_2 \subset V_2$。

对于给定的 s uch $(B;\,U)_2$,设 $T \in (A_1;\,V_1)_1$, $\phi \in A_1$, $\psi \in A_2$; 那么由引理 1 可得

$$T \circ (\phi \otimes \psi) = (T \cdot \phi) \otimes \psi \in V_1 \otimes A_2 \subset V_1 \otimes V_2 \subset U$$

从而 $(B;\ U)_2$ 包含 $(A_1;\ V_1)_1$。

另一方面，设给定 $(A;\ V)_1$，其中 V 绝对凸。选取 $\psi \in \mathcal{S}_1$, $R \in \mathcal{S}_1'$，使得 $R,\psi\ = 1$，并令 $V_2 := \{\phi \in \mathcal{S}_1 :\ |R,\phi| \leqslant 1\}$。若 $T \in (A \otimes \{\psi\};\ \Gamma(V \otimes V_2))_2$ 且 $\phi \in A$，则 $T \circ (\phi \otimes \psi)\ = (T \cdot \phi)\ \otimes \psi$ 属于 $\Gamma(V \otimes V_2)$；应用约化映射 $\chi \otimes \omega \mapsto R,\omega\ \chi$，可得 $T \cdot \phi \in V$。因此，$(A;\ V)_1$ 包含一个形如 $(B;\ U)_2$ 的集合。

我们已证明 $\mathcal{T}_1', \mathcal{T}_2'$ 的零邻域基等价，因此 $\mathcal{T}_1' = \mathcal{T}_2'$，进而 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$。□

$\mathcal{S}_2'$ 的滤子

本节将介绍 $\mathcal{S}_2'$ 的若干滤子，据此可以刻画 $\mathcal{M}$。首先，我们从一种装备希尔伯特空间结构入手；在二维相空间中，该结构可由一个双参数希尔伯特空间族定义。（参见**I**，第 5 节。）在**I** 中，我们证明了式 (2) 的基函数 f_{mn} 关于测度 $(4\pi)^{-1}\,dq\,dp$ 正交归一，且 $f_{mn} \times f_{kl} = \delta_{nk} f_{ml}$，并且

$$H \times f_{mn} = (2m+1) f_{mn}, \qquad f_{mn} \times H = (2n+1) f_{mn}. \tag{6}$$

我们在**I** 中将希尔伯特空间 $\mathcal{G}_{s,\ t}$（对于 $s,\ t \in \mathbb{R}$）定义为 $\mathcal{S}_2$ 关于范数 $\|\cdot\|_{st}$ 的完备化，其中

$$\left\| \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} f_{mn} \right\|_{st}^2 := \sum_{m,n=0}^{\infty} (2m+1)^s (2n+1)^t |c_{mn}|^2, \tag{7}$$

并且我们观察到

$$\mathcal{S}_2 = \bigcap_{s,t \in \mathbb{R}} \mathcal{G}_{s,t}, \qquad \mathcal{S}_2' = \bigcup_{s,t \in \mathbb{R}} \mathcal{G}_{s,t} \tag{8}$$

在拓扑意义下。

回顾式 (3)，$W(\ f_{mn})\ = h_m \otimes h_n$，可得 $ZW(\ f_{mn})\ = |h_m h_n|$，由此可见，根据式 (7)，$ZW(\mathcal{G}_{0,\ 0}) = \mathcal{HS}(L^2(\mathbb{R}))$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的希尔伯特–施密特算子。接下来我们注意到

$$\begin{aligned} ZWH(h_m) \otimes h_n &= (WH \cdot h_m) \otimes h_n = WH \circ (h_m \otimes h_n) \\ &= W(H \times f_{mn}) = (2m+1) W(f_{mn}) = (2m+1) h_m \otimes h_n \end{aligned}$$

对所有 $m,n = 0,1,2,\ldots$；因此 $ZWH(h_m)\ = (2m+1) h_m$。这表明 $(ZWH)^{-1}$ 存在且属于 $\mathcal{HS}(L^2(\mathbb{R}))$。

定理 4. $\mathcal{M}_L = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{G}_{s,t}; \mathcal{M}_R = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{G}_{s,t}.$

证明。我们注意到，在范数 $\|\cdot\|_k$ 下，$\mathcal{H}_k := \mathcal{D}((ZWH)^k)$ 是一个希尔伯特空间，其中

$$\left\| \sum_{m=0}^{\infty} a_m h_m \right\|_k^2 := \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^{2k} |a_m|^2$$

并且 $\mathcal{S}_1 = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ 在拓扑意义下。

现在我们注意到， $T \in \mathcal{M}_L$ 当且仅当 $ZWT \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_1)$；当且仅当对于所有 $m \geqslant 0$，存在 $n \geqslant 1$ 使得$ZWT \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{n-1}, \mathcal{H}_m)$，或者等价地：

$$
\begin{aligned}
A := (ZWH)^m (ZWT)(ZWH)^{-n+1} &\in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R})), \\
(ZWH)^m (ZWT)(ZWH)^{-n} = A(ZWH)^{-1} &\in \mathcal{HS}(L^2(\mathbb{R})), \\
H^{\times m} \times T \times H^{\times(-n)} \in L^2(\mathbb{R}^2) = \mathcal{G}_{0,0}, \qquad T &\in \mathcal{G}_{2m,-2n},
\end{aligned}
$$

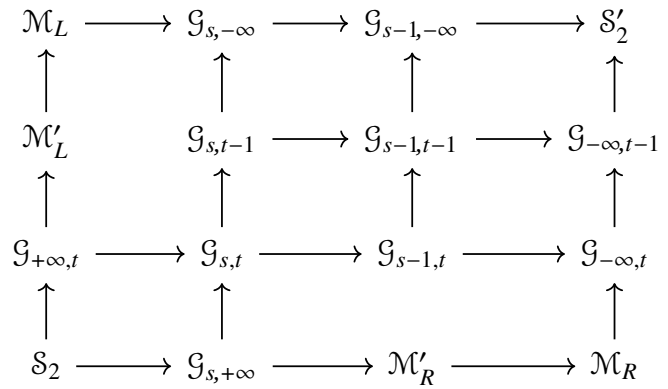
iff

$$
T \in \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_{2m,-2n} = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{G}_{s,t}.
$$

进一步注意到 $S \in \mathcal{M}_R$ 当且仅当 $S^* \in \mathcal{M}_L$ 且 $S^* \in \mathcal{G}_{t,\,s}$ 当且仅当 $S \in \mathcal{G}_{s,\,t}$，因此 $\mathcal{M}_R = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{G}_{s,\,t}$如所声称。□

注 5。观察到对于所有 m 和某个 n， $A(ZWH)^{-1}$ 是希尔伯特–施密特算子，这一发现归功于 J. Unterberger [17]，他以稍有不同的形式给出了这一结论。van Eijndhoven 和 de Graaf [18]针对广义特征值问题的基础性方法也运用了类似的思想。)

We 可以借助下图直观展示定理 4 的结论 :



这里我们令 $\mathcal{G}_{s,-\infty} := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{G}_{s,t}$, $\mathcal{G}_{-\infty,t} := \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{G}_{s,t}$；于是 $\mathcal{M}_L = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{G}_{s,-\infty}$, $\mathcal{M}_R = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{G}_{-\infty,t}$。这便给出了为 $\mathcal{M}_L$赋予拓扑的第三种方法：令 $\mathcal{G}_{s,-\infty}$ 具有最强的局部凸拓扑，使得所有包含映射 $\mathcal{G}_{s,t} \subset \mathcal{G}_{s,-\infty}$ 都是连续的。令 $\mathfrak{T}_3$ 表示 $\mathcal{M}_L$ 上的最弱局部凸拓扑，使得所有包含映射$\mathcal{M}_L \subset \mathcal{G}_{s,-\infty}$ 都是连续的。在图中，关于主对角线 [的反射，即 $(s,t) \mapsto (t,s)$]，表示复共轭，因此 $\mathcal{M}_R$ 的拓扑也以类似方式定义。由此，图中的每个箭头都表示一个连续（且稠密）的包含映射。

[为了完整起见，我们列出了左列和底行，尽管它们已在另一篇文章 [19] 中得到证明。我们记 $\mathcal{G}_{+\infty,\,t} := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{G}_{s,\,t}$（在拓扑意义下），并且在 [19] 中，我们证明了对偶空间 $\mathcal{M}'_L = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{G}_{+\infty,\,t}$（在拓扑意义下），且 $\mathcal{M}'_L \subset \mathcal{M}_L$。该图底行也有类似结果。]

注意，定理 4 给出的 $\mathcal{M}$ 刻画使我们能够判断以如下形式给出的分布

$$
T = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} f_{mn} \in \mathcal{S}'_2
$$

（只要该级数在 $\mathcal{S}_2'$ 中收敛）是否属于 $\mathcal{M}$。例如，

$$\text{if} \quad T := \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-m} f_{mn}, \quad \text{then} \quad \|T\|_{st}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^s e^{-2m} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^t,$$

当且仅当 $t < -1$时收敛；因此 $T \in \mathcal{M}_L$，但 $T \notin \mathcal{M}_R$。（此外，$T^* = \sum_{m,\,n=0}^{\infty} e^{-n} f_{mn}$ 属于 $\mathcal{M}_R$，但不属于 $\mathcal{M}_L$。）这表明 $\mathcal{M}$、$\mathcal{M}_L$、$\mathcal{M}_R$ 和 $\mathcal{S}_2'$ 彼此不同。

我们也可以用其他类型的巴拿赫空间对 $\mathcal{S}_2'$ 进行滤过，这些空间对应的不是希尔伯特–施密特算子，而是作用在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的迹类算子或有界算子。由于 ZW 是$\mathcal{G}_{0,\,0}$与 $\mathcal{HS}(L^2(\mathbb{R}))$之间的同构，我们引入

$$\mathcal{I}_{s,t} := \mathcal{G}_{s,0} \times \mathcal{G}_{0,t} := \{\, f \times g : f \in \mathcal{G}_{s,0},\ g \in \mathcal{G}_{0,t} \,\}.$$

由 (6) 和 (7) 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{s,t} &= \{\, H^{\times(-s/2)} \times f \times g \times H^{\times(-t/2)} : f, g \in \mathcal{G}_{0,0} \,\} \\ &= \{\, h \times k : h \in \mathcal{G}_{s,q},\ k \in \mathcal{G}_{-q,t} \,\} \quad \text{for any } q \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

当且仅当 ZW 是迹类算子时，$\mathfrak{h} \in \mathcal{I}_{0,0}$ 成立。因此（利用极分解），我们可以找到$u \in \mathcal{S}_2'$，使得 $u^* \times u = \mathbb{1}$ 且 $|\mathfrak{h}| \in \mathcal{I}_{0,0}$，从而 $\mathfrak{h} = u \times |\mathfrak{h}|$ 且 $|\mathfrak{h}| = f^* \times f$，其中 $f \in \mathcal{G}_{0,0}$。令$\|\mathfrak{h}\|_{00,1} := \mathbb{1}_{|\mathfrak{h}|} = \|f\|_{00}^2$，可见 $\mathcal{I}_{0,0}$ 是一个巴拿赫空间，且嵌入 $\mathcal{I}_{0,0} \subset \mathcal{G}_{0,0}$ 是连续的。由于根据 (7)，对于 $g \in \mathcal{G}_{s,t}$，有 $\|g\|_{st} = \|H^{\times(s/2)} \times g \times H^{\times(t/2)}\|_{00}$，我们可以定义

$$\|f\|_{st,1} := \|H^{\times(s/2)} \times f \times H^{\times(t/2)}\|_{00,1}$$

从而得到连续嵌入 $\mathcal{I}_{s,\,t} \subset \mathcal{G}_{s,\,t}$ 对所有 $s,\ t \in \mathbb{R}$。

接下来，令 $\mathcal{B}_{s,\,t}$为 $\mathcal{I}_{-t,\,-s}$在对偶关系 $(T \mid f)$ 下的对偶空间：$= \frac{1}{2} T^*,\ f$，其中$T \in \mathcal{B}_{s,\,t}, f \in \mathcal{I}_{-t,\,-s}$。$\mathcal{B}_{s,\,t}$自然嵌入于 $\mathcal{S}_2'$ 中。事实上，我们可以将 $\mathcal{B}_{s,\,t}$识别为 $\{\, T \in \mathcal{S}_2' :$对所有 $f \in \mathcal{I}_{-t,\,-s},\ T^*,\ f$ 均为有限$\}$。还要注意，[20] $\mathcal{B}_{0,\,0}$ 是这样的温和分布空间：它们与 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中任意函数的扭曲乘积都属于 $L^2(\mathbb{R}^2)$。其范数

$$\|T\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\, \|T \times f\|_{00} / \|f\|_{00} : f \in L^2(\mathbb{R}^2),\ f \neq 0 \,\}$$

在 $\mathcal{B}_{0,\,0}$上的范数与其作为 $\mathcal{I}_{0,\,0}$的对偶空间的范数一致（因此我们也顺带证明了：可分希尔伯特空间上迹类算子空间的对偶空间是有界算子空间）。由于 $\mathcal{G}_{s,\,t}$ 和 $\mathcal{G}_{-t,\,-s}$ 在该对偶关系下是对偶希尔伯特空间

$$\left(\sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} f_{mn} \,\middle|\, \sum_{k,l=0}^{\infty} d_{kl} f_{kl} \right) := \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}^* d_{mn}$$

我们得到一系列连续嵌入

$$\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{I}_{s,t} \subset \mathcal{G}_{s,t} \subset \mathcal{B}_{s,t} \subset \mathcal{S}_2' \tag{9}$$

其中，我们将 $\mathcal{B}_{s,t}$ 的范数定义为相对于 $\|\cdot\|_{-t,-s,1}$ 的对偶范数。将此范数记为 $\|\cdot\|_{st,\infty}$，可得

$$\|f\|_{st,1} = \|H^{\times(s/2)} \times f \times H^{\times(t/2)}\|_{00,1} \leqslant \|H^{\times(s/2)}\|_{00,1} \|f\|_{00,\infty} \|H^{\times(t/2)}\|_{00,1} \tag{10}$$

根据迹类算子的标准性质，这是因为 $\|f\|_{00,\infty}$ 是 ZWf 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上作为有界算子的范数。因此，由于

$$\|H^{\times(s/2)}\|_{00,1} = \langle \mathbb{1}, H^{\times(s/2)} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{s/2},$$

当且仅当 $s < -2$ 收敛时，由 (10) 可得 $\mathcal{B}_{0,\,0} \subset \mathcal{I}_{s,\,t}$ 在 $s < -2, t < -2$ 时成立，从而 $\mathcal{B}_{p,\,q} \subset \mathcal{I}_{s,\,t}$ 在 $p > s+2, q > t+2$ 时（连续地）成立。在 (9) 中对 $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{B}_{p,\,q} \subset \mathcal{I}_{s,\,t}$ 进行插值，可知在 (8) 中可以用 $\mathcal{I}_{s,\,t}$ 或 $\mathcal{B}_{s,\,t}$ 替换 $\mathcal{G}_{s,\,t}$。实际上，若定义

$$\mathcal{I}_{s,-\infty} := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{I}_{s,t}\,, \qquad \mathcal{B}_{s,-\infty} := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{B}_{s,t}\,,$$

我们得到

$$\mathcal{B}_{p,-\infty} \subset \mathcal{I}_{s,-\infty} \subset \mathcal{G}_{s,-\infty} \subset \mathcal{B}_{s,-\infty} \quad \text{if} \quad p > s+2,$$

因此

$$\mathcal{M}_L = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{G}_{s,-\infty} = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{B}_{s,-\infty} = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{I}_{s,-\infty}$$

在拓扑意义下，若所有交集都赋予自然的（射影）拓扑。特别地，拓扑 $\mathfrak{T}_3$ 由 $\bigcap_{s\in\mathbb{R}} \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{B}_{s,\,t}$ 诱导。

定理 5. $\mathcal{M}_L$ 上的拓扑 $\mathfrak{T}_2$ 与 $\mathfrak{T}_3$ 一致。

证明。 记

$$(B;U) := \{\, S \in \mathcal{M}_L : S \times f \in U \text{ for all } f \in B \,\},$$

其中， U 是 $\mathcal{S}_2$ 中 0 的邻域， B 是 $\mathcal{S}_2$中的有界集；则（B； U）是 $\mathfrak{T}_2$中 0 的基本邻域。

$\mathfrak{T}_3$ 中 0 的一个基本邻域由满足以下条件的子集 $V \subset \mathcal{M}_L$ 给出： $V = W \cap \mathcal{M}_L$，其中W 是$\mathcal{G}_s$中 0 的邻域，$-\infty$ 对某个 $s \in \mathbb{R}$。于是 $W \cap \mathcal{G}_{s,\,-q}$ 是$\mathcal{G}_s$中 0 的邻域，$-q$对所有 $q \in \mathbb{R}$ 成立，因此对所有 q都包含形如 $\{ S \in \mathcal{G}_{s,\,-q} : \|S\|_{s,\,-q} < C\ (q)\ \}$ 的集合。

给定（B； U），即 $\mathfrak{T}_2$中 0 的一个邻域，我们不妨设 $U = \{\ g \in \mathcal{S}_2 :\ \|g\|_{st} \leqslant \delta\}$，其中 $s,\ t \in \mathbb{R}$，$\delta > 0$，并且

$$B = \{\, f \in \mathcal{S}_2 : \|f\|_{qp} \leqslant A(q,p) \text{ for all } q,p \in \mathbb{R} \,\},$$

其中 $A(q,p) > 0$是一个合适的函数。令

$$V := \bigcup_{q\in\mathbb{R}} \{\, S \in \mathcal{M}_L \cap \mathcal{G}_{s,-q} : \|S\|_{s,-q} \leqslant \delta / A(q,t) \,\}$$

于是 $V = W \cap \mathcal{M}_L$，其中 $W \cap \mathcal{G}_{s,-q}$ 对所有 q都包含一个半径为 $\delta/A(q,t)$ 的球。令 $f \in B$, $S \in V \cap \mathcal{G}_{s,-q}$；则有

$$\|S \times f\|_{st} \leqslant \|S\|_{s,-q} \|f\|_{qt} \leqslant \left(\frac{\delta}{A(q,t)}\right) A(q,t) = \delta,$$

使得对于所有 q， $V \cap \mathcal{G}_{s,-q} \subset (B;U)$， 从而 $V \subset (B;\ U)$。

另一方面，我们注意到，按照 de Wilde [21] 的定义，每个希尔伯特空间$\mathcal{G}_{s,t}$ 都是“严格网状”的；这一性质在可数归纳极限（此处$\mathcal{G}_{s,-\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_{s,-n}$）和可数射影极限下保持不变；因此 $(\mathcal{M}_L, \mathcal{T}_3) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_{m,-\infty}$ 是严格网状的。

由于 $(\mathcal{M}_L, \mathcal{T}_1)$ 是 Montel空间 [11] 且 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$，$(\mathcal{M}_L, \mathcal{T}_2)$ 是桶状且完备的：此外，根据证明的第一部分，恒等映射 $: (\mathcal{M}_L, \mathcal{T}_3) \to (\mathcal{M}_L, \mathcal{T}_2)$ 是连续的。现在，de Wilde 开映射定理 [21] 表明此映射是一个同胚，因此$\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_2$。□

注 6。 作为推论，我们发现空间 $\mathcal{L}_b(\mathcal{S}_1)$ 是严格网状的。

注 7。 我们可以将 Moyal代数的拓扑性质概括如下：

(i) $\mathcal{M}_L$ 和 $\mathcal{M}_R$ 是完备的、核的、自反的局部凸代数，且乘法次连续；(ii) $\mathcal{M}$ 是完备的、核的、半自反的局部凸 $*$代数，具有次连续乘法和连续对合；(iii) 使用**I**第4节概述的技巧，很容易看出，$\mathcal{M}_L$、$\mathcal{M}_R$ 和 $\mathcal{M}$ 是傅里叶不变的分布正规空间。

注 8. 这里采用按希尔伯特空间过滤 $\mathcal{S}'_2$ 的方法来定义 $\mathcal{T}_3$，也可用于证明对偶空间 $\mathcal{M}'_L$ 可表示为 $\mathcal{M}_L$ 中的一个稠密理想（乘法连续）。事实上，可以证明 $\mathcal{M}'_L = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{G}_{s,t}$，并且

$$\mathcal{M}'_L = \{\, f \times T : f \in \mathcal{S}_2,\ T \in \mathcal{S}'_2 \,\} \subset \mathcal{O}_T;$$

由此可得 $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{M}'_L \subset \mathcal{M}_L$，且 $\mathcal{M}'_L$ 是一个理想。我们将在后续论文 [19]中完成这项工作。

5 Dis对应于迹类算子和有界算子的分布 s

中间空间 $\mathcal{G}_{s,t}$ 和 $\mathcal{B}_{s,t}$ 有多种用途。例如，我们可以通过确定某些函数或温和分布属于这些空间中的哪一个，来获取相关信息。比如，扭曲乘积的恒等元 $\mathbb{1}$ 属于 $\mathcal{B}_{0,0}$ （当然），但我们也可以根据（7）计算得出，由于 $\mathbb{1} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{nn}$，于是

$$\|\mathbb{1}\|_{st}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{s+t}$$

因此，当且仅当 $s + t < -1$ 时，$\mathbb{1} \in \mathcal{G}_{s,t}$。

空间 $\mathcal{J}_{0,0}$ 对应于 L^2(R) 上的迹类算子。通过 Weyl 对应，哪些函数会产生核算子这一问题，Daubechies[22,23] 已经对此进行了研究。她针对二维相空间的情形，利用量子力学的相干态表示，确定了一类空间$\mathcal{W}^r$，使得对于 $r > 1$，有 $\mathcal{W}^r \subset \mathcal{J}_{0,0}$。从我们的角度来看，$\mathcal{W}^r$ 本质上由 $\mathbb{R}^2$ 上满足 $f^*, A^r f$ 有限的函数 f 构成，其中$Af := H \times f + f \times H$。由于 $f \mapsto H \times f$ 和 $f \mapsto f \times H$ 是相互对易的正算子（例如作用在 $\mathcal{G}_{0,0}$ 上），我们发现

$$0 \leqslant \langle f^*, H^{\times r} \times f \rangle \leqslant \langle f^*, A^r f \rangle \quad \text{and} \quad 0 \leqslant \langle f^*, f \times H^{\times r} \rangle \leqslant \langle f^*, A^r f \rangle$$

对于 $r \geqslant 1$，因此 $\mathcal{W}^r \subset \mathcal{G}_{r,\,0} \cap \mathcal{G}_{0,\,r}$。现在我们可以给出一个改进后的结果。

定理6. $\mathcal{S}_{r,\,0} \cup \mathcal{S}_{0,\,r} \subset \mathcal{I}_{0,\,0}$ 若 $r > 1$。

证明。 我们只需证明 $\mathcal{S}_{r,\,0} \subset \mathcal{I}_{0,\,0}$。取 $f \in \mathcal{S}_{r,\,0}$，并记

$$f = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} f_{mn} \quad \text{with} \quad \|f\|_{r0}^2 = \sum_{m,n=0}^{\infty} (2m+1)^r |c_{mn}|^2 \text{ finite.}$$

定义 d_m，使得 $d_m \geqslant 0$, $d_m^2 := (2m+1)^r \sum_{n=0}^{\infty} |c_{mn}|^2$。于是 $\sum_{m=0}^{\infty} d_m^2 = \|f\|_{r0}^2$，从而 $g := \sum_{m=0}^{\infty} d_m f_{mm}$ 属于 $\mathcal{S}_{0,\,0}$。定义 $h := \sum_{m,\,n=0}^{\infty} b_{mn} f_{mn}$，其中 $b_{mn} := c_{mn}/d_m$。现在注意到

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} |b_{mn}|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_{mn}|^2}{d_m^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^{-r} = (1-2^{-r})\zeta(r)$$

从而对于 $r > 1$，$h \in \mathcal{S}_{0,\,0}$。因此 $g \times h$ 有定义且属于 $\mathcal{I}_{0,\,0}$，并且显然 $f = g \times h$。

此外，根据迹类算子的一个众所周知的性质（通过同构 ZW 转移到当前情形），$\|g \times h\|_{00,\,1} \leqslant \|g\|_{00}\,\|h\|_{00}$，因此我们得到估计

$$\|f\|_{00,1} \leqslant \big((1-2^{-r})\zeta(r)\big)^{1/2} \|f\|_{r0}$$

对于 $f \in \mathcal{S}_{r,\,0}$。（将 f 替换为 f^*，可见对于 $f \in \mathcal{S}_{0,\,r}$ 同样的估计也成立。） □

备注 9。 同理，我们注意到，$\mathcal{B}_{0,\,0}$ 中的所有分布都属于 $\big(\bigcup_{r>1} \mathcal{S}_{-r,\,0}\big) \cap \big(\bigcup_{r>1} \mathcal{S}_{0,\,-r}\big)$ 并满足以下估计：

$$\|T\|_{-r,0} \leqslant \big((1-2^{-r})\zeta(r)\big)^{1/2} \|T\|_{00,\infty},$$
$$\|T\|_{0,-r} \leqslant \big((1-2^{-r})\zeta(r)\big)^{1/2} \|T\|_{00,\infty}.$$

据我们所知，这是对于依据 Weyl规则与有界算子相对应的分布类所能得到的最严格约束。我们指出，我们的证明比 [22] 的证明更为简单，因为它们只涉及对 **I** 中引入的双重级数进行运算。

备注 10。 我们在 **I** 中已经指出，R^2中的两个平方可积函数的扭曲乘积属于 $C_0(\mathrm{R}^2)$。因此，如果 $f \in \bigcup\{\mathcal{S}_{s,\,t} : s \geqslant 0,\ \ t \geqslant 0,\ \ s+t \geqslant 2\}$，那么 $f \in C_0(\mathrm{R}^2)$。于是，Leibniz公式保证，当.....时 $f \times g \in C_0^m(\mathrm{R}^2)$

$$f, g \in \bigcup\{\mathcal{S}_{s,t} : s > 2m,\ t > 2m,\ s+t > 4m+2\};$$

与通常的 Sobolev空间 中的情形类似，随着 s、t 以适当方式变大，$\mathcal{S}_{s,\,t}$ 中的分布会变得更加正则。

6 展望

在**I** 以及本文中发展的形式体系，为相空间量子力学提出了一个数学框架。在该框架中，通常的无界算子微积分被相空间上的分布微积分所取代，局部凸空间理论的一些技巧则作为背景。借助这一框架，我们已在别处 [24] 证明，任意相空间二次Hamilton量所对应的演化函数都属于 Moyal $*$代数$\mathcal{M}$。为了获得更一般的结果，当 Schr¨odinger 方程无法精确求解时，我们需要一个适当的谱定理，以便应用半群理论。作为朝这一方向迈出的一步，我们已将 $\mathcal{M}$ 的对偶空间确定为一个函数空间 [19]。我们希望在后续论文中进一步探讨这些方面。

致谢

我们感谢 Se´an Dineen 就本文相关事宜给予的有益通信，他提醒我们关注文献 [12]；也感谢 John Horv´ath 和 Peter Wagner。我们谨向阿卜杜斯·萨拉姆教授以及的里雅斯特国际理论物理中心致谢，感谢他们在我们完成本文期间给予的热情接待。我们衷心感谢哥斯达黎加大学研究副校长办公室提供的支持。

参考文献

[1] J. M. Gracia-Bond´ía 和 J. C. V´arilly，《适用于相空间量子力学的分布代数 I》，《数学物理学杂志》29，869（1988）。[2] J.-P. Amiet 和 P. Huguenin，《相空间中的经典力学与量子力学》，纳沙泰尔大学，纳沙泰尔，1981。[3] R. F. V. Anderson，《Weyl 泛函演算的乘法性质》，《泛函分析杂志》9，423（1972）。[4] J. C. T. Pool，《Weyl 对应的数学方面》，《数学物理学杂志》7，66（1966）。[5] E. P. Wigner，《关于热力学平衡的量子修正》，《物理评论》40，749（1932）。[6] J. C. V´arilly 和 J. M. Gracia-Bond´ía，《Wigner 变换是有限阶的》，《数学物理学杂志》28，2390（1987）。[7] R. Cressman，《相空间中的演化方程与 Weyl 对应》，《泛函分析杂志》22，405（1976）。[8] J. Horv´áth，《拓扑向量空间与分布》，Addison–Wesley，马萨诸塞州雷丁，1966。[9] F. Treves，《拓扑向量空间、分布与核》，Academic Press，纽约，1967。[10] L. H¨ormander，《伪微分算子的 Weyl 演算》，Commun. Pure Appl. Math. 32，359（1979）。[11] A. Grothendieck，《拓扑张量积与核空间》，Amer. Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，1966。[12] D. Vogt，《关于 Fr´échet 空间间连续线性映射的一些结果》，载于《泛函分析：综述与最新成果 III》，North–Holland，阿姆斯特丹，1984；第349页。[13] F. Bayen 和 J. M. Maillard，《非齐次辛李代数元素的星指数》，《数学物理快报》6，491（1982）。[14] P. Huguenin，《非齐次辛群有限元素的左指数的显式表达式》，《数学物理快报》2，321（1978）。[15] J. M. Gracia-Bond´ía，《量子力学相空间表述中的氢原子》，Phys. Rev. A 30，691（1984）。[16] H. H. Schaefer，《拓扑向量空间》，Macmillan，纽约，1966。[17] J. Unterberger，《$\mathcal{S}$ ou 与 $\mathcal{S}'$ de 的自同态符号的一种刻画》，《巴黎科学院院报》290A，1053（1984）。[18] S. J. L. van Eijndhoven 和 J. de Graff，《轨道空间、广义函数与无界算子》，《数学讲义》 1162，Springer，海德堡，1985。

[19] J. M. Gracia-Bond´ıa、J. C. V´arilly 和 H. Figueroa，《代数 $\mathcal{L}_b(\mathcal{S})$ 的对偶空间》，预印本，圣何塞，1989。[20] J.-B. Kammerer，《平直空间中 Moyal 乘积的分析》，《数学物理学杂志》**27**，529（1986）。[21] G. K¨othe，《拓扑向量空间 II》，Springer，柏林，1979。[22] I. Daubechies，《与 Weyl 量子化相关的连续性陈述与反直觉例子》，《数学物理学杂志》**24**，1453（1983）。[23] I. Daubechies，《Weyl 量子化中与有界算子对应的分布》，Commun. Math. Phys.**75**，229（1980）。[24] M. Gadella、J. M. Gracia-Bond´ıa、L. M. Nieto-Calzada 和 J. C. V´arilly，《相空间量子力学中的二次哈密顿量》，J. Phys. A: Math. Gen.**22**，2709（1989）。