arXiv:2601.09940v1 [math.GR] 14 Jan 2026

半群上的舒尔环

Joseph E. Marrow*，Andrew Misseldine†

2026年1月16日

摘要

我们将群的舒尔环这一概念推广到半群范畴。我们证明，群上的舒尔环的基本结果同样适用于半群上的舒尔环。我们给出了舒尔环在这两个范畴中有所不同的例子。我们证明了关于若干特定半群族上的舒尔环的一些结果。我们探讨了半群扩张及其舒尔环之间的对应关系。我们完整枚举了阶为 0–7 的所有半群上的舒尔环，并进行了一些统计分析。

关键词：舒尔环，半群，半群环，关联方案

MSC 分类：20m25, 16s36, 20c05, 05e30

舒尔环是群的划分，并且其本身具有类似子群的性质。更具体地说，舒尔环是由群的划分所赋予的群代数的组合子环。从这一舒尔环视角出发，本文探讨能否在半群上定义舒尔环，也就是说，研究半群中那些具有类似子半群性质的划分。

设 G 是一个集合，$\mathcal{S}$ 是 G上的一个划分。我们称 $\mathcal{S}$ 中的元素为 $\mathcal{S}$ 的本原集，或称$\mathcal{S}$-类。本文中的所有划分都要求本原集有限，即使 G 是无限集也如此。对于$x \in G$，用 X 表示 $\mathcal{S}$ 中包含 x的唯一本原集；也就是说，我们通常用小写罗马字母（如 x）表示G 中的元素，并用相应的大写罗马字母（如 X）表示 $\mathcal{S}$ 中包含该元素的本原集。希腊字母也采用类似的记法，例如，包含 θ 的本原集为 Θ。对于任意子集 $C \subseteq G$，若 C 是若干 $\mathcal{S}$-类的并集，则称 C 为 $\mathcal{S}$-子集。设H、$K \subseteq G$，且 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别是 H 和 K的划分。若 $\mathcal{T}$ 的所有本原集都可表示为 $\mathcal{S}$ 的本原集的并集，则称 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{S}$ 的粗化，且 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{T}$的细化。设 $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$是 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$的公共粗化，即 $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$是 $H \cap K$ 上的最大划分，且是$\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$二者的粗化。类似地，设 $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$是 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$的公共细化，即 $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$是$H \cup K$ 上的最小划分，且是 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$二者的细化。

现在考虑一个群 G 以及其上的一个划分 $\mathcal{S}$，其中 G。令 $X \in \mathcal{S}$。则 $X^* = \{x^{-1} \mid x \in X\}$。令 $\mathbb{Q}[G]$ 表示 G 上的有理系数群环。对于每个有限子集 $X \subseteq G$，我们可以将 X视为群环 $\mathbb{Q}[G]$中的一个元素，即简单量 $\sum_{x \in X} x \in \mathbb{Q}[G]$。滥用记号，我们将把 $\mathbb{Q}[G]$ 中的这个简单量记作其本身 X。因此，我们将交替使用 x 和 $\{x\}$ 表示单元素集。讨论子集的乘积时，例如 $XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$，总是将其理解为一个多重集，其中特定元素在 XY中具有一定重数，因此多重集 XY 与 $\mathbb{Q}[G]$中简单量的乘积相同。少数情况下，如果我们只考虑集合的乘积，则会注明忽略了重数。

令 $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$ 表示 $\mathcal{S}$ 中简单量所张成的 $\mathbb{Q}[G]$ 子空间，即 $\mathbb{Q}[\mathcal{S}] = \text{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{S}) = \text{Span}_{\mathbb{Q}}\{X \mid X \in \mathcal{S}\}$。如果满足以下条件，我们称 $\mathcal{S}$ 是群 G 上的舒尔环：

1. $\forall X, Y \in \mathcal{S}$, $XY \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$;

*Joseph E. Marrow，南犹他大学，josephmarrow@suu.edu

†通讯作者：Andrew Misseldine，南犹他大学，andrewmisseldine@suu.edu，（电话）435-865- 8228[1]为了将无限群上的舒尔环嵌入群代数，如 [1], 所述，本原集必须是有限的，以避免出现无穷和。

2. $1 \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$; 3.
$\forall X \in \mathcal{S}$, $X^* \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$

舒尔环（或 S-环）一词由 Helmut Wielandt [26] 创造，最初由 Issai Schur [22] 和 Wielandt [25]发展。舒尔环最初是在表示论中作为特征标的替代方法发展起来的，但后来成为代数组合学中的有用工具，参见 [9]。

根据定义， $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$是 $\mathbb{Q}[G]$的一个子环。简要考察舒尔环的公理，可以看出它与子群的公理存在相似之处：与舒尔环相关联的划分在乘法、单位元和取逆运算下封闭。这一观察引出了一个简单、有用但不够精确的舒尔环概念：舒尔环就是那些表现得像子群的 G 的划分。从这个角度来看，它一定必须是一个群吗？[2]

作为一个启发性例子，考虑 S_3，即三字母上的对称群。将 S_3视为一个群时，其上的舒尔环必须在乘法、单位元和取逆运算下封闭。这样的舒尔环共有十个，列举如下：

1. $\{1,(123)+(132)+(12)+(13)+(23)\}$,
2. $\{1,(12),(13)+(23)+(123)+(132)\}$,
3. $\{1,(13),(12)+(23)+(123)+(132)\}$,
4. $\{1,(23),(12)+(13)+(123)+(132)\}$,
5. $\{1,(123)+(132),(12)+(13)+(23)\}$,
6. $\{1,(123),(132),(12)+(13)+(23)\}$,
7. $\{1,(12),(123)+(132),(13)+(23)\}$,
8. $\{1,(13),(123)+(132),(12)+(23)\}$,
9. $\{1,(23),(123)+(132),(12)+(13)\}$,
10. $\{1,(123),(132),(12),(13),(23)\}$。

本文探讨半群上的舒尔环这一概念，[3] 这是群的一种自然推广。设 G 为一个半群。那么，我们可以推广上述与舒尔环相关的术语和记号。设 $\mathcal{S}$ 是 G上的一个划分。若 $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$ 是半群环 $\mathbb{Q}[G]$的子环，我们就称 $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$ 为 G 上的一个舒尔环。请注意，要使 G 的子集成为子半群，我们只要求它在乘法下封闭，因为在 G 上可能不存在单位元或逆元。因此，半群 G 上的舒尔环是群上的舒尔环概念的一种放宽；在这种推广中，我们只保留第一条公理。

现在我们看到，将 S_3 视为半群时，还存在其他舒尔环。以下给出两个这样的例子：

$$\{1+(12)+(13)+(23)+(123)+(132)\},\quad \{(12)+(123),1+(132)+(13)+(23)\}.$$

S_3上总共有 45 个半群舒尔环。其中包括从群结构继承而来的 10 个，这表明将 S_3 视为半群时，还存在另外 35 个舒尔环。

将这一概念推广到代数结构较弱的范畴后，半群的划分有可能比相应的群的划分产生更多舒尔环。例如，有些半群具有足够高的对称性，因而所有划分都能成为舒尔环，如定理 1.8 所示。贝尔数 $\mathscr{B}(n)$表示含有 n个对象的集合的划分数。对于任意 G 阶为 n的半群， $\mathscr{B}(n)$是其上舒尔环数量的上界。正如这里所暗示的，确实存在达到这一

[2]从某些方面来说，这个问题已经得到过研究。数学家们此前研究过群 G 上的划分 $\mathcal{S}$，这些划分满足上文中的公理 1 和 3，我们将其称为 *pre-Schur ring* [13]。众所周知，预舒尔环中包含单位元的本原集是 G的一个子群。此外，每个本原集都是该子群的双陪集之并。换句话说，每个预舒尔环都是双陪集划分的粗化。将与预舒尔环相关的划分进一步细化，把单位元单独分离出来，总能在 G 上形成一个舒尔环（见命题 1.5）。因此，预舒尔环通过放宽公理 2，推广了舒尔环的定义；但另一方面，所有预舒尔环实际上都已经包含在舒尔环之中。用本文的术语来说，预舒尔环是一个对乘法和取逆封闭的舒尔环，也就是逆半群上的舒尔环。这一对应定理表明，当群的结构放宽为其所在的逆半群结构时，并不会得到真正全新的舒尔环。[3]在 [23], 中，Tamaschke 引入了舒尔半群的概念，这是将舒尔环推广到无限对象的一次早期尝试，因为 Wielandt 最初的定义仅限于有限群。Tamaschke 的舒尔半群并不是我们这里讨论的半群舒尔环。说到无限群，依据 [1], 中对无限群舒尔环的定义，半群舒尔环的这一定义允许半群是有限的，也允许是无限的。

上界的半群，不过整数集$_2$, 中，只有阶为 2 的循环群能达到这一上界；参见定理 1.9。另一方面，其他半群可能具有严格的结构，从而对可能的舒尔环施加严格限制，例如定理 1.7 中要求某些元素只能出现在单元素集中。结构上允许每一种划分都成立，或允许某个子集的每一种划分都成立的半群，在计算半群舒尔环的数量时会频繁出现贝尔数。如表4所示，126 个 4阶半群中，只有 22 个半群的半群舒尔环数量不是贝尔数。

我们可以为其他群的推广定义类似的舒尔环：幺半群舒尔环是一个在乘法和单位元下封闭的划分，而逆（半群）舒尔环则是一个在乘法和逆元下封闭的划分。显然，每个群舒尔环既是幺半群舒尔环，也是逆舒尔环，并且它们都是半群舒尔环。表 1 列出了阶不超过 15 的各群分别作为群、幺半群和半群时舒尔环的枚举。作为群时舒尔环的数量取自 [13, 27] 和 [24, A384156]。我们指出，对于一个固定的群

群舒尔环的数量 $\leq$ 幺半群舒尔环的数量 $\leq$半群舒尔环的数量

其中，若群的阶不为 1，则第二个不等式为严格不等式。

	G	M	S		G	M	S		G	M	S		G	M	S
Z_1	1	1	1	S_3	10	22	45	Z_9	7	7	10	A_4	52	266	482
Z_2	1	1	2	Z_7	4	4	5	E_9	40	40	49	D_6	120	324	532
Z_3	2	2	3	Z_8	10	10	15	Z_{10}	10	10	15	Dic_{12}	54	90	138
Z_4	3	3	5	E_8	100	100	143	D_5	25	95	197	Z_{13}	6	6	7
V_4	5	5	9	整数集$_2$ ×整数集$_2$	28	28	43	Z_{11}	4	4	5	Z_{14}	13	13	19
Z_5	3	3	4	D_4	34	66	107	Z_{12}	32	32	46	D_7	55	237	505
Z_6	7	7	11	Q_8	25	26	35	$\mathrm{Z}_6 \times \mathrm{Z}_2$	76	76	108	Z_{15}	21	21	27

表 1：阶不超过 15 的群的舒尔环枚举，将其视为群、幺半群和半群。

在第1节中，我们探讨半群舒尔环的基本概念，将群范畴中的许多性质加以推广，并对若干半群族上的舒尔环进行分类。在第2节中，我们讨论四种传统舒尔环及其在半群范畴中的适用方式。在第3节中，我们探讨半群的不可分解元素如何影响舒尔环的结构。在第4节中，我们探讨半群的单元素扩张，以及这些扩张如何同样影响这些半群上的舒尔环。在第 5 节中，我们使用 GAP 枚举阶为$0-7$的半群上的所有舒尔环。最后，在第6节中，我们提出未来研究的问题。

1 半群舒尔环

本节将群上的舒尔环的基本概念推广到半群范畴，并探讨半群上的舒尔环的一些新构造，这些构造在群中没有对应形式。我们还对若干基本半群族上的舒尔环集合进行分类。

设 $\mathcal{S}$ 是半群 G 上的一个舒尔环。若子半群 $H \leq G$ 同时也是一个 $\mathcal{S}$-子集，则称其为 $\mathcal{S}$-子半群。类似地，若理想 $I \trianglelefteq G$ 同时也是一个 $\mathcal{S}$-子集，则称其为 $\mathcal{S}$-理想。对于左 $\mathcal{S}$-理想和右 $\mathcal{S}$-理想，也有类似的定义。

群舒尔环的以下性质可以直接推广到半群舒尔环。

命题 1.1。设 G 是一个半群，$\mathcal{S}$ 是 G 上的一个舒尔环。设 X 是一个 $\mathcal{S}$-子集。则由 X 生成的半群，即 $\langle X\rangle$，是一个 $\mathcal{S}$-子半群。类似地，由 X 生成的理想，即（X），是一个 $\mathcal{S}$-理想。

证明。由于 X 是一个 $\mathcal{S}$-子集，且 $\mathcal{S}$ 关于乘法封闭，由归纳法可知，对于每个 n，X^n 都是一个$\mathcal{S}$-子集。由于 $\langle X\rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^n$，由 X 生成的子半群同样是一个 $\mathcal{S}$-子集。同样，注意到 $(X) = GXG = \bigcup_{C,\ D\in\mathcal{S}} CXD$，其中每个 CXD 都是一个 $\mathcal{S}$-子集。 □

命题 1.2。设 G 是一个半群，且 $\mathcal{S}$ 是 G 上的舒尔环。设 H 是一个 $\mathcal{S}$-子半群。那么，包含在 H 中的本原 $\mathcal{S}$-集合所构成的集合形成 H 上的一个舒尔环，称为 $\mathcal{S}$ 的舒尔子环，记作 $\mathcal{S}|_H$。

证明。由于 H 是一个 $\mathcal{S}$子半群，将 $\mathcal{S}$ 限制为仅包含 H内部的本原集，即 $\mathcal{S}|_H$，便构成 H 自身的一个划分。令 X，$Y \in \mathcal{S}|_H$。显然， $XY \subseteq H$，而且 $XY = \sum_{C\in\mathcal{S}} \lambda_C C$。在 XY 中出现非零重数的那些本原集必然包含于 H之中。这意味着 $\mathcal{S}|_H$ 在乘法下封闭，也就是说， $\mathcal{S}|_H$ 是 H上的一个舒尔环。 □

命题 1.3。设 G 是一个半群，且 $\mathcal{S}$ 是 G上的一个舒尔环。设 H 是 G 中由 $\mathcal{S}$的所有单元素集组成的子集。那么 H 是 G的一个子半群。

证明。设 x，$y \in H$。于是 x， $y \in \mathcal{S}$。由于 $\mathcal{S}$ 在乘法下封闭，乘积 xy 是本原 $\mathcal{S}$集的线性组合，但在这个线性组合中，唯一的非零重数对应于单元素集 xy本身。因此，乘积 xy 是 $\mathcal{S}$中的一个单元素集，这就证明了该断言。 □

若 G 是半群，则令 G^{op} 表示 G 的 对偶半群，即通过反转乘法顺序所构成的半群。在群范畴中，$G \cong G^{\mathrm{op}}$ 成立。在半群范畴中，一个半群与其对偶半群通常并不同构。当然，半群与其对偶半群之间存在自然的反同构。若两个半群同构或反同构，则称它们是等价 的。

命题 1.4. 设 G 是半群， $\mathcal{S}$ 是 G 上的舒尔环。那么 $\mathcal{S}$ 是 G^{op} 上的舒尔环。

证明。令并置表示 G 中的乘法，并令 $\cdot$ 表示 G^{op} 中的乘法。因此，$x \cdot y = yx$。设 $X, Y \in \mathcal{S}$ 为本原集。则 $X \cdot Y = YX = \sum_{C\in\mathcal{S}} \lambda_C C$，其中第二个等号成立是因为 $\mathcal{S}$ 是 G 上的舒尔环。由于 $X \cdot Y$ 是本原 $\mathcal{S}$-集的线性组合， $\mathcal{S}$ 在 G^{op} 的乘法下封闭。因此， $\mathcal{S}$ 是 G^{op} 上的舒尔环。 □

由于 G 和 G^{op} 上的舒尔环相同，因此研究半群上的舒尔环时，只需在等价意义下研究半群。

对于具有 $\theta \in G$ 的半群 G，若对所有 $x \in G$， θ 都满足 $\theta x = \theta$，则称 θ 为左零元；若对所有 $x \in G$， θ 都满足 $x\theta = \theta$，则称 θ 为右零元。若半群 G 中的 θ 同时是左零元和右零元，则称 G 有一个零元 θ。零半群 是含有零元 θ 的半群。令 $e \in G$。若对所有 $x \in G$， e 都满足 $ex = x$，则称 e 为左单位元；若对所有 $x \in G$， e 都满足 $xe = x$，则称 e 为右单位元。若半群 G 中的 e 同时是左单位元和右单位元，则称 G 有一个单位元 e。幺半群 是含有单位元 e 的半群。

命题 1.5。设 G 是单位元为 e的幺半群，并设 $\mathcal{S}$ 是 G 上的舒尔环。那么，划分$(\mathcal{S} - \{E\}) \cup \{e, E - e\}$ 给出 G 上的一个舒尔环。

本质上，可以通过将单位元分离出来，把任意定义在幺半群上的半群舒尔环转化为幺半群舒尔环。

证明。令 $\mathcal{T} = (\mathcal{S} - \{E\}) \cup \{e, E - e\}$。由于 $XY \in \mathbb{Q}[\mathcal{T}]$ 对所有 $X, Y \in \mathcal{S}$ 都成立，我们注意到每个 $\mathcal{S}$-子集必然是一个 $\mathcal{T}$-子集。同样，除 E 外，每个本原 $\mathcal{S}$-集合都是本原 $\mathcal{T}$-集合。在这种情况下， $E - e$和 e 是本原 $\mathcal{T}$-集合。我们注意到 $(E - e)(E - e) = E^2 - 2E + e \in \mathbb{Q}[\mathcal{T}]$。如果 $C \in \mathcal{S}$ 满足 $C \neq E$，那么 $(E - e)C = EC - C \in \mathbb{Q}[\mathcal{T}]$。同样， $C(E - e) \in \mathbb{Q}[\mathcal{T}]$。因此， $\mathbb{Q}[\mathcal{T}]$ 是 $\mathbb{Q}[G]$ 的子环。 □

定理 1.6。L 令 G 为一个零元为 θ 的零半群，并令 $\mathcal{S}$ 为定义在 G 上的舒尔环。那么 $\theta \in \mathcal{S}$。

类比上文定义的幺半群舒尔环，我们可以将零（半群）舒尔环定义为一个在乘法和零元运算下封闭的划分。该结果表明，零半群上的所有半群舒尔环必然都是零舒尔环。

证明。令 $\Theta = \theta + X$，其中 $X \subseteq G$。

$$\Theta^2 = (\theta + X)(\theta + X) = \theta + \theta X + X\theta + X^2 = (2|X| + 1)\theta + X^2.$$

因此， θ 在 Θ^2 中的重数至少为 $2|X| + 1$。所以， Θ 中的每个元素在 Θ^2 中出现的重数至少也相同。这至少计入了 Θ^2 中的（$2|X| + 1$）（$|X| + 1$）个乘积。当然，$|\Theta^2| =$（$|X| + 1$）^{2}。这意味着（$2|X| + 1$）（$|X| + 1$）$\leq$（$|X| + 1$）^{2},，而这只有在 $|X| = 0$时才可能。 □

The 零半群 O_n 是阶为 n 的零半群，满足对所有 $x,\ y \in G$.

定理 1.7。 设 $\mathcal{S}$ 是某个正整数 n对应的零半群 O_n上的一个划分。那么， $\mathcal{S}$ 是一个舒尔环，当且仅当 $\theta \in \mathcal{S}$。O_n 上的舒尔环数量为贝尔数 $\mathscr{B}(n-1)$。

证明。 假设 $\mathcal{S}$ 是一个舒尔环，取本原集 $X \in \mathcal{S}$，并注意到 $X^2 = |X|^2\theta \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。那么 θ 必定是一个本原集。反过来，假设 $\theta \in \mathcal{S}$。如果 $X, Y \in \mathcal{S}$ 是本原集，那么 $XY = |X||Y|\theta$。因此， $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$ 在乘法下封闭。由于 $\theta \in \mathcal{S}$ 是对 O_n的划分的唯一限制，舒尔环的数量就是其余元素可取的划分数量，即 $\mathscr{B}(n-1)$。

□

左零半群 LO_n 是一个阶为 n 的半群，满足对所有 x都有 $xy = x$,$y \in \mathrm{LO}_n$。左零半群中的每个元素都是左零元和右单位元。右零半群 RO_n 定义为 $\mathrm{RO}_n = \mathrm{LO}_n^{\mathrm{op}}$。

定理 1.8。 设 $\mathcal{S}$ 是左零半群 LO_n上的一个划分，其中 n是某个正整数。那么 $\mathcal{S}$是一个舒尔环。LO_n 上的舒尔环个数为 $\mathscr{B}(n)$。

证明。 设 $X, Y \in \mathcal{S}$，使得 $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$对某个 $k \in \mathbb{N}$成立。那么

$$XY = (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)Y = x_1Y + x_2Y + \ldots + x_kY = |Y|x_1 + |Y|x_2 + \ldots + |Y|x_k$$
$$= |Y|(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) = |Y|X \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}].$$

因此， $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$ 是一个舒尔环。 □

定理 1.8 的逆命题对几乎所有半群也成立。将循环群 Z_2, 视为半群时，它恰有两个舒尔环。

定理 1.9。 设 G 是一个阶为 $n \neq 2$ 的有限半群。那么 G 等价于 LO_n ，当且仅当 G 上的舒尔环个数为 $\mathscr{B}(n)$。

证明。 必要性已由定理 1.8 处理。因此我们假设 G 有 $\mathscr{B}(n)$ 个舒尔环。根据第 5 节中的枚举，我们可以假设 $|G| \geq 5$。

由于 G 上恰有 $\mathscr{B}(n)$ 个划分，因此 G 上的每个划分都是一个舒尔环。令 $H \subseteq G$ ，使得 $|H| \leq n-2$，即 $|G-H| \geq 2$。于是 $\mathcal{S} = H \cup \{G-H\}$ 构成 G 上的一个划分；更具体地说， H 上的划分是离散的，而其补集是一个单一本原集。根据假设， $\mathcal{S}$ 是 G 上的一个舒尔环。根据命题 1.3， H 是一个 $\mathcal{S}$-子半群，即 $H \leq G$。因此， G 的所有子集（基数为 $n-1$ 的子集除外）都是 G 的子半群。

继续，令 $\mathcal{T}$ 为 H 的一个划分。令 $\mathcal{S} = \mathcal{T} \cup \{G-H\}$。于是 $\mathcal{S}$ 是 G 上的一个舒尔环。同样，根据命题 1.2，$\mathcal{T} = \mathcal{S}|_H$ 是 H 上的一个舒尔环。因此，当 $|H| \leq n-2$ 时，对于 G 的任意子半群， H 的每个划分都是 H 上的一个舒尔环。

设 $z,\ y,\ z \in G$。那么， $H = \{x, y, z\}$ 是 G 的一个三阶子半群，其每个划分都是 H 上的舒尔环。具有这一性质的三阶半群只有表 3 中等价于 LO_3, 的那些。不失一般性，我们可以假设 $xy = x$。那么 $H \cong \mathrm{LO}_3$, 且 $yz = yy = y$，并且 $zy = zz = z$。由于 $y,\ z$ 是任意的，这说明 G 中的乘法是投影到第一因子，即 $G \cong \mathrm{LO}_n$。□

给定一个半群 G，可以通过向 G 添加一个新元素 e 来构造一个幺半群，也就是说，对所有 $x \in G$，都有 $xe = ex = x$。记这个幺半群为 $G^e = G \cup e$。注意，如果 G 已经是幺半群，那么这个新单位元 e 会取代 G 中原有的单位元。同样，可以通过向 G 添加一个新的零元 θ 来构造一个零半群，也就是说，对所有 $x \in G$，都有 $x\theta = \theta x = \theta$。我们将其记为 $G^\theta = G \cup \theta$。同样，如果 G 已经是零半群，那么添加 θ 会在 G 中增加一个新的零元，并取代原有的零元。对半群进行这两种扩张，会直接影响舒尔环。

定理 1.10。 设 G 是一个半群， $\mathcal{S}$ 是 G^e 上的一个舒尔环。那么 $e \in \mathcal{S}$。由此可知， G^e 上的舒尔环与 G 上的舒尔环一一对应。

本质上， G 上的所有舒尔环都与 G^e上的舒尔环相同。

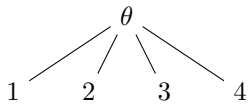
证明。 由于 $e \in E^2$，我们有 $E \subseteq E^2$。假设 $x \in E$，使得 $x \neq e$。那么 x 在 E^2 中出现的重数至少为 2，因为 $x = ex = xe$。另一方面， e 在 E^2 中的重数恰好为 1，因为 e 的唯一因式分解是 $e = e^2$。由于 e 和 x 在 E^2中的重数不同，因此必有$x \notin E$，这与假设矛盾。因此， $E = e$，也就是说， $e \in \mathcal{S}$。

设 $\mathcal{S}$ 是 G 上的舒尔环。定义 $\mathcal{S}^e = \mathcal{S} \cup \{e\}$，它是 G^e 上的一个划分。对所有 X，$Y \in \mathcal{S}$，有 $XY \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$，这意味着 $XY \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}^e]$。同理， $eX = Xe = X \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}] \leq \mathbb{Q}[\mathcal{S}^e]$。因此， $\mathbb{Q}[\mathcal{S}^e]$ 是一个舒尔环。反过来，若 $\mathcal{T}$ 是 G^e 上的一个舒尔环，则 $e \in \mathcal{T}$。因此， G 是一个 $\mathcal{T}$-子半群。于是，$\mathcal{T}|_G$ 是 G 上的一个舒尔环。由于这两个从 G 上的舒尔环到 G^e 上的舒尔环的映射，即 $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}^e$ 和 $\mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}|_G$，互为逆映射，因此它们建立了一一对应。 □

用与定理 1.10 的证明相同的论证，可立即由定理 1.6 得到以下推论。

推论 1.11. 设 G是一个半群。那么， G^θ 上的舒尔环与 G的舒尔环一一对应。

令 $\mathrm{K}_{m,\,n}$ 表示具有块大小 m 和 n的完全二分图 。图 $\mathrm{K}_{1,\,n} = \{\theta\} \cup \{1, 2, \ldots, n\}$ 可以赋予一种自然的结合乘法，其中对所有 x，$y \in$ ，当 $x \neq y$时，$\mathrm{K}_{1,\,n}$、$x^2 = x$ 和$xy = yx = \theta$ 。这使得 $\mathrm{K}_{1,\,n}$ 成为一个半格。尽管所有元素都是幂等元，$\mathrm{K}_{1,\,n}$ 在代数上的表现却与 O_{n+1}非常相似。这一点体现在它们的舒尔环上。



完全二分图 $\mathrm{K}_{1,4}$

定理 1.12. 设 $\mathcal{S}$ 是半格$\mathrm{K}_{1,\,n}$ 上的一个划分，其中 n为正整数。那么，当且仅当 $\theta \in \mathcal{S}$时， $\mathcal{S}$ 是一个舒尔环。$\mathrm{K}_{1,\,n}$ 上的舒尔环数量为贝尔数 $\mathscr{B}(n)$。

证明。 由于 $\mathrm{K}_{1,\,n}$是一个零半群，根据定理 1.6， θ是 $\mathcal{S}$的本原集。令 X， $Y \subseteq \mathrm{K}_{1,\,n} - \theta$ 使得$X \cap Y = \emptyset$。则 $X^2 = X + |X|(|X| - 1)\theta$ 且 $XY = |X||Y|\theta$。因此，$\mathrm{K}_{1,\,n}$ 的任何包含θ 的划分都是一个舒尔环。 □

设 G 是一个带有理想 I的半群。那么，划分 $\{I\} \cup (G - I)$构成一个半群，记为G/I ，称为*Rees*商半群。G/I 中的所有乘法均与 G 中的乘法相同，唯有涉及 I中的元素时例外；在这种情况下， I 中的所有元素都视为等价。因此， G/I 是一个零半群，其零元为 I。我们称 G为 I 通过 G/I得到的理想扩张。

对于任意半群 G 和正整数 n，我们定义半群 $\mathrm{OG}_n = \mathrm{O}_n \cup G$ ，其将 O_n 和 G的乘法扩展为[4] ，使得对于 $x \in \mathrm{O}_n$ 和 $g \in G$ ，有 $xg = \theta$ （O_n的零元）以及$gx = x$。结合律的验证是直接的。注意，O_n 是 OG_n 中的理想，并且 $\mathrm{OG}_n/\mathrm{O}_n \cong G^\theta$，且 $\mathrm{OG}_1 = G^\theta$。显然，如果 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$分别是半群 O_n 和 G上的舒尔环，那么 $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$是 OG_n上的舒尔环。当 $G = \mathrm{RO}_n$时，我们将 OG_m 记作 $\mathrm{ORO}_{m,\,n}$。

定理 1.13。 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathrm{ORO}_{m,\,n}$ （其中 m、n 为正整数）上的一个划分。则 $\mathcal{S}$ 是舒尔环，当且仅当 $\theta \in \mathcal{S}$。$\mathrm{ORO}_{m,\,n}$ 上的舒尔环数量为贝尔数 $\mathscr{B}(m + n - 1)$ 。

证明。 对于任意子集 $X \subseteq \mathrm{ORO}_{m,\,n}$，定义 $X_\mathrm{O} = X \cap \mathrm{O}_n$ 和 $X_\mathrm{RO} = X \cap \mathrm{RO}_m$。设 θ 为 O_n 的零元。因此， $\Theta \in S$ 是包含 θ 的本原集。设 X，$Y \in \mathcal{S}$ 为本原集。则 $XY = (X_\mathrm{O} + X_\mathrm{RO})Y = X_\mathrm{O}Y + X_\mathrm{RO}Y = |X_\mathrm{O}||Y|\theta + |X_\mathrm{RO}|Y$。因此，若 $\theta \in \mathcal{S}$，则 $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$ 是一个舒尔环。

反之，若 $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$ 是一个舒尔环，则 $\Theta^2 = (\Theta_\mathrm{O} + \Theta_\mathrm{RO})^2 = |\Theta_\mathrm{O}||\Theta|\theta + |\Theta_\mathrm{RO}|\Theta$。由于 $\theta \in \Theta$， θ 在 Θ^2 中的重数为 $|\Theta_\mathrm{O}||\Theta| + |\Theta_\mathrm{RO}|$，这说明 Θ 中的所有元素在 Θ^2 中具有相同的重数。由于 Θ^2 中只有 $|\Theta|^2$ 个乘积，该重数将要求有 $(|\Theta_\mathrm{O}||\Theta| + |\Theta_\mathrm{RO}|)|\Theta|$ 个乘积。等式 $|\Theta|^2 = (|\Theta_\mathrm{O}||\Theta| + |\Theta_\mathrm{RO}|)|\Theta|$ 的唯一解是 $|\Theta| = 1$，即 $\Theta = \theta$。 □

注意，RO_m 和LO_m 是等价的，这意味着它们具有相同数量的舒尔环；但 $\mathrm{ORO}_{m,\,n}$ 和 $\mathrm{OLO}_{m,\,n}$ 通常并不等价，因此舒尔环的数量会有很大差异。

[4]当 G 本身在记号中使用下标时，我们将两个下标都置于 G之后，其中第一个描述 O_n ，第二个描述 G，例如，$\mathrm{OZ}_{3,\,2} = \mathrm{O}_3 \cup \mathbb{Z}_2$ 是通过 Z_2^θ对 O_3 进行的理想扩张。

定理 1.14。 设 G 是一个有限半群，且其在自身上的正则右作用是一个置换作用。设 $\mathcal{S}$ 是某个正整数 n对应的 OG_n 上的一个划分。那么， $\mathcal{S}$ 是一个舒尔环，当且仅当 $\mathcal{S}$是 O_n 上的一个舒尔环与 G上的一个舒尔环的公共细化，或者存在某个 $X \in \mathcal{S}$使得 $G \subseteq X$ 和 $\theta \in \mathcal{S}$。若 $\Omega(G)$ 是 G上的半群舒尔环的数量，则

$$\Omega(\mathrm{OG}_n) = \Omega(G)\mathscr{B}(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathscr{B}(n-k-1).$$

注意，此处对 G 的条件包括 LO_m 以及所有有限群。

证明。 设 $\mathcal{S}$ 是 OG_n上的舒尔环。若 G是一个 $\mathcal{S}$-子半群，则 $\mathcal{S}|_G$ 是 G上的舒尔环。由于G 是一个 $\mathcal{S}$-子集，因此 $\mathsf{OG}_n - G = \mathsf{O}_n$ 同样是一个 $\mathcal{S}$-子集。因此， $\mathcal{S} = \mathcal{S}|_{\mathrm{O}_n} \vee \mathcal{S}|_G$。

假设 G 不是一个 $\mathcal{S}$-子半群。令 $X \in \mathcal{S}$满足 $X = X_\mathrm{O} + X_G$，其中 $X_\mathrm{O} = X \cap \mathsf{O}_n \neq \emptyset$且 $X_G = X \cap G \neq \emptyset$。若 $G \not\subseteq X$，则存在某些 $y \in G$、 $x \in X \cap G$和 $z \in G - X$，使得 $yx = z$。令 $Y \in \mathcal{S}$ 为包含 y的本原集。令 $Y = Y_\mathrm{O} + Y_G$，其中 $Y_\mathrm{O} = Y \cap \mathsf{O}_n$ 且$Y_G = Y \cap G \neq \emptyset$。于是 $YX = (Y_\mathrm{O}+Y_G)(X_\mathrm{O}+X_G) = |X||Y_\mathrm{O}|\theta+|Y_G|X_\mathrm{O}+X_GY_G$。由于 $|Y_G|X_\mathrm{O} \subseteq YX$，必有 $|Y_G|X_G \subseteq YX$。考虑系数， $Y_GX_G = |Y_G|X_G \subseteq G$，但 $z \in YX - G$，这就产生了矛盾。因此， $G \subseteq X$。由于 $X^2 = (|X_\mathrm{O}| + |G|)|X_\mathrm{O}|\theta + |G|X$ 且 $|X_\mathrm{O}| \geq 1$， θ 与 X 的重数不同，这意味着 $\theta \in \mathcal{S}$。这证明了第一个方向。

设 $\mathcal{S}$和 $\mathcal{T}$分别是 O_n 和 G上的舒尔环。设 $X \in \mathcal{S}$ 和 $Y \in \mathcal{T}$。则 $XY = |X||Y|\theta$和 $YX = |Y|X$。因此，$\mathbb{Q}[\mathcal{S} \vee \mathcal{T}]$ 在乘法下封闭，且是 OG_n上的舒尔环。

设 $\mathcal{S}$ 是 OG_n 上的一个划分，使得 $\theta \in \mathcal{S}$，并且存在某个 $X \in \mathcal{S}$ 使得 $G \subseteq X$。设$X = X_\mathrm{O} + G$。则 $X^2 = (|X_\mathrm{O}| + |G|)|X_\mathrm{O}|\theta + |G|X \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。若 $Y \subseteq \mathsf{O}_n$，则 $XY = (X_\mathrm{O} + G)Y = |X_\mathrm{O}||Y|\theta + |G|Y$且 $YX = Y(X_\mathrm{O} + G) = |Y|(|X_\mathrm{O}| + |G|)\theta$。因此， $\mathcal{S}$是 OG_n上的一个舒尔环。这证明了第二个方向。

O_n上的舒尔环数量为 $\mathscr{B}(n-1)$，而 G上的舒尔环数量为 $\Omega(G)$。因此，公共细化的数量为 $\mathscr{B}(n-1)\Omega(G)$。这种类型的每个舒尔环都以 G为子半群。若某个舒尔环不满足这一点，则 G 整体包含在一个本原集中，且该集中至少含有 O_n的一个非零元素。O_n 中未与 G 合并的非零元素可以任意划分。对于与 G合并的 O_n中的k个非零元素，有 $\binom{n-1}{k}$种选择；每种选择下，剩余 $n-k-1$ 个非零元素有 $\mathscr{B}(n-k-1)$种划分方式。证明至此完成。 □

推论 1.15. 对于正整数 m, n,

$$\Omega(\mathrm{OLO}_{m,n}) = \mathscr{B}(m-1)\mathscr{B}(n) + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k} \mathscr{B}(m-k-1).$$

例 1.16. 根据这些计数，$\mathsf{ORO}^{3,2}$有 $\mathscr{B}(4)$ 个舒尔环，且 $\mathscr{B}(2)\mathscr{B}(2) + \binom{2}{1}\mathscr{B}(1) + \binom{2}{2}\mathscr{B}(0)$ 个舒尔环，适用于 $\mathsf{OLO}^{3,2}$。类似地，$\mathsf{ORO}^{2,3}$ 有 15 个舒尔环，但 $\mathsf{OLO}^{2,3}$ 有 6 个。

例 1.17. 考虑半群 $\mathsf{OZ}^{3,2,}$，它有 7 个舒尔环，与 $\mathsf{OLO}^{3,2,}$一样，因为 $\Omega(\mathsf{Z}_2) = 2$。反过来，$\mathsf{OZ}^{2,3}$ 有 4 个舒尔环，因为 $\Omega(\mathsf{Z}_3) = 3$，而 $\mathsf{OLO}^{2,3}$ 有 6 个，因为 $\Omega(\mathsf{LO}_3) = 5$。

定理 1.18。 设 G 为有限零半群， n 为正整数。那么，OG_n 上的每个舒尔环都是O_n 上的舒尔环与 G的公共细化。如果$\Omega(G)$ 是 G上的舒尔环数量，那么OG_n 上的舒尔环数量为$\Omega(G)\mathscr{B}(n-1)$。

证明。 令 $\theta \in \mathsf{O}_n$ 和 $\phi \in G$ 为这些半群的零元。令 $\mathcal{S}$ 为 OG_n上的舒尔环。反设 G 不是一个 $\mathcal{S}$-子集。那么，存在一个本原集 $X \in \mathcal{S}$ 和$X = X_\mathrm{O} + X_G$，其中 $X_\mathrm{O} = X \cap \mathsf{O}_n \neq \emptyset$ 且 $X_G = X \cap G \neq \emptyset$。令 $\Phi \in \mathcal{S}$为包含ϕ的本原集。令 $\Phi = \Phi_\mathrm{O} + \phi + \Phi_G$，其中 $\Phi_\mathrm{O} = \Phi \cap \mathsf{O}_n$ 且 $\Phi_G = \Phi \cap G - \theta$。于是

$$\Phi X = (\Phi_\mathrm{O} + \phi + \Phi_G)(X_\mathrm{O} + X_G) = |X||\Phi_\mathrm{O}|\theta + (1 + |\Phi_G|)X_\mathrm{O} + |X_G|\phi + \Phi_G X_G.$$

考虑系数，由于 $(1+|\Phi_G|)X_{\mathrm{O}} \subseteq \Phi X$，必有 $\Phi_G X_G = (1+|\Phi_G|)X_G$，但当 $|X_{\mathrm{O}}|$时，$|X_G|>0$，$|\Phi_G X_G| = |\Phi_G||X_G| < (1+|\Phi_G|)|X_G|$，矛盾。 □

推论 1.19。对于任意基数 n、m，在 $\mathrm{O\_n}_{n,m}$ 上的舒尔环数量为 $\mathscr{B}(n-1)\mathscr{B}(m-1)$。

2 传统舒尔环

如上所述，舒尔环最初由 Schur 和 Wielandt 用于研究群的置换作用。所谓的传递模 （见 [26]）是由一个作用于群上的环境置换群所形成的群划分。如果群 H 上的舒尔环能够实现为某个作用于 H 上的置换群 G 的传递模，则称其为舒尔型 。如果群 H 的所有舒尔环都是舒尔型的，则称该群为舒尔型 。近来，一些 [7, 14, 16, 19, 20, 21] 致力于对舒尔型群进行分类。遗憾的是，并非所有半群都能嵌入一个可在其上正则作用的置换群，而这是传递模情形所必需的。因此，在群范畴之外，发现舒尔型划分似乎存在困难。

在 [1], 中引入了传统舒尔环[5] 的概念。传统舒尔环是属于以下四类之一的划分：自同构型、直积、平凡和楔积。如果一个群 G的所有舒尔环都是传统的，则称该群为传统的 。与来自外部置换群的舒尔型舒尔环不同，传统舒尔环涉及群本身内部的概念，因此能更自然地推广到半群。在本节中，我们尝试将传统舒尔环的这四类推广到半群范畴。

2.1 自同构舒尔环

设 G 为一个半群，并令 Aut(G) 表示 G的自同构群。设 $\mathscr{H} \leq$Aut(G)。于是， $\mathscr{H}$通过这一自同构作用在 G 上。因此，与 $\mathscr{H}$-作用相对应的 G 的划分是一个舒尔环，称为自同构舒尔环。证明沿用群上自同构舒尔环所用的相同论证（[13, 参见例 2.20]）。值得注意的是，当 $\mathscr{H}=1$ 为平凡时这一特殊情形。该作用在 G 上所给出的自同构舒尔环是单元素集的划分 $\mathcal{S}=\{x \mid x \in G\}=G$，我们称之为离散舒尔环。因此，每个半群 G 都是其自身上的一个舒尔环。注意，Aut(O_n) $= S_{n-1}$、Aut(LO_n) $= S_n$和 Aut($\mathrm{K}_{1,n}$) $= S_n$。因此，O_n、LO_n和 $\mathrm{K}_{1,n}$ 上的所有舒尔环必然都是自同构型的。

2.2 直积舒尔环

设 G 和 H 为两个半群，设 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别为 G 和 H 上的舒尔环。令 $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$（称为 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 的 直积）为 $G\times H$ 的一个划分，其本原集均具有如下形式：$X\times Y=\{(x,\ y) \mid x\in X,\ y\in Y\}$，其中 $X\in\mathcal{S}$ 和 $Y\in\mathcal{T}$。证明沿用群上的直积舒尔环所使用的相同论证（[13, 参见例 2.26]）。

每个矩形带都等价于 $\mathrm{LO}_n\times\mathrm{RO}_m$，其中 n，m 为某些正整数。虽然并非每个矩形带上的舒尔环都必然是直积舒尔环，但我们很容易看出，$\mathscr{B}(n)\mathscr{B}(m)$ 舒尔环将会是直积舒尔环。

2.3 平凡舒尔环

群 G 的平凡舒尔环是划分 $\mathcal{S}=\{e, G-e\}$。对于一般的有限半群 G，如果对于某个 $\varepsilon\in G$有 $\mathcal{S}=\{\varepsilon, G-\varepsilon\}$，我们就称舒尔环 $\mathcal{S}$是平凡的。注意， $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]=$Span$\{\varepsilon, G\}$。对于 $|G|>2$，有 $\varepsilon^2=\varepsilon$，也就是说， ε 是一个幂等元。因此，对于群而言，这一扩展的平凡舒尔环概念只产生原有的平凡舒尔环。接下来考虑 $\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$中的 εG，我们或者有 $\varepsilon G=|G|\varepsilon$，这意味着$\varepsilon$ 是一个左零元；或者有 $\varepsilon G=G$，这意味着 ε 是一个左单位元。再考虑 $G\varepsilon$，我们看到 ε 要么是零元，要么是单位元，要么同时是左零元和右单位元，要么同时是右零元和左单位元。第一种情况显然意味着 G 是一个零半群，第二种情况意味着 G 是一个幺半群，最后两种情况则分别意味着 G同构于 LO_n 或 RO_n。根据定理 1.6，我们看到唯一能够拥有多个平凡舒尔环的

[5]传统舒尔环恰好就是用于对有限循环群上的舒尔环进行分类的那些舒尔环 [10, 11]。

半群（在等价意义下）是 LO_n。因此，平凡舒尔环一旦存在，便是唯一的，但 LO_n除外。

我们现在已经看到一些拥有平凡舒尔环的半群，包括 $\mathrm{K}_{1,\ n}$、LO_n^e、O_n、$\mathrm{OLO}_{m,\ n}$以及 $\mathrm{ORO}_{m,\ n}$。在这些情形中，根据定理 1.6 和定理 1.10，每个舒尔环都是平凡舒尔环的细化。因此，这些半群中任意一个的舒尔环数 $\Omega(G)$ 至多为$\mathscr{B}(|G|-1)$。下面的定理对达到这一上界的所有拥有平凡舒尔环的半群进行了分类。

定理 2.1。设 G 是一个阶为 $n \geq 6$的半群。假设 G 具有平凡舒尔环，且所有其他舒尔环都是平凡舒尔环的细化；因此，$\Omega(G) = \mathscr{B}(n-1)$。那么 G 等价于下列之一[6]：$\mathrm{K}_{1,\ n-1}$、LO_{n-1}^e、O_n或 $\mathrm{ORO}_{k,\ n-k}$，其中 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$。

证明。令 $\mathcal{S} = \{\varepsilon, G-\varepsilon\}$ 为平凡舒尔环。由于 $\Omega(\mathrm{LO}_n) = \mathscr{B}(n)$，我们可以假设 ε 是零元或单位元。根据假设，G的一个划分是舒尔环，当且仅当它是 $\mathcal{S}$的细化。令 $y \in G-\varepsilon$。那么 $\{\varepsilon, y, G-\varepsilon-y\}$ 是 G上的舒尔环。因此，根据命题 1.3，对所有 y，都有 $\{\varepsilon, y\} \leq G$。这意味着 $y^2 = \varepsilon$ 或 $y^2 = y$。由于 y 是任意的，这使我们可以将 $G-\varepsilon$ 拆分为两个集合。令$A = \{y \in G-\varepsilon \mid y^2 = \varepsilon\}$ 和 $B = \{y \in G-\varepsilon \mid y^2 = y\}$。显然，$G = \varepsilon \cup A \cup B$。

令 $x \in G-\varepsilon$ 为一个固定点，并令 $y,\ z \in G-\varepsilon$ 为两个一般元素。因此，$\{\varepsilon, y, z, G-\varepsilon-y-z\}$ 是一个舒尔环，并且对所有 $y,\ z$，都有 $\{\varepsilon, y, z\} \leq G$。同样，$\{\varepsilon, y+z, G-\varepsilon-y-z\}$是 G上的舒尔环。特别地，半群 $\{\varepsilon, y, z\}$ 也有平凡舒尔环。根据第 5 节中进行的 3 阶舒尔环枚举（见表 3），这些条件表明，$\{\varepsilon, y, z\}$ 必等价于以下某一项

$$\mathrm{O}_3, \mathrm{ORO}_{2,1}, \mathrm{K}_{1,2}, \mathrm{LO}_2^\theta, \mathrm{LO}_2^e. \tag{1}$$

同理，$\{\varepsilon, x, y, z, G-\varepsilon-x-y-z\}$ 是一个舒尔环，这意味着 $\{\varepsilon, x, y, z\} \leq G$和 $\{\varepsilon, y, z\} \leq\{\varepsilon, x, y, z\}$。再次地，$\{\varepsilon, G-\varepsilon-x-y-z\} \cup \mathcal{T}$，其中 $\mathcal{T}$是 $\{x, y, z\}$上的任意划分，是 G的一个舒尔环；也就是说，$\{\varepsilon, x, y, z\}$ 上的平凡舒尔环的每个细化同样是 $\{\varepsilon, x, y, z\}$上的一个舒尔环。根据第 5 节中对阶为 4 的舒尔环所做的枚举（见表4），结合这些条件，必有 $\{\varepsilon, x, y, z\}$ 等价于以下之一

$$\mathrm{O}_4, \mathrm{ORO}_{3,1}, \mathrm{ORO}_{2,2}, \mathrm{K}_{1,3}, \mathrm{LO}_3^\theta, \mathrm{LO}_3^e. \tag{2}$$

假设 ε是一个单位元。那么根据 (1)，$\{\varepsilon, x, y\}$、$\{\varepsilon, x, z\}$、$\{\varepsilon, y, z\}$ 各自都是 LO_2^e、RO_2^e之一，但根据 (2)，$\{\varepsilon, x, y, z\} \cong$既非 LO_3^e，也非 RO_3^e。因此，$x^2 = x$、$y^2 = y$，且 $z^2 = z$。不失一般性，假设$xy = x$。那么 $\{\varepsilon, x, y, z\} \cong \mathrm{LO}_{3^\circ}^e$因此 $xz = x$、$zx = z$、$yz = y$，且 $zy = z$。相对于固定元素x，G 中的每个乘积都由 $y^2 = y$ 和 $yz = y$确定。因此，$G \cong \mathrm{LO}_{|B|^\circ}^e$

Su假设 ε是一个零元。那么 $\{\varepsilon, x, y\}$、$\{\varepsilon, x, z\}$、$\{\varepsilon, y, z\}$ 中每一个都必须等价于某个 o f

$$\mathrm{O}_3, \mathrm{ORO}_{2,1}, \mathrm{K}_{1,2}, \mathrm{LO}_2^\theta \tag{3}$$

根据 (1)，但 $\{\varepsilon, x, y, z\}$ 必须等价于其中一个

$$\mathrm{O}_4, \mathrm{ORO}_{3,1}, \mathrm{ORO}_{2,2}, \mathrm{K}_{1,3}, \mathrm{LO}_3^\theta \tag{4}$$

根据 (2)。

若 $B = \emptyset$，则 y、$z \in A$。根据 (3)，于是$\{\varepsilon, y, z\} \cong \mathrm{O}_{3^\circ}$因此，$y^2 = z^2 = yz = zy = \varepsilon$，且 G 中的每个乘积都已确定。因此，$G \cong \mathrm{O}_{|A|+1^\circ}$在证明的其余部分中，我们可以假设 $x \in B$，也就是说，$x^2 = x_\circ$

若 $A = \emptyset$，则 x、y、$z \in B$。那么 $\{\varepsilon, x, y\}$、$\{\varepsilon, x, z\}$、$\{\varepsilon, y, z\}$ 中每一个都必须同构于 $\mathrm{K}_{1,2}$,LO_2^θ、RO_2^θ中的一个。忽略等价情形后，需要考虑五种情况：

i. 假设 $\{\varepsilon, x, y\} \cong \mathrm{LO}_2^\theta$、$\{\varepsilon, x, z\} \cong \mathrm{LO}_2^\theta$ 且 $\{\varepsilon, y, z\} \cong \mathrm{LO}_2^\theta$。那么 $\{\varepsilon, x, y, z\} \cong \mathrm{LO}_3^\theta$。

ii. 假设 $\{\varepsilon, x, y\} \cong \mathrm{LO}_2^\theta$、$\{\varepsilon, x, z\} \cong \mathrm{LO}_2^\theta$，且 $\{\varepsilon, y, z\} \cong \mathrm{RO}_2^\theta$。则乘法是非结合的，因为 $y(xz)$ $= yx = y \neq z = yz =(yx)z.$

[6]注意，$\mathrm{RO}_{n-1}^\theta \cong \mathrm{ORO}_{1,\ n-1}$。

iii. 假设 $\{\varepsilon, x, y\} \cong \mathrm{LO}_2^\theta$、 $\{\varepsilon, x, z\} \cong \mathrm{LO}_2^\theta$ 或 RO_2^θ，且 $\{\varepsilon, y, z\} \cong \mathrm{K}_{1,2}$。则乘法同样是非结合的，因为 $x(yz) = x\varepsilon = \varepsilon \neq xz = (xy)z$.

iv. 假设 $\{\varepsilon, x, y\} \cong \mathrm{LO}_2^\theta$, $\{\varepsilon, x, z\} \cong \mathrm{K}_{1,2}$, 且 $\{\varepsilon, y, z\} \cong \mathrm{K}_{1,2}$。那么 $\{\varepsilon, x, y, z\} \cong \mathrm{LO}_2^\theta \,\mathfrak{u}\, \mathrm{CH}_2$, ，这与 (4) 矛盾。

v. 假设 $\{\varepsilon, x, y\} \cong \mathrm{K}_{1,2}$, $\{\varepsilon, x, z\} \cong \mathrm{K}_{1,2}$, 且 $\{\varepsilon, y, z\} \cong \mathrm{K}_{1,2}$。那么 $\{\varepsilon, x, y, z\} \cong \mathrm{K}_{1,3}$。

这表明，若 $xy = x$，则 $\{\varepsilon, x, y, z\} \cong \mathrm{LO}_3^\theta$。因此， $xz = x$, $zx = z$, $yz = y$，且 $zy = z$。相对于固定元素 x， G 中的每个乘积均由 $y^2 = y$ 和 $yz = y$ 确定。因此， $G \cong \mathrm{LO}_{|B|}^e$。否则，若 $xy = \varepsilon$，则 $\{\varepsilon, x, y, z\} \cong \mathrm{K}_{1,3}$。因此， $xz = zx = yz = zy = \varepsilon$。相对于这个固定点 x， G 中的每个乘积均由 $y^2 = y$ 和 $yz = \varepsilon$ 确定。因此， $G \cong \mathrm{K}_{1,|B|}$。

接下来，假设 $A, B \neq \emptyset$。那么 $A + \varepsilon \cong \mathrm{O}_{|A|+1}$，且不失一般性， $B + \varepsilon$ 同构于 $\mathrm{K}_{1,|B|}$, $\mathrm{RO}_{|B|}^\theta$ 中的一个。若 $B = \{x\}$，则由 (3) 得 y, $z \in A$, $\{\varepsilon, y, z\} \cong \mathrm{O}_3$，且 $\{\varepsilon, x, y\}, \{\varepsilon, x, z\} \cong \mathrm{ORO}_{2,1}$。因此 $x^2 = x$, $xy = y$, $xz = z$, $yx = y^2 = yz = zx = zy = z^2 = \varepsilon$。由于这确定了 G 中的所有乘积，我们可知 $G \cong \mathrm{ORO}_{|A|+1,1}$。

最后，假设 $|B| > 1$, $y \in A$，且 x, $z \in B$。 $\{\varepsilon, x, y\}, \{\varepsilon, y, z\} \cong \mathrm{ORO}_{2,1}$。那么 $\{\varepsilon, x, y\}, \{\varepsilon, y, z\} \cong \mathrm{ORO}_{2,1}$。若 $B + \varepsilon \cong \mathrm{K}_{1,|B|}$，则 $\{\varepsilon, x, z\} \cong \mathrm{K}_{1,2}$，但根据 (4)，不存在满足子半群结构要求的半群 $\{\varepsilon, x, y, z\}$。因此， $B + \varepsilon \cong \mathrm{RO}_m^\theta$。再由 (4) 得 $\{\varepsilon, x, y, z\} \cong \mathrm{ORO}_{2,2}$。因此， $y^2 = \varepsilon$, $yz = \varepsilon$, $zy = y$，且 $z^2 = z$，这确定了 G 中的所有乘积。因此，$G \cong \mathrm{ORO}_{|A|+1,|B|}$。由于这些情形涵盖了乘积 ε^2, εy, $y\varepsilon$, y^2, yz, zy 和 z^2 的所有可能性，并且利用固定的 x，我们已能确定诸如 LO_k 与 RO_k 这样的选择之间的一致性，故结果得证。

□

上述定理存在少数几个小型反例，因此需要 $n \geq 5$，具体而言，对于 $\mathscr{B}(1)$：CH_2（链半格见定理 2.6）；对于 $\mathscr{B}(2)$：Z_2^θ、Z_2^e；对于 $\mathscr{B}(3)$：$\mathrm{LO}_2 \times \mathrm{RO}_2, \mathrm{Z}_4$。注意，$\mathscr{B}(1) = \mathscr{B}(0)$，这解释了 CH_2。还要注意，Z_2 是除 LO_n 之外唯一达到完整贝尔数 $\mathscr{B}(n)$ 的半群，这解释了 Z_2^θ 和 Z_2^e 达到 $\mathscr{B}(3-1)$ 的原因。与此相关，我们注意到，舒尔环的数量很难介于 $\mathscr{B}(n-1)$ 和 $\mathscr{B}(n)$ 之间。目前已知的反例只有：有 3 个舒尔环的 Z_3、有 7 个舒尔环的 $\mathrm{LO}_2 \times \mathrm{Z}_2$，以及克莱因四元群 $\mathrm{V}_4 = \mathrm{Z}_2 \times \mathrm{Z}_2$（有 9 个舒尔环）。注意，所有这些反例都与 Z_2 是定理 1.9 的反例密切相关。仿照定理 1.9 的证明，如果还存在其他半群的反例，使其舒尔环数量严格介于 $\mathscr{B}(n-1)$ 和 $\mathscr{B}(n)$ 之间，那么它必定是一个非常大的幺半群，而且似乎不太可能存在。

我们所考虑的比平凡划分更粗的划分是平凡划分 $\{G\}$。平凡划分是 G 上的舒尔环，当且仅当 $G^2 = |G|G$，也就是说，当且仅当 G 的凯莱表中所有元素出现的重数相同。这意味着 G 必须是有限的。若 G 是有限矩形群，即有限矩形带与有限群的直积，则这一性质成立。当平凡划分是 G 上的半群舒尔环时，我们称之为不可分舒尔环。

根据命题 1.5，幺半群 G 上的平凡划分 $\{e, G - e\}$ 是舒尔环，当且仅当平凡划分 $\{G\}$ 同样是 G 上的舒尔环；不过，确实存在一些幺半群，它们有平凡舒尔环，却没有不可分舒尔环，下一条命题由定理 1.10 立即得出，并对此作了说明。

命题2.2。设 G 为一个半群，且平凡划分 $\{G\}$ 是 G上的一个舒尔环。那么G^e 具有平凡舒尔环 $\{e, G^e - e\}$，但不具有不可分舒尔环 $\{G^e\}$。

命题2.3。如果 G 是一个有限半群，且 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$是其两个舒尔环，那么 $\mathbb{Q}[\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}] = \mathbb{Q}[\mathcal{S}] \cap \mathbb{Q}[\mathcal{T}]$ 也是 G上的一个舒尔环。

证明。参见 [13]中的命题 2.25。由于其中的证明仅依赖于哈达玛积的表示论，而不依赖于群乘法，因此该证明可立即推广到半群环 $\mathbb{Q}[G]$。

□

推论 2.4. 设 G 是一个有限半群。那么 G 存在一个唯一的最粗舒尔环。

推论 2.5. 设 G 是一个有限半群， $\mathcal{S}$ 是其最粗舒尔环。若 λ_1、λ_2、.....、λ_n 是 $\mathcal{S}$ 的本原集的大小，则

$$\Omega(G) \leq \mathscr{B}(\lambda_1)\mathscr{B}(\lambda_2)\ldots\mathscr{B}(\lambda_n).$$

当平凡划分是舒尔环时（例如有限矩形群的情形），它显然是最粗的半群舒尔环。对于 O_n，最粗的舒尔环是平凡舒尔环。对于某些半群，最粗的舒尔环甚至可能比它更细。对于另一些半群，最粗的舒尔环可能是离散舒尔环。为说明这一点，令 CH_n 表示称为链半群的集合$\{1,2,\ldots,n\}$，其运算为 $\max(\cdot,\ \cdot)$。

定理 2.6。 在 CH_n 上的唯一舒尔环是离散舒尔环。

证明。 证明对 n 使用归纳法即可。基础情形显然成立。注意，$\mathrm{CH}_n = \mathrm{CH}^{\theta}_{n-1}$。因此，根据推论 1.11，$\mathrm{CH}_n$ 上的舒尔环与 CH_{n-1}上的舒尔环相对应，但根据归纳假设，CH_{n-1} 只有离散舒尔环。 □

以下推论可由定理 1.18 和 2.6 立即得出。

推论 2.　　7. 对于任意正整数 m、n，$\mathrm{OCH}_{m,\ n}$ 上的舒尔环数量为 $\mathscr{B}(m-1$　　$)$.

我们将在第 5 节看到，半群只有一个舒尔环的情况相当常见，而且这个舒尔环必然是离散舒尔环。无论这个最粗舒尔环有多精细，它的作用都与群上的平凡舒尔环相同。因此，正如推论 2.5 所指出的，讨论半群上的舒尔环时应将这个最粗舒尔环纳入考量。

2.4 楔积

楔积的概念由 Leung 和 Man 在 [11] 中引入。[7] 舒尔环的楔积 是通过结合一个子群上的舒尔环与一个商群上的舒尔环构造而成的，前提是满足某些相容条件。楔积构造高度依赖陪集理论，而陪集理论在半群范畴中与群范畴大不相同。因此，我们在此不对半群上的楔积作完整推广，而是给出一些由 Rees 商生成的舒尔环示例 [18], ，这些示例应当被视为半群上的楔积。

定理 2.8。 设 G 是一个含理想 I的半群。设 G/I 是 *Rees* 商。设 $\mathcal{S}$ 是G/I上的舒尔环。那么 $I \vee \mathcal{S}$ 是 G上的舒尔环，称为由 $\mathcal{S}$对 I 作出的理想扩张。

注意， $I \vee \mathcal{S}$ 是通过将 $\mathcal{S}$ 从 G/I 提升到 G，并在 I上插入一个离散划分而诱导出的舒尔环。由于 $\mathcal{S}$ 是集合 $\{I\} \cup G$的一个划分，我们看到 $I \vee \mathcal{S}$ 是 $\mathcal{S}$ 与 I上的离散划分的细化。

证明。 由于 I是一个离散的（$I \vee \mathcal{S}$）子集， I的所有子集同样都是（$I \vee \mathcal{S}$）子集。因此， $\mathbb{Q}[I] \leq \mathbb{Q}[I \vee \mathcal{S}]$。若 X, $Y \in \mathcal{S}$，则对某个 $\alpha \in \mathbb{Q}[I]$有 $XY = \alpha + \sum_{C\in\mathcal{S}} \lambda_C C \in \mathbb{Q}[I \vee \mathcal{S}]$。若 a, $b \in I$，则 aX、 Xa、$ab \in \mathbb{Q}[I] \leq \mathbb{Q}[I \vee \mathcal{S}]$各自均成立。因此， $I \vee \mathcal{S}$ 是 G上的舒尔环。 □

在例 3.7 中，我们考察一个具有两个舒尔环的数值半群：离散舒尔环，以及利用该半群的唯一极大理想构造的理想扩张；此外，还考察了这个 Rees 商上的唯一非离散舒尔环。

定理2.9。 设 G 是一个半群， I 是其理想。设 $\mathcal{S}$ 是 G 上的一个舒尔环，且 I 是一个 $\mathcal{S}$-理想。那么 $\mathcal{S}/I = \mathcal{S}|_{G-I} \vee \{I\}$ 是 *Rees* 商 G/I 上的一个舒尔环。

证明。 将 I 视为 G/I的零元，我们对所有 $x \in G/I$都有 $I^2 = xI = Ix = I$ 。如果 $X \in \mathcal{S}/I$非零，那么 $XI = IX = |X|I$。如果 $Y \in \mathcal{S}/I$ 同样非零，那么在 $\mathbb{Q}[G]$中， $XY = \sum_{a\in I} \mu_a a + \sum_{C\in\mathcal{S}-\mathcal{S}|_I} \lambda_C C$。于是，在 $\mathbb{Q}[G/I]$中， $XY = \sum_{a\in I} \mu_a I + \sum_{C\in\mathcal{S}-\mathcal{S}|_I} \lambda_C C \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}/I]$。 □

[7]楔积也由 Evdokimov 和 Ponomarenko 独立引入 [3, 4], *generalized*，他们将其称为 。随后，Muzychuk 将楔积 *wreath product* 推广到关联方案，Hendrickson 则将其推广到超特征理论 [8]。 [15]

定理 2.8 和定理 2.9 建立了舒尔环与 Rees 商之间的对应定理。特别地， G/I 上的舒尔环与包含 $\mathbb{Q}[I]$ 作为离散舒尔子环的G 上的舒尔环之间存在一一对应。因此，我们看到，舒尔环 $\mathcal{S}$ 可以由关于其 $\mathcal{S}$-理想的 Rees 商构造而成。我们注意到，虽然保证 $\mathcal{S}/I$ 上的舒尔环可以提升为 G 上的舒尔环 $I \vee (\mathcal{S}/I)$，其中 I 上的划分是离散的，但 G 可能有一个舒尔环 $\mathcal{S}$，其 $\mathcal{S}$-理想为 I，且 I 上的划分不是离散的（见例 3.12）。

在下一节中，我们将进一步探讨定理2.9的影响，但在此之前，我们想先给出一些半群“楔积”的例子。给定两个半群 G、 H，我们在不交并 $G \cup H$ 上定义一种乘法：将 G 和 H 各自的乘法按规则 $gh = hg = g$ 扩展，其中 $g \in G$ 且 $h \in H$。这种乘法是将 G 堆叠到 H上构成的，其中G 支配 H 中的每个元素，类似于半格中较高的元素。由于我们还将讨论在 $G \cup H$上定义乘法的其他方式，因此称这个半群为 G 在 H上的堆叠，记作 $G \mathbin{\mathfrak{s}} H$。注意， G 是 $G \mathbin{\mathfrak{s}} H$ 的理想，并且 $(G \mathbin{\mathfrak{s}} H)/G \cong H^\theta$。这种构造此前已有应用（见 [2]），但据作者所知，尚无公认的名称或记号。

定理 2.10。如果 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$分别是半群 G 和 H上的舒尔环，那么 $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$是堆叠 $G \mathbin{\mathfrak{s}} H$上的舒尔环。此外，$G \mathbin{\mathfrak{s}} H$ 上的每个舒尔环都具有这种形式。

证明。 由于 $\mathcal{S}$和 $\mathcal{T}$是舒尔环，我们只需检验乘积 XY和 YX，其中 $X \in \mathcal{S}$和 $Y \in \mathcal{T}$。在这种情况下，我们有 $XY = YX = |Y|X \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}] \leq \mathbb{Q}[\mathcal{S} \vee \mathcal{T}]$。

设 $\mathcal{S}$是定义在 $G \mathbin{\mathfrak{s}} H$上的舒尔环。设 $X \in \mathcal{S}$包含一个来自 G的元素。设 $X_G = X \cap G$和$X_H = X \cap H$；因此， $X = X_G + X_H$。那么 $X^2 = (X_G + X_H)^2 = X_G^2 + 2|X_H|X_G + X_H^2$。由于 $X_G \neq \emptyset$， X_G 中的元素在 X^2 中出现的重数至少为 $2|X_H|$。由于 X 是一个本原集， X_H中的元素出现的重数也必定至少为 $2|X_H|$。然而， H 中包含在 X^2 内的元素只能位于 X_H^2中。按重数计数，来自 H的元素至多有 $|X_H|^2$个，而这样的元素至少有 $2|X_H|^2$个。因此， $|X_H| = 0$，也就是说， $X = X_G \subseteq G$。特别地， G以及随之而来的 H必须是一个 $\mathcal{S}$-子半群，这就完成了证明。 □

类似于半直积通过自同构扭曲直积来定义，我们可以在第一个半群等价于 LO_n 时，构造半群的半堆[8] 。如第 2.1 节所述，$\mathrm{Aut}(\mathrm{LO}_n) = S_n$。设 $\varphi : G \to S_n$ 是一个群同态。接着，在 $\mathrm{LO}_n \mathbin{\hat{\mathfrak{s}}_\varphi} G = \mathrm{LO}_n \cup G$ 上定义乘法，使其扩展 LO_n 和 G 上的乘法，规则如下：对每个 $x \in \mathrm{LO}_n$ 和$g \in G$，定义 $xg = x$ 和 $gx = \varphi_g(x)$，其中 $\varphi_g : \mathrm{LO}_n \to \mathrm{LO}_n$ 是与 g关联的自同构。容易验证，赋予这种乘法的 $\mathrm{LO}_n \mathbin{\hat{\mathfrak{s}}_\varphi} G$ 是一个半群，且 LO_n 是一个理想。注意，LO_n 中乘法的缺失保证了这种乘法满足结合律。例如， $x(gy) = x\varphi_g(y) = x = xy = (xg)y$，但如果 x， y 取自任意半群，那么对所有 $g \in G$都有$xy = x\varphi_g(y)$，这在大多数情形下会有很强的限制。

仿照定理 2.10 的证明可得，$\mathrm{LO}_n \mathbin{\hat{\mathfrak{s}}_\varphi} G$ 上的所有舒尔环均具有 $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$ 的形式，其中 $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$ 分别对应于 $\mathcal{S}$ 上的舒尔环，而 $\mathcal{T}$ 对应于 LO_n 和 G 上的舒尔环。不过，与堆叠的情形不同，LO_n 和 G 上的舒尔环并非都相容。

例 2.11。 在特殊情形下，当 $G = \mathrm{Z}_n$ 且 $\varphi : \mathrm{Z}_n \to \mathrm{Aut}(\mathrm{LO}_n)$ 是循环置换作用时，令 $\mathrm{LOZ}_n = \mathrm{LO}_n \mathbin{\hat{\mathfrak{s}}_\varphi} \mathrm{Z}_n$。根据定理 1.8，$\mathrm{LO}_n$ 上的所有划分都是舒尔环，因此共有 $\mathscr{B}(n)$ 个这样的舒尔环。循环群上的舒尔环计数要复杂得多。关于有限循环群上群舒尔环计数的综述，参见 [12] 。考虑 $\mathrm{LOZ}_3 = \mathrm{LO}_3 \cup \mathrm{Z}_3 = \{0, 1, 2\} \cup \{e, z, z^2\}$ 的情形。此时 Z_3 只有三个半群舒尔环：离散舒尔环、平凡舒尔环和不可分舒尔环：

$$\{e, z, z^2\}, \quad \{e, z + z^2\}, \quad \text{and} \quad \{e + z + z^2\}.$$

因此，舒尔环的数 量将为 $5(3) = 15$，但 LOZ_3 只有 12 个舒尔环。在特别是，分部 tion

$$\mathcal{S} = \{0, 1 + 2, e, z, z^2\}$$

不是 LOZ_3 上的舒尔环，因为 $z0 = 1 \notin \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。另外两个缺失的划分也可用类似方法构造。

[8]我们将在第 3.5 节中考察另一种半堆版本，记作 $\mathrm{LORO}(\ell, m, n, k)$，待讨论不可分解施加时再作介绍。

假设 G 和 H 都是零半群，其零元分别为 θ_G 和 θ_H。将 G 和 H 中的乘法扩展到 $G\cup H$，对 $g\in G$ 和 $h\in H$，我们定义 $gh=\theta_G$ 和 $hg=\theta_H$。这就在 G 与 H 的并集上定义了一个带有扭曲的结合乘法，我们将其记为 $G\mathbin{\mathfrak{t}}H$。与 $G\mathbin{\mathfrak{s}}H$不同， G 和 H 都不是 $G\mathbin{\mathfrak{t}}H$中的理想，尽管它们都是右理想。

定理 2.12. 若 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别是零半群 G 和 H 上的舒尔环，则 $\mathcal{S}\vee\mathcal{T}$ 是 $G\mathbin{\mathfrak{t}}H$ 上的舒尔环。

证明。 根据推论 1.11， θ_G 和 θ_H 分别是 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 的元素。令 $X\in\mathcal{S}$ 和 $Y\in\mathcal{T}$。则 $XY=|X||Y|\theta_G$，且 $YX=|X||Y|\theta_H\in\mathbb{Q}[\mathcal{S}\vee\mathcal{T}]$，由此得证。 □

例 2.13. 定理 2.12 不一定能给出 $G\mathbin{\mathfrak{t}}H$ 的每个舒尔环。例如，令 $G=\mathbf{Z}_2^\theta=\{\theta_G,e_G,g\}$ 和 $H=\mathbf{Z}_2^\theta=\{\theta_H,e_H,h\}$，但注意到 $G\mathbin{\mathfrak{t}}H$ 有舒尔环 $\{\theta_G,\theta_H,e_G+e_H,g+h\}$，这不是由该定理给出的。

下面的定理与定理 1.6 的证明类似。

定理 2.14。 设 G 是一个非平凡零半群，且 整数集$_1=\{\varepsilon\}$ 是平凡群。设 $\mathcal{S}$ 是 $G\mathbin{\mathfrak{t}}$整数集$_1$ 上的一个舒尔环。那么 $\varepsilon\in\mathcal{S}$。由此可知， $G\mathbin{\mathfrak{t}}$整数集$_1$ 上的舒尔环与 G 上的舒尔环一一对应。

与半堆 $\mathbf{LOZ}_n$ 类似，我们也可以利用 $\mathbf{LO}_n$ 来描述一种类似的半扭积 。更具体地说，我们可以利用左零元构造一种扭曲，其中 $\mathbf{LO}_n$ 的所有元素都是左零元。令 $\mathbf{LO}_n\mathbin{\mathfrak{t}}G=\mathbf{LO}_n\cup G$ 是一个半群，它将 $\mathbf{LO}_n$ 和 G 的乘法扩展为 G（某个零半群）上的乘法，使得对于所有 $g\in G$ 和 $x\in\mathbf{LO}_n$，都有 $gx=\theta$ 和 $xg=x$。容易证明，这种乘法是结合的。[9]注意，$\mathbf{LO}_n$ 和 G 是右理想，而 $\mathbf{LO}_n\cup\theta\cong\mathbf{LO}_{n+1}$ 是 $\mathbf{LO}_n\mathbin{\mathfrak{t}}G$ 的双边理想。因此，$\mathbf{LO}_n\mathbin{\mathfrak{t}}G$ 是由 G 扩张 $\mathbf{LO}_{n+1}$ 得到的理想扩张。注意，$\mathbf{LO}_n\mathbin{\mathfrak{t}}$整数集$_1\cong\mathbf{LO}_{n+1}$。

定理 2.15。 设 $G\ncong$整数集$_1$ 是零元为 θ 的零半群，并设 $n\in\mathbb{N}$。则每个定义在$\mathbf{LO}_n\mathbin{\mathfrak{t}}G$ 上的舒尔环都具有形式 $\mathcal{S}\vee\mathcal{T}$，其中 $\mathcal{S}$和 $\mathcal{T}$分别是定义在$\mathbf{LO}_n$ 和 G上的舒尔环。若$\Omega(G)$ 表示定义在 G上的舒尔环的数量，则定义在$\mathbf{LO}_n\mathbin{\mathfrak{t}}G$ 上的舒尔环数量为 $\mathscr{B}(n)\Omega(G)$。

证明。 设 $\mathcal{S}$是定义在$\mathbf{LO}_n\mathbin{\mathfrak{t}}G$ 上的舒尔环，并设 X是一个本原集，其中 $X=X_n+X_G$对于 $X_n\subseteq\mathbf{LO}_n$和 $X_G\subseteq G$。注意 $X^2=|X|X_n+|X_n||X_G|\theta+X_G^2$。由于 $X_n\subseteq X^2$，必有 $X\subseteq X^2$。由于$X_G\subseteq|X_n||X_G|\theta+X_G^2$，当 $\theta\in X_G$时必有 $|X_n||X_G|\theta+X_G^2=|X|X_G$，否则必有 $X_G^2=|X|X_G$。

首先考虑 $\theta\notin X_G$的情况。于是 $X_G^2=|X|X_G=(|X_n|+|X_G|)X_G$，但是按重数计数， X_G^2 有$|X_G|^2$ 个乘积，而 $|X|X_G$ 有 $(|X_n|+|X_G|)|X_G|$ 个乘积。由于 $|X_G|^2\leq(|X_n|+|X_G|)|X_G|$，只有在 $|X_n|=0$ 或 $|X_G|=0$时才能取得等号。

接下来考虑 $\theta\in X_G$的情况。令 $X_G=\theta+X_G'$，然后

$$X_G^2=(|X_n|(|X_G'|+1)+2|X_G'|+1)\theta+X_G'^2=|X|=|X_n|+|X_G'|+1,$$

这意味着 $|X_G'|(|X_n|+1)=0$，也就是说， $|X_G'|=0$。因此， $X=X_n+\theta$。由于 $|G|>1$， $G-\theta$ 是一个 $\mathcal{S}$-子集。因此，存在一个本原集 $Y\subseteq G-\theta$，但 $YX=|X||Y|\theta$，这与 X 的本原性相矛盾。因此，$\mathbf{LO}_n$ 和 G 是 $\mathcal{S}$-子半群。结论随即成立。 □

注意到 $\{\theta_G,\theta_H\}$是 $G\mathbin{\mathfrak{t}}H$的理想。因此，我们可以通过将零元素合并在一起，移除 $G\mathbin{\mathfrak{t}}H$的扭曲[10]。令 $G\mathbin{\mathfrak{u}}H=(G\mathbin{\mathfrak{t}}H)/\{\theta_G,\theta_H\}$。那么， $G\mathbin{\mathfrak{u}}H$包含 G和 H作为子半群，但二者都不一定是理想。无论如何，我们可以仿照定理 2.10，在 $G\mathbin{\mathfrak{u}}H$ 上构造舒尔环；这是定理2.9和定理 2.12的直接推论。

[9]注意，扭曲运算此前是为零半群定义的，而 $\mathbf{LO}_n$ 在 $n\geq2$时并非零半群。但由于 $\mathbf{LO}_n$ 的每个元素都是左零元，将扭曲扩展到包括 $\mathbf{LO}_n$，符合扭曲的本意：当乘积涉及来自不同半群的两个元素时，左侧元素对右侧元素起零元的作用。在 $n=1$的情况下，$\mathbf{LO}_1\cong\mathbf{Z}_1$ 且 $\mathbf{LO}_1\mathbin{\mathfrak{t}}G\cong\mathbf{Z}_1\mathbin{\mathfrak{t}}G$。因此，在符号 $\mathfrak{t}$ 被重载的这一种情况下，两种解释是一致的。正因如此，我们无需引入新符号，例如 $\hat{\mathfrak{t}}$，这与堆和半堆的情况不同。[10]与将扭曲扩展到包括 $\mathbf{LO}_n$ 类似，我们也可以将合并扩展到包括 $\mathbf{LO}_n$。因此，$\mathbf{LO}_n\mathbin{\mathfrak{u}}G$ 是通过将 $0\in\mathbf{LO}_n$ 与 $\theta\in G$ 等同而得到的商半群；但由于这会导致 $\mathbf{LO}_{n+1}\mathbin{\mathfrak{u}}G\cong\mathbf{LO}_n\mathbin{\mathfrak{t}}G$，这种推广并未带来新的半群或舒尔环。

推论 2.16。 如果 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$分别是 G 和 H上的舒尔环，那么 $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$是 $G \amalg H$上的舒尔环。

例 2.17. 与例 2.13 类似，我们可以看到，并非所有关于 $G \amalg H$ 的舒尔环都由推论 2.16 得到。仿照例 2.13，考虑 $G = \mathsf{Z}_2 = \{e_G, g\}$、 $H = \mathsf{Z}_2 = \{e_H, h\}$，并注意到 $G^\theta \amalg H^\theta$ 有舒尔环 $\{g + h, e_G + e_H, \theta\}$。

上述构造的舒尔环可以推广。设 G 是任意一个带有舒尔环 $\mathcal{S}$的零半群。那么 $G \amalg G$ 含有 G的两个不同副本，分别记为 G_1 和 G_2。同样，舒尔环$\mathcal{S}$ 可以构造成关于 G_1 和 G_2的舒尔环，分别记为 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$。对于每个本原集 $X \in \mathcal{S}$，令 $X_1 \in \mathcal{S}_1$ 和 $X_2 \in \mathcal{S}_2$ 为相应的本原集。于是，我们定义 $X^+ = X_1 \cup X_2$和 $\mathcal{S}^+ = \{X^+ \mid X \in \mathcal{S}\} \cup \theta$，它们构成 $G \amalg G$的一个划分。对于每个 X^+、 $Y^+ \in \mathcal{S}^+$，都有 $X^+Y^+ = (X_1 + X_2)(Y_1 + Y_2) = (|X_1||Y_2| + |X_2||Y_1|)\theta + X_1Y_1 + X_2Y_2$。由于 $X_1Y_1 \in \mathcal{S}_1$ 和 $X_2Y_2 \in \mathcal{S}_2$，对于 $\lambda_C \in \mathbb{N}$，有 $X_1Y_1 + X_2Y_2 = (XY)^+ = \sum_{C \in \mathcal{S}} \lambda_C C^+$。因此，$\mathcal{S}^+$ 是关于 $G \amalg G$的舒尔环。注意， G_1 和 G_2 都是 $(\mathcal{S}_1 \vee \mathcal{S}_2)$-子半群，但二者都不是 $\mathcal{S}^+$-子半群。

根据对应定理（定理 2.8）， $\mathcal{S}^+$ 可提升为 $G \mathbin{\mathfrak{t}} G$上的一个舒尔环，其本原集保持不变，但 $\{\theta_{G_1}, \theta_{G_2}\}$现在是离散的。这个提升后的舒尔环的粗化（其中 $\{\theta_{G_1}, \theta_{G_2}\}$是一个本原集）同样是 $G \mathbin{\mathfrak{t}} G$上的一个舒尔环。

半群的单元素扩张随处可见，例如我们上文见过的 $G^e = G \mathbin{\mathfrak{s}}$ 整数集$_1$、 $G^\theta =$ 整数集$_1 \mathbin{\mathfrak{s}} G$、$\mathrm{ORO}_{n,1}$、$G \mathbin{\mathfrak{t}}$ 整数集$_1$、 $G \amalg \mathsf{O}_2$, 和 $G \amalg \mathsf{CH}_2$, ，以及下一节将讨论的克隆。通过组合这些扩张，许多半群可以逐次添加一个元素递归构造出来；但上述许多扩张[11] 要求新添的元素在每个舒尔环中都是单元素集。因此，在小半群上的舒尔环枚举中，定理 2.6 这样的情形十分常见。结合这些观察以及定理 1.7、1.8、1.12 和 1.13 等结果，小半群上的舒尔环数量通常是若干贝尔数的和或积，我们将在第 5 节中看到这一点。

3 不可分解元素

设 G 是一个半群，且 $x \in G$。若存在 a， $b \in G$ 使得 $x = ab$，则称 x 是可分解的。否则，称 x 是不可分解的。注意， G 的不可分解元素是在该半群的凯莱表中从未出现过的元素。

3.1 克隆

设 G 是一个半群，且 $x \in G$，那么 $G[x] = G \cup \{x'\}$，其中 $x' \cdot y = x \cdot y$、 $y \cdot x' = y \cdot x$，并且对于任意元素 $y \in G$，$(x')^2 = x^2$。元素 x' 称为 x 的克隆，其行为与 x 无法区分。克隆的平方有一定的自由度，也就是说，可以将 $(x')^2$ 定义为不同于 x^2 的元素；但对于 $G[x]$ ，我们定义 $(x')^2 = x^2$。 $G[x]$ 或 $G[\hat{}x]$ 的结合律显然成立。

克隆过程可以迭代进行，并且向半群中添加新克隆的顺序并不重要。设 $X \subseteq G$。则 $G[X] = \bigcup_{x \in X} G[x]$。注意，两个克隆的乘积也是良定义的，即如果 x' 和 y' 分别是 x 和 y的克隆，那么 $x'y' = xy' = x'y = xy$。如果 x'' 是 x' 的克隆，而 x' 又是 x的克隆，那么对于所有 $y \in G$，都有 $x''y = x'y = xy$ 。因此，我们只需考虑原半群元素的克隆，并将子集 $X \subseteq G$ 视为一个多重集。

[11]对于 $G \amalg \mathsf{O}_2$, ，如第3节所述，新添的元素是不可分解的，并且在舒尔环中，它能与 G 中的哪些其他元素融合受到严格限制。许多零半群 G 不满足这些条件，因此在每个舒尔环中，新添到 $G \amalg \mathsf{O}_2$ 中的元素都必须是孤立的。不过，与 G^e、 G^θ和 $G \mathbin{\mathfrak{t}} \mathsf{Z}_1$, 不同，在 $G \amalg \mathsf{O}_2$上的舒尔环中，这个新元素可以与另一个元素融合。例如，$\mathsf{O}_n \amalg \mathsf{O}_2 \cong \mathsf{O}_{n+1}$，此时非零元素上的任意划分都能给出一个舒尔环。克隆同样不可分解，也有类似的考量，后文将对此加以说明。$G \amalg \mathsf{CH}_2$也存在类似情形。对于许多零半群 G ，在 $G \amalg \mathsf{CH}_2$, 上的所有舒尔环中，新元素都必须是孤立的；但对于某些 G ，则可以突破这一限制。由于 $\mathsf{K}_{1,n} \amalg \mathsf{CH}_2 \cong \mathsf{K}_{1,n+1}$，非零元素上的任意划分都能给出一个舒尔环。与 $G \amalg \mathsf{O}_2$, 中的新元素不同， $G \amalg \mathsf{CH}_2$ 中的额外元素是幂等元。半群中幂等元的存在会极大影响这些半群上可能出现的舒尔环，不过作者在此并未探讨这种关系。[12]若 x 是幂等元，则我们在第 3.5 节中给出 $(x')^2$ 的一种替代方案。

定理 3.1。设 G 是一个半群，$\mathcal{S}$ 是 G 上的一个舒尔环。设 X 是一个 $\mathcal{S}$-子集。如果 X' 是 C 在 $G[X]$ 中各元素的克隆所成的集合，那么 $\mathcal{S}[X] = \mathcal{S} \vee \{X'\}$ 是 $G[X]$ 上的一个舒尔环。

注意，$\mathcal{S}[X]$ 是通过克隆一个 $\mathcal{S}$子集并将其并入原划分 $\mathcal{S}$而形成的 $G[X]$ 的划分。

证明。注意，对于所有 $Y \in \mathcal{S}$，$(X')^2 = X^2 \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$、$X'Y = XY \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$和 $YX' = YX \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。 □

给定 $G[X]$，G 是一个理想，且 $G[X]/G \cong \mathsf{O}_{|X|+1}$。因此，$G[X]$ 是由 O_n 对 G 作出的理想扩张。于是，舒尔环 $\mathcal{S}[X]$ 是一个理想扩张舒尔环，它可由理想 G 上的任意舒尔环与 O_n上的平凡舒尔环构成；定理 2.8 给出了相反的许可。这进一步说明了在理想扩张中两个半群上的两个舒尔环进行融合时，需要相容性判据。

定理 3.1 可以迭代应用，依次克隆一个又一个 $\mathcal{S}$子集，直到我们将某个 $\mathcal{S}$粗化的克隆并入其中。

例 3.2。令 $G = \mathsf{Z}_2[\mathsf{Z}_2] = \{e, g, e', g'\}$。子群 Z_2 有两个（半群）舒尔环：$\{e, g\}$和 $\{e + g\}$。由此得到三个克隆舒尔环：$\{e, g, e', g'\}$、$\{e, g, e' + g'\}$和 $\{e + g, e' + g'\}$。根据下述定理 3.3，在 G 上唯一需要考虑的其他划分将是 $\{e + g, e', g'\}$，但它不是舒尔环，因为 $(e')^2 = e$ 不是本原集。

3.2 不可分解施加

半群 G 的可分解元 构成理想 $G^2 = \{ab \mid a, b \in G\}$。令 $\mathscr{I}(G) = G - G^2$ 表示 G的不可分解元素集合。注意，$G/G^2 \cong \mathsf{O}_{|\mathscr{I}(G)|+1}$。因此，$G$ 是由零半群扩张 G^2 的理想扩张。

如果 G 是一个幺半群，那么 $\mathscr{I}(G) = \emptyset$，因为 $x = ex = xe$。因此，不可分解元素在群论中不起作用，更不用说群上的舒尔环了。相反，当一个半群确实含有不可分解元素时，这些元素对于该半群的哪些划分能构成舒尔环、哪些不能，起着关键作用。

定理 3.3. 设 G 是一个半群，$\mathcal{S}$ 是 G 上的一个舒尔环。那么 $\mathscr{I}(G)$ 是一个 $\mathcal{S}$-子集。

证明。反设不然，也就是说，设 X 是 $\mathcal{S}$ 中的一个本原集，其中包含元素 x 和 y，使得 x 不可分解，而 y 可分解。因此，存在元素 $a, b \in G$，使得 $y = ab$。于是 $y \in AB$，这意味着 $X \subseteq AB$。由于 $x \in X$，存在某个 $c \in A$ 和 $d \in B$，使得 $x = cd$，矛盾。 □

根据定理 2.8，$\mathscr{I}(G)$ 的任意划分都可以出现在一个舒尔环中；也就是说，如果 $\mathcal{S}$是 $\mathscr{I}(G)$ 的一个划分，那么 $G^2 \vee \mathcal{S}$ 就是 G 上的一个包含 $\mathcal{S}$的舒尔环。

例 3.4. 注意，O_n 的每个非零元都是不可分解的。O_n 上的每个舒尔环都属于上述类型，即 $\theta \vee \mathcal{S}$。

定理 3.3 告诉我们，对于半群 G上的每个舒尔环 $\mathcal{S}$，G^2 都是一个 $\mathcal{S}$-理想。当然，$G^3 = \{abc \mid a, b, c \in G\}$ 同样是 G的一个理想。由于 $G^3 = \bigcup_{A,\ B,\ C \in \mathcal{S}} ABC$，$G^3$ 同样是一个 $\mathcal{S}$-子集。通过归纳法，我们得到以下推论。

推论 3.5. 设 $\mathcal{S}$ 是半群 G上的一个舒尔环。那么，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，G^k 都是一个 $\mathcal{S}$-理想。

若 $x \in G$ 能分解为 k-可分解 元，即 $x \in G^k - G^{k+1}$，则称其为 k-可分解元；换言之，它可以分解为 k 个因子的乘积，但不能分解为 $k+1$ 个因子的乘积。令 $\mathscr{I}_k(G)$ 表示 G 中的 k-可分解元。注意，G 的 1- 可分解元恰好就是 G 的不可分解元素。推论 3.5 告诉我们，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，$\mathscr{I}_k(G)$ 都是一个 $\mathcal{S}$- 子集。令 $G^\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} G^k$。由于对于 $k \neq \ell$，$\mathscr{I}_k(G) \cap \mathscr{I}_\ell(G) = \emptyset$，我们得到半群上最粗舒尔环的如下下界。

定理 3.6（不可分解施加）。设 $\mathcal{S}$ 是半群 G 上的舒尔环。那么 $\mathcal{S}$ 是划分的一个细化

$$\{G^\infty\} \cup \{\{\mathscr{I}_k(G)\} \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

这表明，半群中元素的可分解性对那些能够成为舒尔环的划分施加了严格限制。

例 3.7。 数值半群是幺半群 $(\mathbb{N},+)$ 的子半群。令 $G=\langle 2,3\rangle$ 为由素数 2 和 3 生成的数值半群。注意 $G=\{2,3,4,5,6,\ldots\}$。这两个生成元在 G 中是不可分解的。事实上， $\mathscr{I}(G)=\{2,3\}$。更一般地，任意数值半群的不可分解元素恰好是其极小生成集中的元素。$\{2,3\}$上有两种可能的划分。根据定理 2.8，它们对应于 G 上两个不同的舒尔环[13] ，即

$$\{\ 2,3,4,5,6,\ldots\ \}\quad\text{and}\quad\{\ \{2,3\},4,5,6,\ldots\ \}$$

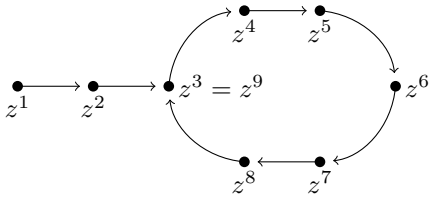
实际上，这些是仅有的两个 G 上的舒尔环。如前所述， $\mathscr{I}_1(G)=\{2,3\}$，但我们也没有 e

$$\mathscr{I}_2(G)=\{4,5\},\ \mathscr{I}_3(G)=\{6,7\},\ \mathscr{I}_4(G)=\{8,9\},\ldots$$

一般而言， $\mathscr{I}_k(G)=\{2k,2k+1\}$。注意，对于这个 G，在舒尔环 $\mathcal{S}$ 中，如果 2 和 3 是单元素集，那么它们生成整个离散舒尔环 G；根据命题 1.3，该环必为 $\mathcal{S}$ 的子环。假设 $\{2,3\}$ 是一个本原 $\mathcal{S}$-集。由于 $\{2,3\}+\{2,3\}=\{4,6\}+2\{5\}$，4 和 5 属于不同的本原 $\mathcal{S}$-集。由于 $\mathscr{I}_2(G)=\{4,5\}$ 是一个 $\mathcal{S}$-子集，因此必有 $4,5\in\mathcal{S}$ 是本原集。类似的论证表明，每个集合 $\mathscr{I}_k(G)$ 也必为离散的，这就证明了我们的结论。

3.3 单生成元半群

单生成元半群（或循环[14]）是由单个元素生成的半群。对于 $m,\ n\in\mathbb{N}$，令 $\mathsf{Z}_{m,\ n}=\langle z\mid z^m=z^{m+n}\rangle$ 表示指标为 m 、周期为 n的有限单生成元半群。注意，有限单生成元半群的阶为 $|\mathsf{Z}_{m,\ n}|=m+n-1$。理想 (z^m) 是阶为 n 的循环子群，即 $(z^m)\cong\mathsf{Z}_n$。唯一满足 $m\le d<m+n$ 且 $n\mid d$ 的元素 z^d 是该子群的单位元，也是 $\mathsf{Z}_{m,\ n}$ 的唯一幂等元。当且仅当 $m=1$ 时，单生成元半群 $\mathsf{Z}_{m,\ n}$ 本身是循环群，也就是说 $\mathsf{Z}_{1,\ n}\cong\mathsf{Z}_n$。



$\mathsf{Z}_{3,6}$ 的凯莱图

与有限循环群这一子族相比，这个更多样的单生成元半群族大概会包含更多样的舒尔环族。令人惊讶的是，事实正好相反。若 $m>1$，则 $\mathscr{I}(\mathsf{Z}_{m,\ n})=z$。此外，对于 $k\le m$， $\mathscr{I}_k(\mathsf{Z}_{m,\ n})=z^k$；对于 $k>m$， $\mathscr{I}_k(\mathsf{Z}_{m,\ n})=\emptyset$，且 $\mathsf{Z}^{\infty}_{m,\ n}=(z^m)$。

定理 3.8。 若 $m>1$，则 整数集$_{m,\ n}$ 上唯一的舒尔环是离散舒尔环。

证明。 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathsf{Z}_{m,\ n}=\langle z\rangle$ 上的一个舒尔环。由定理 3.3， $\mathscr{I}(\mathsf{Z}_{m,\ n})=z$ 是一个 $\mathcal{S}$-子集。由于 z 生成了整个 $\mathsf{Z}_{m,\ n}$，必然本原的集合 $\{z\}$ 生成整个离散舒尔环 $\mathbb{Z}_{m,\ n}$，而根据命题 1.3，它是 $\mathcal{S}$ 的一个子环。□

对无限单生成半群也适用类似的论证。令 $\mathbb{Z}^+=\{1,2,3,4,\ldots\}$ 表示正整数集合。那么在同构意义下，$(\mathbb{Z}^+,\ +)$ 是唯一的无限单生成半群。[15] 由此可得，对所有 $k\in\mathbb{Z}^+$， $\mathscr{I}_k(\mathbb{Z}^+)=k$。根据推论 3.5， $\mathbb{Z}^+$ 上的任意舒尔环必然是离散的。

推论 3.9. 所有定义在非循环群的单生成元半群上的舒尔环都是离散的。特别地，定义在单生成元半群上的所有舒尔环都是传统的。

[13]我们通常用 $+$ 表示划分中的类，因为半群的运算是乘法。由于 $\mathbb{N}$ 本身就是 $+$，我们使用较为笨拙的记号 $\{\ \{\ldots\},\{\ldots\},\ldots\}$ 以避免混淆。[14]如上所述，Leung 和 Man 将有限循环群上的所有舒尔环分类为传统的。将这一结果推广到无限循环群的问题，促使 Misseldine 等人 [1] 将舒尔环的概念推广到无限群。正如本文所观察到的，同一个问题再次成为将舒尔环概念推广到半群的缘由。[15] 这同样表示秩 1 的自由半群。

单生成幺半群也可以类似地定义。由于每个单生成幺半群都同构于 $\mathsf{Z}^{e}_{m,n}$ or$\mathbb{N}$，定理 3.8 及其推论可立即推广到单生成幺半群。特别地，定义在本身不是群的单生成幺半群上的舒尔环是离散舒尔环。

3.4 幂零半群

具有零元 θ 的零半群 G 称为幂零的，如果对每个 $x \in G$，都存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x^n = \theta$。如果 G 是有限的，则这等价于对某个 n 有 $G^n = \theta$ 。如果一个半群是 n-幂零的，则称其为此类半群，若 $G^n = \theta$。注意，当且仅当 $G \cong \mathsf{O}_n$ 时， G 是 2-幂零的。定理 3.6 为有限幂零半群提供了一个重要的划分，因为

$$G > G^2 > G^3 > G^4 > \ldots > \theta$$

这是一列严格递减的理想。

定理 3.10。设 G 是满足 $G^3 = \theta$ 的幂零半群。那么， G 上的所有舒尔环 $\mathcal{S}$ 都可按以下方式构造：首先，在不可分解元素 $\mathscr{I}_1(G)$ 上选取任意划分$\mathcal{S}|_{\mathscr{I}_1(G)}$ ；其次，若 $\mathscr{I}_2(G)$ 中两个元素在 XY 中对所有本原集 X、$Y \in \mathcal{S}|_{\mathscr{I}_1(G)}$ 的重数都相同，则称它们等价；第三，在 $\mathscr{I}_2(G)$ 上选取该等价关系的任意细化 $\mathcal{S}|_{\mathscr{I}_2(G)}$ ；第四，$\mathcal{S} = \mathcal{S}|_{\mathscr{I}_1(G)} \vee \mathcal{S}|_{\mathscr{I}_2(G)} \vee \theta$。

证明。令 X，$Y \in \mathcal{S}|_{\mathscr{I}_1(G)}$。注意， $\mathscr{I}_1(G)$ 必定非空，因为 G 是有限的。根据构造， XY 是 $\mathscr{I}_2(G)$ 与 θ中等价元素的子集的线性组合。注意， $\mathcal{S}$ 中的所有其他乘积都等于 θ的倍数。因此， $\mathcal{S}$ 对乘法封闭，故为一个舒尔环。根据定理 3.6， G 上的所有舒尔环都必定具有这种形式。 □

绝大多数有限半群都是幂零的，其中绝大多数是 3-幂零的[2]。我们简要介绍一种生成 3-幂零半群的简单方案。对于满足$0 \leq k < m^{n^2}$的 m、n、$k \in \mathbb{Z}$，令 $\mathsf{O}(m,n,k) = \{0,1,\ldots,m+n-1\}$ 为具有如下乘法的半群：令x、y ∈属于 $\mathsf{O}(m,n,k)$；若 $x < m$，则 $xy = yx = 0$；否则，乘积 xy由一个 $n \times n$ 矩阵确定，该矩阵的元素取自 $\{0,1,\ldots,m-1\}$，其中 x、$y \geq m$。此矩阵可编码为整数k。若此矩阵的 n^2 个元素按从左至右、从上至下的顺序依次为 k_{n^2-1}、.....、k_2、k_1、k_0，则$k = k_{n^2-1}(m^{n^2-1}) + \ldots + k_2(m^2) + k_1(m) + k_0$。注意，对于 $\mathsf{O}(m,n,k)$ 中所有的 x、y、$z \in$，都有 $x(yz) = (xy)z = 0$，因此对于所有的 m、n、k，$\mathsf{O}(m,n,k)$ 都是 3-幂零半群。注意，整数 k的选择只不过是将一个随机矩阵插入凯莱表。令 $M = \{0,\ldots,m-1\}$ 且 $N = \{m,\ldots,m+n-1\}$。于是 $M \cong \mathsf{O}_m$。若 $m-1 \notin N^2$，则 $\mathsf{O}(m,n,k) = \mathsf{O}(m-1,n+1,k')$，其中 k' 是通过给 k增添一行和若干列的零而形成的矩阵。因此，忽略重数，我们可以假设 $NG = M$。

$G = \mathsf{O}(m,\ n,\ k)$ 上的舒尔环由不可分解元素 $\mathscr{I}_1(G) = N$ 所施加的限制决定。这些元素的任意划分都能构成 G 上的舒尔环，因此至少有 $\mathscr{B}(n)$ 个舒尔环。 $\mathscr{I}_2(G) = M - 0$ 上可能的划分将受到基于 $\mathscr{I}_1(G)$ 上所选划分以及由其产生的重数所施加的等价关系的限制。由于 $M \cong \mathsf{O}_m$，假设 $M - 0$ 上所有可能的划分都与 N 上的所有划分相容，我们便可得到 G 上舒尔环数量在 $\mathscr{B}(m-1)\mathscr{B}(n)$ 处的上界。我们总结这些观察结果。

定理 3.11。设 $\mathcal{S}$ 是 m,n,k 为正整数时，$\mathrm{O}(m,n,k)$ 上的一个舒尔环。那么 $M,N \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。此外， $\mathscr{B}(n) \leq \Omega(\mathsf{O}(m,n,k)) \leq \mathscr{B}(m-1)\mathscr{B}(n)$。

例 3.12。 设 $G = \mathsf{O}(4,\ 2,\ 123)$，其凯莱表如右图所示。注意，如红色区域所示， $123 = 1(4^3)+3(4^2) + 2(4) + 3$。首先，我们观察到 $\mathscr{I}_1(G) = \{4,5\}$ 和 $\mathscr{I}_2(G) = \{1,2,3\}$。 $\mathscr{I}_1(G)$ 上有两种可能的划分。若 $\{4,5\}$ 是舒尔环 $\mathcal{S}$ 在 G上的本原集，则 1 和 2 等价，而 $\mathscr{I}_2(G)$ 上没有其他等价关系。因此，

$$\{0, 1+2, 3, 4+5\}$$

		M				N	
		0	1	2	3	4	5
M	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0
N	4	0	0	0	0	1	3
	5	0	0	0	0	2	3

是 G上的最粗舒尔环。 $\mathscr{I}_2(G)$ 上的划分 $\{1+2,3\}$ 只有另一种细化：离散划分；它所对应的舒尔环为[16]

$$\{0,1,2,3,4+5\}.$$

最后，假设 4 和 5 是 $\mathcal{S}$ 中的单元素集。那么， $\mathscr{I}_2(G)$ 上的划分也必须是离散的，从而构造出 G 上的离散舒尔环。因此， G 有三个舒尔环。

注意，定理 3.10 中提到的构造是递归的。选定不可分解元 $\mathscr{I}_1(G)$ 上的一个划分后，我们根据 $\mathscr{I}_1(G)$ 上本原集的所有可能乘积所产生的重数，确定 $\mathscr{I}_2(G)$ 上的一个等价关系。然后，我们选取该等价关系的某个细化。

对于一般的有限幂零半群，其中集合 $\mathscr{I}_k(G)$ 可能非空，我们可以推广这一过程，并根据 $\mathscr{I}_1(G)\cup\mathscr{I}_2(G)$ 上本原集的所有可能乘积所产生的重数，在 $\mathscr{I}_3(G)$ 上定义一个等价关系。然后，我们可以选取该等价关系的任意细化。归纳地，根据 $\bigcup_{j=1}^{k}\mathscr{I}_j(G)$ 上所有本原集的乘积所产生的重数，在 $\mathscr{I}_k(G)$ 上施加一个等价关系。我们可以选取 $\mathscr{I}_k(G)$ 上这一划分的任意细化。如此继续下去，最终到达 $G^n=\theta$，此处只有一种可能的划分。该过程递归地构造出 G 上的一个舒尔环。

现在考虑一般半群 G。这种根据先前的 j-可分解 $\bigcup_{j=1}^{k}\mathscr{I}_j(G)$，递归地对 $\mathscr{I}_k(G)$ 施加限制的过程依然完全适用，但由 j-可分解划分在 G^∞ 上施加的最粗划分不一定是 G^∞ 上的舒尔环。按照定理 2.8 的方式， G^∞ 上与不可分解施加相容的一个划分是 G^∞ 上的离散舒尔环。我们将以这种方式递归构造的舒尔环称为递归不可分解施加舒尔环 （或 RIISR）。

定理 3.10 指出，每个 3-幂零半群上的舒尔环都是 RIISR。前面的论证推广了定理 3.10，并得出以下结论：

定理 3.13. 有限幂零半群上的所有舒尔环都是 *RIISR*。

我们已经看到，低幂零秩的幂零半群，即 O_n 和 $\mathsf{O}(m,\ n,\ k)$，可能拥有相对较多的舒尔环。随着幂零秩增加，舒尔环的数量会减少，因为定理 3.10 中的不可分解施加变得更加严格。例如，$\mathsf{Z}_{n,\ 1}$ 是阶为 n 的唯一n-幂零半群，它只有一个舒尔环。

推论 3.14。令 t G 为阶为 n 的一个$(n-1)$-幂零半群。则 G 恰好有两个舒尔环 .

证明。 注意，对于 $2\le k\le n-1$， $|\mathscr{I}_1(G)|=2$ 以及 $|\mathscr{I}_k(G)|=1$ 。根据定理 3.13， G 上的舒尔环数量将为 $\mathscr{B}(|\mathscr{I}_1(G)|)=2$。 □

通过与前一个推论类似的推理，阶为 n 的一个 $(n-2)$-幂零半群上的舒尔环数量小于 $\mathscr{B}(3)=5$。

对于任意半群 G 和 $k\in\mathbb{N}$， G/G^k 是幂零半群。因此，研究幂零半群上的舒尔环，将说明这种递归不可分解施加如何通过理想扩张影响更一般的半群。

[16]这与定理 2.8 中概述的构造相同。

我们注意到，G^∞ 上的更粗划分可能与G的不可分解施加相容。如果我们能够处理 j-可分解对象上的递归施加，以及与不可分解施加相容的 G^∞上的最粗舒尔环，那么每个半群上的舒尔环都可以通过递归不可分解施加构造出来。当然，如果对 G^∞上的舒尔子环或分解列本身缺乏进一步的了解，这一观察可能相当平凡。例如，如果 G 是一个群，那么对于所有 j，$G = G^\infty$ 和 $\mathscr{I}_j(G) = \emptyset$。但是，当分解列收敛到某个相对较小的对象时，这一考虑就可能非常有意义，有限幂零半群便是这种情况。对于数值半群，我们观察到 $G^\infty = \emptyset$。将例 3.7中的论证推广后，我们得到如下结论：

定理 3.15. 数值半群上的所有舒尔环都是 *RIISR*。

接下来，我们给出一种与 $\mathsf{O}(m,n,k)$ 类似的构造，但其中的 G^∞ 非平凡。对于满足 $0 \le k < \ell^{nm}$ 的 ℓ, m, n，$k \in \mathbb{N}$，令 $\mathsf{LOO}(\ell,m,n,k) = \{0,1,\dots,\ell+m+n-1\}$ 为具有如下乘法的半群：取 $x, y \in \mathsf{LOO}(\ell,m,n,k)$；若 $x < \ell+m$，则 $xy = x$；若 $x \ge \ell+m$ 且 $y < \ell$ 或 $y \ge \ell+m$，则 $xy = 0$；否则，乘积 xy（其中 $x \ge \ell+m$ 且 $\ell \le y < m$）由一个整数 k 确定，该整数编码了凯莱表的这一部分。将 k 转换为以 ℓ 为基数的数后，其数位便按标准阅读顺序（即从左到右、从上到下）给出 $n \times m$ 子矩阵的各项。令 $L = \{0,\dots,\ell-1\}$,$M = \{\ell,\dots,\ell+m-1\}$，并令 $N = \{\ell+m,\dots,\ell+m+n-1\}$。则 $L \cong \mathsf{LO}_\ell$, $M \cong \mathsf{LO}_m$, $L \cup M \cong \mathsf{LO}_{\ell+m}$,$N \cup 0 \cong \mathsf{O}_{n+1}$，且 $L \cup N \cong \mathsf{LO}_{\ell-1}$ ŧ O_{n+1}。若 $\ell - 1 \notin NM$，则对于某个可能是新的 k'，有 $\mathsf{LOO}(\ell,m,n,k) = \mathsf{LOO}(\ell-1,m+1,n,k')$。因此，我们可以假设 $NM = L$，忽略重数。

在 $G = \mathsf{LOO}(\ell,m,n,k)$ 上的舒尔环由不可分解元 $\mathscr{I}_1(G) = N$ 所施加的限制决定，从而给出 $\mathscr{B}(n)$ 个关于 N 的划分。另一方面，$G^\infty = L \cup M$，但关于 N 的划分并不对 M 施加任何限制，尽管 k 的选择可能会对 L 产生限制。更明确地说，若 $\mathcal{S}$ 是 G 上的一个舒尔环，则 $L+M, N \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$，因为 $N = \mathscr{I}_1(G)$。于是，忽略重数，$N(L+M) = L$，这意味着 $L, M \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。特别地，关于 $G^\infty = L \cup M \cong \mathsf{LO}_{\ell+m}$ 的并非每个划分都能在某个舒尔环中找到。由于 $M \cong \mathsf{LO}_m$，我们可以将 $\mathscr{B}(m)$ 个划分置于 M 上。因此，$\mathsf{LOO}(\ell,m,n,k)$ 至少有 $\mathscr{B}(m)\mathscr{B}(n)$ 个舒尔环；计数时假定关于 L 的划分是离散划分。注意，这些舒尔环中有许多不是 RIISR，因为我们在 $G^\infty = L \cup M$ 上有一个非离散划分。若要允许 L 上出现非离散划分，就必须根据 N 上的划分所施加的限制来选取一个划分，但该划分独立于 M 上的划分。由于 $L \cong \mathsf{LO}_\ell$，假设 $L-0$ 上所有可能的划分都与 $M \cup N$ 上的所有划分相容，我们便得到 G 上舒尔环数量的一个上界，为 $\mathscr{B}(\ell-1)\mathscr{B}(m)\mathscr{B}(n)$。我们总结这些观察结果。

定理 3.16. 设 $\mathcal{S}$ 是定义在正整数 ℓ、m、n、k 上的 $\mathit{LOO}(\ell,m,n,k)$ 的舒尔环。那么 $L, M, N \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。此外，$\mathscr{B}(m)\mathscr{B}(n) \le \Omega(\mathit{LOO}(\ell,m,n,k)) \le \mathscr{B}(\ell-1)\mathscr{B}(m)\mathscr{B}(n)$.

例 3.17. 这里给出了半群 $G = \mathsf{LOO}(2,2,2,6)$ 的凯莱表，如右图所示。注意，$\ell = 2$ 和 $k = 6 = 0(\ell^3) + 1(\ell^2) + 1(\ell) + 0$。两个阴影矩阵子块分别表示由 k（红色）和 $N \cup 0 = \mathsf{O}_3$（绿色）编码的部分。根据定理 3.16，定义在 G 上的舒尔环恰有四个。定义在 G 上的 RIISR 有两个，即

		L		M		N	
		0	1	2	3	4	5
L	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1
M	2	2	2	2	2	2	2
	3	3	3	3	3	3	3
N	4	0	0	0	1	0	0
	5	0	0	1	0	0	0

$$\{0,1,2,3,4+5\} \quad \text{and} \quad \{0,1,2,3,4,5\}.$$

另外两个定义在 G 上的舒尔环是

$$\{0,1,2+3,4+5\} \quad \text{and} \quad \{0,1,2+3,4,5\}.$$

以上观察和例子确立了以下原则：分析这一系列不可分解元，是研究半群上的舒尔环的关键步骤；而在群范畴中，这类分析完全缺失。

[17]我们承认，对于足够大的 m 或 n，这种带有整数 k 的编码方案远不如直接报告凯莱表的这一部分高效，但对于我们想要讨论的阶不超过 7 的 3-幂零半群，它效果很好。

3.5 不可分幂等元

在结束本节之前，我们想简要比较不可分解元素与不可分幂等元，也就是说， $\varepsilon^2 = \varepsilon$ 是 ε的唯一因式分解。尽管按照上文的定义，它们并非不可分解元，但不可分幂等元在许多情况下确实表现得像不可分解元，因为它们会对构成舒尔环的划分施加限制。例如，比较 O_{n+1} 和 $\mathsf{K}_{1,n}$。如定理 1.7 和 1.12 所述，O_{n+1} 和 $\mathsf{K}_{1,n}$ 具有相同数量的舒尔环，即 $\mathscr{B}(n)$，这些舒尔环源自非零元素上所有可能的划分。对于 O_{n+1}，有 n 个不可分解元，它们的所有乘积均为 θ。同样，对于 $\mathsf{K}_{1,n}$，有 n 个不可分幂等元，但所有非平方乘积均为 θ。此外，若 I 是不可分幂等元的集合，则 $G - I$ 是一个理想，并且 $G/(G-I) \cong \mathsf{K}_{1,|I|}$。

作为另一个例子，添入 G^e 的新单位元 e 是一个不可分幂等元。正如我们在定理 1.10 中所见，由于它是唯一的不可分幂等元，因此在每个舒尔环中都必须是单元素集。

与不可分解元类似，在某些情况下，我们可以保证舒尔环中的不可分幂等元与半群的其余部分相互隔离。

定理 3.18. 设 G 是一个交换半群，且 $\mathcal{S}$ 是 G上的一个舒尔环。那么， G 的不可分幂等元集合是一个 $\mathcal{S}$-子集。

证明。设 $X \in \mathcal{S}$ 满足 x、 $\alpha \in X$，其中 α 是一个不可分幂等元，而 x 不是。考虑 X^2，它以重数 1 包含 α。因此， $X \subseteq X^2$。于是，存在 y、 $z \in X$ 使得 $x = yz$。若 $y \neq z$，则$x = zy$，且 x 在 X^2 中的重数至少为 2，矛盾。因此， $y = z$ 且 $x = y^2$。若 $x \neq y$，则通过类似的推理，存在某个 $z \in X$ 使得 $y = z^2$ 且 $y \neq z$。由于 $yzz = zyz = zzy = x$， x在 X^3 中的重数至少为 3，但 α 在 X^3 中的重数仍为 1。因此， $x = y$，也就是说， $x^2 = x$。由于 x 是可分解的，存在 y、 $z \in G$ 使得 $x = yz$ 且 $z \neq x$。设 Y、 $Z \in \mathcal{S}$ 分别为 y、 z的本原集。因此， $x \in YZ$，这意味着 $\alpha \in YZ$。但这迫使 $Y = Z = X$。于是$x = x^2 = yz = zy \in X^2$，使得 x 的重数严格大于 α 的重数，矛盾。 □

当 $x \in G$ 是幂等元时，我们可以修改第 3.1 节中引入的克隆过程。具体而言，我们定义 $(x')^2 = x'$，并将这个半群记作 $G[\hat{}x] = G \cup \{x'\}$，其中 x' 是 x 的幂等克隆。 $G[\hat{}x]$ 的结合律显然成立。

例3.19。 $G[x]$ 上的舒尔环与 $G[\hat{}x]$ 上的舒尔环表现可能不同。例如，考虑 $\hat{}G = \mathsf{O}_n$ 和 $x = \theta$。根据定理 1.7，$\mathsf{O}_n[\theta] \cong \mathsf{O}_{n+1}$ 且 $\Omega(\mathsf{O}_n[\theta]) = \mathscr{B}(n)$。而在交换的 $\mathsf{O}_n[\theta]$ 中， θ' 是唯一不可分幂等元，这意味着根据定理 3.18，在 $\mathsf{O}_n[\theta]$ 上的每个舒尔环中， θ' 都是单元素集合。类似地，由于 $\mathsf{O}_n[\theta]$ 是零半群， θ 在每个舒尔环中都是单元素集合。最后， $\mathscr{I}(\mathsf{O}_n[\theta]) = \mathsf{O}_n[\theta] - \{\theta, \theta'\}$。因此，$\mathsf{O}_n[\theta]$ 上的划分 $\mathcal{S}$ 是舒尔环，当且仅当 θ， $\theta' \in \mathcal{S}$，这与例 3.4 类似。因此，$\Omega(\mathsf{O}_n[\theta]) = \mathscr{B}(n-1)$。

为了说明定理 3.18 中的交换性假设是必要的，我们给出一个非交换半群 OROP_n 的例子，它有两个幂等元，α 和 β。在 OROP_n中， β 不可分解，但 α 可分解；然而， $\alpha + \beta$ 是某些 OROP_n上的舒尔环中的本原集。

例3.20。 对于 $n \geq 2$，我们通过以下乘法规则定义半群 $\mathsf{OROP}_n = \{\theta, x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup \{\alpha, \beta\}$。为方便起见，令 $X = \{\theta, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$。对每个 x， $y \in X$，我们定义 $xy = \theta$。因此， $X \cong \mathsf{O}_n$。我们定义 $x\alpha = \theta$、 $\alpha x = x$和 $\alpha^2 = \alpha$。因此，$X \cup \alpha \cong \mathsf{ORO}_{n,\,1}$。我们定义 $x\beta = x$、$\beta x = \theta$和 $\beta^2 = \beta$。因此，$X \cup \beta \cong \mathsf{ORO}^{\mathrm{op}}_{n\,1,}$。最后， $\alpha\beta = x_1$ 和 $\beta\alpha = \alpha$。验证此乘法满足结合律是例行的。注意， X 是 OROP_n的一个理想，因此 OROP_n 是由K_1对 O_n 作出的理想扩张，$_2$。

定理 3.21。 设 $\mathcal{S}$ 是 OROP_n 上的一个划分，其中 $n \geq 2$。那么， $\mathcal{S}$ 是舒尔环，当且仅当 θ、 x_1、 $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。[18] OROP_n 上的舒尔环数量为 $2\mathscr{B}(n-2)$。

证明。 回忆一下， α 和 β 是不可分幂等元。设 $\mathcal{S}$ 是 $G = \mathsf{OROP}_n$上的舒尔环， A， $B \in \mathcal{S}$分别是包含 α 和 β的本原集。假设 $A = B$，也就是说，对于某个 $C \subseteq \mathsf{O}_n$，有 $A = \alpha + \beta + C$。那么 $A^2 = \alpha + \beta +(|C|^2 + 2|C| + 1)\theta + x_1 + 2C$。若 $|C| \neq 0$，则 C 中的元素具有

[18]注意， $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$ 并不意味着 $\alpha + \beta$ 是本原集，因为我们并未声称 $\alpha + \beta \in \mathcal{S}$。相反，如果 $\alpha + \beta$ 不是本原集，那么 α 和 β 就是。因此，我们要求 $\alpha + \beta \in \mathcal{S}$ 或 α， $\beta \in \mathcal{S}$。

在乘积中的重数高于 α 和 β的重数，后者为 1。因此， $C=\emptyset$。设 $A=\alpha+C$且对于某个 C， $D\subseteq \mathsf{O}_n$，有 $B=\beta+D$，其中 $C\cap D=\emptyset$。那么 $AB=C+D+|C||D|\theta+x_1$。若 $|C|\neq 0$，则 C 中的元素在此乘积中的重数高于 α的重数，而后者为零。因此， $C=\emptyset$。类似地， $D=\emptyset$。因此，对于任意舒尔环 $\mathcal{S}$， $\{\alpha,\beta\}$ 都是一个 $\mathcal{S}$-子集。同样，它的补集，即 O_n，是一个 $\mathcal{S}$-子半群。根据定理 1.7， $\theta\in\mathcal{S}|_{\mathrm{O}_n}$。最后，$(\alpha+\beta)^2=\theta+x_1+\alpha+\beta$。因此， $x_1\in\mathcal{S}$。

反之，假设 $\theta, x_1, \alpha+\beta\in\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。由于 $\mathsf{O}_n=G-(\alpha+\beta)$ 是一个 $\mathcal{S}$-理想，且 $\theta\in\mathcal{S}|_{\mathrm{O}_n}$, $\mathcal{S}|_{\mathrm{O}_n}$是 O_n 上的舒尔环。注意 $\theta\alpha=\alpha\theta=\theta\beta=\beta\theta=\theta\in\mathcal{S}$。令 $C\in\mathcal{S}|_{\mathrm{O}_n}$ 为一个非零本原集。则$\alpha C=C\beta=C$, $C\alpha=\beta C=|C|\theta\in\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。无论包含 α 还是 β的本原集为何，这都表明该集合与 C 的乘积包含于 $\mathbb{Q}[\mathcal{S}|_{\mathrm{O}_n}]$。若 α 是一个本原集，则 β 同样是本原集，且 $\alpha^2=\alpha$， $\alpha\beta=x_1$, $\beta\alpha=\theta$, $\beta^2=\beta\in\mathcal{S}$。若 $\alpha+\beta$是一个本原集，则 $(\alpha+\beta)^2=\theta+x_1+(\alpha+\beta)\in\mathcal{S}$。因此， $\mathcal{S}$ 在乘法下封闭。

包含 α 的本原集有两种选择，即 α 或 $\alpha+\beta$。如果 θ 和 x_1 必须是单元素集，那么 O_n 上有 $\mathscr{B}(n-2)$ 个舒尔环。根据定理 1.7，所有这些划分都是 O_n 上的舒尔环。

□

通过修改 LOO(ℓ,m,n,k) 的构造，我们可以构造一个带，其中某些子半群会对半群的其余部分施加限制，尽管没有任何幂等元是不可分的。令 LORO$(\ell,m,n,k)=\{0,1,\ldots,\ell+m+n-1\}$ 为一个半群，其乘法如下：令 $x,y\in$LORO(ℓ,m,n,k)；若 $x<\ell+m$，则 $xy=x$；若 $x\geq\ell+m$ 且 $y<\ell$ 或 $y\geq\ell+m$，则 $xy=y$；否则，乘积 xy（其中 $x\geq\ell+m$ 和 $\ell\leq y<m$）由整数 k 确定。该整数将凯莱表的这一部分编码为一个数；将其写成 ℓ 进制时，便会按标准阅读顺序填入凯莱表的相应部分。令 $L=\{0,\ldots,\ell-1\}$, $M=\{\ell,\ldots,\ell+m-1\}$，并令 $N=\{\ell+m,\ldots,\ell+m+n-1\}$。于是 $L\cong\mathsf{LO}_\ell$, $M\cong\mathsf{LO}_m$, $L\cup M\cong\mathsf{LO}_{\ell+m}$, $N\cong\mathsf{RO}_n$，且 $L\cup N\cong\mathsf{LO}_\ell\,\mathfrak{s}\,\mathsf{RO}_n$。与 O$(m,n,k)$ 和 LOO(ℓ,m,n,k) 不同，改变 k并不能保证 $NM=L$，但我们仍有 $NM\subseteq L$。尽管 N 和 M 都不含任何不可分幂等元， k 的选择仍会对 L 上的相容划分施加限制。

定理 3.22. 设 $\mathcal{S}$ 是定义在 *LORO(ℓ,m,n,k)* 上的舒尔环，其中 ℓ,m,n,k为正整数。那么 $L,M,N\in\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。此外， $\mathscr{B}(m)\mathscr{B}(n)\leq\Omega$(*LORO$(\ell,m,n,k)$*$)\leq\mathscr{B}(\ell)\mathscr{B}(m)\mathscr{B}(n)$。

证明。如果 $\mathcal{S}$是定义在 LORO(ℓ,m,n,k) 上的舒尔环，取满足 $X\cap N\neq\emptyset$的 $X\in S$。那么 $X^2=(X_L+X_M+X_N)^2=(|X|+|X_N|)X_L+|X|X_M+|X_N|X_N+X_NX_M$。因此， $X\subseteq X^2$。由于 $X_NX_M\subseteq L$，必有 $|X_N|=|X|$，这意味着 $X_L=X_M=\emptyset$。因此， $N\in\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。接下来考虑 $N(L+M)=nL+NM\subseteq L$。因此， $L,M\in\mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。

□

例 3.23. 这里给出了半群 $G=$LORO(2,1,2,1) 的凯莱表，如右图所示。阴影（红色）子矩阵表示由 k 编码的部分。根据定理 3.22， G 上有两个到四个舒尔环。两个必定存在的舒尔环由 L 上的离散划分给出，即

$$\{0,1,2,3+4\}\quad\text{and}\quad\{0,1,2,3,4\}.$$

另外两个可能的划分为

$$\{0+1,2,3+4\}\quad\text{and}\quad\{0+1,2,3,4\},$$

但最后这个划分并不是 G 上的舒尔环，因为 2(3) $=0$。因此，LORO(2，1，2，1) 上只有三个舒尔环。这说明，既非不可分解也非不可再分的元素也能施加限制。不过， $L\cup M$ 是 G 的理想，而 L 是左理想。还需要进一步研究在舒尔环中，理想的补集如何对该理想施加限制。

		L		M	N	
		0	1	2	3	4
L	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1
M	2	2	2	2	2	2
N	3	0	1	0	3	4
	4	0	1	1	3	4

4 带名半群

我们介绍半群的最后一种扩展，以及它与相应舒尔环之间的对应关系，并将其称为名册。名册是对克隆概念的推广，但新元素可能带有某种“突变”性质。特别是，这些新的突变体不一定是不可分解的，这一点已在第3节讨论。

对于半群 G，当理想 P 满足以下条件时，我们称其为素[19]：对于所有 $x,\ y \in G$，若 $xy \in P$，则 $x \in P$ 或 $y \in P$。注意，G 的理想 P 是素理想，当且仅当 $G-P$ 是 G 的子半群。令 $x \in G$。我们令 $G_x = \{y \in G \mid yx = x\}$ 和 ${}_xG = \{y \in G \mid xy = x\}$ 分别为 x 的左稳定子和右稳定子。它们都是 G 的子半群。利用这些概念，我们可以构造一个名册。

设 G 是满足 $g \in G$ 的半群。设 $H \le G_x$ 和 $K \le {}_xG$ 是子半群，其补集均为素理想，并且满足以下条件之一，这些条件称为条件（*）

$$\text{(a) } H \le K,\ \text{(b) } K \le H,\ \text{(c) } x \in H \cap K,\ \text{or (d) } x \notin H \cup K.^{20} \tag{*}$$

于是 $G\ \mathfrak{r}_x\ (H,\ K) = G \cup x'$，其中 x' 是 x 的一个克隆。当 $H = K$ 时，我们将其简写为 $G\ \mathfrak{r}_x\ H$。集合 $G\ \mathfrak{r}_x\ (H,\ K)$ 通过以下方式扩展 G 上的结合乘法，使其成为一个半群。若 $y \in H$，则 $yx' = x'$；否则，若 $y \notin H$，则 $yx' = yx$。同样，若 $z \in K$，则 $x'z = x'$；否则，对于 $z \notin K$，有 $x'z = xz$。本质上，x' 的行为类似于上文所述的 x 的克隆，但当某个元素稳定 x 时，它也可能稳定 x'，这取决于名册（$x,\ H,\ K$）。最后，我们根据前述条件（*）定义 $x'x'$：

$$\text{(a) } x'x' = x'x,\ \text{(b) } x'x' = xx',\ \text{(c) } x'x' = x',\ \text{or (d) } x'x' = x^2.$$

命题 4.1。设 G 是一个半群，且 $x \in G$。若 $H, K \le G$ 满足 $H \le G_x$, $K \le {}_xG$, $G-H$，并且$G-K$ 是素理想，且满足条件（*），则 $G\ \mathfrak{r}_x\ (H,K)$ 是一个半群。

证明。根据假设，子集 G 上的乘法满足结合律。我们只需检查涉及 x'的乘积是否满足结合律。

$$\begin{aligned}
a,b \in H &: a(bx') = ax' = x' = (ab)x' && \text{since } ab \in H\\
a \in G-H, b \in H &: a(bx') = ax' = ax = a(bx) = (ab)x = (ab)x' && \text{since } ab \in G-H\\
a \in G, b \in G-H &: a(bx') = a(bx) = (ab)x = (ab)x' && \text{since } ab \in G-H\\
a \in H, b \in K &: a(x'b) = ax' = x' = x'b = (ax')b\\
a \in G-H, b \in K &: a(x'b) = ax' = ax = a(xb) = (ax)b = (ax')b\\
a \in H, b \in G-K &: a(x'b) = a(xb) = (ax)b = xb = x'b = (ax')b\\
a \in G-H, b \in G-K &: a(x'b) = a(xb) = (ax)b = (ax')b\\
a,b \in K &: x'(ab) = x' = x'a = (x'a)b && \text{since } ab \in K\\
a \in K, b \in G-K &: x'(ab) = x(ab) = (xa)b = xb = x'b = (x'a)b && \text{since } ab \in G-K\\
a \in G-K, b \in G &: x'(ab) = x(ab) = (xa)b = (x'a)b && \text{since } ab \in G-K
\end{aligned}$$

结合律检查　　涉及两个 x' 的情况要复杂一些，但当至少　　t

[19]在半群理论中，若对所有理想 $A, B \subseteq G$，只要 $AB \subseteq P$就有 $A \subseteq P$或 $B \subseteq P$，则称理想 P为 *prime*。上文定义的素理想实际上称为 *completely prime ideal*（见 [17]）。对于交换半群，这两个概念一致；但对于非交换半群，二者并不相同。由于我们只使用完全素理想这一概念，因此改用较简短的名称“素”。[20]这里要避免的条件是：存在某个元素 $y \in H-K$和 $z \in K-H$。若 $y \in H-K$，则结合律要求 $(x')^2 = x'(yx') = (x'y)x' = (xy)x' = x(yx') = xx'$。类似地，若 $z \in K-H$，则结合律要求 $(x')^2 = (x'z)x' = x'(zx') = x'(zx) = (x'z)x = x'x$。因此，若 (a) 和 (b) 不成立，则必有 $x'x = (x')^2 = xx'$。若 $x \in H$，则 $xx' = x'$；否则，$xx' = x^2$。因此，我们需要条件 (c) 或 (d)。所以，对于条件 (c) 和 (d)，$x'x = xx'$ 以及 $(x')^2$ 完全由该条件决定；但对于条件 (a) 或 (b)，当且仅当 $x \in K-H$ 或 $x \in K-H$时，$x'x \neq xx'$ 分别成立。因此，依据这一判据，$(x')^2$ 等于 x' 或 x，因为 x 必然是幂等元。

涉及两个 G 元素时。如果满足 (a)，那么 $H \leq K$ 和 $x'x' = x'x$。

(a)
$$
\begin{aligned}
a \in K &: x'(x'a) = x'x' = x'x = x'(xa) = (x'x)a = (x'x')a \\
a \in G-K &: x'(x'a) = x'(xa) = (x'x)a = (x'x')a \\
a \in H &: x'(ax') = x'x' = (x'a)x' && \text{since } a \in K \\
a \in K-H &: x'(ax') = x'(ax) = (x'a)x = x'x = x'x' = (x'a)x' \\
a \in G-K &: x'(ax') = x'(ax) = (x'a)x = (xa)x = (xa)x' = (x'a)x' && \text{since } a, xa \in G-K \leq G-H \\
x, a \in H &: a(x'x') = ax' = x' = x'x' = (ax')x' && \text{since } (x')^2 = x'x = x' = xx' \\
x \in H, a \in G-H &: a(x'x') = a(xx') = (ax)x' = (ax')x' \\
x \in H &: x'(x'x') = x'x' = (x'x')x' \\
x \in K-H, a \in H &: a(x'x') = ax' = x' = x'x' = (ax')x' && \text{since } (x')^2 = x'x = x' \\
x \in K-H, a \in G-H &: a(x'x') = a(x'x) = (ax')x = (ax)x = a(xx) = a(xx') && \text{but } xx' = x^2 \\
&\quad = (ax)x' = (ax')x' \\
x \in K-H &: x'(x'x') = x'x' = (x'x')x' \\
x \in G-K, a \in H &: a(x'x') = a(xx) = (ax)x = xx = x'x' = (ax')x' && \text{since } (x')^2 = x'x = x^2 = xx' \\
x \in G-K, a \in G-H &: a(x'x') = a(xx') = (ax)x' = (ax')x' \\
x \in G-K &: x'(x'x') = x'(xx) = (x'x)x = x^3 = x(xx') = (xx)x' \\
&\quad = (x'x')x'
\end{aligned}
$$

情形 (b) 的处理方式类似。若为 (c)，则 $(x')^2 = x' = x'x = xx'$。因此，从 (a) 中继承到 (c) 的结合律检验中，唯一未能沿用的（不适用的情形除外）是 $x'ax'$:

(c)
$$
\begin{aligned}
a \in H \cap K &: x'(ax') = x'x' = (x'a)x' \\
a \in H-K &: x'(ax') = x'x' = xx' = x(ax') = (xa)x' = (x'a)x' \\
a \in K-H &: x'(ax') = x'(ax) = (x'a)x = x'x = x'x' = (x'a)x' \\
a \in G-(H \cup K) &: x'(ax') = x'(ax) = (x'a)x = (xa)x = x(ax) = x(ax') = (xa)x' = (x'a)x'
\end{aligned}
$$

最后，若为 (d)，则 $(x')^2 = x^2 = x'x = xx'$。因此，所有必要的结合律检验都已在 (a) 和 (c) 中讨论过。故乘法是结合的。 □

例4.2。 考虑半群 $G = \mathsf{CH}_2$ ŧ 整数集$_1 = \{0, 1, 2\}$。注意，对于所有$y \in G$，都有 $0y = 0$ 和 $2y = 2$，但 $1 \cdot 0 = 1 \cdot 2 = 0$ 和 $1^2 = 1$。我们给出该半群的三种不同名册，即 (CH_2 ŧ整数集$_1$) ɾ$_0$(整数集$_1$,CH_2 ŧ 整数集$_1$)、(CH_2 ŧ整数集$_1$) ɾ$_1$(∅，整数集$_1$)，以及 (CH_2 ŧ整数集$_1$) ɾ$_2$(∅，整数集$_1$)（以下列出全部三张凯莱表），并观察它们的舒尔环表现迥然不同。注意，CH_2 ŧ 整数集$_1$ 只有一个舒尔环，且它必然是离散的。

我们将从 (CH_2 ŧZ_1) ɾ$_0$(Z_1,CH_2 ŧZ_1) 开始，其中 $H = \mathsf{Z}_1 = \{1\} \leq \{0, 1\} = G_0$ 以及 $K = G = {}_0G$。注意，$G - H = \{0, 2\}$ 和 $G - K = \emptyset$ 是 G的素理想[21]。将这个新元素 $0'$ 添入 CH_2 ŧ Z_1, 的凯莱表时，我们复制 0 的行和列，但根据名册（H, K）进行例外处理，其中 H 规定了在 $0'$ 的列中何处将 0 改为 $0'$，同样地，K 规定了在 $0'$ 的行中何处将 0 改为 $0'$。此外，我们注意到 $H \leq K$，因此 (*) 的条件（a）得到满足。这意味着将元素 $0'$ 添入 G 后，结合乘法扩展如下：对所有 $y \in K$，$0' \cdot y = 0'$；同样，$1 \cdot 0' = 0'$，因为 $1 \in H$；$0 \cdot 0' = 0$ 以及 $2 \cdot 0' = 2$，因为 $0, 2 \notin H$；最后，$(0')^2 = 0' \cdot 0 = 0'$，依据（a）。注意，(CH_2 ŧZ_1) ɾ$_0$(Z_1, CH_2 ŧZ_1) ≅ LORO(2, 1, 1, 0)，且只有一个舒尔环，即离散的舒尔环，这是达到定理 3.22 下界的一个例子。

继续讨论第二半群（CH_2 ŧZ_1) ɾ$_1$ （∅，Z_1），其中 $H = \emptyset$、$K = {}_1G = \{1\}$，且 $G - K = \{0, 2\}$ 是一个素理想。[22] 同样，条件（a）成立。因此，$1' \cdot 1 = 1'$，因为 $1 \in K$，但 $1' \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

[21]在这种情况下，将 $\langle 1 \rangle = \{1\}$ 简记为 Z_1，是明确无歧义的，因为 H 不可能是 $\langle 0 \rangle = \{0\}$，尽管 $\langle 0 \rangle \cong \mathsf{Z}_1$,，因为 $G - \langle 0 \rangle$ 不是素数。[22]注意，对于任意半群 G 和任意 $x \in G$，稳定子 $H = \emptyset$ 总是与名册相容，因为 $\emptyset \leq G_x$，而且 $G - \emptyset = G$ 是 G 的一个素理想。同样，对于 $K = \emptyset$ 也是如此。

且 $1'\cdot 2 = 1\cdot 2 = 0$，因为 0，$2 \notin K$。此外，对于所有 $y \in \mathrm{CH}_2 \mathbin{\mathfrak{t}} \mathrm{Z}_1$，$y\cdot 1' = y\cdot 1$，因为 $H = \emptyset$ 意味着左侧没有任何元素稳定 $1'$。由（a）可得 $(1')^2 = 1'\cdot 1 = 1'$。注意，$(\mathrm{CH}_2 \mathbin{\mathfrak{t}} \mathrm{Z}_1)\ \mathfrak{r}_1\ (\emptyset,\ \mathrm{Z}_1) \cong \mathrm{LO}_2^\theta \mathbin{\mathfrak{t}} \mathrm{Z}_1$，并且有两个舒尔环，分别对应于 LO_2^θ 上的两个舒尔环与 Z_1，上唯一的舒尔环之间两种可能的扭曲；正如定理 2.12 所预期的，后者是离散的。

对于第三个例子，考虑 $(\mathrm{CH}_2 \mathbin{\mathfrak{t}} \mathrm{Z}_1)\ \mathfrak{r}_2(\emptyset,\ \mathrm{Z}_1)$，其中 $H = \emptyset$, $K = \langle 1\rangle \le {}_2G = \{0,1,2\}$。$\mathrm{CH}_2 \mathbin{\mathfrak{t}} \mathrm{Z}_1$ 上的名册与第二半群相同，只是被克隆的元素是 2。注意$2'\cdot 1 = 2'$，但在所有其他情况下，$2'\cdot y = 2\cdot y$ 和 $y\cdot 2' = y\cdot 2$。特别是，$2'\cdot 2 = 2 = (2')^2 \neq 2'$。这个名册无法用本文介绍的任何其他半群构造来描述，并且它包含三个舒尔环，即：

$$\{0+2, 1+2'\},\quad \{0,2,1+2'\},\quad \{0,1,2,2'\}$$

	0	1	2	$0'$
0	0	0	0	0
1	0	1	0	$0'$
2	2	2	2	2
$0'$	$0'$	$0'$	$0'$	$0'$

$(\mathrm{CH}_2 \mathbin{\mathfrak{t}} \mathrm{Z}_1)\ \mathfrak{r}_0\ (\mathrm{Z}_1, \mathrm{CH}_2 \mathbin{\mathfrak{t}} \mathrm{Z}_1)$

	0	1	2	$1'$
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	2	2	2	2
$1'$	0	$1'$	0	$1'$

$(\mathrm{CH}_2 \mathbin{\mathfrak{t}} \mathrm{Z}_1)\ \mathfrak{r}_1\ (\emptyset, \mathrm{Z}_1)$

	0	1	2	$2'$
0	0	0	0	0
1	0	1	0	0
2	2	2	2	2
$2'$	2	$2'$	2	2

$(\mathrm{CH}_2 \mathbin{\mathfrak{t}} \mathrm{Z}_1)\ \mathfrak{r}_2\ (\emptyset, \mathrm{Z}_1)$

注意，在命题 4.1 的所有情形中，xx' 等于 x' 或 x^2。在特殊情形下，若$H = K$（因此满足 (*) 中的 (c) 或 (d)）且 $x^2 = x$，我们可以定义一个替代半群 $G\ \widehat{\mathfrak{r}_x}\ H$，其定义与 $G\ \mathfrak{r}_x\ H$ 完全相同，只是

$$x'x' = \begin{cases} x', & x'x = x^2 \\ x^2, & x'x = x'. \end{cases}$$

由于 $H = K$，我们知道 $x'x = xx'$。

命题 4.3. 设 G 是一个半群，且 $x \in G$。若 $H \le G$ 使得 $H \le G_x \cap {}_xG$，$G - H$ 是一个素理想，并且 $x^2 = x$，则 $G\ \widehat{\mathfrak{r}_x}\ H$ 是一个半群。

证明。 命题 4.1 中的大多数结合性验证无需改动即可适用，但下面列出了那些计算有所变化的验证。

$$\begin{aligned}
x \in H\colon\ x'(x'x') &= x'(xx) = (x'x)\,x = x'x \\
&= x' = xx' = x(xx') = (xx)x' = (x'x')x' && \text{因为 } xx' = x'x = x', \\
x, a \in H\colon a(x'x') &= a(xx) = (ax)x = xx = x'x' = (ax')x' && (x')^2 = x^2 \\
x \in H,\ a \in G-H\colon\ a(x'x') &= a(xx) = (ax)\,x = (ax)\,x' = (ax')\,x' && \text{因为 } ax \in G - H \\
x, a \in H\colon x'(x'a) &= x'x' = xx = x(xa) = (xx)a = (x'x')a \\
x \in H,\ a \in G-H\colon\ x'(x'a) &= x'(xa) = (x'x)\,a = (xx)\,a = (x'x')\,a \\
x \in G-H\colon x'(x'x') &= x'x' = (x'x')x' && \text{因为 } xx' = x'x = x^2, \\
x \in G-H,\ a \in H\colon\ a(x'x') &= ax' = x' = x'x' = (ax')\,x' && (x')^2 = x' \\
x, a \in G-H\colon\ a(x'x') &= ax' = ax = a(xx) = a(xx') = (ax)x' = (ax')x' && \text{因为 } ax \in G - H \\
x \in G-H, a \in H\colon\ x'(x'a) &= x'x' = x' = x'a = (x'x')\,a \\
x, a \in G-H\colon\ x'(x'a) &= x'(xa) = (x'x)a = (xx)a = xa = x'a = (x'x')a
\end{aligned}$$

因此，乘法是结合的。 □

例4.4。 考虑半群 $G = \mathrm{ORO}_{2,1} = \{\theta, 1, 2\}$ 和 $x = \theta$。以 $G_\theta = {}_\theta G = G$ 为零元。令 $H = K = \{2\}$。那么 $G - H = \{\theta, 1\}$ 是 G 的一个素理想。我们构造 $\mathrm{ORO}_{2,1}\ \mathfrak{r}_\theta\ \mathrm{Z}_1$ 和 $\mathrm{ORO}_{2,1}\ \widehat{\mathfrak{r}_\theta}\ \mathrm{Z}_1$。这两个半群恰好具有相同的两个舒尔环，即：

$$\{\theta, 1+2, \theta'\},\quad \{\theta, 1, 2, \theta'\}.$$

	θ	1	2	θ'
θ	θ	θ	θ	θ
1	θ	θ	θ	θ
2	θ	1	2	θ'
θ'	θ	θ	θ'	θ

$\mathrm{ORO}_{2,1}\ \mathfrak{r}_\theta\ \mathrm{Z}_1$

	θ	1	2	θ'
θ	θ	θ	θ	θ
1	θ	θ	θ	θ
2	θ	1	2	θ'
θ'	θ	θ	θ'	θ'

$\mathrm{ORO}_{2,1}\ \widehat{\mathfrak{r}_\theta}\ \mathrm{Z}_1$

例 4.5。 考虑半群 $G = K_{1,2} = \{\theta, 1, 2\}$。选取稳定子 $H = \langle 1\rangle$ 和 $K = \langle 2\rangle$，注意到 $G - H = \{\theta, 2\}$ 和 $G - K = \{\theta, 1\}$ 都是 G 的素理想。这给出名册半群 $K_{1,2}\ \mathfrak{r}_\theta\ (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$，其中 $1\cdot\theta' = \theta'\cdot 2 = \theta'$，但所有涉及 θ' 的其他乘积均为 θ。由于 $\theta \notin \{1, 2\}$，我们满足 **(*)** 的条件 (d)。因此，$(\theta')^2 = \theta^2 = \theta$。这个半群有两个舒尔环，正如 $K_{1,2}$:$\{\theta, 1+2, \theta'\}$, $\{\theta, 1, 2, \theta'\}$。

	θ	1	2	θ'
θ	θ	θ	θ	θ
1	θ	1	θ	θ'
2	θ	θ	2	θ
θ'	θ	θ	θ'	θ

$K_{1,2}\ \mathfrak{r}_\theta\ (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$

前两个例子表明，通过名册克隆 θ，往往会使 θ' 在 $G\ \mathfrak{r}_\theta\ (H, K)$ 上的每个舒尔环中都成为孤立元素。当然，情况并非总是如此，因为 $\mathrm{O}_n[\theta] \cong \mathrm{O}_{n+1}$ 中的克隆可以与任何其他非零元素融合。另一方面，在 $G[\hat{}\theta] \cong G^\theta$ 上的每个舒尔环中，θ' 都是孤立的。与 G^θ 类似，如果 G 是零半群，我们定义 $G^\mu = G\ \widehat{\mathfrak{r}_\theta}\ G$，它通过添加 θ 的一个突变体[23] 来扩展 G。具体而言，对所有 $x \in G$（包括 θ），$\mu x = x\mu = \mu$，但 $\mu^2 = \theta$。在 G^μ 中，这个 θ 的克隆通常在每个舒尔环中都是孤立的。

定理 4.6。 设 G 为一个零半群。那么 $\mu \in \mathcal{S}$ 对所有的舒尔环 $\mathcal{S}$，在 G^μ 或 G 上都没有零的真因子。在后一种情况下，$G^\mu \cong$整数集$_2\ \mathfrak{s}\ H$，其中某个半群为 H。

证明。 设 $\mathcal{S}$ 是一个在 G^μ 上的舒尔环，且 M 是包含 μ 的本原集。设 $M = \mu + M'$。则 $M^2 = (2|M'|)\mu + \theta + (M')^2$。因此，$2|M'|M \subseteq M^2$，但这对应于 $(2|M| - 2)|M| = 2|M|^2 - 2|M|$。由于 M^2 包含 $|M|^2$ 个元素（按重数计数），这意味着 $|M| \leq 2$。若 $M = x + \mu$，则 $M^2 = 2\mu + \theta + x^2$。由于 μ 的系数为 2，因此必有 $x = \theta$，也就是说 $M = \mu + \theta$。假设 $x,\ y \in G - \theta$ 使得 $xy = \theta$。设 $X,\ Y \in \mathcal{S}$ 为包含 $x,\ y$ 的本原集。则 $\theta \in XY$ 但 $\mu \notin XY$。因此，$\mu \in \mathcal{S}$。 □

名册在半群中无处不在，本文讨论的许多半群构造和扩张都可以实现为名册。例如，$G[x] = G\ \mathfrak{r}_x\ \emptyset$、$G[\hat{}x] = G\ \widehat{\mathfrak{r}_x}\ \emptyset$ 以及 $G\ \mathfrak{r}_\theta\ (\emptyset,\ G) = G\ \mathfrak{t}\ \mathrm{Z}_1$。对于 $n \geq 2$，以下恒等式成立，这说明前文讨论的许多半群族都是从平凡群 Z_1 开始通过名册构造出来的：

$$\begin{array}{lll} \mathrm{O}_n = \mathrm{O}_{n-1}\ \mathfrak{r}_\theta\ \emptyset & \mathrm{CH}_n = \mathrm{CH}_{n-1}\ \mathfrak{r}_\theta\ \mathrm{CH}_{n-1} & \mathrm{RO}_n = \mathrm{RO}_{n-1}\ \mathfrak{r}_\theta\ (\mathrm{RO}_{n-1}, \emptyset) \\ K_{1,n} = K_{1,n-1}\ \widehat{\mathfrak{r}_\theta}\ \emptyset & \mathrm{OG}_n = \mathrm{OG}_{n-1}\ \mathfrak{r}_\theta\ (G, \emptyset) & \mathrm{Z}_2 = \mathrm{Z}_1\ \widehat{\mathfrak{r}_\theta}\ \mathrm{Z}_1 \end{array}$$

除 Z_2，外，单生成元半群 Z_m、n 不是名册。同样，对于 $n \geq 2$，LOZ_n 也不是名册（注意 $\mathrm{LOZ}_1 \cong \mathrm{CH}_2$）。虽然 OROP_2 不是名册，但对于 $n \geq 3$，有 $\mathrm{OROP}_n = \mathrm{OROP}_{n-1}\ \mathfrak{r}_\theta\ (\alpha、\ \beta)$。最后，$\mathrm{O}(m、\ n、\ k)$、$\mathrm{LOO}(\ell、\ m、\ n、\ k)$ 和 $\mathrm{LORO}(\ell、\ m、\ n、\ k)$ 中的每一个，有时都可以实现为名册，这取决于 k 的选择。例如，$\mathrm{LORO}(2, 1, 1, 0) = (\mathrm{CH}_2\ \mathfrak{t}\ \mathrm{Z}_1)\ \mathfrak{r}_0\ (\mathrm{Z}_1, \mathrm{CH}_2\ \mathfrak{t}\ \mathrm{Z}_1)$，但 $\mathrm{LORO}(2, 1, 2, 1)$ 不等价于任何名册。

我们使用名册来定义最后一族半群。此前，我们针对某个半群 G 和正整数 m 定义了 OG_m。如上所述，这个半群可以通过名册递归地构造，因为 $\mathrm{OG}_1 = G^\theta$，且 $\mathrm{OG}_m = \mathrm{OG}_{m-1}\ \mathfrak{r}_\theta\ (G,\ \emptyset)$，其中 $m \geq 2$。鉴于名册的方向决定了克隆的乘法，我们可以反转名册的方向，以另一种方式扩展 OG_m。定义 $\mathrm{OG}_{m,\ 1} = \mathrm{OG}_m$，以及 $\mathrm{OG}_{m,\ n} = \mathrm{OG}_{m,\ n-1}\ \mathfrak{r}_\theta\ (\emptyset,\ G)$，其中 $n \geq 2$。一个重要的例子是 $G = \mathrm{LO}_n$，

[23]由于这个新元素是 *mutant* 零元，而希腊语单词“零”是 $\mu\eta\delta\acute{\varepsilon}\nu$，因此 μ 似乎是个合适的名称。

其中我们定义 $\mathrm{OLO}_{\ell,\ m,\ n} = \mathrm{O}(\mathrm{LO}_n)_{\ell,\ m}$。[24] 如果 $\mathrm{OLO}_{\ell,\ m,\ n} = \{\theta, 1, \ldots, \ell+m+n-1\}$，令 $L = \{1, \ldots, \ell-1\}$、$M = \{\ell, \ldots, \ell+m-1\}$ 和 $N = \{\ell+m, \ldots, \ell+m+n-1\}$，那么 $L+M+\theta \cong \mathrm{O}_{\ell+m-1}$、$N+\theta \cong \mathrm{LO}_n$、$L+N+\theta \cong \mathrm{OLO}_{\ell,\ n}$，以及 $M+N+\theta \cong \mathrm{ORO}^{\mathrm{op}}_{m,\ n}$。

定理 4.7。设 ℓ、m、n 为正整数。设 $\mathcal{S}$ 是 *OLO* 上的一个划分$\mathrm{OLO}_{\ell,m,n}$. 那么，$\mathcal{S}$ 是舒尔环，当且仅当 $\mathcal{S}$ 是 $L+N+\theta$ 上一个舒尔环与 $L+\theta$ 的公共细化，或者 $\theta \in \mathcal{S}$，并且存在某个 $X \in \mathcal{S}$ 使得 $N \subseteq X$ 或 $M+N \subseteq X$。那么

$$\Omega(\mathrm{OLO}_{\ell,m,n}) = \mathscr{B}(\ell-1)\mathscr{B}(m+n-1) + \sum_{k=1}^{\ell-1} \binom{\ell-1}{k} (\mathscr{B}(\ell-k-1)\mathscr{B}(n-1)+1).$$

证明。证明与定理 1.14 的证明类似。注意，若 $gh = a$ 对于 $a \in L$，则 $g = a$ 且$h \in N$。设 $X \in \mathcal{S}$ 使得 $a, x \in X$，其中 $a \in L$ 且 $x \in M+N$。假设 $y \in N - X$，且 $Y \in \mathcal{S}$是包含 y的本原集。那么 $yx = x \in YX$，但由于 $a \notin Y$，$a \notin YX$，这就产生了矛盾。因此，若 $(M+N) \cap X \neq \emptyset$，则 $N \subseteq X$。若 $x \in M$ 且 $y \in M - X$，则 $yx = x \in YX$，但 $a \notin YX$。因此，若$M \cap X \neq \emptyset$，则 $M \subseteq X$。 □

例 4.8。半群 $\mathrm{OLO}^{2,2,1}$ 如右侧的凯莱表所示。它有四个舒尔环:

$$\{0, 1{+}2{+}3\}, \quad \{0, 1, 2{+}3\}, \quad \{0, 2, 1{+}3\}, \quad \text{and} \quad \{0, 1, 2, 3\},$$

正如定理 4.7 所预言的那样。

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	2
3	0	1	0	3

$\mathrm{ORO}_{2,2,1}$

与克隆类似，名册也可以迭代。设 x，$y \in G$，令 $H \leq G_x \cap G_y$ 使得 $G-H$ 是一个素理想，并且 x、$y \notin H$，再令 $K \leq {}_xG \cap {}_yG$ 使得 $G-K$ 是一个素理想。[25] 那么 $G\,\mathfrak{r}_x\,(H, K) - H$ 和 $G\,\mathfrak{r}_x\,(H, K) - K$ 是 $G\,\mathfrak{r}_x\,(H, K)$ 中的素理想。因此，$(G\,\mathfrak{r}_x\,(H, K))\,\mathfrak{r}_y\,(H, K) = (G\,\mathfrak{r}_y\,(H, K))\,\mathfrak{r}_x\,(H, K)$ 是一个名册半群。我们定义 $G\,\mathfrak{r}_{x,\ y}\,(H, K) = (G\,\mathfrak{r}_x\,(H, K))\,\mathfrak{r}_y\,(H, K)$。令 $X \subseteq G$，令 $H \leq \bigcap_{x\in X} G_x$ 使得 $G-H$ 是一个素理想，并且 $X \subseteq G-H$，再令 $K \leq \bigcap_{x\in X} {}_xG$ 使得 $G-K$ 是一个素理想，并且 $X \subseteq G-K$。通过归纳法，对于任意 $x \in X$，我们定义 $G\,\mathfrak{r}_X\,(H, K) = G\,\mathfrak{r}_{X-x,\ x}\,(H, K)$。注意，这里的 X 可以是一个多重集，也就是说，X 中的元素可以重复。例如，$\mathrm{OG}_n = G^{\theta}\,\mathfrak{r}_{\Theta}\,(G, \emptyset)$，其中 Θ 是 $n-1$ 个 θ 的副本。

定理 4.9。设 G 为半群，设 $X \subseteq G$，设 $H \leq \bigcap_{x\in X} G_x$ 使得 $G-H$ 是素理想且$X \subseteq G-H$，并设 $K \leq \bigcap_{x\in X} {}_xG$使得 $G-K$是素理想且 $X \subseteq G-K$。设 $\mathcal{S}$为 G 上的舒尔环，满足 X 是一个 $\mathcal{S}$-集合，且 H、K 是 $\mathcal{S}$-子半群。若 X' 是 X中元素在 $G\,\mathfrak{r}_X\,(H, K)$ 中的克隆集合，则 $\mathcal{S}\,\mathfrak{r}_X\,(H, K) = \mathcal{S} \vee \{X'\}$ 是 $G\,\mathfrak{r}_X\,(H, K)$上的舒尔环。

证明。注意到 $(X')^2 = X'X = XX' = X^2 \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}]$。如果 $Y \in \mathcal{S}|_H$，则 $YX' = |Y|X' \in \mathbb{Q}[S\,\mathfrak{r}_X\,(H, K)]$。如果$Y \in \mathcal{S}|_{G-H}$，则 $YX' = YX \in \mathbb{Q}[\mathcal{S}] \leq \mathbb{Q}[\mathcal{S}\,\mathfrak{r}_X\,(H, K)]$。类似地，$X'Y \in \mathbb{Q}[S\,\mathfrak{r}_X\,(H, K)]$。□

5 小阶半群上的舒尔环

代数学家一直致力于枚举小阶半群（按等价分类）。这一串整数增长得非常快。截至本文撰写时，所有阶不超过 10 的半群都已枚举完毕[24, A001423]。阶为 0、1、2 和 3 的半群足够简单，可以手工枚举；而阶为 4 的半群共有 126 种等价类型，枚举起来则更具挑战性。值得一提的是，1955年 Forsythe [5] 使用了

[24]根据这种双侧编排的性质，我们观察到 $\mathrm{OG}_{m,n}$ 等价于 $\mathrm{O}(G^{\mathrm{op}})_{n,m}$。特别地，我们有 $\mathrm{OLO}_{\ell,m,n}$ 等价于 $\mathrm{ORO}_{m,\ell,n}$。在选择用于标记半群的记号时，作者力求使该记号生成该半群字典序最小的凯莱表。因此，优先选择 $\mathrm{OLO}_{\ell,m,n}$，而非 $\mathrm{ORO}_{m,\ell,n}$。[25]将单个元素 x' 编排到 G时，我们允许 $x \in H$；但在考虑序列编排时，例如 $G\,\mathfrak{r}_{x,y}\,(H, K)$，我们不允许克隆 x' 和 y' 稳定 x，也不允许 y 稳定自身，否则涉及 $x'y'$的乘积可能会破坏结合律。特别地，在这种情况下，我们要求满足 (d)。

早期计算机系统 SWAC 枚举了所有阶不超过 4 的半群，并纠正了先前的一次尝试。目前，所有阶不超过 8 的半群都可以在 GAP [6], 中找到，具体来说，是在 $smallsemi$ 软件包中。$smallsemi$ 中半群的索引方式与 [5], 中的索引方式不同；后者按字典序排列半群的凯莱表，并以字典序最小的凯莱表表示每个半群。因此，半群的编号方式并不一致。为方便读者，我们在表8中列出了这两种索引方式。

使用 $smallsemi$，我们枚举了每个 7 阶及以下半群上的所有舒尔环。这只需对每个半群的所有可能划分进行穷举搜索即可完成。我们常将半群在 $smallsemi$ 软件包中的指标称为半群 GAP 标识号。

5.1 小阶半群的标记

在本文中，我们介绍了许多半群族，包括 CH、K、LO、LOO、LORO、LOZ、O、OLO、ORO、OROP、RO、Z，以及多种半群构造，包括 $G[x]$, $G[\hat{}x]$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$, G^e,G^μ, G^θ和 $\times.$。随后，我们讨论了这些半群族和半群构造上的舒尔环的分类与枚举。

这些半群族和构造足以对所有 4 阶及以下半群进行分类（见表 2、3 和 4）。在许多情况下，同一个半群等价类有多种分类方式。遇到这种情况时，作者遵循了两项原则。首先，作者选择能够生成最小凯莱表的分类方式，例如优先选择 LO_n^θ 而非 RO_n^θ，但通过 RO_n 将 $\mathrm{ORO}_{m,\ n}$ 定义为左恒等元，而不是通过 LO_n 将其定义为右恒等元。其次，作者选择他们认为最简单的分类方式。在对小半群进行分类时，出现了一些常见模式，于是引入了带参数的半群族，例如 LORO、ORO 或 OROP。在这些例子中，存在理想扩张，并选用代码表示该理想和 Rees 商。这些理想扩张通常限于特定的半群族，例如，理想限于 O_n 或 LO_n。如果无需施加限制或只需施加少量限制，我们则改为定义半群上的运算，例如 $\mathfrak{s}$、$\mathfrak{t}$ 或 $\mathfrak{u}$。尽管名册具有广泛的适用性，作者仍只在此分类方案中没有其他分类方式时才采用名册。但即使在这一小半群分类方案中，某些模式也频繁到足以催生缩写，例如 G^θ、G^μ 和 $G[x]$。该方案旨在用尽可能少的参数，尽可能紧凑地编码原始乘法和凯莱表。为方便读者，附录中提供了这一分类方案的完整汇编。该方案当然无法分类所有小阶半群，但描述了 $smallsemi$数据库中的大多数半群。

值得注意的是，这一分类方案也是在研究这些小阶半群上的舒尔环时形成的。随着舒尔环被分类、计数并整理，这种整理也将相应的半群归为不同的族，展示了舒尔环在群以外的代数范畴中的潜力。例如，我们将看到，许多半群只有 1 个或 2 个舒尔环。此外，舒尔环的数量通常集中在贝尔数及其和或积附近。半群拥有非常多舒尔环的情况很少见。我们称舒尔环数量相对于其阶而言较高的半群为舒尔稠密，即拥有超过 $\mathscr{B}(n-2)$ 个舒尔环。

5.2 阶为0、1和2的半群

对于阶为 0 和 1 的情形，各自只有一个半群，分别是 $\emptyset$ 和 Z_1, 。在这两种情形下，这些半群上都只有一个划分，它们在两种情形下都是一个舒尔环，即离散舒尔环。

对于阶为 2 的半群，共有 4 种等价类型。基数为 2 的集合只有两种可能的划分，即离散划分和平凡划分。如上所述，离散划分总是赋予一个舒尔环。因此，枚举问题等价于确定平凡划分是否赋予特定的阶为 2 的半群上的舒尔环。在表2中，我们按照 Forsythe 字典序排列凯莱表，列出了每个阶为 2 的半群上不同舒尔环的数量。为方便说明和清晰起见，我们还采用前文引入的记号给出了每个半群的等价类型。为方便起见，我们也列出了每个半群的 GAP 编号，但计算时并未使用这些编号。因此，我们对元素的标记可能与 GAP 中的标记不同。

	G	GAP ID	Ω
00	O_2	1	1
01	CH_2	3	1
02	LO_2	4	2
03	Z_2	2	2

表2：阶为 2 的半群的舒尔环

我们注意到，恰有一半的半群只有一个舒尔环，即 O_2 和 CH_2, ，这与定理 1.7 和 2.6 一致。而另外两个半群，即 LO_2 和 Z_2, ，拥有最多数量的舒尔环，这与定理 1.8 和 3.8 一致。

对于阶较小的半群，可以使用 GAP 找到其舒尔环。软件包 *smallsemi* 包含阶 1 到 8 的半群。借助此软件包，我们给出了阶 0–4 时每个半群所具有的舒尔环数量。对于这些阶，我们还使用 [5] 中给出的凯莱表列出了具体的舒尔环。对于阶 5–7，我们列出具有固定数量舒尔环的半群数量，并指出其中一些半群。

具体做法是编写一个函数，该函数接收给定半群中的两个元素列表，并按照半群环的运算方式将它们相乘。另一个函数用于检查给定的半群环元素是否是某个划分中的本原集的线性组合。随后，我们对每个半群的所有划分的所有可能乘积进行了穷举搜索，并记录每种舒尔环数量对应的半群数。因此，阶为 8 的情形在当前阶段的计算量难以承受。

5.3 3阶半群

由于3个元素的集合上有五种划分，因此在报告3阶半群上的舒尔环时，我们需要比此前更加简洁。图 1展示了五种可能的划分，其中半群元素记为 0、1、2。注意，划分 1表示离散划分，而划分 5表示平凡划分。

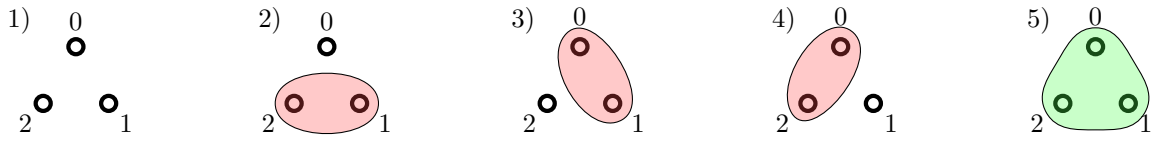


图 1：3阶的五个划分

表 3列出了按照 Forsythe 字典序排列的凯莱表，对每个3阶半群上的不同舒尔环数量。为方便清晰起见，表中还按照前文引入的分类概念，给出了每个半群的等价类型。此外，表中还按照图 1的索引列出了每个半群对应的舒尔环。为方便起见，表中也再次列出了每个半群的 GAP 编号。

查看表 3 可知，3阶半群的舒尔环数量均值为 $\mu = 1.72$，标准差为 $\sigma = 1.02$。此外，88% 的半群只有 1 个或 2 个舒尔环，其中第二个绝不是平凡划分。因此，拥有三个或更多舒尔环对于一个 3阶半群而言十分罕见。两个例外分别是左零半群 LO_3 和唯一的 3 阶群 Z_3。正如定理 1.8 所示，LO_3, 取得舒尔环数量的最大值。循环群 Z_3 上的三个舒尔环分别是离散舒尔环、不可分舒尔环和平凡舒尔环。

	G	GAP ID	舒尔环指标	$\Omega(G)$
00	O_3	1	1, 2	2
01	$\mathrm{Z}_{3,1}$	4	1	1
02	$\mathrm{O}_2\ \mathrm{uCH}_2$	5	1	1
03	$\mathrm{ORO}_{2,1}$	6	1, 2	2
04	$\mathrm{O}_2\ \mathrm{tZ}\ _1$	7	1	1
05	O_2^e	8	1	1
06	$\mathrm{K}_{1,2}$	12	1, 2	2
07	$\mathrm{CH}_2\ \mathrm{tZ}\ _1$	13	1	1
08	O_2^θ	9	1	1
09	CH_3	14	1	1
10	LO_2^θ	15	1, 2	2
11	Z_2^θ	11	1, 2	2
12	LO_2^e	16	1, 4	2
13	LO_3	17	1,2,3,4,5	5
14	$\mathrm{Z}_2[e]$	2	1	1
15	Z_2^e	10	1, 4	2
16	$\mathrm{Z}_{2,2}$	3	1	1
17	Z_3	18	1, 2, 5	3

表 3：3阶半群的舒尔环

5.4 4阶半群

类似地，对于4阶半群，基数为4的集合上有十五种划分，如图2所示。表4列出了每个4阶半群上的不同舒尔环数量，所用的是 Forsythe序 [5]。我们还给出了 Forsythe 的半群索引与 GAP 的索引之间的对应关系，见本文末尾的表8；据我们所知，文献中尚未提供这一对应关系。

由于将元素 0、1、2、3 划分以构造舒尔环共有 15 种方式，我们将这些划分列出并编号。这些编号将在表4中引用，而元素 $0-3$ 被理解为指代 [5] 中标识的半群元素。

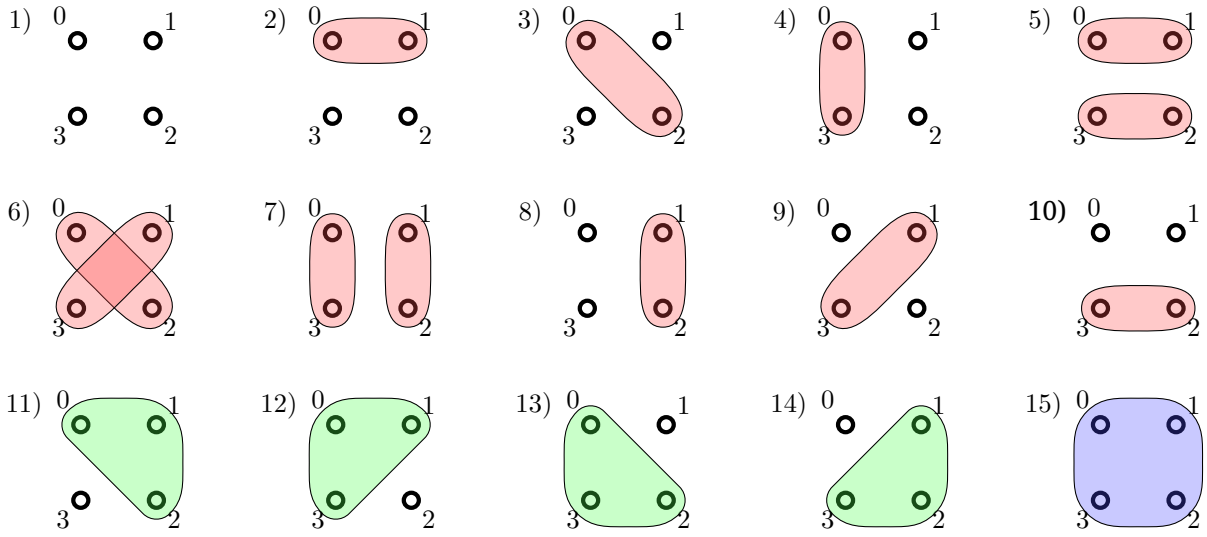


图2：4阶的十五个划分

G		舒尔环	Ω	G		舒尔环	Ω	G		舒尔环	Ω
000	O_4	1、8、9、10、14	5	042	$\mathrm{Z}_{3,1}^{e}$	1	1	084	CH_2 ⫝̸O_2	1	1
001	O_2 ⊔Z_3 ,1	1, 10	2	043	O_2^{e} ⊔CH_2	1, 10	2	085	CH_4	1	1
002	O_3 ⊔CH_2	1, 8	2	044	$(\mathrm{O}_2$ ⊔$\mathrm{CH}_2)^{e}$	1	1	086	CH_2 ⫝̸LO_2	1, 10	2
003	$\mathrm{O}(2,2,2)$	1, 10	2	045	$\mathrm{K}_{1,\ 2}$ ⊍$(\{1\},\ \{2\})$	1, 10	2	087	CH_2 ⫝̸整数集$_2$	1, 10	2
004	$\mathrm{O}(2,2,3)$	1, 10	2	046	OROP_2	1, 10	2	088	$\mathrm{LO}_2^{\theta e}$	1, 9	2
005	O_2 ⊔$\mathrm{ORO}_{2\ ,1}$	1, 10	2	047	$\mathrm{ORO}_{2\ ,1}^{e}$	1, 8	2	089	LO_3^{θ}	1、8、9、10、14	5
006	$\mathrm{ORO}_{2,1}[1]$	1	1	048	$\mathrm{ORO}_{2,\ _1}^{\mathrm{op}}$ t整数集$_1$	1, 9	2	090	整数集$_2[e]^{\theta}$	1	1
007	$\mathrm{ORO}_{3,1}$	1、8、9、10、14	5	049	$\mathrm{ORO}_{2,1}$ ⊍$(\mathrm{ORO}_{2,1}$整数集$_1)$	1, 9	2	091	LO_2 ⫝̸O_2	1, 4	2
008	O_3 t整数集 $_1$	1, 8	2	050	O^{e}t 整数集 $_2$ $_1$	1	1	092	$\mathrm{Z}_2^{\theta e}$	1, 9	2
009	$\mathrm{O}(2,2,6)$	1, 10	2	051	$(\mathrm{O}_2$ t整数集$_1)^{e}$	1	1	093	LO_2 ⫝̸CH_2	1, 4	2
010	$\mathrm{O}(2,2,7)$	1, 10	2	052	$(\mathrm{CH}_2$ t 整数集$_1)$ ⊍$(\emptyset$,整数集$_1)$	1, 6, 9	3	094	LO_2 ⫝̸LO_2	1, 4, 7, 8	4
011	$\mathrm{Z}_{4,1}$	1	1	053	$\mathrm{LOO}(2,\ 1,\ 1,\ 1)$	1	1	095	$\mathrm{Z}_{2,2}^{\theta}$	1	1
012	O_2 ⊔O_2^{e}	1	1	054	CH_2 ⫝̸O_2	1	1	096	LO_2 ⫝̸RO_2	1, 4, 7, 8	4
013	$\mathrm{OLO}_{2,2,1}$	1, 9, 10, 14	4	055	O_2 ⫝̸CH_2	1	1	097	LO_2 ⫝̸整数集$_2$	1, 4, 7, 8	4
014	$\mathrm{ORO}_{2,1}$ ⊍整数集$_1$	1, 9	2	056	O_2 ⫝̸LO_2	1, 10	2	098	Z_3^{θ}	1, 10, 14	3
015	$\mathrm{O}(2,\ 2,\ 9)$	1, 10	2	057	O_2 ⫝̸整数集$_2$	1, 10	2	099	LOZ_2	1, 3, 6, 9	4
016	$\mathrm{Z}_{3,1}$ ⊔CH_2	1	1	058	$\mathrm{K}_{1,3}$	1、8、9、10、14	5	100	LO_3^{e}	1, 3, 4, 10, 12	5
017	$\mathrm{O}(2,\ 2,\ 11)$	1, 10	2	059	$\mathrm{K}_{1,\ ^2}$ t整数集$_1$	1, 8	2	101	LO_4	1–15	15
018	$\mathrm{Z}_{3,\ ^1}$ t整数集$_1$	1	1	060	O_2^{θ} ⊔CH_2	1	1	102	整数集$_2[e,e]$	1, 8	2
019	整数集$_{3,1}[z]$	1, 10	2	061	CH_2 ⊔CH_3	1, 9	2	103	$\mathrm{Z}_{3,1}^{\mu}$	1	1
020	O_2 ⊔$\mathrm{K}_{1\ ,2}$	1, 10	2	062	CH_2 ⊔LO_3^{θ}	1, 10	2	104	整数集$_2[e,\hat{e}]$	1	1
021	$\mathrm{ORO}_{2,1}$ ⊔CH_2	1, 9, 10, 14	4	063	CH_2 ⊔整数集$_2^{\theta}$	1, 10	2	105	$\mathrm{ORO}_{2\ ,1}^{\mu}$	1, 8	2
022	$(\mathrm{O}_2$⊔$\mathrm{CH}_2)$ t整数集$_1$	1	1	064	$\mathrm{LO}_2^{e}[\hat{0}]$	1, 8	2	106	整数集$_2[e]^{e}$	1	1
023	O_2 ×CH_2	1, 9	2	065	CH_2 tCH_2	1、6、9	3	107	整数集$_2[\hat{e},\ \hat{e}]$	1, 8	2
024	O_2 ⊔CH_3	1	1	066	LO_2 tCH_2	1, 10	2	108	整数集$_2$ ⫝̸O_2	1, 4	2
025	O_2 ⊔LO_2^{θ}	1, 10	2	067	CH_2 ×CH_2	1, 8	2	109	整数集$_2$ ⫝̸CH_2	1, 4	2
026	$\mathrm{ORO}_{2,1}$ ⊍整数集$_1$	1, 9	2	068	O_2^{θ} t整数集$_1$	1	1	110	整数集$_2$ ⫝̸LO_2	1, 4, 7, 8	4
027	O_2 ⊔整数集$_2^{\theta}$	1, 10	2	069	CH_3 t整数集$_1$	1	1	111	整数集$_2$ ⫝̸整数集$_2$	1, 4, 7, 8	4
028	$\mathrm{LO}_2^{e}[0]$	1	1	070	$(\mathrm{CH}_2$ t整数集$_1)^{e}$	1	1	112	O_2 ×整数集$_2$	1, 6, 9	3
029	$\mathrm{ORO}_{2,1}$ t Z_1	1, 8	2	071	LO^{θ}t 整数集 $_2$ $_1$	1, 9	2	113	$\mathrm{Z}_{3,2}$	1	1
030	$\mathrm{OO}_{2,2}$	1	1	072	CH_2 ×LO_2	1, 6, 9	3	114	整数集$_2[z]$	1	1
031	$\mathrm{OCH}_{2,2}$	1	1	073	RO_2^{θ} t整数集$_1$	1,9	2	115	整数集$_2^{\zeta}$ ⊂ $(\emptyset,$ 整数集$_1)$	1, 6, 9	3
032	$\mathrm{OLO}_{2,2}$	1, 10, 14	3	074	整数集$^{\zeta}$ 整数集 $_2$ $_1$	1, 9	2	116	$\mathrm{Z}_{2,2}^{e}$	1	1
033	$\mathrm{ORO}_{2,2}$	1、8、9、10、14	5	075	$\mathrm{LORO}(2,\ 1,\ 1,\ 0)$	1	1	117	CH_2 ×整数集$_2$	1, 3, 6, 9	4
034	$\mathrm{OZ}_{2,2}$	1, 10, 14	3	076	O_3^{θ}	1, 10	2	118	LO_2 ×RO $_2$	1, 5, 6, 7, 15	5
035	$\mathrm{ORO}_{2,1}$ ⊍$(\mathrm{Z}_1$,$\mathrm{ORO}_{2,1})$	1, 8	2	077	$\mathrm{Z}_{3,1}^{\theta}$	1	1	119	LO_2 ×整数集$_2$	1、3、5、6、7、9、15	7
036	O_2 ×LO_2	1, 6, 9	3	078	$(\mathrm{O}_2$ ⊔$\mathrm{CH}_2)^{\theta}$	1	1	120	整数集$_3[e]$	1, 10	2
037	O_2 tCH $_2$	1	1	079	$\mathrm{ORO}_{2,1}^{\theta}$	1, 10	2	121	Z_3^{e}	1, 10, 13	3
038	LO_2 tO_2	1, 10	2	080	$(\mathrm{O}_2$ t整数集$_1)^{\theta}$	1	1	122	整数集$_{2,2}[z]$	1, 10	2
039	$\mathrm{O}_2^{e}[1]$	1	1	081	$\mathrm{O}_2^{\theta e}$	1	1	123	$\mathrm{Z}_{2,3}$	1	1
040	O_2^{ζ} ⊂$_1$ $(\emptyset,$ 整数集$_1)$	1, 10	2	082	$\mathrm{K}_{1,2}^{\theta}$	1, 10	2	124	V_4	1、5–10、14、15	9
041	O_3^{e}	1, 8	2	083	$(\mathrm{CH}_2$ t整数集$_1)^{\theta}$	1	1	125	Z_4	1、5、10、14、15	5

表4：4阶半群的舒尔环

我们可以看到，其统计分布与表4中的3阶半群类似。4阶半群上的舒尔环数量均值为 $\mu = 2.29$，标准差为 $\sigma = 1.76$。此外，76.2%的半群仅有1个或2个舒尔环（也就是说，23.8%的半群是舒尔稠密的），91.2%的半群的舒尔环数量少于 $\mathscr{B}$ 3 $= 5$ 5 000, 007, 033, 058, ( ) 。仅有半 089, 100, 118, 125, 4, 3,1, 2,2, 1,3, θ 3 e 3 2 × 2, 4, 群和具有舒尔环，它们分别同构于 O ORO ORO K LO , LO , LO RO 和 Z。

除了118和125以外，其余都可由定理 2.1 预测。半群$\mathrm{LO}_2 \times \mathrm{RO}_2$ 是唯一的4阶纯矩形带[26]。由于 $\mathrm{Aut}(\mathrm{LO}_n \times \mathrm{RO}_m) \cong S_n \times S_m$，我们知道$\mathrm{LO}_n \times \mathrm{RO}_m$ 上的自同构型舒尔环数量至少为 $\mathscr{B}(n)\mathscr{B}(m)$。此外，还有一些 $S_n \times S_m$ 的对角子群也对应自同构型舒尔环。对于$\mathrm{LO}_2 \times \mathrm{RO}_2$, ，全部五个舒尔环都是自同构型的，并对应于 $S_2 \times S_2 \cong V_4$的五个子群。舒尔环数量多于 $\mathscr{B}(3)$的半群只有101、119和124，它们分别同构于 LO_4, $\mathrm{LO}_2 \times \mathrm{Z}_2$, 和 V_4。

5.5 阶为5的半群

我们观察到，阶为 5 的半群共有 1160 个，且 $\mathscr{B}(5) = 52$。因此，我们无法合理地列出这些半群上的所有舒尔环。我们改为概述 GAP 计算的结果。在所有半群中，65.8% 只有 1 个或 2 个舒尔环，只有 4.7% 是舒尔稠密的（拥有 6 个或更多舒尔环）。值得注意的是，924 个半群（79.7%）的舒尔环数量为一个贝尔数。这些半群中许多都可以预测；具体而言，$\mathscr{B}(5) = 52$ 仅由 LO_5 取得，而拥有 $\mathscr{B}(4) = 15$ 个舒尔环的 7 个半群由定理 2.1 给出。在表 5 中，我们用 Ω 表示舒尔环的数量，用 G 表示达到 Ω 个舒尔环的半群数量。

我们将使用半群的 GAP 标识进行称呼，并作出一些评论。若干半群得到的舒尔环数量为贝尔数的乘积，这并不令人意外。半群 1007、1008、1149 和 1152 分别为 $\mathrm{Z}_2 \mathfrak{s} \mathrm{Z}_3$,$\mathrm{Z}_3 \mathfrak{s} \mathrm{Z}_2$, $\mathrm{LO}_2 \mathfrak{s} \mathrm{Z}_3$, and $\mathrm{Z}_3 \mathfrak{s} \mathrm{LO}_2$, ，其中定理 2.10 预测了舒尔环的数量。值得关注的是半群 314 和 315，它们分别为 $\mathrm{OLO}^{3,2}$ and $\mathrm{ORO}^{3,2}$，；尽管二者相似，但舒尔环的数量不同（分别为 7 和 15），如定理 1.13 和推论 1.15 所示。半群 738 和 745（$\mathrm{OLO}^{2,3}$ and $\mathrm{ORO}^{2,3}$）也说明了这一点（舒尔环数量分别为 6 和 15）。其他 Schur 稠密半群（148、149、1125、1140、671 和 672）来自阶为 4 的 Schur 稠密半群的单元素扩张（V_4^e、 V_4^θ、LO_4^θ、LO_4^e、$(\mathrm{LO}_2 \times \mathrm{Z}_2)^e$ 和 $(\mathrm{LO}_2 \times \mathrm{Z}_2)^\theta$，分别对应）。此外，Schur 稠密半群的合并通常会产生 Schur 稠密半群（定理 2.16）；例如 297、331 和 672，它们分别为 $\mathrm{ORO}_{2,1}$ $\mathfrak{u}$$\mathrm{ORO}^{2,1}$,$\mathrm{OLO}_{2,1}$ $\mathfrak{u}$ $\mathrm{ORO}^{2,1}$, and Z_2^θ $\mathfrak{u}$ Z_2^θ。

Ω G	Ω	G	ΩG	Ω G			
1	246	4	117	7	12	10	19
2	517	5	153	8	2	15	7
3	84	6	9	9	3	52	1

表 5：阶 5 半群的舒尔环结果汇总

考察该分布可知，阶 5 半群上的舒尔环数量均值为 $\mu = 2.75$，标准差为 $\sigma = 2.35$. 。赋予该阶半群的舒尔环最常见数量为 2，其中有 517 个半群承认唯一的非离散舒尔环。

5.6 阶6的半群

我们注意到，6 阶半群共有 15973 个，且 $\mathscr{B}(6) = 203$。我们再次简要总结表中给出的 GAP 计算结果。总数中，46.0% 只有 1 个或 2 个舒尔环，只有 0.4% 是 Schur 稠密的（拥有 16 个或更多舒尔环）。值得注意的是，11636 个半群（72.8%）的舒尔环数量是一个贝尔数。6 阶群有两个，即 S_3 和 Z_6。对称群 S_3 (4337) 是此阶中唯一拥有 45 个半群舒尔环的半群。循环群 Z_6 (14996) 有 11 个半群舒尔环，另有 11 个半群也具有这一性质。我们再提及一些

[26]回顾一下， *band* 是所有元素均为幂等元的半群。 *rectangular band* G 是满足以下性质的带：对于 x, y, $z \in G$。 *purely rectangular band* 是一个矩形带，对于任意 n都不等价于 LO_n 。

Schur 稠密半群，除了 S_3。半群 $LO_3 \times Z_2$ (9978) 是唯一拥有 31 个舒尔环的半群，而 $ORO_{2,1}$ u $ORO_{2,1}$ u CH_2 (7066) 是唯一拥有 22 个舒尔环的半群。Schur 稠密半群的名册往往本身也是 Schur 稠密的。仅有的两个拥有 16 个舒尔环的半群（3353 和 12431）都是名册，其中包括 $OLO_{2,4}$。仅有的两个拥有 17 个舒尔环的半群（1002 和 7714）都是名册。

尽管不被视为舒尔稠密的，拥有 13 个舒尔环的两个半群（7273 和 15874）分别是 $OLO_{3,3}$和 $LO_3 \times RO_2$, ，后者是唯一的 6 阶纯矩形带。

Ω	G	Ω	G	Ω	G	Ω	G	Ω	G	Ω	G	Ω	G
1	2093	5	2443	9	46	13	2	17	2	25	5	52	8
2	5259	6	400	10	292	14	13	18	18	30	9	203	1
3	916	7	215	11	12	15	1832	20	10	31	1		
4	2202	8	173	12	17	16	2	22	1	45	1		

表 6：6 阶半群的舒尔环结果汇总

从分布来看，6 阶半群上的舒尔环数量均值为 $\mu = 4.67$，标准差为 $\sigma = 4.70$。该阶半群所拥有的最常见舒尔环数量仍然是 2，其中有 5259 个半群具有唯一的非离散舒尔环。更多详情请参见表 6。

5.7 7 阶半群

我们注意到，共有 836021 个 7 阶半群，且 $\mathscr{B}(6) = 877$。其中，10.8% 仅有 1 个或 2 个舒尔环，只有 0.006% 是舒尔稠密的（拥有 53 个或更多舒尔环）。值得注意的是，有 694279 个半群（83.0%）拥有贝尔数个舒尔环。7 阶群只有一个，即 Z_7 (836017)，它拥有 5 个舒尔环。唯一拥有 55 个舒尔环的半群（724285）是 $ORO_{3,2}$ u RO_2^{θ}。ˆ 半群（$O_3^e[\theta,\theta]$）^{e} （546872）是唯一拥有 57 个舒尔环的半群，而 $ORO_{2,1}$ u $ORO_{2,1}$ u $K_{1,2}$（723804）是唯一拥有 65 个舒尔环的半群。在产生不常见舒尔环数量的半群中，名册再次很常见。例如，拥有 36 个舒尔环的三个半群之一（546862）是 $OLO_{3,2,3}$,，而唯一拥有 54 个舒尔环的半群（730772）也是 $OLO_{2,2,4}$。

Ω	G	Ω	G	Ω	G	Ω	G	Ω	G
1	22667	12	680	23	7	34	2	55	1
2	67360	13	73	24	10	35	11	57	1
3	12394	14	471	25	265	36	3	60	9
4	40933	15	423748	26	8	40	1	65	1
5	30789	16	45356	27	6	41	3	67	6
6	8812	17	9503	28	6	44	2	75	7
7	5338	18	836	29	8	45	9	77	1
8	5551	19	89	30	328	50	8	82	1
9	1077	20	823	31	8	52	149705	104	9
10	8846	21	25	32	5	53	2	203	9
11	125	22	72	33	9	54	1	877	1

表 7：7 阶半群舒尔环的结果汇总

从分布来看，7 阶半群上的舒尔环数量的均值为 $\mu = 18.96$，标准差为 $\sigma = 16.24$。与前几个阶数不同，众数出现在 $\mathscr{B}(4) = 15$，共有 423748 个半群。更多详情请参见表 7。

6 结论

本文研究了半群上的舒尔环，也就是那些能够在相应半群代数中构成组合子环的半群划分。更广义地说，舒尔环是指那些表现得像子半群的半群划分。子半群是指在乘法下封闭的半群子集，也就是说，它们是代数子集。同样，同态是指半群之间保持代数结构的函数，也就是说，保持乘法的函数。本文认为，舒尔环以类似的方式构成半群的代数划分。本文未讨论的两个值得关注的半群划分是同态核和格林关系。未来值得探究的是这些划分与半群舒尔环之间的关系。一些自然的问题随之而来，例如，有限幂零半群上的所有五个[27] 格林关系都是离散的，因而构成舒尔环。

正如贝尔数用于计数集合的划分，我们已经看到，贝尔数在半群代数划分的计数中意义重大，许多族都呈现出舒尔环数量为贝尔数的情形，例如 LO_n、O_n、$\mathsf{K}_{1,\ n}$、$\mathsf{ORO}_{n,\ m}$ 和 $\mathsf{OCH}_{n,\ m}$。考察所有阶不超过 7 的舒尔环后，我们发现，82.2% 的半群拥有贝尔数个舒尔环。从舒尔环数量的分布中，我们清楚地看到其聚类在贝尔数附近。对于这些半群，我们看到了舒尔环这一半群代数性质具有广泛的灵活性。相反，我们也看到了很强的刚性：某些特定元素或子集必然会在每个舒尔环中被孤立出来，例如 G^e、G^μ、G^θ 或 $G \wr \mathsf{Z}_1$。在极端情况下，半群可能具有很强的刚性，以至于只呈现出 1 个或 2 个舒尔环，例如 CH_n 和 $\mathsf{Z}_{n,\ m}$。综合这些观察，我们发现，特定半群具有代数上的刚性区域和灵活性区域，而舒尔环可以衡量这些性质。鉴于某些半群族的舒尔环数量呈乘法增长，例如 $G \wr H$、$\mathsf{LO}_n \wr G$、$\mathsf{OO}_{n,\ m}$ 或 OROP_n，因此不难理解，贝尔数的乘积同样呈现出半群的聚类；也就是说，$\Omega(G)$ 为 $10 = 2 \cdot 5$、$25 = 5 \cdot 5$、$30 = 2 \cdot 15$ 是阶不超过 7 的半群中常见的情形。我们还看到了许多半群上的近似乘法构造，它们会影响舒尔环的数量：这意味着大多数舒尔环可由乘法增长解释，但出于其他原因，可能还会有少数舒尔环出现（或缺失），例如 $G \wr H$、$G \wr H$、LOZ_n、$\mathsf{OLO}_{n,\ m}$ 或 $\mathsf{OZ}_{n,\ m}$。

由于计算效率以及 8 阶半群数量极其庞大，本文仅对阶不超过 7 的半群进行统计分析，尽管 *smallsemi* 软件包收录了 8 阶半群的完整目录。未来值得尝试分析 8 阶半群上的这些舒尔环。虽然未收录于 *smallsemi* 中，9 阶和 10 阶半群已被枚举 [2]。未来也值得尝试分析阶数超过 8 的半群上的舒尔环分布。8 阶半群的数量尚且远不及更高阶半群的数量，因此采用普查方法可能不太可行；不过，利用抽样方法和其他统计分析，或许仍能获得足够的见解。

根据我们能够分析的数据，渐近地 $\mu \sim \sigma \sim \mathscr{B}(n-3)$。这种分布或许可以用上述围绕贝尔数的聚类现象来解释，尤其是围绕 1、2、$\mathscr{B}(n-3)$ 和 $\mathscr{B}(n-2)$ 个舒尔环的聚类。如上所述，随着阶数增加，幂零半群的比例也随之增加，特别是 3-幂零半群占多数。不可分解施加对幂零半群的舒尔环施加了极大的限制，因此有望通过统计方法对这种舒尔环分布作出渐近估计。

如前所述，半群只有一个舒尔环的情况相当常见，而且这个舒尔环必然是离散舒尔环。在研究各种半群族上的舒尔环时，作者发现，分类半群上的最粗舒尔环并不总是显而易见或简单直接。例如，在准备本文期间，作者发现，随机有限半格上的最粗舒尔环可能与另一个随机半格上的最粗舒尔环大相径庭。由于尝试仅对半群 G 上的最粗舒尔环进行分类，使我们对 G 上所有舒尔环的分类有了诸多洞见，因此，研究特定半群上的舒尔环时，首先要问的问题就是确定其最粗舒尔环。因此，对特定半群族上的最粗舒尔环进行分类，将为这一领域的未来研究开辟一条富有成效的路径（例如，参见定理 3.13）。

反过来，对具有特定最粗舒尔环的半群进行分类也很有意义，例如，最粗舒尔环是离散的、不可分的或平凡的半群，或者只有两个舒尔环（即离散舒尔环和最粗舒尔环）的半群。此外，我们还提出这样一个问题：哪些半群

[27]实际上是四个，因为 $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ 对于有限半群。

对于其最粗舒尔环的每种细化，都存在一个舒尔环；这必然会得到推论 2.5 中所见的舒尔环贝尔数乘积，类似于定理 1.9 和 2.1。当除一个类之外的所有类都是单元素集时，舒尔环的数量将是一个贝尔数。因此，我们要问：哪些半群的最粗舒尔环是恰有两个或三个单元素集的划分，并且其所有细化都是舒尔环？对此类半群进行分类，将有助于阐明半群在 $\mathscr{B}(n-2)$ 和 $\mathscr{B}(n-3)$ 处的聚类。

我们已经看到许多半群的理想扩张及其与舒尔环的联系。例如，考虑将半群栈视为理想扩张。正如 G 是半群G 𝔰 H的理想，舒尔环 $\mathcal{S}$ 也是环 $\mathcal{S}$ 𝔰 $\mathcal{T}$中的理想。事实上， G 𝔰 H 上的每个舒尔环都是由 $\mathcal{T}$扩张 $\mathcal{S}$ 得到的理想扩张，其中 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别是 G 和 H^θ上的舒尔环。根据定理 1.11，我们可以将 $\mathcal{T}$ 视为 H上的舒尔环。此外，这类舒尔环理想扩张的相容性判据总是平凡的，也就是说， $\mathcal{S}$ 可以是 G上的任意舒尔环，而不只是离散划分。相比之下，例 3.7 中的两个舒尔环虽然都是理想扩张，但都要求理想上的划分是离散的，尽管这个理想上存在非离散舒尔环。将这些例子并列比较，可以看出这类理想扩张舒尔环中理想的划分有着广泛的可能性，也进一步表明有必要对此进行更深入的研究。

我们看到，递归不可分解施加会生成一列理想扩张，从而对最粗舒尔环施加限制。理想 G^k 从其补集递归地继承限制。能否根据半群的凯莱表系统地预测这些限制？在 G^∞ 上，哪些非离散划分与其补集上选定的划分相容?

理想扩张和 Rees 商是半群扩张的特例。回到关于同态核的问题，群舒尔环的楔积通过陪集将商群上的舒尔环提升上来。只要与商的划分“相容”，就可以选取核上的划分。对楔积相容性判据的阐述，是有限循环群 [10, 11] 上舒尔环分类的关键部分。我们预计，对此处讨论的半群“楔积”的相容性判据作类似的形式化处理，同样会大有裨益，值得进一步研究。

我们再提出一个问题。本文从一个群出发，将其结构放宽为半群，并观察到舒尔环的数量随之增加。如果我们将舒尔环视为群的代数分拆，那么放宽代数的公理后，代数分拆的数量理应增加。我们预计，一个群作为群时拥有的舒尔环，会少于它作为幺半群或逆半群时拥有的舒尔环；而作为半群时，数量还会更多。然而，我们观察到，零半群的舒尔环与采用较弱半群结构时的舒尔环完全相同。在代数范畴之间进行这种转换，还会在哪些情况下产生数量相同的舒尔环？再举一个例子，作为半群， G^e 的舒尔环数量与其幺半群结构下的数量相同。对于较小的阿贝尔群，我们观察到，幺半群舒尔环的数量与群舒尔环的数量相同。我们猜想，这一结论对所有有限阿贝尔群都成立。

我们希望，这些结果和问题能够激发人们今后对半群上的舒尔环展开研究，从而揭示目前尚未考察的半群的代数结构。Wielandt 的“舒尔方法”已被证明有助于群的研究，如今看来对半群的研究同样有用。或许这种“舒尔方法”也能应用于其他代数范畴。

附录 A：记号

所有并均假定为不交并。若 G 和 H 是半群，则它们上的乘法得以保留；也就是说，在 $G \cup H$ 上定义乘法时，我们只需考虑 gh 和 hg的定义，其中 $g \in G$和 $h \in H$。

CH_n（链半群）是在运算 $\max(\cdot,\cdot)$ 下的集合 $\{1,\dots,n\}$，其定义见第 11 页。根据定理 2.6，它有 1 个舒尔环。$G \times H$（ G与 H的直积）是集合 $\{(g,h) \mid g \in G, h \in H\}$，其中 $(g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$，其定义见第 8 页。$G^e$ 是集合 $G \cup \{e\}$ ，其中对于所有 $g \in G$ ，都有 $ge = eg = g$ ，其定义见第 5 页。其舒尔环由定理 1.10 描述。G^{op}（ G的对偶半群）需要了解 G的运算。用并置表示 G 的运算，并用 $\cdot$ 表示 G^{op}的运算。那么，如果 $xy = z$，则有 $y \cdot x = z$。其定义见第 4 页。

Fors.	GAP	Fors.	GAP	Fors.	GAP	Fors.	GAP	Fors.	GAP	Fors.	GAP
000	1	021	54	042	40	063	92	084	86	105	27
001	8	022	55	043	67	064	102	085	114	106	28
002	14	023	42	044	68	065	103	086	115	107	88
003	2	024	56	045	69	066	104	087	94	108	49
004	9	025	57	046	70	067	105	088	116	109	89
005	15	026	58	047	71	068	85	089	117	110	90
006	16	027	43	048	72	069	106	090	29	111	50
007	17	028	59	049	73	070	107	091	87	112	5
008	18	029	60	050	74	071	108	092	91	113	13
009	3	030	44	051	75	072	109	093	118	114	30
010	10	031	61	052	76	073	110	094	119	115	31
011	11	032	62	053	77	074	93	095	33	116	32
012	19	033	63	054	47	075	111	096	120	117	51
013	20	034	45	055	78	076	25	097	95	118	123
014	21	035	64	056	79	077	41	098	124	119	52
015	34	036	46	057	48	078	80	099	96	120	97
016	38	037	65	058	98	079	81	100	121	121	125
017	35	038	66	059	99	080	82	101	122	122	6
018	39	039	22	060	84	081	83	102	4	123	126
019	36	040	23	061	100	082	112	103	12	124	7
020	53	041	24	062	101	083	113	104	26	125	37

GAP	Fors.	GAP	Fors.	GAP	Fors.	GAP	Fors.	GAP	Fors.	GAP	Fors.
1	000	22	039	43	027	64	035	85	068	106	069
2	003	23	040	44	030	65	037	86	084	107	070
3	009	24	041	45	034	66	038	87	091	108	071
4	102	25	076	46	036	67	043	88	107	109	072
5	112	26	104	47	054	68	044	89	109	110	073
6	122	27	105	48	057	69	045	90	110	111	075
7	124	28	106	49	108	70	046	91	092	112	082
8	001	29	090	50	111	71	047	92	063	113	083
9	004	30	114	51	117	72	048	93	074	114	085
10	010	31	115	52	119	73	049	94	087	115	086
11	011	32	116	53	020	74	050	95	097	116	088
12	103	33	095	54	021	75	051	96	099	117	089
13	113	34	015	55	022	76	052	97	120	118	093
14	002	35	017	56	024	77	053	98	058	119	094
15	005	36	019	57	025	78	055	99	059	120	096
16	006	37	125	58	026	79	056	100	061	121	100
17	007	38	016	59	028	80	078	101	062	122	101
18	008	39	018	60	029	81	079	102	064	123	118
19	012	40	042	61	031	82	080	103	065	124	098
20	013	41	077	62	032	83	081	104	066	125	121
21	014	42	023	63	033	84	060	105	067	126	123

表8：Forsythe [5]与 GAP 中四阶半群索引之间的对应定理

$G\ \mathfrak{r}_x(H,K)$ 是集合 $G\cup\{x'\}$。我们要求 $H\le G_x$ 且 $K\le {}_xG$，其中 $G-H$ 和 $G-K$ 均为素理想。此外，其中之一

(a)	(b)	(c)	(d)
$H\le K$	$K\le H$	$x\in H\cap K$	$x\notin H\cap K$
$x'x$	xx'	x'	x^2

必然成立。对于 $y \in H$，我们有 $yx' = x'$；若 $y \notin H$，则 $yx' = yx$。若 $z \in K$，则 $x'z = x'$；但若$z \notin K$，则 $x'z = xz$，而 $(x')^2$ 由满足 (a)、(b)、(c) 或 (d) 中哪些条件决定。这称为 G上的名册，其中 (x, H, K) 是 $G\ \mathfrak{r}_x (H, K)$ 的名册，见第 22 页的介绍。$G\ \mathfrak{r}_x\ H$ 是集合 $G \cup \{x'\}$，是 $G\ \mathfrak{r}_x (H, H)$ 的简化记法。对于 $y \in H$，我们有 $yx' = x'$ 和$x'y = x'$；但若 $y \notin H$，则 $yx' = yx$ 和 $x'y = xy$，此外 $(x')^2 = xx' = x'x$。我们要求 $H \leq G_x$、$H \leq\ {}_xG$，且 $G - H$ 是素理想。见第 22 页的介绍。$G\ \widehat{\mathfrak{r}_x}\ H$ 是集合 $G \cup \{x'\}$。对于 $y \in H$，我们有 $yx' = x'$ 和 $x'y = x'$；但若 $y \notin H$，则 $yx' = yx$ 和$x'y = xy$，此外 $(x')^2$ 在 $x'x = x^2$ 时为 x'，而在 $x'x = x'$时为 x^2。我们要求 $H \leq G_x$、$H \leq\ {}_xG$，且$G - H$ 是素理想，$x^2 = x$。见第 24 页的介绍。$G\ \mathfrak{r}_x,\ {}_y(H, K)$ 是集合 $(G\ \mathfrak{r}_x (H, K))\ \mathfrak{r}_y (H, K)$。见第 26 页的介绍。$G\ \mathfrak{r}_X (H, K)$ 等于 $G\ \mathfrak{r}_{X-x}$，对于任意 $x \in X$，都有 ${}_x(H, K)$。见第 26 页的介绍。$G\ \mathfrak{s}\ H$ 是集合 $G \cup H$，其中对于所有 $g \in G$，都有 $gh = hg = g$ 和 $h \in H$，见第 12 页的介绍。它称为 G和 H的堆叠。$G\ \mathfrak{s}\ H$ 的舒尔环由定理 2.10 给出。$G\ \mathfrak{t}\ H$ 是集合 $G \cup H$，其中对于所有 $g \in G$，都有 $gh = \theta_G$ 和 $hg = \theta_H$，$h \in H$。G 和 H 都必须是零半群。见第 13 页的介绍。这称为 G 和 H的扭曲。若 $G = \mathrm{LO}_n$，请见下文的 $\mathrm{LO}_n\ \mathfrak{t}\ G$。其中一些舒尔环由定理 2.12 描述。$G^\theta$ 是集合 $G \cup \{\theta\}$，其中对于所有 $g \in G$，都有 $g\theta = \theta g = \theta$，见第 5 页的介绍。其舒尔环由推论 1.11 给出。$G^{e\theta} = G^{\theta e} = (G^e)^\theta = (G^\theta)^e$。$G\ \mathfrak{u}\ H$ 由 $(G\ \mathfrak{t}\ H)/\{\theta_G, \theta_H\}$ 给出。乘法定义为 $gh = hg = \theta$。G和 H都必须是零半群。见第 13 页的介绍。这称为 G和 H 的合并或统一化。若$G = \mathrm{LO}_n$，请见下文的 $\mathrm{LO}_n\ \mathfrak{u}\ G$。其中一些舒尔环由推论 2.16 描述。$G[x]$ 是集合 $G \cup \{x'\}$，其中对于 $x \in G$，有 $gx' = gx$和 $x'g = xg$，见第 14 页的介绍。这个过程称为克隆，其中 x' 是 x的克隆。我们可以重复这一过程，添加多个克隆，也可以对同一元素添加多个克隆。若 $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ 是 G中元素的多重集，则 $G[X]$ 是半群 $G[x_1][x_2]\ldots[x_n]$。可以利用克隆构造舒尔环，见定理 3.1。$G[\hat{}x]$ 是集合 $G \cup \{x'\}$，其中对于 $x \in G$，有 $gx' = gx$、$x'g = xg$和 $(x')^2 = x'$，$x^2 = x$；除 x'是幂等元而称为幂等克隆外，它与克隆相同。G^μ 是集合 $G \cup \{\mu\}$，其中对于所有 $g \in G$，都有 $g\mu = \mu g = \mu$，且 $\mu^2 = \theta$。这就是名册 $G\ \widehat{\mathfrak{r}_\theta}\ G$。见第 25 页的介绍。$\mathrm{K1}_{,n}$，即二分半格，是集合 $\{\theta, 1, \ldots, n\}$，其中 $x^2 = x$，其他所有乘积均为 θ，见第 6 页的介绍。根据定理 1.12，它有 $\mathscr{B}(n-1)$ 个舒尔环。LO_n，即左零半群，是集合 $\{1, \ldots, n\}$，其中对于所有 a，都有 $ab = a$，$b \in \mathrm{LO}_n$，见第 5 页的介绍。它就是半群 $\mathrm{RO}_n^{\mathrm{op}}$。根据定理 1.8，它有 $\mathscr{B}(n)$ 个舒尔环；在等价意义下，它由这一事实定义，见定理 1.9。$\mathrm{LOO}(\ell, m, n, k)$ 是集合 $\{0, 1, \ldots, \ell + m + n - 1\}$。我们要求 $0 \leq k < \ell^{nm}$。设 $x, y \in \mathrm{LOO}(\ell, m, n, k)$；若 $x < \ell + m$，则 $xy = x$；否则，若 $x \geq \ell + m$ 且 $y < \ell$ 或 $y \geq \ell + m$，则 $xy = 0$。若$x \geq \ell + m$ 且 $\ell \leq y < m$，则 k 通过编码凯莱表的 $n \times m$子矩阵应如何填入，来描述乘积的行为。将 k 转换为以 ℓ 为底的数后，所得数字给出 $n \times m$ 子矩阵中的元素，顺序为标准阅读顺序，即从左到右、从上到下。设$L = \{0, \ldots, \ell - 1\}$、$M = \{\ell, \ldots, \ell + m - 1\}$和 $N = \{\ell + m, \ldots, \ell + m + n - 1\}$。则 $L \cong \mathrm{LO}_\ell$、$M \cong \mathrm{LO}_m$、$L \cup M \cong \mathrm{LO}_{\ell+m}$、$N \cup 0 \cong \mathrm{O}_{n+1}$，且 $L \cup N \cong \mathrm{LO}_{\ell-1}\ \mathfrak{t}\ \mathrm{O}_{n+1}$。必要时通过改变 k，我们可以要求忽略重数后的 $NM = L$。见第 19 页的介绍。根据定理 3.16，我们知道$\mathscr{B}(m)\mathscr{B}(n) \leq \Omega(\mathrm{LOO}(\ell, m, n, k)) \leq \mathscr{B}(\ell - 1)\mathscr{B}(m)\mathscr{B}(n)$。$\mathrm{LORO}(\ell, m, n, k)$ 是集合 $\{0, 1, \ldots, \ell + m + n - 1\}$。对于 $x, y \in \mathrm{LORO}(\ell, m, n, k)$，我们将乘法定义为：若 $x < \ell + m$，则为 $xy = x$；否则，若 $x \geq \ell + m$ 且 $y < \ell$ 或 $y \geq \ell + m$之一成立，则有 $xy = y$。凯莱表中剩余的 $n \times m$ 子矩阵由数字 k 给出；将其转换为以 ℓ 为底的数后，所得数字即按标准阅读顺序排列的子矩阵元素。见第 12、21 页的介绍。根据定理 3.22 $\mathscr{B}(m)\mathscr{B}(n) \leq \Omega(\mathrm{LORO}(\ell, m, n, k)) \leq \mathscr{B}(\ell)\mathscr{B}(m)\mathscr{B}(n)$。$\mathrm{LO}_n\ \hat{}\mathfrak{s}_\varphi\ G$ 是集合 $\mathrm{LO}_n \cup G$。我们要求 $\varphi\colon\ G \to S_n$ 是同态。于是，对于 $x \in \mathrm{LO}_n$ 和$g \in G$，定义 $xg = x$ 和 $gx = \varphi_g(x)$，其中 $\varphi_g\colon \mathrm{LO}_n \to \mathrm{LO}_n$ 是与 g相关联的自同构。见第 12 页的介绍。这称为半堆。$\mathrm{LO}_n\ \mathfrak{t}\ G$ 是集合 $\mathrm{LO}_n \cup G$，其中对于 $g \in G$ 和 $x \in \mathrm{LO}_n$ $gx = \theta$，有 $xg = x$。我们要求 $\theta \in G$。见第 13 页的介绍。这称为半扭积。

LO_n 𝔲 G 是集合 (LO_n 𝔱 G)/$\{0, \theta_G\}$，其中 G 是零半群；但由于这等于 LO_{n-1} 𝔱 G，我们不使用这种“半单位元”。第 13 页的脚注中提到了它。LOZ_n 是集合 $\mathrm{LO}_n \cup \mathrm{Z}_n$（见 $\mathrm{LOZ}_{m,n}$、LO_n ̂$\mathfrak{s}_\varphi$ G），见第 12 页的介绍。$\mathrm{LOZ}_{m,n}$ 是集合 $\mathrm{LO}_m \cup \mathrm{Z}_n$（见 LO_n ̂$\mathfrak{s}_\varphi$ G）。$\mathrm{LOZ}_{m,n,k}$ 是集合 $\mathrm{LO}_m \cup \mathrm{Z}_{n,k}$（见 LO_n ̂$\mathfrak{s}_\varphi$ G）。O_n，即零半群，是集合 $\{\theta, 1, \ldots, n-1\}$，其中对于所有 a，都有 $ab = \theta$， b，见第 5 页的介绍。每个包含 θ 的划分都是一个舒尔环；根据定理 1.7，由此得到 $\mathscr{B}(n-1)$ 个舒尔环。$\mathrm{O}(m, n, k)$ 是集合 $\{0, 1, \ldots, m+n-1\}$。对于 $x, y \in \mathrm{O}(m, n, k)$，乘法按情形定义。若 $x < m$，则 $xy = yx = 0$；若 x，$y \geq m$，则 k 通过编码凯莱表应如何填入来描述乘积的行为。凯莱表中有一个尚未确定的 $n \times n$ 子矩阵，其中的元素取自整数集 $\{0, 1, \ldots, m-1\}$。若该矩阵的 n^2 个元素按从左到右、从上到下的顺序依次为 k_{n^2-1}、……、k_2, k_1, k_0，则 $k = k_{n^2-1}(m^{n^2-1}) + \ldots + k_2(m^2) + k_1(m) + k_0$。见第 17 页的介绍。根据定理 3.11，我们知道 $\mathscr{B}(n) \leq \Omega(\mathrm{O}(m, n, k)) \leq \mathscr{B}(m-1)\mathscr{B}(n)$。$\mathrm{OCH}_{m,n}$ 是集合 $\mathrm{O}_m \cup \mathrm{CH}_n$（见 $\mathrm{O}G_n$），见第 11 页的介绍。根据推论 2.7，它有 $\mathscr{B}(m-1)$ 个舒尔环。$\mathrm{O}G_n$ 是集合 $\mathrm{O}_n \cup G$，其中对于 $x \in \mathrm{O}_n$, $g \in G$，有 $xg = \theta$, $gx = x$，见第 6 页的介绍。若 G 是有限零半群，则根据定理 1.18，我们有 $\Omega(OG_n) = \Omega(G)\mathscr{B}(n-1)$；否则，参见定理 1.14。$\mathrm{O}^G{}_{m,n}$ 见第 25 页的介绍。它通过递归定义为 $\mathrm{OG}_{m,1} = \mathrm{OG}_m$，以及对于 $n \geq 2$，$\mathrm{OG}_{m,n} = \mathrm{OG}_{m,n-1}$ 𝔱$_\theta$ $(\emptyset, G)$。$\mathrm{OK}_{m,n}$ 是集合 $\mathrm{O}_m \cup \mathrm{K1}_{,n}$，见 $\mathrm{O}G_n$。它有 $\mathscr{B}(m-1)\mathscr{B}(n-1)$ 个舒尔环。$\mathrm{OO}_{m,n}$ 是集合 $O_m \cup \mathrm{O}_n$（见 $\mathrm{O}G_n$），见第 8 页的介绍。根据推论 1.19，它有 $\mathscr{B}(n-1)\mathscr{B}(m-1)$ 个舒尔环。$\mathrm{OLO}_{m,n}$ 是集合 $O_m \cup \mathrm{LO}_n$（见 $\mathrm{O}G_n$），见第 6 页的介绍。根据推论 1.15，它的舒尔环由总和 $\mathscr{B}(m-1)\mathscr{B}(n) + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k} \mathscr{B}(m-k-1)$ 给出。$\mathrm{OLO}_{\ell,m,n}$ 是集合 $\{\theta, 1, \ldots, \ell+m+n-1\}$。它在第 26 页通过递归定义为 $\mathrm{ORO}_{\ell,m,n}$ $= \mathrm{OLO}_{\ell,m-1,n}$ 𝔱$_\theta$ $(\emptyset, \mathrm{LO}_n)$，其中 $\mathrm{OLO}_{\ell,1,n} = \mathrm{OLO}_{\ell,n}$。这个半群有 $\Omega(\mathrm{OLO}_{\ell,m,n}) = \mathscr{B}(\ell-1)\mathscr{B}(m+n-1) + \sum_{k=1}^{\ell-1} \binom{\ell-1}{k} (\mathscr{B}(\ell-k-1)\mathscr{B}(n-1) + 1)$ 个舒尔环。注意，$\mathrm{OLO}_{\ell,m,n} = \mathrm{ORO}_{m,\ell,n}$。$\mathrm{ORO}_{m,n}$ 是集合 $O_m \cup \mathrm{RO}_n$（见 $\mathrm{O}G_n$），见第 6 页的介绍。根据定理 1.13，它有 $B(m+n-1)$ 个舒尔环。$\mathrm{ORO}_{\ell,m,n}$ 是集合 $\{\theta, 1, \ldots, \ell+m+n-1\}$。首次见于第 26 页。它通过 $\mathrm{ORO}_{\ell,m,n}$ $= \mathrm{ORO}_{\ell,n}$ 𝔱$_\theta$ $(\mathrm{ORO}_{\ell,m-1,n}, \mathrm{RO}_n)$ 递归定义，其中 $\mathrm{ORO}_{\ell,1,n} = \mathrm{ORO}_{\ell,n}$。这个半群有 $\Omega(\mathrm{ORO}_{\ell,m,n}) = \mathscr{B}(\ell+n-1)\mathscr{B}(m-1) + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k} \mathscr{B}(\ell-1)(\mathscr{B}(m-k-1) + 1)$ 个舒尔环。OROP_n 是集合 $O_n \cup \{\alpha, \beta\}$，其中对于 x，$y \in \mathrm{O}_n$，有 $xy = \theta$, $\alpha x = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha$, $x\beta = x$, $\beta x = \theta$,$\beta^2 = \beta$, $\alpha\beta = x_1$, $\beta\alpha = \alpha$，见第 20 页的介绍。根据定理 3.21，舒尔环的数量为$2\mathscr{B}(n-2)$。$\mathrm{OZ}_{m,n}$ 是集合 $\mathrm{O}_m \cup \mathrm{Z}_n$（见 $\mathrm{O}G_n$），见第 6 页的介绍。$\mathrm{OZ}_{m,n,k}$ 是集合 $\mathrm{O}_m \cup \mathrm{Z}_{n,k}$（见 $\mathrm{O}G_n$）。RO_m，即右零半群，是集合 $\{1, \ldots, n\}$，其中对于所有 a，都有 $ab = b$，$b \in \mathrm{RO}_n$，见第 5 页的介绍。它的舒尔环数量与 $\mathrm{RO}_n^{\mathrm{op}}$ $= \mathrm{LO}_n$相同，即 $\mathscr{B}(n)$。Z_n，即循环群，由 $\langle z \mid z^n = e \rangle$ 生成，见第 3 页的介绍。$\mathrm{Z}_{m,n}$，即单生成元半群，由 $\langle z \mid z^m = z^n \rangle$ 生成，见第 16 页的介绍。对于 $m > 1$，根据定理 3.8，它只有一个舒尔环。注意，$\mathrm{Z1}_{,m} = \mathrm{Z}_n$。

参考文献

[1] Nicholas Bastian、Jaden Brewer、Stephen Humphries、Andrew Misseldine 和 Cache Thompson。关于无限群上的舒尔环。代数与表示论，23(3):493–511，2020年。[2] Andreas Distler。有限半群的分类与枚举。博士论文，圣安德鲁斯大学，2010年。

[3] S. A. Evdokimov 和 I. N. Ponomarenko。关于有限循环群上的一族舒尔环。圣彼得堡数学杂志，13(3):441–451，2002年。[4] S. A. Evdokimov 和 I. N. Ponomarenko。循环群上的分圆方案和正规舒尔环的刻画。圣彼得堡数学杂志，14(2):11–55，2003年。[5] George E. Forsythe。SWAC 计算出 126 个不同的 4 阶半群。美国数学会会议论文集，6(3):443–447，1955年。[6] GAP 团队。GAP——群、算法与编程，4.13.1 版，2024年。[7] Akihide Hanaki、Takuto Hirai 和 Ilia Ponomarenko。关于一大类非舒尔型舒尔环。电子组合学杂志，29(2):研究论文 p2.14，7，2022年。[8] Anders O. F. Hendrikson。与舒尔环乘积相对应的超特征理论构造。代数通讯，40:4420–4438，2012年。[9] M. Kh. Klin 和 R. P¨oschel。K¨onig 问题、循环图的同构问题及舒尔环方法。《图论中的代数方法》，1，2，1978年。[10] Ka Hin Leung 和 Shing Hing Man。关于循环群上的舒尔环。II。《代数杂志》，183(2):273–285，1996年。[11] Ka Hin Leung 和 Shing Hing Man。关于循环群上的舒尔环。《以色列数学杂志》，106:251–267，1998年。[12]Andrew Misseldine。循环舒尔环的枚举技术。俄罗斯科学院乌拉尔分院数学与力学研究所学报，27(4):276–289。[13] Andrew Misseldine。循环群上舒尔环的代数与组合性质。博士论文，杨百翰大学，2014年。[14] M. E. Muzychuk 和 I. N. Ponomarenko。关于舒尔 2-群。《数学科学杂志》（纽约），219(4):565–594，2016年。[15] Mikhail Muzychuk。关联方案的楔积。《欧洲组合学杂志》，30(3):705–715，2009年。[16] Mikhail Muzychuk 和 Ilia Ponomarenko。舒尔环。《欧洲组合学杂志》，30(6):1526–1539，2009年。[17] Young Soo Park 和 Ju Pil Kim。半群中的素理想与半素理想。庆北数学杂志，32(3):629–633，1992年。[18] D. Rees。关于半群。《剑桥哲学学会会刊》，36:387–400，1940年。[19] Grigory Konstantinovich Ryabov。关于舒尔 3-群。西伯利亚 `电子数学信息公报，12:223–231，2015年。[20] Grigory Konstantinovich Ryabov。关于幂零舒尔群。西伯利亚 `电子数学信息公报，19(2):1077–1087，2022年。[21] Grigory Konstantinovich Ryabov。广义舒尔群。《代数与逻辑》，62(2):166–178，2023年。[22] Issai Schur。论单传递置换群理论。《普鲁士科学院物理—数学类会议录》，柏林，118:309–310，1933年。[23] Olaf Tamaschke。关于在有限群上定义适当特征理论的舒尔环。《数学杂志》，117:340–360，1970年。[24] OEIS 基金会。《在线整数数列百科全书》，2026年。[25] Helmut Wielandt。论单传递置换群理论。II。《数学杂志》，52:384–393，1949年。

[26] Helmut Wielandt。 有限置换群。Academic Press，纽约—伦敦，1964。[27] Matan Ziv-Av。小群上的舒尔环枚举。载于科学计算中的计算机代数。第*16*届国际研讨会，*CASC 2014*，华沙，波兰，*2014*年*9*月*8*日至*12*日。会议论文集，第491–500页。柏林：Springer，2014年9月。