arXiv:2601.09973v1 [cs.CC] 15 Jan 2026

计算与动力复杂性中的对应关系 II：复杂归约的强制

SAMUEL EVERETT

Abstract. 一种 *algebraic telic problem* 是 $\mathrm{NP}_{\mathbb{R}}$ 中的判定问题，用于形式化一维动力系统在有限时间内的可达性问题。我们证明，若来自不同动力系统的代数目的问题之间存在“自然”的映射归约，则这两个动力系统会表现出相似的行为（在一个精确的意义上）。由此，我们为求解来自复杂动力系统（例如具有正拓扑熵的系统）的代数目的问题的算法，确定了明确的障碍。例如，某些目的性问题无法由仅包含 $+$和 $\times$ 门的一致算术电路族判定。

Contents

1. 引言1.1. 主要定义与结果概述 1.2. 组织结构 致谢 2. 预备知识 2.1. 动力系统背景 2.2. 实数复杂性理论与 Blum–Shub–Smale 模型背景 3. 代数目的问题 4. 代数目的问题之间的自然归约 4.1. 排除自然望远约化 5. 排除自然搜索归约 5.1. 为 4 级自然搜索归约赋予结构 5.2. 关于 4a 级归约的总结性评论 附录 A. 在一般设定下排除归约 参考文献

2
2
4
4
4
4
4
6
8
8
11
15
17
18
19

1. Introduction

本文研究源自动力系统的有限时间可达性问题的计算复杂性，并探讨动力学结构如何限制能够解决这些问题的算法类型。粗略地说，给定一个动力系统和一个状态空间中的目标区域，我们考虑如下形式的判定问题和搜索问题：是否存在一个经过适当编码的初始状态，使其轨道在经过指定次数的迭代后到达目标区域？我们的目标是开发一种技术，利用动力系统中的概念，对判定此类可达性问题的算法施加先验限制。关键的洞见在于，来自不同动力系统的两个可达性问题之间的归约定义，与这两个动力系统的共轭定义几乎完全相同。

从动力系统中推导计算问题是很自然的，并且已有大量文献致力于将可计算性和复杂性理论与动力学联系起来。显著的例子包括：(i) 确定固定系统的状态可达性及相关判定问题的可计算性和复杂度 [16, 9, 8, 24, 17], ，以及 (ii) 关于动力系统何时能够模拟通用图灵机的问题 [20, 13, 18, 6, 12, 11, 10]。（有关详细概述，请参见本工作的第一部分的引言 [14] 。）

这些发展产生了强大的可计算性和复杂性理论工具，用于分析动力系统。相比之下，如何利用动力学概念来解答复杂性理论中的基本问题，相关探索则相对较少。这一方向的现有研究已经带来了深刻的洞见（例如参见 [3, 7, 13]），并推动了本文所开展的研究计划。

1.1. 主要定义和结果概述。 本文中，动力系统 是一个二元组（X， F），由一个集合 X（状态空间）和一个变换 $F\colon X \to X$组成。在大多数我们关注的情形中， X 是一个紧度量空间，且 F 是连续的。为了展现动力行为，对点 $x \in X$迭代作用 F，记 $F^n(x)$为 F 作用于 x的 n次复合（其中 $n \in \mathbb{N}$，若 F 可逆，则 $n \in \mathbb{Z}$）。

本文考虑单位区间 $I = [0,1]$ 上的动力系统（I， F），它们可由*Blum–Shub–Smale* 机器计算：BSS可计算系统是指存在一台 BSS 机器，在输入 $x \in I$时返回 $F(x) \in I$的系统。此处不会涉及复杂度问题，因为输入 $x \in I$ 的长度始终为一。

一个代数目的问题，或简称为来自某个动力系统 (I, F) 的目的问题类，是一个属于 $\mathrm{NP}_{\mathbb{R}}$ 的判定问题，定义如下。设 $g : I \to I$ 是单位区间上的 BSS 可计算同胚（例如，一个在 I 上的限制为双射的多项式）。令$I_m = \{p/2^m\colon\ p \in [2^m]\}$ 表示包含在 I中的精度为 m 的二进有理数。对于长度为 $n+2$ 的输入 $(a, b, 1, \ldots, 1)$，其中 $a, b \in I$且 $a \le b$，判断是否存在一个精度为n^2的二进有理数 y，即 $y \in I_{n^2}$，使得 $F^n(g(y)) \in [a, b]$。我们将来自动力系统 (I, F) 的代数目的问题记为 $\mathbb{R}$–TELIC$^{(I,F)}(g)$。

我们还将研究代数目的问题的一种推广，称为有界代数远期问题，定义如下。设 (I, F) 是一个 BSS 可计算动力系统，且 $g\colon\ I \to I$是一个 BSS 可计算同胚。设 $k\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一个可由一元字母表上的多项式时间图灵机计算的函数， $a\colon\ \mathbb{N} \to [0,1]$ 表示一个可由多项式时间BSS机计算的函数。对于长度为 $n+1$ 的输入 $(c, 1, \ldots, 1)$，其中 $c \in I$，判断是否存在一个精度为 n^2 的二进有理数 $y \in I_{n^2}$，使得 $F^{k(n)}(g(y)) \in [c - a(n)\ c + a(n)]$。有界代数目的问题记为 $\mathbb{R}$–BTELIC$^{(I,F)}(a, k, g)$。

我们发现，研究目的性问题的搜索版本最为成功；在这些问题中，会返回一个二进有理数 y，作为见证来满足 $F^n(g(y)) \in [a, b]$。标准代数终点问题和有界代数终点问题的搜索版本分别记为

$$\mathbb{R}\text{–STELIC}^{(I,F)}(g) \text{ 和 } \mathbb{R}\text{–SBTELIC}_{(I,F)}(a, k, g), \text{ 分别。}$$

本文的一个核心观点是，写出目标点问题之间任何归约必须采取的形式，与直接写出动力系统共轭的定义相差无几。特别是，如果某种归约能够采取某种特定形式，就意味着其底层动力系统具有某些共同特征。因此，如果两个目标点问题源自不具备这些共同特征（分类不同）的系统，那么这种类型的归约就无法成立。

尽管关注问题之间的归约 是否存在是一种不寻常的方法，但在我们的研究背景下，这正是恰当的思维框架。此外，研究目标点问题之间归约的结构，也可以扩展到直接求解这些问题的算法结构：考虑从平凡系统 (I,Id) 得到的目标点问题的归约，等同于考虑直接求解这些问题的算法。

现在我们将这些想法具体化。

令 $\mathcal{I}$ 表示包含在 I 中的所有点和闭区间的集合，并将其表示为 $\mathbb{R}^2$ 的凸子集，其中点 (c,r) 对应于区间 $[c-r,c+r]\subseteq I$。假设系统 (I,F) 的轨道结构复杂，而 (I,T) 在动力学上是规则的，因此其搜索型问题可在多项式时间内求解。求解 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$ 的一种自然方法是，通过构造映射族 $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$，将其归约到某个源自 (I,T) 的 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(\hat{}g)$；其中每个$\eta_n:\mathcal{I}\to\mathcal{I}$ 都满足如下性质：对于所有 $x\in I_{n^2}$ 和 $J\in\mathcal{I}$，$F^n(g(x))\in J$ 当且仅当 $T^n(\hat{}g(x))\in\eta_n(J)$。我们将这种归约称为从 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$ 到 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(\hat{}g)$ 的三级自然搜索归约。

我们通过对构成归约的函数施加额外约束，定义更严格的模板（第 1–2 级）；同时也定义一个限制更宽松的模板（第 4 级），它只要求满足单向蕴含 $\{\eta_n\}$ $T^n(\hat{}g(x))\in\eta_n(J)\Rightarrow F^n(g(x))\in J$，因此可用于在任意两个搜索问题之间进行归约。

我们的第一个定理表明，来自动力学不匹配系统的搜索型问题无法通过自然归约彼此归约。

定理 *1.1*（定理 *5.2*）。*存在一个具有正拓扑熵的动力系统 (I,F)，以及一个具有零拓扑熵的正则动力系统 (I,T)，二者均可由 BSS 机器计算；还存在由 BSS 机器计算的同胚 $g:I\to I$ 和 $\hat{}g:I\to I$，使得 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(\hat{}g)\in P_{\mathbb{R}}$，且 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$ 无法通过第 1、2 或 3 级自然搜索归约归约到 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(\hat{}g)$。*

指导原则是，目的性问题之间的归约不能忽视动力学区别。如果两个系统在动力学上“相距过远”，那么任何简单归约都无法将计算负担从一个系统转移到另一个系统。

我们的第二定理表明，当所涉及的两个动力系统表现出不同的行为时，即使是 4 级归约也必然高度不规则。该定理针对有界代数搜索目的性问题给出。令 ρ 为 $\mathbb{R}^2$上的欧几里得度量，并令 $\mathcal{I}_a\subset\mathbb{R}^2$ 表示平面中与半径固定为 a的区间 $[c-a,c+a]$ 相对应的点集 $(c,\ a)$。

定理 *1.2*（定理*5.7*）。*存在一个 BSS 可计算动力系统 (I,F)，以及函数 $a(n)$ $k(n)$，使得 $\mathbb{R}$–SBTELIC$^{(I,F)}(a,k,\mathrm{Id})$ 不能通过 4 级自然搜索归约归约到由 (I,Id) 导出的平凡搜索问题$\mathbb{R}$–SBTELIC$^{(I,\mathrm{Id})}(a,\mathrm{Id},\mathrm{Id})$，其中这些归约的函数$\eta_n:\mathcal{I}_{a(n)}\to\mathcal{I}_{a(n)}$ 在构成序列 $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 时满足以下任一性质：*

(1) 连续性，(2) 非扩张性，(3) 存在一个下半连续函数 $\varphi:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$
使得

$$\rho(z,\eta_n(z))\le\varphi(z)-\varphi(\eta_n(z))$$

对于所有 $z\in\mathcal{I}_{a(n)}$。

仅定理 1.2中的连续性限制，就排除了由一致算术电路族实现、且仅使用 $+$、$\times$ 门的 4 级归约。

请注意，我们并不强调研究直接计算组成这些归约的函数 $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的复杂度。相反，我们旨在确定它们必须具备何种数学结构；如果对 $\{\eta_n\}$ 强加了足够复杂的结构，这将意味着复杂度下界。此外，本文引入的判定问题都属于 $\mathrm{NP}_{\mathbb{R}}$。因此，为了从更深层次理解我们的结果，目的性问题为动力系统中的复杂度这一概念增添了层次：与不同动力系统相关的目的性问题在求解复杂度上的分离，意味着这些系统在深层的逻辑层面上有所区别，这种区别超越了任何标准的拓扑或解析差异。

1.2. **组织**。 本文是一个系列的第二篇 [14, 15]，该系列旨在发展动力系统与计算复杂性理论之间的双向关系。这些论文以一类共同的判定问题作为连接两个学科的纽带。此外，每篇论文都是自成一体的，可以按任意顺序阅读。

在本文第2 节中，我们将介绍计算复杂性和动力系统方面的必要背景。第3 节将引入代数目的问题，并给出初步的分类和结构结果。在给出定义之后，我们将在第4 节和第5 节证明本文的主要定理。

致谢。 在本项目较为漫长的研究过程中，我要感谢 David Cash 一直以来提供的反馈和支持。作者获得了美国国家科学基金会研究生研究奖学金计划的部分资助，资助编号 2140001。

2. Preliminaries

2.1. **动力系统背景**。 本小节只陈述一些基本概念，较少使用的概念将在需要时介绍。如果读者希望获得更全面的动力学背景，我们建议 [23, 1]。

从最广义的角度来看，动力系统是任意群或半群作用 $\phi\colon\ G \times X \to X$。这些作用可以是离散的、连续的或光滑的。因此，对于一般群——包括可测群和不可测群、离散群以及拓扑群——存在一套深厚的理论。然而，一般理论建立在对充分理解的 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$-作用及其相应半群作用的初步研究之上，而这些正是本文的重点。特别地，每当我们称对 $(X,\ T)$ 为一个动力系统或简称为系统时，我们指的是 X 是一个紧度量空间，而 T 是一个连续变换。在本文中，我们取 $X = I = [0, 1]$。

两个连续变换 $T\colon\ X \to X$ 和 $S\colon\ Y \to Y$ 称为拓扑共轭，或简称共轭，如果存在一个同胚 $h\colon\ X \to Y$，使得 $h \circ T = S \circ h$。若h 连续、满射且满足$h \circ T = S \circ h$，我们称h 是从 T 到 S 的拓扑半共轭 或态射 。如果两个系统共轭，就认为它们本质上相同，因为大多数重要的复杂度度量（例如熵）在共轭下保持不变。

2.2. **实数复杂性理论与 Blum–Shub–Smale 模型背景**。关于计算复杂性理论基础知识的权威来源，请参见 [2, 21]。我们首先定义一台 Blum–Shub–Smale（BSS）机 [5]。有关 BSS 机器及相应实数计算理论的全面介绍，请参见 [4]；而 [19] 则对实数结构复杂性理论作了很好的综述。

本质上，Blum–Shub–Smale（BSS）机是一种随机存取机，能够以单位成本执行基本算术运算，其寄存器可存储任意实数。更具体地说，BSS 机器是带有位运算的标准图灵机模型的推广，

但它能够在任意环与域上进行计算。BSS 机器具有有限个内部状态，每个状态对应以下三种类型之一：(1) 移位状态：将读写头向左或向右移动；(2) 分支状态：根据当前单元格的内容改变状态；(3) 计算状态：该状态具有一个硬编码函数 f，用于读取 a 当前单元格的内容，并将其替换为 $f(a)$。在 $\mathbb{R}$ 上进行计算时，f 是形如 g/h 的有理函数，其中 g 和 h 是多项式。

为求完整起见，我们给出 Blum–Shub–Smale 机器的形式化定义，尽管我们并不会深入使用该定义。我们采用 Meer 和 Michaux 在其清晰易懂的论文 $\mathbb{R}$ 中给出的关于 [19]的清晰定义。

定义 2.1。设

$$Y \subset \mathbb{R}^\infty := \bigcup_{d\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^d.$$

一个BSS 机器 M 定义在 $\mathbb{R}$ 上，其可接受输入集为 Y，由有限个指令组成，记作 J，这些指令标记为0、.....、N；此外还有有限个机器常数，记作 α_q。M 的一个配置 是一个四元组

$$(n, i, j, x) \in J \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^\infty,$$

其中，n 表示当前执行的指令，i 和 j 是地址，而 x 是M的寄存器内容。M在输入 $y \in Y$上的计算的初始配置为$(1,\ 1,\ 1,\ y)$。如果 $n = N$且实际配置为$(N,\ i,\ j,\ x)$，则计算停止并输出 x。M可执行的指令如下：

(1) 计算：n：$x_s \leftarrow x_k \circ_n x_l$，其中 $\circ_n$ 是诸如 $+$、$-$、$\times$或 n：$x_s \leftarrow \alpha_q$这样的操作，适用于机器常数 $\alpha_q \in \mathbb{R}$。寄存器 x_s 被赋值为 $x_k \circ_n x_l$ 或 α_q。其他寄存器保持不变。下一条指令将是 $n+1$，复制寄存器则根据 $i \leftarrow i+1$ 或 $i \leftarrow 1$ 以及类似的 j进行更改。(2) 分支：n：如果 $x_0 \geq 0$ 转到 $\beta(n)$ 否则转到 $n+1$，其中 $\beta(n) \in J$。检查结果决定下一条指令。(3) 复制：n：$x_i \leftarrow x_j$。“读”寄存器的内容被复制到“写”寄存器。

对于 Y 上的任意 BSS 机器 M，都对应一个由 M 计算的偏函数 $\Phi_{\mathsf{M}}: Y \to \mathbb{R}^\infty$。这称为输入输出映射。为了处理 BSS 机器的复杂性理论问题，我们必须为计算定义适当的成本度量。

定义 2.2. 设 $x \in \mathbb{R}^\infty$，使得 $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots)$。则 x 的大小 定义为$\mathrm{size}(x) := k$。那么，由 n 个 ***1*** 构成的向量的大小为 $\mathrm{size}(\mathbf{1}_n) = n$。

设 M 是 $Y \subset \mathbb{R}^\infty$ 上的 ***BSS*** 机器，且 $y \in Y$。M 在 y 上的运行时间 定义为

$$\mathrm{Time}_{\mathsf{M}}(y) := \begin{cases} \textit{Number of operations executed by } \mathsf{M} \textit{ if } \Phi_{\mathsf{M}}(y) \textit{ is defined}, \\ \infty \textit{ otherwise}. \end{cases}$$

如果 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们称 M 在 f 时间内计算 Φ_{M}，或称其运行时间为 f，如果它在每个输入 x 上的计算都满足 $\mathrm{Time}_{\mathsf{M}}(x) \leq f(\mathrm{size}(x))$。

若存在正整数 c 和 q，使得对所有 $y \in Y$，$\mathrm{Time}_{\mathsf{M}}(y) \leq c(\mathrm{size}(y))^q$，则称 $\mathbb{R}$ 上的机器 M 是在 $Y \subset \mathbb{R}^\infty$ 上的多项式时间 机器。于是，映射 $\varphi: X \to Y \subset \mathbb{R}^\infty$ 称为 $\mathbb{R}$ 上的 p-态射，或称为多项式时间可计算，如果 φ 可由 X 上的多项式时间机器计算。

请注意，大小和运行时间的定义与机器“磁带单元”中所含实数的大小无关。此外，任何基本运算的代价均为 1，与操作数为何无关。事实上，这可能导致一些奇特的结果，与图灵模型的直觉相悖；这促使人们引入其他复杂度度量（参见前述文献）。

M 的停机集 是所有满足 y $\Phi_{\mathsf{M}}(y)$ 收敛（有定义）的输入所构成的集合。定义在 $\mathbb{R}$ 上的判定问题 是一个集合 $S \subseteq \mathbb{R}^{\infty}$；其可判定性／复杂度由其特征函数 χ_S 的可计算性／复杂度度量。遵循惯例，我们最感兴趣的是结构化判定问题。令 $A \subset B \subset \mathbb{R}^{\infty}$。一对 $(B,\ A)$ 称为结构化判定问题，当且仅当存在一个 BSS 机器 M，其可接受输入集为 B，且 Φ_{M} 是 B 中 A 的特征函数时，该问题称为可判定的 。此时称 M判定 判定问题 $(B,\ A)$。

注意，如果我们假设（除非另有说明，我们均作此假设）问题实例的集合 B 在 $\mathbb{R}$上是可判定的，那么 A 可计算当且仅当 χ_A 可计算。因此，我们自由地使用判定问题来表示结构化问题或非结构化问题。

定义2.3。 一个带有 $A \subset B \subset \mathbb{R}^{\infty}$ 的判定问题(B, A) 属于类$\mathsf{P}_{\mathbb{R}}$（确定性多项式时间），当且仅当存在一个 *BSS* 机器M ，其可接受输入集为 B ，常数为 $k \in \mathbb{N}$、 $c \in \mathbb{R}$，使得M 判定(B, A)，并且对于所有 $y \in B$，都有$\mathrm{Time}_{\mathsf{M}}(y) \leq c \cdot$ 大小$(y)^k$。

定义2.4。 一个带有 $A \subset B \subset \mathbb{R}^{\infty}$ 的判定问题(B, A) 属于类$\mathsf{NP}_{\mathbb{R}}$（非确定性多项式时间），当且仅当存在一个 *BSS* 机器M ，其可接受输入集为 $B \times \mathbb{R}^{\infty}$ ，常数为 $k \in \mathbb{N}$、 $c \in \mathbb{R}$，使得以下条件成立： $\Phi_{\mathsf{M}}(y, z) \in \{0, 1\}$、 $\Phi_{\mathsf{M}}(y, z) = 1 \implies y \in A$，并且

$$\forall y \in A, \exists z \in \mathbb{R}^{\infty},\ such\ that\ \Phi_{\mathsf{M}}(y, z) = 1\ and\ \mathrm{Time}_{\mathsf{M}}(y, z) \leq c \cdot \mathrm{size}(y)^k.$$

定义$\mathsf{NP}_{\mathbb{R}}$ 指向量 z——它是能在 $y \in A$ 多项式时间内证明（并未说明如何获得该证书）的证书或“猜测”。与经典情形类似，$\mathsf{P}_{\mathbb{R}} \subseteq$ 包含于$_{\mathbb{R}}\mathbf{NP}_{\mathbb{R}}$，而$\mathsf{P}_{\mathbb{R}} =$是否等于$_{\mathbb{R}}\mathbf{NP}_{\mathbb{R}}$是一个核心问题。此外，所有$\mathsf{NP}_{\mathbb{R}}$ 中的问题都可在单指数时间 [5]内求解。

我们在介绍判定问题之间归约这一关键概念后结束本节。

定义*2.5.* 设（B_1, A_1）和（B_2, A_2）为判定问题。我们称（B_2, A_2）可在多项式时间内归约到（B_1, A_1），当且仅当存在一个在 B_2 上运行的 *BSS* 机器 *M*，使得Φ_{M}（B_2） $\subset B_1$、 Φ_{M}（y） $\in A_1 \iff y \in A_2$，且 *M* 在多项式时间内停机。记作（B_2, A_2） $\leq_{\mathbb{R}}$（B_1, A_1）。*NP*$_{\mathbb{R}}$ 中的判定问题（B, A）是 *NP*$_{\mathbb{R}}$-完全的，当且仅当 *NP*$_{\mathbb{R}}$ 中的每个其他问题都能在多项式时间内归约到（B, A）。

由于可计算性方面的问题，BSS 模型中的搜索问题与图灵模型中的搜索问题含义不同；不过，我们仍然成功地运用了这一概念，并在论文正文中给出了定义。

3. Algebraic telic problems

令 $\mathbb{D}$ 表示二进有理数的集合；这些数 $y \in \mathbb{D}$ 的形式为 $y = p/2^r$，其中 p 和 $r \geq 0$为整数。令 $\mathbb{D}_r = \{m \cdot 2^{-r} : m \in \mathbb{Z}\}$ 表示精度为 r 的二进有理数集合。若 $J \subset \mathbb{R}$，则令 $J_r = J \cap \mathbb{D}_r$。我们将 J_r 称为集合 J 的 r- 离散化。

设 $I = [0, 1]$，并令 $F : I \to I$ 为一个可由 *BSS* 机器 M 计算的变换，因此$\Phi_{\mathsf{M}}(x) = F(x)$ 对所有 $x \in [0, 1]$均成立。由于 BSS 机器的每一步计算都会对操作数计算一个有理函数 f/g，其中 f 和 g 是硬编码多项式，并且允许分支，因此显然，区间上的标准动力系统（例如二次映射）、分段连续动力系统（例如帐篷映射），以及其他系统（例如扩张映射和刚性圆周旋转，分别实现为 $2x$ 模 1 或 $x + \alpha$ 模 1）都可以由 BSS 机器计算。我们称此类系统（I， F）可由 *BSS* 机器计算。[1]

[1]输入始终是 $\mathbb{R}$中的单个元素，因此所有输入的大小都相同。这避免了描述此类机器时使用“高效”等术语的必要：计算这些映射的单次迭代，其复杂度不存在随规模变化的情况。

更一般地，我们称函数 $f\colon X \to Y$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ 可由 *BSS* 机器 计算，若存在一台 BSS 机器 M，使得对所有 $x \in X$， $\Phi_M(x) = f(x)$ 均成立。这里 $I_r = \mathbb{D}_r \cap [0,1]$表示单位区间的 r-离散化。

现在我们来定义代数目的问题。回想引言中的直观解释，目的问题本质上是一个可达性问题：在动力系统经过 n 个时间步演化后，询问某个点集是否与状态空间中的目标子集相交。

定义 3.1 (代数目的问题)。 设 (I, F) 是一个由 *BSS* 机器M计算的动力系统。令 $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^\infty$ 为集合 $\mathcal{B} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}^{(n)}$，其中

$$\mathcal{B}^{(n)} = [0,1] \times [0,1] \times \prod_{j=1}^{n} \{1\},$$

其中每个集合都被解释为 $\mathbb{R}^{n+2}$ 的子集；若 $y \in \mathcal{B}^{(n)}$，则 大小$(y) = n+2$。设 $g\colon I \to I$ 是一个由 *BSS* 机器计算的 I 的同胚，并定义

$$\mathcal{A}^{(n)} = \left\{ (a, b, 1, \ldots, 1) \in \mathcal{B}^{(n)} : a \le b,\ and\ \exists s \in I_{n^2}\ s.t.\ F^n(g(s)) \in [a,b] \right\}.^{2}$$

设 $\mathcal{A} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}^{(n)}$。由一个 *BSS*可计算的一维动力系统 产生的代数目的问题 (I, F)，是结构化判定问题 $\mathbb{R}$–目标点问题$^{(I,F)}(g) \coloneqq (\mathcal{B}, \mathcal{A})$.[3]

设 $\mathcal{G}$ 为 t 单位区间上所有可由 BSS 机器计算的同胚类。令

$$\mathrm{Telic}_{(I,F)} = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \mathbb{R}\text{–}\mathsf{TELIC}_{(I,F)}(g).$$

引理 3.2. 设 (I, F) 是一个 *BSS*可计算系统。那么 目的问题类$_{(I,F)} \subset \mathsf{NP}_{\mathbb{R}}$。

证明。 对于一个固定的代数目的问题 $\mathbb{R}$–目标点问题$^{(I,F)}(g)$,$g \in \mathcal{G}$，我们构造一个验证器 BSS 机器 N。

令 N 为一个可接受输入集为 $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^\infty$ 的 BSS 机器，它按如下方式运行。对于输入 $(x, y) \in \mathcal{B} \times \mathbb{R}^\infty$，首先检查是否满足 $y \in I_{n^2}$，其中 $n =$大小$(x) - 2$；这可以通过以下标准过程在 $O(n^2)$ 时间内完成：首先检查 $y < 0$ 或 $y > 1$，若是则停机。否则继续，令 $z \leftarrow y$，并循环 n 次执行以下操作： $z \leftarrow 2z$，然后若 $z \ge 1$，则置 $z \leftarrow z - 1$。循环结束后，若 $z = 0$ 则返回 1，否则返回 0（“否”）。

如果 y 不是标准形式，则拒绝。否则，继续计算 $F^n(g(y))$，并检查是否满足 $a \le F^n(g(y)) \le b$——显然，这些都是关于 n 的多项式时间操作，因为计算 $g(y)$的耗时不随 n增长，而计算 $F(x)$的耗时不随 n增长，所以计算 F^n 需要对 F进行 n次迭代。如果答案是“是”且满足 $F^n(g(y)) \in [a,b]$，则接受；否则拒绝并停止，这是一个 $O(n)$操作。因此， $\mathbb{R}$–目的问题类$^{(I,F)}$ 属于 $\mathsf{NP}_{\mathbb{R}}$。□

存在许多系统（I， F），其目的问题类满足 $\mathrm{Telic}_{(I,F)} \subset \mathsf{P}_{\mathbb{R}}$。这些就是人们所预期的“规则”系统，它们应当具有容易求解的目的性问题。

命题 3.3。 设 R_α（x） $= x + \alpha$ 模 1， $\alpha \in$ （0，1）是圆上的刚性旋转。那么$\mathbb{R}$–目的问题类$_{(S^1, R_\alpha)}$ （g） $\in \mathsf{P}_{\mathbb{R}}$ 对所有 $g \in \mathcal{G}$均成立。

证明。 这一断言的证明在 [14]中给出了完整而严格的细节。不过，证明思路很简单，可以简要概述如下。注意，由于 g 是递增或递减的，它会保持或反转 I 相对于 $\le$的序：也就是说，要么 $a \le b \implies g(a) \le g(b)$，要么$a \le b \implies g(b) \le g(a)$。此外，映射 R_α 对每个 $\alpha \in [0,1$都具有这一性质。因此，

[2]对于 I_{n^2}， n^2 的选择是任意的。我们不必采用 n^2，而可以最一般地取任意一个可高效计算的严格单调递增函数 $l(n) \ge n$。

[3]一词源自希腊语中的“telos”（目的），意为终点/目标或“达成目标”，恰如其分地概括了本文所研究的问题：一类可达性问题。

确定是否存在一个 $s \in I_{n^2}$ 使得 $R_\alpha^n(g(s)) \in [a,b]$，可归结为在精度为 n^2 的二进有理数空间 I_{n^2}上进行二分搜索：选取 $s \in I_{n^2}$，计算 $R_\alpha^n(g(s))$，然后根据点 $R_\alpha^n(g(s))$位于目标区间 $J=[a,b]$ 的哪一侧来分支。□

在布尔计算模型中，搜索问题和判定问题通常关系密切，或在适当意义下等价，也就是说，可以通过搜索到判定的归约建立联系，例如SAT中的归约。然而，在完美精度下处理实数时，通常不能指望搜索问题是可计算的——我们必须转而研究近似算法。求多项式零点就是一个例子。这通常会引出数值分析方面的问题；参见[4]以了解讨论。

另一方面，目的性问题的搜索版本显然是可计算的，因为证书只是从某个有限候选集合中取出的一个二进有理数。此外，在研究目的性问题的复杂性理论问题时，我们发现采用搜索（函数）问题的表述很有用。为此，我们在此对这一概念作形式化说明。

一个搜索问题定义在 $\mathbb{R}$ 上，是一个在输入大小上受多项式界约束、且可由 BSS 机器在多项式时间内判定的关系 $R \subset \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$。与经典情形一样，给定输入$x \in \mathbb{R}^\infty$，任务是找到一个 $y \in \mathbb{R}^\infty$，使得 $(x,\ y) \in R$；若不存在这样的 y，则返回“No”。令 $\mathsf{FNP}_\mathbb{R}$ 表示所有受多项式界约束且可由 BSS 机器在多项式时间内判定的关系 R 所构成的类。我们用 $\mathbb{R}$–$\mathsf{STELIC}^{(I,F)}(g) \subset \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ 表示目的问题$\mathbb{R}$–$\mathsf{TELIC}_{(I,F)}(g)$的搜索版本。

$\mathsf{FNP}_\mathbb{R}$ 中的搜索（函数）问题之间的归约定义与经典情形完全相同：若存在函数 R 和 S，且二者均可由 BSS 机器在多项式时间内计算，使得对于任意输入 $x,\ z \in \mathbb{R}^\infty$，若 x 是 $\mathcal{Q}$的一个实例，则 $R(x)$是 $\mathcal{W}$的一个实例；并且若 z 是 $R(x)$的一个正确输出，则 $S(z)$是 x的一个正确输出，我们就称搜索问题 $\mathcal{Q}$ 归约到搜索问题 $\mathcal{W}$。

引理 3.2 的一个直接推论是

推论3.4。设(I,F)是一个高效可计算系统。那么，对所有 $g \in \mathcal{G},\ \mathbb{R}$–$\mathsf{STELIC}^{(I,F)}(g) \in \mathsf{FNP}_\mathbb{R}$。

4. Natural reductions between algebraic telic problems

本节将证明，代数目的问题判定版本之间的自然归约类别可以完全排除。我们将这些结果视为一种严格的表述方式，说明某些目的问题之间的归约必然具有复杂形式，因为不存在结构简单或显而易见的归约。本节是第 5 节的前置内容；在该节中，我们将针对代数目的问题的搜索版本得到更强的结果。

注记 4.1. 鉴于动力系统的分类理论已经十分成熟，而且正如下面将要展示的，写出目的性问题之间任意归约必须采用的形式，几乎就等同于写出动力系统共轭的定义（回顾一下，若两个系统的动力学在同胚意义下等价，则称它们共轭），因此，重点研究目的性问题之间的归约 是最恰当的。

通过证明目的性问题之间任何“自然”的归约实际上都会迫使相关动力系统具有相同的动力学性质，我们得到了一种间接方法，可以证明解决某些目的性问题的算法必然具有特定形式。特别要注意，归约到平凡系统（I，Id）对应于直接解决问题的算法。◀

4.1. 排除自然望远约化。假设 (I,F) 是一个可由 BSS 机器计算的动力系统，而 (I,F) 的轨道结构很复杂，因此判定 $\mathbb{R}$–目标点问题$_{(I,F)}(g) \in$目的问题类$^{(I,F)}$

可能颇具挑战。试图高效判定该问题时，最显而易见的方法或许是找到一个更规则的动力系统 (I, T)，使得 $\mathbb{R}$–目标点问题$_{(I,F)}(g)$ 的实例能够高效转换为某个目标点问题 $\mathbb{R}$–目标点问题$_{(I,T)}(\hat{}g)$ 的实例，并在更简洁的动力系统环境中求解。

要初步理解这种归约，最基本的尝试是构造一个函数族 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $\psi_n : I \to I$，使其满足以下性质：对于任意 $x \in I$ 和 $J = [a, b] \subseteq I$，$F^n(g(x)) \in J$ 当且仅当 $T^n(\hat{}g(x)) \in \psi_n(J)$。如果成功构造出这样的函数族 $\{\psi_n\}$，且这些 ψ_n 可由 BSS 机器在关于 n 的多项式时间内计算，那么它就可以用作从 $\mathbb{R}$–TELIC$_{(I,F)}(g)$ 到 $\mathbb{R}$–TELIC$_{(I,T)}(\hat{}g)$ 的归约。

我们将这种形式的归约称为*1* 级自然望远约化。顾名思义，对于判定型和搜索型目的问题，我们定义了一个自然望远约化的层次结构，其复杂度逐级增加。下面列出我们认为具有奠基意义的自然望远约化，直至最一般的形式——它必须涵盖目的问题之间的任何归约；随后，我们给出一个结果，排除某些情况下存在某些归约类别的可能性。

注释 4.2。函数族归约 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 让人想到通过非一致电路族（例如代数计算树）进行的归约。不过，我们假设这些函数族是可一致计算的。◀

现在，假设将 1 级自然望远约化中关于 ψ_n 的原始条件放宽：在将 $\mathbb{R}$–TELIC$_{(I,F)}(g)$ 归约到 $\mathbb{R}$–TELIC$_{(I,T)}(\hat{}g)$ 时，我们改为构造一个函数族 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $\psi_n : I \to I$，并具有如下性质：对于任意 $J = [a, b] \subseteq I$，存在一个 $x \in I_{n^2}$，使得$F^n(g(x)) \in J$ 当且仅当存在一个 $y \in I_{n^2}$，使得 $T^n(\hat{}g(y)) \in \psi_n(J)$。我们将这类归约称为*2* 级自然望远约化。

令 $\mathcal{I}$ 表示单位区间 I 中所有点和闭区间构成的空间。我们将 $\mathcal{I}$ 视为闭三角形

$$\{(c, r) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le c \le 1, 0 \le r, r \le \min\{c, 1 - c\}\} \subset \mathbb{R}^2,$$

因此，每个元素（c，r）$\in \mathcal{I}$ 都描述一个闭区间，其中 c 是中点，r 是半径：$[c - r, c + r]$。我们将函数 f：$\mathcal{I} \to \mathcal{I}$ 的 $\mathcal{I}$ 视为集合 $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^2$上的函数。此外，我们滥用记号，将 $x \in J =$（c，r）$\in \mathcal{I}$ 写作表示 $x \in I$ 包含于闭区间$[c - r, c + r]$中。

现在考虑函数族 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ with ψ_n：$\mathcal{I} \to \mathcal{I}$（视为 $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^2$上的函数），使得对于任意 $J \in \mathcal{I}$，存在一个 $x \in I_{n^2}$，满足 $F^n(g(x)) \in J$，当且仅当存在一个 $y \in I_{n^2}$，使得$T^n(\hat{}g(y)) \in \psi_n(J)$；也就是说，$F^n(g(I_{n^2})) \cap J \neq \emptyset \iff T^n(\hat{}g(I_{n^2})) \cap \psi_n(J) \neq \emptyset$。我们将使用此类函数族的归约称为从 $\mathbb{R}$–目标问题类$_{(I,F)}(g)$ 到 $\mathbb{R}$–目标问题类$_{(I,T)}(\hat{}g)$ 的三级自然目的归约。事实上，不难看出，三级自然目的归约是“足够的”，其含义是：任意目标点问题 $\mathbb{R}$–目标问题类$_{(I,F)}(g)$ 都可以通过某个三级自然目的归约归约到某个目标点问题 $\mathbb{R}$–目标问题类$_{(I,T)}(\hat{}g)$。不过，该归约不一定能由多项式时间 BSS 机器计算。

即便如此，代数目的问题之间仍存在以下最一般形式的归约。四级自然望远约化 从 $\mathbb{R}$–目的问题类$_{(I,F)}(g)$ 到 $\mathbb{R}$–目的问题类$_{(I,T)}(\hat{}g)$ 的归约由函数族 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 诱导，其中 $\psi_n : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ 且 $\omega_n : \mathcal{I} \to \mathbb{N}$，并满足：对于任意 $J \in \mathcal{I}$，存在一个$x \in I_{n^2}$，使得 $F^n(g(x)) \in J$当且仅当存在一个 $y \in I_{(\omega_n(J))^2}$，使得 $T^{\omega_n(J)}(\hat{}g(y)) \in \psi_n(J)$。

从某个 $\mathbb{R}$–TELIC$_{(I,F)} \in$目的问题类$_{(I,F)}$到某个 $\mathbb{R}$–TELIC$_{(I,T)} \in$目的问题类$_{(I,F)}$ 的任何归约，都处于自然望远约化的四个级别之一。此外，请注意，自然望远约化的每个级别都并非平凡的，也没有严格到变得空洞无物。事实上，不难找出一些非平凡系统，使得其相关的目标点问题可以通过 1 级自然望远约化彼此归约。

注4.3：为自然望远约化的许多级别增添额外的函数族 $\{\sigma_n\}$ 似乎是自然的；例如，我们可以有 $F^n(x) \in J$ 当且仅当 $T^n(\sigma_n(x)) \in \psi_n(J)$。然而，除非所有 σ_n 都相同，否则无法这样做：如果不相同，这就不再是到目标点问题的归约，因为代数目的问题 $\mathbb{R}$–TELIC$^{(I,F)}(g)$ 假设同胚 g 是固定的，不能针对每个新实例 n 对不同的 σ_n 采用 $\sigma_n \circ g$ 的形式。◀

下面的定理断言，在构造来自差异足够大的动力系统的目的性问题之间的归约时，不能使用 1 级和 2 级自然归约模板。

定理 4.4. *存在动力系统 (I, F) 和 (I, T)，二者均可由 BSS 机器计算，但不存在从 $\mathbb{R}$–目的问题类$^{(I,F)}(\mathrm{Id})$ 到 $\mathbb{R}$–目的问题类$^{(I,T)}(\mathrm{Id})$ 的 1 级或 2 级自然望远约化。*

证明。 设 (I, F) 是帐篷映射系统 $F(x) = 2\min\{x, 1-x\}$，并设 (I, T) 是单位区间 $T(x) = x^2$ 上的一个同胚。

我们先证明，从 $\mathbb{R}$–目标点问题$^{(I,F)}$(Id) 到 $\mathbb{R}$–目标点问题$^{(I,T)}$(Id) 的 1 级自然望远约化不存在。假设存在一个映射族 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$，其映射为 $\psi_n : I \to I$，使得对于任意 $x \in I$ 和闭区间或点 $J \subseteq I$，$F^n(x) \in J$ 当且仅当 $T^n(x) \in \psi_n(J)$。于是固定一个 $n \geq 1$，并令 $J = y \in I$ 为一个点。则 $F^n(x) = y \iff T^n(x) = \psi_n(y)$。因此，令 $\psi_n(F^n(x)) = \psi_n(y) = T^n(x)$，我们得出 $\psi_n \circ F^n = T^n$，因为该性质对所有 $y \in I$ 都成立。但帐篷映射 F 是二对一的，而 T 是一对一的，因此存在 $x_1 \neq x_2$，使得 $F(x_1) = F(x_2)$；但这意味着 $\psi_n(F(x_1)) = \psi_n(F(x_2)) = T(x_1) = T(x_2)$，矛盾。因此，不存在这样的函数族 $\{\psi_n\}$，从 $\mathbb{R}$–目标点问题$^{(I,F)}$(Id) 到 $\mathbb{R}$–目标点问题$^{(I,T)}$(Id) 的 1 级自然望远约化也不存在。

现在我们来证明不存在 2 级自然望远约化。我们可以将 2 级自然望远约化的定义改写为以下等价形式：如果存在一个函数族 $\{\psi_n\}$ 满足 $\psi_n : I \to I$，使得对于所有 $J = [a, b] \subseteq I$、$a \leq b$，则一个目标点问题可通过 2 级自然望远约化归约到另一个目标点问题，

$$J \cap F^n(I_{n^2}) \neq \emptyset \iff J \cap \psi_n^{-1}(T^n(I_{n^2})) \neq \emptyset \text{ for all } n \geq 1.$$

我们需要以下初等断言。

命题 4.5. *如果 A、$B \subseteq I$，并且对于所有闭区间和点 $J \subseteq I$、$A \cap J \neq \emptyset \iff B \cap J \neq \emptyset$，则 $A = B$。*

断言的证明 命题 *4.5.* 由于 J 可以是一个点，对于任意 $x \in A$ 取 $J = [x, x]$，因此根据假设 $A \cap J \neq \emptyset$ 当且仅当 $B \cap J \neq \emptyset$，于是 $x \in B$。因此 $A \subseteq B$，通过对称的论证可得 $B \subseteq A$，所以 $A = B$。□

现在，根据命题 4.5，我们有 $F^n(I_{n^2}) = \psi_n^{-1}(T^n(I_{n^2}))$，因此 $\psi_n(F^n(I_{n^2})) = T^n(I_{n^2})$。但是，$T(x) = x^2$ 是一个双射，而 $F(x) = 2\min\{x, 1-x\}$ 是二对一的，并且每次迭代都会将 $1/2$ 两侧的二进有理数映射到同一个点。因此，我们不可能有 $\psi_n(F^n(I_{n^2})) = T^n(I_{n^2})$，因为 $|\psi_n(F^n(I_{n^2}))| < 2^{n^2}$，而 $|T^n(I_{n^2})| = 2^{n^2}$，这意味着 $\mathbb{R}$–目的问题类$^{(I,F)}$(Id) 无法通过 2 级自然望远约化归约到 $\mathbb{R}$–目的问题类$^{(I,T)}$(Id)。□

定理的证明 4.4 仅使用了基本概念和简单的动力系统。从我们的角度来看，这应当被视为积极因素：一开始就排除 1 级和 2 级归约并不一定显而易见，而能够使用如此基本的论证实现这一点，表明排除更高级归约或许可以借助更复杂但已发展成熟的工具和技术来完成。对于在具有高维状态空间的更一般动力系统类中定义的目的性问题之间的归约，也还可以进一步进行研究。参见第 A 节，其中给出了一般性结果，证明不具有共同

基本动力学性质的动力系统，也不允许其目的性问题通过自然归约彼此归约。

5. Ruling out natural search reductions

自然目的归约的搜索版本与判定版本有许多相似之处，但搜索问题额外要求返回一个解，这足以使其得出比判定情形更强的结果。

设 (I,F) 和 (I,T) 是可由 BSS 机器计算的动力系统，且 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$ 和 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(g)$ 是与它们相关联的代数搜索目的问题，二者共有同胚 g。求解 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$ 的一个实例 $(a,b,1,\dots,1)$，需要返回一个 $s\in I_{n^2}$，使得 $F^n(g(s))\in[a,b]$，如果这样的对象存在。若 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$ 能在多项式时间内归约到 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(g)$，那么存在可由多项式时间 BSS 机计算的函数 R 和 S，使得对于任意输入 $x,z\in\mathbb{R}^\infty$，若 x 是 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$ 的一个实例，则 $R(x)$ 是 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(g)$ 的一个实例；并且若 z 是 $R(x)$ 的一个正确输出，则 $S(z)$ 是 x 的一个正确输出。

在构造这类归约时，自然的做法是定义 R，使其将一个大小为 $n+2$、来自 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$ 的实例 $x=(a,b,1,\dots,1)$，映射为一个同样大小为 $n+2$、来自 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(g)$ 的实例 $R(x)=(a',b',1,\dots,1)$。也就是说，将其映射到涉及动力系统相同迭代次数的实例。然而，S：对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$I_{n^2}\to I_{n^2}$，因此自然可以令 $S:=\mathrm{Id}$。这样一来，R 便是一个将来自 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$ 的实例 x 映射到来自 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(g)$ 的实例 $R(x)$ 的函数，并且具有这样的性质：若 z 是 $R(x)$ 的解，那么 z 就是实例 x的解。此外，由于函数 $R(x)$ 保持实例长度不变，对于固定的 n，它可以重新解释为一个将闭区间映射到闭区间的函数。因此，我们可以将 $R(x)$ 视为一个函数族 $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$，其中 $\eta_n:\mathcal{I}\to\mathcal{I}$。

这使我们的处境类似于对判定目的性问题之间归约的分析：我们可以对函数 η_n 施加限制，并确定何时归约能够成立。

假设使用单位区间上的函数族 $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$，$\eta_n: I\to I$，可将 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$ 归约到 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(g)$，且对于所有闭区间 $J\in\mathcal{I}$和所有 $x\in I_{n^2}$, $F^n(g(x))\in J$当且仅当 $T^n(g(x))\in\eta_n(J)$。我们将使用此类函数族 $\{\eta_n\}$ 的归约称为*1*级自然搜索归约。

注 5.1。1级自然搜索归约仅限于在具有相同同胚 g的搜索型问题 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$ 与 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(g)$ 之间进行归约，因为考虑不同的同胚 g 和 $\hat{}g$ 本质上是等价的。为此，先注意到 $(g^{-1}\circ F\circ g)^n=g^{-1}\circ F^n\circ g$；并且，如果对于所有闭区间 $J\subseteq I$和所有 $x\in I_{n^2}$，有 $F^n(g(x))\in J$ 当且仅当 $T^n(g(x))\in\eta_n(J)$，那么由于 J 可以是一个退化区间（一个点），我们有$\eta_n(F^n(g(x)))=T^n(g(x))$。令 $\tilde{F}=g^{-1}\circ F\circ g$和 $\tilde{T}=\hat{}g^{-1}\circ T\circ\hat{}g$，并定义 $\tilde{\eta}_n=\hat{}g^{-1}\circ\eta_n\circ g$。于是，利用上述事实，我们得到

$$\tilde{\eta}_n\circ\tilde{F}^n=\hat{g}^{-1}\circ\eta_n\circ F^n\circ g=\hat{g}^{-1}\circ T^n\circ\hat{g}=\tilde{T}^n$$

˜ ˜因此，我们只剩下 $\tilde{\eta}_n(F^n(x))=T^n(x)$，这与两个目的性问题使用相同的同胚时一样 g。 ◀

提升一个复杂度级别后，我们不再限制 η_n 是单位区间的变换，而是让它们成为闭区间空间 $\mathcal{I}$ 上的函数。如果 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$ 可通过函数族 $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ 归约到 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(\hat{}g)$，且满足以下性质：对于所有 $x\in I$和 $J\in\mathcal{I}$，$F^n(g(x))\in J$ 当且仅当 $T^n(\hat{}g(x))\in\eta_n(J)$，那么我们就称 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$ 可通过*2*级自然搜索归约归约到 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(\hat{}g)$。

3级自然搜索归约的定义类似，只是我们取 $x\in I_{n^2}$ 而不是 I：如果$\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}(g)$ 可通过函数族 $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$, η_n: $\mathcal{I}\to\mathcal{I}$, 归约为 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(\hat{}g)$，使得

对于所有 $x \in I_{n^2}$和 $J \in \mathcal{I}$， $F^n(g(x)) \in J$ 当且仅当 $T^n(\hat{}g(x)) \in \eta_n(J)$，那么我们称$\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}$($g$) 可通过*3*级自然搜索归约归约为 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}$($\hat{}g$)。

4级自然搜索归约的普适性足够强，以至于任何搜索型问题$\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}$(g)都可以通过4级自然搜索归约归约到任意其他 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}$($\hat{}g$)，尽管未必能在多项式时间内完成。我们称 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}$(g)可通过*4*级自然搜索归约归约到 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}$($\hat{}g$)，如果存在一个函数族 $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\eta_n : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$，使得对所有 $J \in \mathcal{I}$以及所有 $x \in I_{n^2}$, $T^n(\hat{}g(x))$， $\in \eta_n(J)$蕴含 $F^n(g(x)) \in J$；并且对所有 $x \in I_{n^2}$， $T^n(\hat{}g(x)) \notin \eta_n(J)$蕴含 $F^n(g(x)) \notin J$ 对所有 $x \in I_{n^2}$成立。

3 级与 4 级自然搜索归约之间的细微区别在于，3 级归约中的问题对每个实例都必须具有相同数量的解，而对于 4 级自然搜索归约则不必如此。例如， $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}$($\hat{}g$) 可能只有一个解，而 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}$(g) 可能有多个解；但只要 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}$($\hat{}g$) 的某个实例的解同时也是 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}$(g) 中对应实例的解，4 级归约就成立。

下面的定理断言，存在一些动力系统，它们的搜索型问题不存在 1 级、2 级和 3 级自然搜索归约。与判定问题的情形一样，1 级和 2 级自然搜索归约在某些情况下之所以无法发挥作用，具体是由于相当初等的原因。即便如此，这一点或许并非先验地可以预期的，因为 1 级和 2 级自然搜索归约都并非无足轻重——事实上，2 级自然搜索归约中的 $\eta_n : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ 是从点和区间到点和区间的任意函数。因此，下面的定理支持这样一种直觉：从混沌系统产生的目标点问题到正则系统产生的目标点问题的任何高效归约，都必然不会是无足轻重的。

定理 5.2. 存在一个具有正拓扑熵的动力系统(I, F)，以及一个具有零拓扑熵的正则动力系统(I, T)，二者均可由 *BSS* 机器计算；此外，还存在由 *BSS* 机器计算的同胚 $g : I \to I$ 和$\hat{}g : I \to I$，使得$\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}(\hat{}g) \in \mathsf{P}_{\mathbb{R}}$，且 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(g)$不能通过 *1*、*2* 或 *3* 级自然搜索归约归约到 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(\hat{}g)$。

我们需要以下预备引理和记号。回忆一下，扩张映射 $E_2 : I \to I$定义为 $E_2(x) = 2x$ 模 1.[4]

引理 5.3. 设 $E_2 : I \to I$ 为扩张映射。那么，除有限多个 $x \in I$ 外，对于所有 $n \geq 1$，$(E_2^n)^{-1}(x) \subset I$ 的基数均为 2^n。

证明。只需注意到 $E_2^n(x) = 2^n x$ 模 1，即可立即得出证明。 □

固定如下的区间分段线性函数 $\alpha : I \to I$，其定义为

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}x & \text{whenever } 0 \leq x \leq 2 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x + (1 - \sqrt{2}) & \text{whenever } 2 - \sqrt{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

函数 α 是一个 BSS 可计算同胚，具有以下性质，该性质将用于证明下面的引理5.5 。

引理 5.4。对于任意 k、$n \geq 1$ 和 $s \in I_n$，不存在 $s' \in I_n$，使得 $s' \neq s$满足 $E_2^k(\alpha(s)) = E_2^k(\alpha(s'))$。

证明。回顾 $E_2^k(x) = 2^k(x)$ 模 1。令 $\{z\}$ 表示 $z \in \mathbb{R}$ 的小数部分（即 z 模 1）。那么对于每个 $k, n \geq 1$，我们要证明不存在两个不同的 $s, s' \in I_n$使得 $\{2^k\alpha(s)\} = \{2^k\alpha(s')\}$。

[4]严格来说 该映射作用于圆 S^1，而不是单位区间，但就我们的分析而言，这两种情况是相同的 sis.

令 $s=\frac{a}{2^n}$，$s'=\frac{b}{2^n}$，其中 $0\le a,b\le 2^n-1$。若 $\{2^k\alpha(s)\}=\{2^k\alpha(s')\}$，则 $2^k\big(\alpha(s)-\alpha(s')\big)\in\mathbb{Z}$，这意味着 $\alpha(s)-\alpha(s')\in 2^{-k}\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$。注意

$$\alpha(s)=\alpha\left(\tfrac{a}{2^n}\right)=\begin{cases}\frac{a}{2^n\sqrt{2}}=\frac{a}{2^{n+1}}\sqrt{2}, & \text{when } \frac{a}{2^n}\le 2-\sqrt{2},\\ \sqrt{2}\,\frac{a}{2^n}+1-\sqrt{2}=1+\left(\frac{a}{2^n}-1\right)\sqrt{2}, & \text{when } \frac{a}{2^n}>2-\sqrt{2}.\end{cases}$$

因此，差值 $\alpha(s)-\alpha(s')$ 属于以下情况之一：

(1) $\frac{a-b}{2^{n+1}}\sqrt{2}$ 当 $\frac{a}{2^n},\frac{b}{2^n}\le 2-\sqrt{2}$，(2) $\frac{a-b}{2^n}\sqrt{2}$ 当 $\frac{a}{2^n},\frac{b}{2^n}>2-\sqrt{2}$，(3) 或者呈现 $-1+\left(1+\frac{a}{2^{n+1}}-\frac{b}{2^n}\right)\sqrt{2}$ 的形式，即前述情况混合出现时。

在情况 (1) 和 (2) 中，如果 $a\ne b$，那么差值是无理数（$\sqrt{2}$ 系数非零），这与我们先前得出的结论 $\alpha(s)-\alpha(s')\in\mathbb{Q}$ 当 $\{2^k\alpha(s)\}=\{2^k\alpha(s')\}$ 相矛盾；因此 $a=b$ 和 $s=s'$。在情况 (3) 中，将 $\alpha(s)-\alpha(s')=A+B\sqrt{2}$ 写成 $A=-1$，有理性迫使 $B=0$，即

$$1+\frac{a}{2^{n+1}}-\frac{b}{2^n}=0\iff a-2b=-2^{n+1}.$$

若 $0\le a,b\le 2^n-1$ 则不存在解，因此情形 (3) 不可能发生。由此我们得出$\alpha(s)-\alpha(s')\in\mathbb{Q}$，这意味着 $s=s'$。根据逆否命题，若 $s\ne s'$，则 $\{2^k\alpha(s)\}\ne\{2^k\alpha(s')\}$。$s=0,s'=1$ 的特殊情形可以排除，因为 $E_2(x)$ 是模 1 定义的，其中 0 和 1 视为同一点，因此 $I_r=[0,1)\cap\mathbb{D}_r$。□

引理 5.5。设 $E_2:\ I\to I$ 为扩张映射，并设 $n\in\mathbb{Z}^+$ 和 $m\ge 2$。令 $c_1=E_2^n(\alpha(s))$表示 $s\in I_{n^m}$。存在点 c_2、$c_3\in I$，使得 c_1、c_2、c_3 两两不同，并且满足 $|c_1-c_2|\le O(2^{-n^m/2})$和 $|c_1-c_3|\le O(2^{-n^m/2})$</style}，使得

(1) $c_2\notin E_2^n(\alpha(I_{n^m}))$，以及(2) 如果 $s'\in I_{n^m}$ 满足 $E_2^n(\alpha(s'))=c_3$，那么 $|s-s'|\ge 1/3$。

此外，对于每个满足 $b-a=1/2^n$ 的区间 $J=[a,b]\subset I$，都存在 $O(2^{n^m-n})$ 个点 $s\in I_{n^m}$，使得 $E_2^n(\alpha(s))\in J$。

证明。结论 (1) 直接来自于 I_{n^m} 是有限且全不连通的这一事实。现在证明 (2)：若 $s'\in I_{n^m}$ 满足 $E_2^n(\alpha(s'))=c_3$，则 $|s-s'|\ge 1/3$。回想引理 5.3，E_2^n 是 2^n 对 1 的映射，将每个区间 $[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n})$ 映到 $[0,1)$、$p=0$、.....、2^n-1。每个这样的区间都包含 I_{n^m} 中的 2^{n^m-n} 个点，以及集合 $\alpha(I_{n^m})$ 中的 $O(2^{n^m-n})$ 个点。由于 α 是分段线性的，这些 $O(2^{n^m-n})$ 个点在线性意义上分布于除一个之外的所有区间 $[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n})$ 中。假设 $|c_1-c_3|\le O(2^{-n^m/2})$。因此，令 V 为满足 $\epsilon=O(2^{-n^m/2})$ 的区间 $[c_1-\epsilon,c_1+\epsilon]$。但是，在任意区间 $[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n})$ 内，都存在一个长度为 $2\epsilon/2^n$ 的子区间 W，使得 $E_2^n(W)=V$；也就是说，对某个 p，令 $W=(E_2^n)^{-1}(V)\cap[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n})$。

那么，集合 $\alpha(I_{n^m})$ 中包含在 W 内的点有 $O(2^{n^m-n})\cdot O(2^{-(n^m/2)-n+1})=O(2^{1-2n+n^m/2})$ 个。不过 $m\ge 2$，因此这一数量显然渐近为正（$2^{1-2n+n^m/2}>0$，只要 $n\ge 4$）。因此，总存在一个 $p\in[2^n-1]$，使得若对于某个 $q\in[2^n-1]$ 有 $s\in[\frac{q}{2^n},\frac{q+1}{2^n})$，则 $|s-p/2^n|\ge 1/3$。接下来，我们可以取一个 $s'\in I_{n^m}\cap[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n})$，使得 $s'\in\alpha(I_{n^m})\cap W=(E_2^n)^{-1}(V)\cap[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n})$，其中$V$ 与前面相同。最后，引理 5.4 告诉我们，这个 s' 是唯一的——不存在其他更接近 s 且满足所需性质的 $s'\in I_{n^m}$。

还需证明，对于每个区间 $J=[a,b]\subset I$ with $b-a=1/2^n$，存在 $O(2^{n^m-n})$ 个点 $s\in I_{n^m}$，使得 $E_2^n(\alpha(s))\in J$。注意，对于 $y\in I$，

$$E_2^n(y)\in J\iff y\in U:=\bigcup_{k=0}^{2^n-1}\left(\frac{k}{2^n}+\frac{J}{2^n}\right),$$

其中 U 只是长度为 $|J|/2^n = 2^{-2n}$ 的 2^n 个互不相交区间的并，因此 $|U| = 2^n \cdot 2^{-2n} = 2^{-n}$。令 $A = \alpha^{-1}(U)$，它是区间的并，区间总长度为 $|A| \leq \sqrt{2}|U| = \sqrt{2} \cdot 2^{-n}$，这由以下事实可得：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|x-y| \leq |\alpha(x) - \alpha(y)| \leq \sqrt{2}|x-y|.$$

因此， I_{n^m} 在 A 中的点数至多为

$$\frac{|A|}{2^{-n^m}} + 2 \leq \sqrt{2} \cdot 2^{n^m - n} + 2 = O\left(2^{n^m - n}\right).$$

□

通俗地说，引理 5.5 断言，目标点问题的一个实例发生微小变化（即目标点或区间的位置发生微小扰动），会导致解出现很大的偏差。引理中的第 (2) 点对此作了明确说明：目标点 c_1 与 c_2 非常接近（相差不超过 $2^{-n^m/2}$倍），但它们对应的解之间的距离至少为 $1/3$ 。特别地，这意味着对不同目标点对应的解进行插值的多项式必须具有较高次数。一个直接推论是，任何求解$\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,E_2)}(\alpha)$ 的算术电路（仅含 $+$、$\times$ 个门）深度都必须为 $\Omega(n^2)$（应用引理 5.5时取 $m = 2$ ）。

现在我们证明定理 5.2。

定理 *5.2*的证明。 我们首先证明，存在可由 BSS 机器计算的动力系统 (I, F) 和 (I, T)，使得 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}$(Id) 无法通过 1 级或 2 级自然搜索归约归约到 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}$(Id)。我们先考虑 1 级情形。令 $F(x) = 2x \bmod 1$ 为扩张映射，并令 $T(x) = x^2$ 为区间上的同胚；二者均可由 BSS 机器计算。

为导出矛盾，假设 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}$(Id) 可通过 1级自然搜索归约归约到 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}$(Id)。那么存在一个函数族 $\{\eta_n\}$，满足 $\eta_n : I \to I$，使得对于所有闭区间 $J \in \mathcal{I}$ 以及所有 $x \in I_{n^2}$， $F^n(x) \in J \iff T^n(x) \in \eta_n(J)$。令 J 为一个点，则有 $F^n(x) = J$ 当且仅当 $T^n(x) = \eta_n(J)$ 蕴含 $\eta_n(F^n(x)) = T^n(x)$ 对所有 $x \in I_{n^2}$ 成立。但注意到 T 是双射，而 F 是 2 对 1 的，特别是， F 将二进有理数 $1/2$ 的像映射到同一个点：因此存在不同的点 x、$y \in I_{n^2}$，使得 $F(x) = F(y)$，而 $T(x) \neq T(y)$，但这就产生了矛盾，因为 $\eta_n(F(x)) = \eta_n(F(y))$。

2级自然搜索归约。令 F 和 T 仍分别为上述扩张映射和压缩映射，我们证明 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}$(Id) 不能通过 2级自然搜索归约到 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}$(Id)。再次采用反证法，假设存在映射族 $\{\eta_n\}$，满足 $\eta_n : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$，使得对于所有 $x \in I$和 $J \in \mathcal{I}$， $F^n(x) \in J$当且仅当 $T^n(x) \in \eta_n(J)$。由于我们对 $\forall x \in I$进行量化，该假设意味着拉回恒等式 $(F^n)^{-1}(J) = (T^n)^{-1}(\eta_n(J))$。然而，这个等式不可能成立，因为 F 是 2 对 1 的；特别是对于任意 $J \in \mathcal{I}$，$(F^n)^{-1}(J)$ 是不连通的，而 $(T^n)^{-1}(\eta_n(J))$ 是连通的，因为 $\eta_n : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$，且 T是 I的一个同胚。因此，对于任意 $J \in \mathcal{I}$以及所有充分大的 n，集合 $(F^n)^{-1}(J)$ 和 $(T^n)^{-1}(\eta_n(J))$ 不可能相等。

*3*级自然搜索归约。 还需证明存在这样的动力系统：它们具有代数搜索目的问题，但其中一个不能通过3级自然搜索归约归约到另一个。与前述情形相比，这一结论的证明不那么初等，并且依赖于引理 5.5。继续将 (I, F) 视为扩张映射，现在令 (I, T) 为带有 $T = \mathrm{Id}$ 的平凡动力系统。我们旨在证明，不存在从 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}(\alpha)$ 到 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}$(Id) 的3级自然搜索归约，其中 α是此前定义的函数。

为导出矛盾，假设存在函数族 $\{\eta_n\}$ with $\eta_n : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$，使得对于每个 $x \in I_{n^2}$ 和所有 $J \in \mathcal{I}$, $F^n(\alpha(x)) \in J$ 当且仅当 $T^n(x) \in \eta_n(J)$。考虑 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}(\alpha)$ 的实例类，其中 J 是长度为 $1/2^n$ 的区间。根据（2）中的点以及引理 5.5 后面的断言，存在 $O(2^{n^2-n})$ 个可能的解，并且至少存在一个

可能的解位于每个区间 $[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n})$，$p = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ 中。但请记住，3级自然搜索归约要求：对于每个 $x \in I_{n^2}$，若 $F^n(\alpha(x)) \in J$，则 $T^n(x) \in \eta_n(J)$。根据引理 5.5，我们必须得出结论 $|\eta_n(J)| \geq 1/3$，因为每个区间 $[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n})$ 中都有一个解，而这些解都必须包含于 $\eta_n(J)$ 中。但这意味着，存在一些点属于 $\eta_n(J) \cap I_{n^2}$，却不属于 $(F^n \circ \alpha)^{-1}(J) \cap I_{n^2}$。这就产生了矛盾，因为这并非 3级自然搜索归约：对于 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}$(Id) 的某个实例，一个解并不意味着对应的 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,F)}(\alpha)$ 实例存在解。

我们最后注意到，扩张映射是一个“混沌”的动力系统——特别是，它具有正的拓扑熵；而压缩映射 $T(x) = x^2$ 以及平凡系统 $T = \mathrm{Id}$ 则高度规则——它们的拓扑熵为零。特别是，不难看出，对于这类正则系统 $\mathbb{R}$–STELIC$^{(I,T)}(\hat{g}) \in \mathsf{P}_{\mathbb{R}}$——证明见例如命题 3.3 。□

备注 5.6。定理 4.4 和 5.2 的证明相当初等，并未使用动力系统中的任何复杂结果。它们表明，要排除目标点问题之间的整类非平凡归约，单位区间标准动力系统的初等理论与结构已经足够，而这些归约 先验地 看起来似乎很难排除。其要点在于，还有大量更为复杂的动力结构可用于排除更复杂的归约类别，例如某些 4 级自然搜索归约。为了控制本文的范围，我们将这一研究方向的进一步发展留待未来工作。

◀

5.1. **为 4 级自然搜索归约赋予结构**。对于 $a \geq 0$，将 $\mathcal{I}_a$ 与线段

$$\{(c, a) \in \mathbb{R}^2 : a \leq c \leq 1 - a\} \subset \mathbb{R}^2,$$

使得每个元素 $(c,\ a) \in \mathcal{I}_a$ 都表示一个闭区间，其中 c 是中点，a 是半径：即 $[c - a, c + a]$。我们像之前一样滥用记号，将 $\eta_n : \mathcal{I}_a \to \mathcal{I}_a$ 视为集合 $\mathcal{I}_a \subset \mathbb{R}^2$的函数。对于 $J = (c,\ a) \in \mathcal{I}_a$，我们用 $x \in J$表示 $x \in [c - a, c + a]$。

在本节中，我们将考虑代数搜索目的问题的一种推广，称为有界代数搜索目的性问题。和之前一样，设 $g : I \to I$ 是一个由 BSS 机器计算的 I 同胚。设 $\mathcal{U} := \cup_{n \geq 1}\{\mathbf{1}_n\}$，且 $\mathsf{K} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 是一个在多项式时间内停机的 BSS 机器。若 $\mathsf{K}(\mathbf{1}_n) = \mathbf{1}_l$，则定义 $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得 $k(n) = l$。设 $\mathsf{A} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^+$ 是一个多项式时间 BSS 机器，在输入 $\mathbf{1}_n$时返回正实数值 r。令 $a(n) := \mathsf{A}(\mathbf{1}_n) \in \mathbb{R}^+$。回忆一下，$\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^\infty$ 是集合 $\mathcal{B} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{B}^{(n)}$，其中

$$\mathcal{B}^{(n)} = [0, 1] \times [0, 1] \times \prod_{j=1}^{n}\{1\}.$$

定义

$$\mathcal{A}^{(n)}_{a(n)} = \left\{(c, r, 1, \ldots, 1) \in \mathcal{B}^{(n)} : (c, r) \in \mathcal{I}_{a(n)} \text{ and } \exists s \in I_{n^2} \text{ s.t. } F^{k(n)}(g(s)) \in [c - r, c + r]\right\},$$

并令 $\mathcal{A}_a = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}^{(n)}_{a\ n}()$。这就给出了一个结构化判定问题

$$\mathbb{R}\text{–BTELIC}_{(I,F)}(a, k, g) := (\mathcal{B}, \mathcal{A}_a)$$

我们称之为有界代数远期问题。容易验证，这些问题属于$\mathsf{NP}_{\mathbb{R}}$，如引理3.2所示。记作 $\mathbb{R}$–SBTELIC$^{(I,F)}(a, k, g) \subset \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$，表示有界代数远期问题 $\mathbb{R}$–BTELIC$^{(I,F)}(a, k, g)$ 的搜索版本。

任意层级的自然搜索归约都能以自然的方式推广到有界代数目的问题的情形，唯一的改变是映射 η_n 定义在域 $\mathcal{I}_{a(n)}$上，而非 $\mathcal{I}$；也就是说 $\eta_n : \mathcal{I}_{a(n)} \to \mathcal{I}_{a(n)}$。

我们运用不动点论证，得到以下定理，证明某些有界代数搜索目的问题之间的归约具有相当强的不规则性。

定理5.7。 存在一个 *BSS* 可计算动力系统 (I, F)，以及函数 $a(n)$ $k(n)$，使得 $\mathbb{R}$–SBTELIC$^{(I,F)}(a, k,$ Id$)$ 无法通过 *4* 级自然搜索归约归约到由 (I,Id) 导出的平凡搜索问题 $\mathbb{R}$–SBTELIC$^{(I,\mathrm{Id})}(a,$ Id, Id$)$；其中函数 $\eta_n : \mathcal{I}_{a(n)} \to \mathcal{I}_{a(n)}$ 复合成序列 $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 后满足以下任一性质：

(1) 连续性，(2) 非扩张性，(3) 存在一个下半连续函数 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$
使得

$$\rho(z, \eta_n(z)) \leq \varphi(z) - \varphi(\eta_n(z))$$

对所有 $z \in \mathcal{I}_{a(n)}$。

证明。 定义 (I, F) 为一个以任意无理数值 $\kappa \in \mathbb{R}^+$ 进行的 BSS可计算刚性圆周旋转，因此$F(x) = x+\kappa \bmod 1$。令 $\mathbb{R}$–SBTELIC$^{(I,F)}(a, k,$ Id$) \subset \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ 为有界代数远期问题 $\mathbb{R}$–BTELIC$^{(I,F)}(a, k,$ Id$)$ 的搜索版本，其中定义 $a(n) \coloneqq \mathsf{A}(\mathbf{1}_n)$ 为 $a(n) = 1/2^{n^2}$—— 这意味着 $\mathcal{I}_{a(n)}$ 中的区间长度为 $1/2^{n^2}$。定义 $\mathsf{K}(\mathbf{1}_n)$，将其视为正整数 $k(n)$，为

$$k(n) = \begin{cases} n & \text{when } \rho(F^{k(n)}(0), 0) > \frac{1}{2^{n^2}} \\ n+1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于 F 是按固定的 $\kappa > 0$进行刚性旋转，因此存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq N$，如果

$$\rho(F^n(0), 0) \leq \frac{1}{2^{n^2}}, \text{ then } \rho(F^{n+1}(0), 0) > \frac{1}{2^{n^2}}.$$

此外。 ，计算 $a(n)$ 和 $k(n)$ 的机器 A 和 K 显然都在多项式时间内运行 .

对于任意值 $0 \leq a \leq 1/2$， $\mathcal{I}_a$ 都是紧、非空且凸的。因此，如果 $\eta_n : \mathcal{I}_{a(n)} \to \mathcal{I}_{a(n)}$ 是以下情况之一：(1) 连续，(2) 非扩张，或 (3) 存在一个下半连续函数 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$，使得

$$\rho(z, \eta_n(z)) \leq \varphi(z) - \varphi(\eta_n(z)) \text{ for all } z \in \mathcal{I}_{a(n)},$$

那么，根据 (1)布劳威尔不动点定理、(2) 布劳德-柯克不动点定理和 (3) 卡里斯蒂不动点定理，可以得出存在一个 $\bar{x} \in \mathcal{I}_{a(n)}$ 使得 $\eta_n(\bar{x}) = \bar{x}$ (参见 [22] 关于不动点定理的优质资料。)

然而，函数 $a(n)$ $k(n)$ 的定义意味着，当 n 足够大时， η_n 中的任何一个都不可能有不动点。要看出这一点，首先注意，根据定义， $a(n) = 1/2^{n^2}$， $\mathcal{I}_{a(n)}$ 中任一区间的长度都是 $1/2^{n^2+1}$，因此每个这样的区间都至少包含 I 的 n^2 离散化中的一个元素。所以总是存在一个解。在从$\mathbb{R}$–SBTELIC$^{(I,F)}(a, k,$ Id$)$ 到 $\mathbb{R}$–SBTELIC$^{(I,\mathrm{Id})}(a,$ Id, Id$)$ 的 4 级自然搜索归约中， η_n 必须满足：对于每个 $n \in \mathbb{N}$、 $x \in I_{n^2}$ 和 $J \in \mathcal{I}_{a(n)}$，若 $x \in \eta_n(J)$，则 $F^{(k(n)}(x) \in J$。

因此，当 n 足够大时，如果 $\eta_n : \mathcal{I}_{a(n)} \to \mathcal{I}_{a(n)}$ 有不动点，就存在一个 $J \in \mathcal{I}_{a(n)}$ 使得 $\eta_n(J) = J$，而在该 4 级自然搜索归约中，我们有 $x \in \eta_n(J) = J$ 蕴含 $F^{k(n)}(x) \in J$。然而，根据 $k(n)$ 的定义，对于所有足够大的 n，都有 $F^{k}{}_{(n)}(J) \cap J = \emptyset$，所以 $x \in \eta_n(J) = J$ 并不蕴含 $F^{k(n)}(x) \in J$。由此可见，对于那些其中的 η_n 有不动点的函数族 $\{\eta_n\}$，它们无法充当 4 级自然搜索归约。□

根据定理5.7的条件（1）， η_n 不可能是连续的。这意味着 η_n 例如，不可能通过算术电路计算，因为这类电路只使用 $+$ 和 $\times$ 门。事实上，缺乏连续性是一个相当强的条件，这意味着函数 η_n 必然已经具有非平凡的行为。实际上，通过应用勒夫谢茨不动点定理可以看出这一点；注意到如果一个 η_n 没有不动点，它就必然消灭某些同调群，这意味着严重的

奇点或拓扑折叠。关于这一点的进一步讨论留待未来工作，不过我们要指出的是，这种进攻路线似乎容易通过应用同调论和同伦论工具来证明 η_n 的复杂度下界。

注 5.8。 用于证明定理 5.7 的刚性圆周旋转示例相当简单，也颇为牵强，因此证明基于一些基本原因。然而，由于证明中考察的示例已经非常简单，其结果是，这一结果很容易推广到其他许多具有远非平凡性质的情形。特别是可以预期，大多数高度不同系统之间的 4 级自然搜索归约都无法满足定理 5.7 的性质（1）–（3）。对于比刚性旋转更复杂的系统，一种轻易迫使其表现出这种行为的方法，是推广 K，使其现在同时成为 n 和目标区间 J的函数，并将其定义为：当映射 $F\colon I \to I$ 会在经过 n次迭代后，将一个属于 J 的点带回 J 时，$k(n) \neq n$ 。◀

5.2. 关于 4a 级归约的总结性评论。构造函数序列$\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$，以便通过 4 级自然搜索归约，将任意搜索型问题 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}$(g) 归约到另一个任意的 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}$($\hat{}g$) 时，自然的做法是寻找一个能良好地“扩展”到其余状态空间的函数序列，也就是说，我们不采用 $\forall x \in I_{n^2}$，而采用 $\forall x \in I$：如果存在一个函数族 $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $\eta_n\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$，使得对于所有 $J \in \mathcal{I}$ 和所有 $x \in I$，$T^n(\hat{}g(x)) \in \eta_n(J)$ 蕴含 $F^n(g(x)) \in J$，并且 $T^n(\hat{}g(I_{n^2})) \cap \eta_n(J) = \emptyset$ 蕴含 $F^n(g(I_{n^2})) \cap J = \emptyset$（后一条件用于无解的情况），那么我们称 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}$(g) 可通过 4a 级自然搜索归约归约到 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}$($\hat{}g$)。

研究 4a 级自然搜索归约，是尝试理解 4 级自然搜索归约结构的自然起点。因此，我们总结了组成 4a 级自然搜索归约的函数序列所必然具有的一些基本性质，这些性质或可为进一步研究提供有益的观察。

设 $(I, \mathcal{S}, \lambda, F)$ 和 $(I, \mathcal{S}, \lambda, T)$ 是单位区间上的保测系统，二者都保持勒贝格测度 λ，且都可由 BSS 机器计算。假设存在一个从 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}$(Id) 到 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}$(Id) 的 4a 级自然搜索归约。那么，假设$T^n(x) \in \eta_n(J) \implies F^n(x) \in J$对每个 $x \in I$ 和 $J \in \mathcal{I}$ 都成立，我们便可得到恒等式 $(T^n)^{-1}(\eta_n(J)) \subseteq (F^n)^{-1}(J)$。我们立即得到一些对每个 n 都成立的测度论推论。首先，

$$\lambda(\eta_n(J)) = \lambda((T^n)^{-1}(\eta_n(J))) \leq \lambda((F^n)^{-1}(J)) = \lambda(J).$$

因此，如果 $J \in \mathcal{I}$ 是一个点，那么 $\lambda(\eta_n(J)) = 0$，所以 $\eta_n(J)$也是一个点，因为 η_n 将区间映射为区间，而唯一的零测度区间就是点（退化区间）。此外，由于λ 在 I上测量区间长度，我们对所有 $J \in \mathcal{I}$都有 $|\eta_n(J)| \leq |J|$ 。我们还看到，不相交性在忽略零测集的意义下得以保留：如果 J_1, $J_2 \in \mathcal{I}$不相交， $J_1 \cap J_2 = \emptyset$，那么$(F^n)^{-1}(J_1) \cap (F^n)^{-1}(J_2) = \emptyset$。由此可得

$$(T^n)^{-1}(\eta_n(J_1)) \cap (T^n)^{-1}(\eta_n(J_2)) = \emptyset.$$

如果 T^n 在忽略零测集的意义下是满射，我们便得出 $\lambda(\eta_n(J_1) \cap \eta_n(J_2)) = 0$；不相交区间的像（按勒贝格意义）仍然不相交。特别地，如果 $\{J_k\}$ 是 $\mathcal{I}$中由有限个两两不相交元素组成的有限族，那么$\sum_k \lambda(\eta_n(J_k)) \leq \sum_k \lambda(J_k)$:

$$\sum_k \lambda(\eta_n(J_k)) = \sum_k \lambda((T^n)^{-1}(\eta_n(J_k))) = \lambda\left(\bigsqcup_k (T^n)^{-1}(\eta_n(J_k))\right)$$
$$\leq \lambda\left(\bigsqcup_k (F^n)^{-1}(J_k)\right) = \sum_k \lambda(J_k).$$

这些评论提供的一个有用结果如下

命题 5.9。 设(I,F)是任意一个满足 F为多对一的 *BSS* 可计算动力系统，并设(I,T)是一个 *BSS* 可计算动力系统，其中 T是 I的同胚。假设$\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,F)}(g)$是一个可归约到 $\mathbb{R}$–STELIC$_{(I,T)}(\hat{}g)$的代数搜索目的问题，且归约方式为 ***4a*** 级自然搜索归约。那么，若 $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相应的函数序列，则每个 η_n 都会将 $\mathcal{I}$ 中的点（退化闭区间）映射到 $\mathcal{I}$中的点；也就是说， $\eta_n\colon\ I \to I$。

证明。回想假设 $T^n(x) \in \eta_n(J) \implies F^n(x) \in J$对每个 $x \in I$，而 $J \in \mathcal{I}$给出了恒等式 $(T^n)^{-1}(\eta_n(J)) \subseteq (F^n)^{-1}(J)$。取 $J = y \in \mathcal{I}$ 为一个点。函数 T、 $\hat{}g$ 均取为同胚，这意味着 $(T^n \circ \hat{}g)^{-1}(\eta_n(y))$ 是原像 $(F^n \circ g)^{-1}(y)$ 中的一个点，这是利用了 F 的多对一假设。于是 $(T^n \circ \hat{}g)^{-1}(\eta_n(y)) \in (F^n \circ g)^{-1}(y)$。特别地，我们得出 $\eta_n(y)$ 将 $\mathcal{I}$ 中的点映到 $\mathcal{I}$ 中的点，即对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\eta_n : I \to I$。□

命题 5.9 迫使函数 $\eta_n\colon\ \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ 具有有用的正则性。将 $\mathcal{I}$ 与闭三角形 $\Delta = \{(a,b) \in I^2\colon\ 0 \le a \le b \le 1\}$ 视为同一对象，并写作 $\eta_n(J) = \eta(a,b) = [\gamma_1(a,b)\ \gamma_2(a,b)] \in \mathcal{I}$。于是，命题 5.9 迫使 γ_1 和 γ_2 在 Δ 的对角线上重合，即 $\gamma_1(x,x) = \gamma_2(x,x)$。

Appendix A. Ruling out reductions in a general setting

定理 4.4固定了两个简单的动力系统来证明该断言。由于它们很简单，可以使用相同的论证，轻松地将结果推广到单位区间上更复杂的动力系统。然而，人们可能会问，在多大程度上可以排除更一般类别的动力系统之间的归约。本节将说明这是可以做到的。

我们先简要推广代数目的的问题，使其适用于任意 BSS 可计算系统。

定义 A.1 （广义代数目标问题）。 设 $X \subset \mathbb{R}^d$，且 (X,T) 是一个可由 *BSS* 机器 M计算的动力系统。令 $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^\infty$ 为集合 $\mathcal{B} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{B}^{(n)}$，其中

$$\mathcal{B}^{(n)} = X \times \mathbb{R}_{\ge 0} \times \prod_{j=1}^{n}\{1\}.$$

设 $g\colon\ X \to X$ 是 X 上的同胚，且可由 *BSS* 机器计算。令

$$\mathcal{A}^{(n)} = \left\{(w,\delta,1,\dots,1) \in \mathcal{B}^{(n)} : \exists s \in I_{n^2}\ s.t.\ T^n(g(s)) \in B_\delta(w)\right\},$$

并令 $\mathcal{A} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}^{(n)}$。由一个 *BSS* 可计算动力系统 (X,T)所对应的广义代数目标问题，是结构化判定问题 G$\mathbb{R}$–目的问题类$^{(X,T)}(g) := (\mathcal{B},\mathcal{A})$。

设 $X \subseteq \mathbb{R}^d$和 $Y \subseteq \mathbb{R}^m$，并设 (X,T) 和 (Y,S) 是 BSS 可计算的拓扑动力系统，分别对应广义代数目标问题 G$\mathbb{R}$–目的问题类$^{(X,T)}(g)$ 和 G$\mathbb{R}$–目的问题类$^{(Y,S)}(\hat{}g)$。如果存在函数序列 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\varphi_i\colon\ X \to Y$，且其中每个函数都满足：对于任意 $x \in X$ 和闭球 $B \subset X$, $T^n(x) \in B$ 蕴含 $S^n(\varphi_n(x)) \in \varphi_n(B)$，那么我们称 (X,T) 可通过自然望远约化归约到 (Y,S)。如果系统 (X,T) 和 (Y,S) 之间存在自然望远约化，且函数序列 $\{\varphi_n\}$ 可由 BSS 机器统一地在多项式时间内计算，那么就可以利用它们，将来自 (X,T) 的广义代数目标问题 G$\mathbb{R}$–目的问题类$^{(X,T)}(g)$ 的实例归约到来自 (Y,S) 的目标点问题 G$\mathbb{R}$–目的问题类$^{(Y,S)}(\hat{}g)$。

回顾一下，动力系统(X,T)是极小 的，当且仅当它没有非空的真闭合 T-不变子集。我们有如下

定理 A.2. 设 $X \subset \mathbb{R}^d$ 和 $Y \subset \mathbb{R}^m$ 均为无限集。设 (X,T) 和 (Y,S) 是 *BSS* 可计算动力系统。若 (X,T) 有一个周期点，且 (Y,S) 是极小的，则 (X,T) 不能通过自然望远约化归约到 (Y,S) 。

在证明定理 A.2 之前，我们先给出一些引理。为此，回忆一下，$\mathrm{Per}_n(X,T)$ 是 X 的子集，由所有周期为 n 的周期点组成，而 $\mathrm{Per}(X,T) = \cup_{n\geq 1}\mathrm{Per}_n(X,T)$。我们还用到这样一个事实：如果 $\varphi\colon X\to Y$ 是满足 $\varphi\circ T = S\circ\varphi$ 的函数，则这意味着对所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $\varphi\circ T^n = S^n\circ\varphi$。这可由一个简单的归纳论证得出；在归纳步骤中，使用$\varphi\circ T^{n+1} = \varphi\circ T\circ T^n$得到 $\varphi\circ T^{n+1} = (S\circ\varphi)\circ T^n = S\circ(\varphi\circ T^n)$，再应用归纳假设 $\varphi\circ T^n = S^n\circ\varphi$，便可得到 $S\circ(\varphi\circ T^n) = S\circ(S^n\circ\varphi) = S^{n+1}\circ\varphi$，从而证明该断言。

引理 A.3. 设(X,T)和(Y,S)是动力系统，并设 $\varphi\colon X\to Y$是一个函数，使得 $\varphi\circ T = S\circ\varphi$。那么，对于每个 $n\geq 1$，都有 $\varphi(\mathrm{Per}_n(X,T))\subseteq\mathrm{Per}_n(Y,S)$，并且 $\varphi(\mathrm{Per}(X,T))\subseteq\mathrm{Per}(Y,S)$。

证明。若 $x\in\mathrm{Per}_n(X,T)$，则根据假设 $\varphi\circ T = S\circ\varphi$，我们有 $S^n(\varphi(x)) = \varphi(T^n(x)) = \varphi(x)$，因此 $\varphi(x)\in\mathrm{Per}_n(Y,S)$。由此可见，

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{Per}(X,T)) &= \varphi(\cup_{n\geq 1}\mathrm{Per}_n(X,T))\\ &= \cup_{n\geq 1}\varphi(\mathrm{Per}_n(X,T))\\ &\subseteq \cup_{n\geq 1}\mathrm{Per}_n(Y,S)\\ &= \mathrm{Per}(Y,S).\end{aligned}$$

□

引理 A.4. 设(X,T)、(Y,S)是动力系统，并假设存在函数 $\varphi\colon X\to Y$，使得对于所有 $x\in X$ 以及状态空间的任意子集 $J\subseteq X$， $T^n(x)\in J$ 蕴含 $S^n(\varphi(x))\in\varphi(J)$。那么 $\varphi\circ T = S\circ\varphi$。

证明。取 $J = z\in X$。于是 $T^n(x) = z$蕴含 $S^n(\varphi(x)) = \varphi(z)$，因此 $\varphi(T^n(x)) = S^n(\varphi(x))$，即 $\varphi\circ T^n = S^n\circ\varphi$。□

引理 A.5。设 $(Y,\ S)$是一个 $Y\subseteq\mathbb{R}^d$ 无限的拓扑动力系统。那么，如果 $(Y,\ S)$是极小的，则该系统没有任何周期轨道。

证明。反设 $y\in Y$是周期的。那么对于某个 $k\geq 1$，有 $S^k(y) = y$，因此轨道

$$\mathcal{O}(y) = \{y, S(y), \ldots, S^{k-1}(y)\}$$

是有限的。由于 Y是度量空间 $\mathbb{R}^d$的子空间， $\mathcal{O}(y) = \overline{\mathcal{O}(y)}$。此外， $\mathcal{O}(y)$是 S-不变的且非空。因为 Y是无限的，所以 $\mathcal{O}(y)\neq Y$。因此， $\mathcal{O}(y)$是 Y的一个非空真闭 S-不变子集，这与极小性矛盾。因此不存在周期点。□

现在我们证明定理 A.2。

定理 *A.2* 的证明。取 $(X,\ T)$ 为任意一个至少有一条周期轨道的 BSS 可计算动力系统，并取 $(Y,\ S)$ 为任意一个 BSS 可计算的极小系统，例如由无理数值确定的刚性圆周旋转。反设这两个系统之间存在自然目的问题类归约。

于是存在一个函数族 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $\varphi_n\colon X\to Y$，且对任意 $x\in X$ 和 $J\subseteq X$， $T^n(x)\in J$ 蕴含 $S^n(\varphi_n(x))\in\varphi_n(J)$。然而，由引理 A.4 可知，每个 φ_n 都满足 $\varphi_n\circ T^n = S^n\circ\varphi_n$。接着，引理 A.3 告诉我们 $\varphi_n(\mathrm{Per}(X,T))\subseteq\mathrm{Per}(Y,S)$。但是，$\mathrm{card}(\mathrm{Per}(X,T)) > 0$，而 $\mathrm{card}(\mathrm{Per}(Y,S)) = 0$，因为根据引理 A.5，$\mathrm{Per}(Y,S)$ 为空。因此，$\varphi_n(\mathrm{Per}(X,T))\subseteq\mathrm{Per}(Y,S)$ 是荒谬的，由此得到矛盾。□

References

[1] E. Akin。 *The general topology of dynamical systems*，第1卷。美国数学学会，1993年。[2] S. Arora 和 B. Barak。 *Computational complexity: a modern approach*。剑桥大学出版社，2009年。

[3] M. Blanc 和 O. Bournez。《连续时间计算的复杂性：空间复杂性即精度》。载于 K. Bringmann、M. Grohe、G. Puppis 和 O. Svensson 编， *51st International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2024)*，第 *Leibniz International Proceedings in Informatics(LIPIcs)*297卷，页码129:1–129:22。Schloss Dagstuhl – Leibniz信息学中心，2024年。[4] L. Blum、F. Cucker、M. Shub 和 S. Smale。*Complexity and real computation*。施普林格科学与商业媒体，2012年。[5] L. Blum、M. Shub 和 S. Smale。《关于实数上的计算与复杂性理论：NP完备性、递归函数与通用机》。 *Bulletin of the American Mathematical Society*，21(1):1–46，1989年。[6] O. Bournez、D. S. Gra¸ca 和 E. Hainry。《使用受扰动力系统进行计算》。 *Journal of Computerand System Sciences*，79(5):714–724，2013年。[7] O. Bournez、D. S. Gra¸ca 和 A. Pouly。《多项式时间对应于多项式长度的多项式常微分方程的解》。 *Journal of the ACM (JACM)*，64(6):1–76，2017年。[8] M. Braverman 和 M. Yampolsky。《不可计算的朱利亚集》。 *Journal of the American Mathematical Society*，页码551–578，2006年。[9] M. Braverman 和 M. Yampolsky。《构造局部连通的不可计算朱利亚集》。 *Communications in Mathematical Physics*，291(2):513–532，2009年。[10] R. Cardona。《带建议的计算的流体力学模型与符号模型》。 *Revista Matemática Iberoamericana*，2024年。[11] R. Cardona、E. Miranda 和 D. Peralta-Salas。《不可压缩欧拉方程的图灵普适性与 Moore 猜想》。 *International Mathematics Research Notices*，2022(22):18092–18109，2022年。[12] R. Cardona、E. Miranda、D. Peralta-Salas 和 F. Presas。《在三维空间中构造图灵完备欧拉流》。 *Proceedings of the National Academy of Sciences*，118(19):e2026818118，2021年。[13] J. Cotler 和 S. Rezchikov。《计算动力系统》。载于 *2024 IEEE 65th Annual Symposium onFoundations of Computer Science (FOCS)*，页码166–202。IEEE，2024年。[14] S. EVERETT。《计算与动力复杂性中的对应关系 I》。2026年。[15] S. EVERETT。《计算复杂性与动力复杂性之间的对应关系 III：可行性与拓扑熵》。2026年。[16] D. Gra¸ca、C. Rojas 和 N. Zhong。《以任意精度计算几何洛伦兹吸引子》。 *Transactionsof the American Mathematical Society*，370(4):2955–2970，2018年。[17] D. S. Gra¸ca 和 N. Zhong。《动力系统的稳健不可计算性与稳健动力系统的可计算性》。 *Logical Methods in Computer Science*，20，2024年。[18] P. Koiran 和 C. Moore。《一维和二维的闭式解析映射可以模拟通用图灵机》。 *Theoretical Computer Science*，210(1):217–223，1999年。[19] K. Meer 和 C. Michaux。《实数结构复杂性理论综述》。 *Bulletin of the Belgian MathematicalSociety-Simon Stevin*，4(1):113–148，1997年。[20] C. Moore。《广义移位：动力系统中的不可预测性与不可判定性》。 *Nonlinearity*，4(2):199，1991年。[21] C. Papadimitriou。 *Computational complexity*。艾迪生-韦斯利，1994年。[22] V. Pata。 *Fixed point theorems and applications*，第116卷。施普林格·自然，2019年。[23] C. Robinson。 *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*。CRC出版社，1998年。[24] C. Rojas 和 M. Yampolsky。《实二次族中吸引子的计算难处理性》。 *Advances inMathematics*，349:941–958，2019年。

University of Chicago
Email address: same@uchicago.edu