arXiv:2601.09983v1 [math.DS] 15 Jan 2026

# 乘积 SL 因子中幂零轨道的多项式有效等分布

E. LINDENSTRAUSS、A. MOHAMMADI 和 L. YANG

Abstract. 我们概述一个有效等分布定理的证明，该定理适用于由 $\mathrm{SL}_2^n$ 的$\mathbf{K}$-形式所产生的 $S$-算术商空间中的单参数幂零子群，其中$\mathbf{K}$ 是一个数域。该定理以多项式速率给出了 Ratner 和 Shah 等分布结果的有效版本。

关键的新现象是：在包含我们所研究幂零子群的 $\mathrm{SL}_2$ 与环境群之间，存在许多中间群，这会给等分布带来潜在的局部和全局障碍。

我们的方法依赖于一个在存在障碍时成立的 Bourgain 型投影定理，并结合对这些障碍的细致分析。

## 1. 引言

设$\mathbf{K}$ 为一个数域，设$\mathbf{G}$ 为满足$\mathbf{G}(\mathbb{C}) \simeq \prod_{i=1}^{n}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$的半单$\mathbf{K}$-群。设 $S$ 为$\mathbf{K}$的有限个赋值点，并设 $\mathcal{O}_S$为$\mathbf{K}$中的 $S$-整数集合。令

$$G = \mathbf{G}(\mathbf{K}_S),$$

并设 $\Gamma$与$\mathbf{G}(\mathcal{O}_S)$可公度。令 $X = G/\Gamma$，并令 $m_X$ 表示 $X$上的概率 Haar 测度。

设$\mathbf{F}$ 为特征零的局部域，并设 $\iota : \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}) \to G$ 为一个嵌入。令 $H = \iota(\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}))$。

在 $G$上固定一个右不变度量。该度量在 $X$上诱导出度量 $d_X$，并在 $X$ 及其解析子流形上诱导出自然体积形式。对于每个$\eta > 0$，令 $X_\eta$ 表示点的集合 $x \in X$，其中 $x$ 处的单射半径至少为 $\eta$。

若$\mathbf{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$，则令 $\varpi_{\mathbf{F}} = e^{-1}$；否则，固定一个$\mathbf{F}$的一致化元 $\varpi_{\mathbf{F}} \in$ 。令 $|\varpi_{\mathbf{F}}| = 1/\mathfrak{q}$。对于所有 $t \in \mathbb{N}$ 及$\mathbf{F}$中的 $r \in$，令 $a_t$ 和 $u_r$ 为

$$\begin{pmatrix} \varpi_{\mathbf{F}}^{-t} & 0 \\ 0 & \varpi_{\mathbf{F}}^{t} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

分别位于 $H$中。

A.M.感谢美国国家科学基金会（NSF）资助项目DMS-2546241的支持。L.Y.感谢新加坡国立大学提供的科研启动经费支持。

1.1. **定理**。 对于每个 $x_0 \in X$ 以及足够大的 $R$ (取决于 $x_0$处单射半径的对数），对于任意 $T \geq A_1 R$，以下至少有一项成立。

*(1)* 对每个 $\varphi \in C_c^\infty(X)$，我们有

$$\left| \int_{B_1^{\mathbf{F}}} \varphi(a_T u_r x_0)\, \mathrm{d}r - \int \varphi \, \mathrm{d}m_X \right| \leq \mathcal{S}(\varphi) \mathsf{q}^{-\kappa_1 R}$$

其中 $B_1^{\mathbf{F}} = \{r \in \mathbf{F} : |r| \leq 1\}$，而 $\mathcal{S}(\varphi)$ 是某个索博列夫范数。

*(2)* 存在 $x \in X$ 和一个子群 $H \leq M \leq G$，使得 $Mx$ 是周期的，且 $\mathrm{vol}(Mx) \leq \mathsf{q}^R$，并且

$$d_X(x, x_0) \leq T^{A_1} \mathsf{q}^{-2T + A_1 R}$$

常数 $A_1$ 和 $\kappa_1$ 为正，并且依赖于 $X$，但不依赖于 $x_0$。

证明的一般策略与作者近期著作中采用的策略思路相似，其中包括与王志仁的合作成果；参见[LMWY25]及其中的参考文献。论证分为三个主要阶段。首先，我们通过有效闭合引理得到一个虽小但为正的初始维数。第二阶段，我们利用某个投影定理，将这一维数提升至接近满维数。最后，在第三阶段，我们利用环境空间上的谱隙，将接近满维数的结果提升为等分布，这一思路与 Venkatesh [Ven10]。

本工作的关键区别在于 [LMWY25]我们能够处理第二阶段中可能出现的障碍。这些障碍先验地表现为 $H$ 在李代数$(G)$中的子表示，后验地则表现为中间子群，正如定理1.1第 (2) 部分所述。为此，我们引入了两个关键的新要素。第一是 Bourgain 型投影定理（定理2.1），本文建立了这一结果并对其加以系统运用。第二是对由此产生的障碍进行细致分析：通过汇集定理2.1所给出的局部障碍，我们构造出一个全局障碍。这一阶段的论证令人想起 Ratner 在 [Rat90], 中对半单群商空间的测度分类定理的证明，也可视为与 Margulis 和 Tomanov 在 [MT94]中证明这一测度分类结果时对熵的运用有关。

本文简要概述证明的主要步骤；完整细节将在其他地方发表。

**致谢**。我们感谢王洪就投影定理进行的有益讨论。我们也感谢王志仁与我们的合作，这正是本项工作的起点。

## 2. A Bourgain-type projection theorem

如上所述，本研究的主要组成部分之一是一个投影定理。本节将讨论这一具有独立研究价值的定理。这个投影结果与 Bourgain 的投影

定理 [Bou10]的思路一脉相承。在这一方向上，其他重要贡献还包括 Shmerkin 的论文 [Shm20] 以及 [He19、He20] Weikun He 的相关著作。在这一背景下，另一个有用的参考文献是 [SG20]Salehi-Golsefidy 的论文，其中给出了关于 $\mathbb{Q}_p$的离散化和积结果；本文在阿基米德和非阿基米德情形下均使用了类似和积的结果。

我们所需的投影类结果与 B´enard 和 He 在 [BH24]中的结果性质相似。主要区别在于，我们关注的是 [BH24] 关于投影方向集合足够丰富的假设（例如 [BH24，定理 2.1，第 (ii) 项]）不成立的情形（事实上，在我们的情形中，可能存在阻碍维数增量的因素）。

设$\mathbf{F}$ 是一个特征零局部域。对于每个 $\delta > 0$ 以及任意$v \in \mathbf{F}^{\mathsf{m}}$，令 $B_\delta^{\mathbf{F}^{\mathsf{m}}}(v)$表示以$v$为中心、半径为 $\delta$的球。我们用 $B_\delta^{\mathbf{F}^{\mathsf{m}}}$ 简记$B_\delta^{\mathbf{F}^{\mathsf{m}}}(0)$。

设 $\Phi_0$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F})$的一个 $\mathsf{d}+1$维不可约表示。令$\Phi = \oplus_{i=1}^{\mathsf{m}} \Phi_0$。我们将 $\Phi$ 与 $\Phi_0 \otimes \mathbf{F}^{\mathsf{m}}$等同，而 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F})$ 在 $\mathrm{Mat}_{(\mathsf{d}+1)\times \mathsf{m}}(\mathbf{F})$ 上的作用由左矩阵乘法给出。

令 $\{e_0, \dots, e_{\mathsf{d}}\} \subset \Phi_0$ 表示一组单位纯权向量：$\|e_i\| = 1$ 和 $a_t e_i = e^{(\mathsf{d}-2i)t} e_i$。令 $\Phi_0^{\mathrm{hw}} = \mathbf{F} \cdot e_0$ 表示由 $\Phi_0$ 中的一个最高权向量张成的直线，并设 $\Phi^{\mathrm{hw}} = \oplus_{i=1}^{\mathsf{m}} \Phi_0^{\mathrm{hw}}$。令 $\pi^+ : \Phi \to \Phi^{\mathrm{hw}}$表示平行于 $(\mathbf{F} \cdot e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{F} \cdot e_{\mathsf{d}}) \otimes \mathbf{F}^{\mathsf{m}}$的投影。

在$\mathbf{F}^{\mathsf{m}}$中的一个盒 是指$v + L$，其中

$$L = \{\textstyle\sum r_i u_i : r_i \in B_1^{\mathbf{F}}\}$$

其中 $B_1^{\mathbf{F}} = \{r \in \mathbf{F} : |r| \le 1\}$，且 $\{u_0, \dots, u_k\}$是一个正交集。

在 $\Phi$ 中的一个表示盒 是指$v + V$，满足

$$v \in \Phi \quad \text{and} \quad V = \left\{\textstyle\sum r_{ij} e_i \otimes u_j : 0 \le i \le \mathsf{d}, 0 \le j \le k, r_{ij} \in B_1^{\mathbf{F}}\right\}$$

其中 $\{u_0, \dots, u_k\} \subset \mathbf{F}^{\mathsf{m}}$是一个正交集，且 $B_1^{\mathbf{F}} = \{r \in \mathbf{F} : |r| \le 1\}$。

2.1. **定理**。 设 $0 < \alpha < \mathsf{m}(\mathsf{d}+1)$ 且 $0 < \delta < 1$。令 $\Theta \subset B_1^{\Phi}$满足

$$\mathcal{N}_\delta(\Theta) \ge \delta^{-\alpha}$$

其中 $\mathcal{N}_\delta(\cdot)$ 表示 $\delta$的覆盖数 •。那么对于所有充分小的 $\epsilon$ 和充分大的 $C$，以下至少有一项成立。

*(1)* 存在一个子集 $\mathsf{B} \subset B_1^{\mathbf{F}}$，满足 $|B_1^{\mathbf{F}} \setminus \mathsf{B}| \le \delta^{\epsilon}$，使得

$$\mathcal{N}_\delta(\pi^+(u_r \Theta)) \ge \delta^{-\frac{\alpha}{\mathsf{d}+1} - \epsilon} \quad \textit{for all } r \in \mathsf{B}.$$

（2）存在一个表示盒 $v + V$，满足

$$\delta^{-\alpha + C\epsilon} \ll \mathcal{N}_\delta(V) \ll \delta^{-\alpha - C\epsilon}$$
$$\mathcal{N}_\delta(\Theta \cap \mathsf{Nhd}_{C\delta}(v + V)) \gg \delta^{-\alpha + C\epsilon}$$

该定理的证明基于 Balog–Szemer´édi–Gowers 定理，例如 Bourgain 在 [Bou10，命题（∗∗）], 以及下面的度量和积定理。

2.2. **定理**。设 $\Theta_1$、$\Theta_2 \subset B_1^{\mathbf{F}^{\mathsf{m}}}$ 是两个子集，$0 < \hat{\alpha} < \mathsf{m}$，且 $0 < \delta < 1$。假设

$$\mathcal{N}_\delta(\Theta_i) \geq \delta^{-\hat{\alpha}} \quad for\ i = 1, 2.$$

对于每个 $\epsilon_1 > 0$，令

$$\mathsf{Exc}_{\epsilon_1}(\Theta_1, \Theta_2) = \left\{ r \in B_1^{\mathbf{F}} : \mathcal{N}_\delta(\Theta_1 + r\Theta_2) < \delta^{-\hat{\alpha}-\epsilon_1} \right\}$$

对于所有充分小的 $\epsilon_1$ 和 $\epsilon_2$，以下结论成立。若 $|\mathsf{Exc}_{\epsilon_1}(\Theta_1, \Theta_2)| > \delta^{\epsilon_2}$，则存在盒子 $v_i + L \subset \mathbf{F}^{\mathsf{m}}$，使得以下两条均成立

$$\delta^{-\hat{\alpha}+C\epsilon} \ll \mathcal{N}_\delta(L) \ll \delta^{-\hat{\alpha}-C\epsilon}$$

$$\mathcal{N}_\delta\big(\Theta_i \cap \mathsf{Nhd}_{C\delta}(v_i + L)\big) \gg \delta^{-\hat{\alpha}+C\epsilon} \qquad for\ i = 1, 2$$

其中 $\epsilon = \max(\epsilon_1, \epsilon_2)$，且 $C$ 仅依赖于 $\mathbf{F}$ 和 $\mathsf{m}$。

我们将使用定理 2.1，其中 $\Phi = \mathfrak{sl}_2(\mathbf{F}) \otimes \mathbf{F}^{\mathsf{m}}$。也就是说，当 $\Phi_0$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}$ 的三维不可约表示时。事实上，在这种情况下，我们的论证还将使用以下平凡估计。

令 $\pi^0 : \Phi \to (\mathbf{F}e_0 \oplus \mathbf{F}e_1) \otimes \mathbf{F}^{\mathsf{m}}$ 表示投影到非负权重空间的投影。若 $\mathcal{N}_\delta(\Theta) \geq \delta^{-\alpha}$，则对所有 $r \in B_1^{\mathbf{F}}$，除去一个测度为 $\leq \delta^{\star\epsilon}$的集合，我们有

$$\mathcal{N}_\delta(\pi^0(u_r\Theta)) \geq \delta^{-\frac{2\alpha}{3}+\epsilon}. \tag{2.1}$$

我们强调，(2.1)及其关于 $\pi^+$（指数为$-\alpha/3$）的类似结论，对所有集合均成立，无论是否存在障碍，参见例如 [BH24，§2]。

还值得一提的是，在定理 1.1的证明中，我们实际上需要将定理 2.1 和 2.2 推广到由可能不同的局部域的乘积构成的子环 $\prod_{i=1}^{\mathsf{n}} \mathbf{F}_i$。这些推广采用类似的基本策略证明。

## 3. Proof of Theorem 1.1

本节将更详细地概述定理 1.1的证明。为简化讨论，我们将重点讨论 $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$，$S = \{\infty\}$，并假设 $\mathbf{G}$ 满足

$$G = \mathbf{G}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

我们进一步定义 $H = \{(g,\ g,\ g) : g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\}$。对于所有 $t,\ r \in \mathbb{R}$，令 $a_t$ 和 $u_r$分别表示.....的像

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

分别在 $H$ 中。

令 $\mathfrak{g}=$ 李代数$(G)$ 和 $\mathfrak{h}=$ 李代数$(H)$。则 $\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\otimes\mathbb{R}^3$ 作为 $H$-表示，见 §2。此外，$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{r}$ 其中 $\mathfrak{r}\simeq\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})\otimes\mathbb{R}^2$ 是 $H$-不变的。注意，$\mathfrak{r}$ 不是一个 $H$-不可约表示。这构成了 [LMWY25] 中所研究的情形与当前问题之间的一个关键区别。

3.1. **初始维数与闭合引理**。 如前所述，证明遵循 [LMWY25]中的相同总体步骤。事实上，假设定理 1.1 的第 (2) 部分不成立，我们首先使用一种依赖于周期轨道的马古利斯函数的论证，证明如下结论。对所有$\tau\geq t_1$：$=T-O(R)$ 以及除去一个测度为 $\ll e^{-\star R}$ 的 $r\in[0,1]$集合之外的所有点，

$$d_X(x,a_\tau u_r x_0)\gg e^{-D_0R} \tag{3.1}$$

对所有 $x\in X$ 使得 $\mathrm{vol}(Mx)\leq e^R$ 对某个 $H\leq M\leq G$成立的情形，其中 $D_0$ 取决于 $G$，而隐含常数取决于 $X$，见 [LMWY25，命题 4。4]。

接着，我们利用 $\Gamma$ 的算术性证明：对于任意满足 (3.1) 的 $\{a_{\star R}u_r x_1$ 中的点，$r\in[0,1]\}$ ——可能需要先去掉一个测度为 $e^{-\star R}$ 的例外集——相对于所有中间子群都是分离且处于一般位置的，见 [LMWY25，命题 4。6]。当$H$ 在 $G$ 中有中心化子时，还需要运用 [LMM$^+$24](另见 [ELMW25，命题 7。1])。

我们将这种分离理解为在受控尺度下具有（小的）正维数；更精确的表述见（3.4）。

3.2. **提升维数并处理障碍**。 下一阶段也是最复杂的阶段，其基本策略是证明：除非存在定理1.1第 (2) 部分所述的全局障碍，否则我们可以将维数提升至接近满维。这里的一个基本工具是定理 2.1。

令 $s\geq t_1$。我们首先证明，如果均匀测度与 $\{a_s u_r x_0:r\in[0,1]\}$ 的卷积同测度

$$\nu_\ell(\varphi)=\int_0^1\varphi(a_\ell u_r)\,\mathrm{d}r\qquad\text{for all }\varphi\in C_c(H),$$

对于 $\ell$的适当选取，无法带来渐进的维数提升，那么 $\{a_s u_r x_0:\ r\in[0,1]\}$ 上的均匀测度就会呈现局部但多尺度的障碍。接着，利用 $a_t$ 作用的动力学，我们将这一局部障碍提升为沿稳定叶和不稳定叶的全局障碍。最后，我们利用稳定叶和不稳定叶上的结构，证明测度的显著部分位于某个中间群 $M$ 的局部轨道附近。结合前述闭合引理，这意味着除非 $M=G$，否则定理 1.1 第 (2) 部分成立。

下文中，$\kappa$ 表示一个小参数，$C$ 表示一个大参数，二者均依赖于 $X$；其具体取值可能因行而异。

我们首先精确定义一种单尺度版本的障碍，这类障碍会在我们的分析中出现。

**定义 3.3.** 假设参数 $0<\alpha\leq\dim\mathfrak{g}$、$0<\epsilon'<1$和 $\Upsilon\geq1$固定。设 $\mu$ 是一个支撑在 $X$ 上的测度，并且 $0<\delta\leq\delta_2<$

$\delta_1 \le e^{-\kappa R}$。如果存在一个表示盒 $v + V \subset B^{\mathfrak{g}}_{2\delta_1}$，使得 $\mu$ 在参数 $\alpha$、$\Upsilon$、$\epsilon'$ 下于 $y \in X_{e^{-\kappa R}}$ 处是（$\delta_2, \delta_1$）-聚焦的，我们就称 $\mu$

$$\Upsilon^{-1}(\tfrac{\delta_1}{\delta_2})^{\alpha-\epsilon'} \le \mathcal{N}_{\delta_2}(V) \le \Upsilon(\tfrac{\delta_1}{\delta_2})^{\alpha+\epsilon'}, \text{ and} \tag{3.2a}$$

$$\mu\big(\mathsf{B}^X_{\delta_1}(y) \cap \mathsf{Nhd}_{\mathsf{A}\delta_2}(\exp(v+V).y)\big) \ge \Upsilon^{-1}(\tfrac{\delta_1}{\delta_2})^{-\epsilon'}\mu\big(\mathsf{B}^X_{\delta_1}(y)\big) \tag{3.2b}$$

我们称 $\mu$ 在$\delta_2, \delta_1$)-于 $y$ 精确聚焦，如果除满足3.2a）和（3.2b）外，还满足

$$\mu\big(\mathsf{B}^X_{\delta_2}(z)\big) \ge \Upsilon^{-1}(\tfrac{\delta_1}{\delta_2})^{-\epsilon'}\delta_2^{\alpha}, \quad \text{for all } z \in \mathsf{B}^X_{\delta_1}(y) \cap \operatorname{supp}\mu \tag{3.3}$$

此处及下文中，$\mathsf{B}^X_b(y) = \exp(B^{\mathfrak{g}}_b(0))y$。我们还指出，在定理 $\epsilon'$3.3 中，将选为 $\epsilon$ 定理 2.1 中的一个（较大的）倍数。

对我们的目的而言，一个简单但重要的观察是：如果$\mu$ 在 $y$处（$\delta_2, \delta_1$）-精确聚焦，而且对于所有$\delta_2 \le b \le \delta_1$ 和所有 $z \in \mathsf{B}^X_{\delta_1}(y)$，都有 $\mu(\mathsf{B}^X_b(z))$ $\le \Upsilon b^{\alpha}$，那么 $\alpha$ 必然非常接近 3 的整数倍（在 $G \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$的情形下，为 $\mathsf{d} = 3,6,9$ 中的一个），并且盒 $v + V$ 在 $\mathsf{d}$ 个方向上的大小近似为 $\delta_1$，在互补方向上的大小大致与 $\delta_2$ 相当。

令 $\mu_t = \nu_t * \delta_{x_0}$ 表示所有的 $t$。我们的初始维数具有以下形式：对于所有 $s \ge t_1$，我们可以写作 $\mu_s = \mu_{s,\,0} + \mu_{s,\,1}$ 其中 $\mu_{s,\,1}(X) \le \delta^{\kappa}$，并且对于所有 $y \in X_{\delta^{\kappa}}$，我们有

$$\mu_{s,0}\big(\mathsf{B}^X_b(y)\big) \le b^{\alpha} \quad \text{for all } \delta < b \le \delta' \tag{3.4}$$

其中 $0 < \alpha_{\text{ini}} \le \alpha <$ 维数 $\mathfrak{g}$ 且 $\delta = e^{-\star R}$。

令 $s \ge t_1$。利用定理 2.1，对于每个 $e^{2\ell}\delta \le b \le e^{-2\ell}\delta'$，我们可以将 $\mu_s$ 分解如下

$$\mu_s = \mu^{(b)}_{s,\mathrm{ip}} + \mu^{(b)}_{s,\mathrm{fs}} + \mu^{(b)}_{s,1}, \tag{3.5}$$

其中 $\mu^{(b)}_{s\,1}{}_{,}(X) \ll \delta^{\kappa}$。测度 $\mu^{(b)}_{s}{}_{,\,\mathrm{fs}}$ 支撑在 $(e^{-2\ell}b,\ b)$-聚焦集上，并且除去一个测度为 $\ll \delta^{\kappa}$ 的 $r \in [0,1]$ 的例外集外，

$$a_\ell u_r.(\mu^{(b)}_{s,\mathrm{ip}} + \mu^{(b)}_{s,\mathrm{fs}})(\mathsf{B}^X_{\hat b}(y)) \le \Upsilon \hat b^{\alpha} \quad \text{for all } e^{2\ell}\delta \le \hat b \le \delta', \tag{3.6a}$$

$$a_\ell u_r.\mu^{(b)}_{s,\mathrm{ip}}\big(\mathsf{B}^X_b(y)\big) \le \Upsilon e^{-\epsilon\ell} b^{\alpha} \tag{3.6b}$$

其中 $\Upsilon \ll \delta^{-\star\kappa}$。

索引 ip 和 fs 分别代表改进和聚焦。特别地，(3.6a) 表明维数在所有尺度上保持不变，而 (3.6b)（具体来说，该方程中的 $e^{-\epsilon\ell}$ 因子）表明，对于 $\mu^{(b)}_{s}{}_{,\,\mathrm{ip}}$ 在尺度 $b$ 上，维数有所改进。总之，我们将测度分解为一个可忽略不计的小部分 $\mu^{(b)}_{s\,1}{}_{,}$ 一个 $\mu^{(b)}_{s}{}_{,\,\mathrm{fs}}$ 部分，它按定义 3.3的意义是聚焦的；以及一个 $\mu^{(b)}_{s}{}_{,\,\mathrm{ip}}$ 部分，其维数在某个尺度上有所改进。( $\epsilon$在3.6b)中的常数足够小，因此定理 2.1 对所有 $\epsilon' \le \epsilon$均成立。

ˆ 粗略地说， $a_\ell u_r.\mu_s$ 在尺度 $b$ 上的维数估计可按如下方式ˆ 得出：若 $u_r.\mu_s$ 在尺度 $b$上的维数为 $\alpha_1$ ，且在尺度 $e^{-2\ell}$ˆ$b$上的维数为 $\alpha_2$ ，则 $a_\ell u_r.\mu_s$在尺度 ˆ$b$ 上的维数至少为 $\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2$。

现在假设对于某些 $s\geq t_1$ 和 $0<\alpha_{\text{ini}}\leq\alpha<\dim\mathfrak{g}$，测度 $\mu_s$有如下分解 $\mu_s=\mu_{s,\ 0}+\mu_{s,\ 1}$ 其中 $\mu_{s,\ 1}(X)\ \leq\delta^\kappa$，并且

$$\mu_{s,0}\big(\mathsf{B}_b^X(y)\big)\leq\Upsilon\hat{b}^\alpha\quad\text{ for all }\delta\leq\hat{b}\leq\delta'\text{ and all }y\in X_{\delta^\kappa}$$

令 $s'\sim\log(1/\delta)$，并假设对于某个 $e^{6s'}\delta\leq b\leq\delta'$

$$\mu_t\big(\{y:\mu_t(\mathsf{B}_b^X(y))\geq\Upsilon b^{\alpha+\hat{\epsilon}}\}\big)>e^{-\kappa R}\tag{3.7}$$

其中 $t=s+3s'$ 且 ˆ$\epsilon$ 是 $\epsilon$ 在 (3.6b) 中的一个小倍数。

通过 $e^2$定义 $\ell^{\ell}b=\delta^\kappa$，并且对于 $1\leq i\leq 4$，令 $b_i=e^{2(1-i)\ell}b$。注意 $b_1=b$，并且对于 $2\leq i\leq 4$， $b_i$ 与 $b^i$ 相当，误差至多为 $\delta^{-\star\kappa}$ 量级的因子。对于 $j=1$、2、3，我们将研究

$$\mu_{t-j\ell}\quad\text{at scales}\quad\{b_1,\dots,b_{j+1}\}.$$

对测度$\mu_{t-j\ell}$应用如（3.5）中的 ip-fs-可忽略分解，我们证明，如果满足（$\mu_{t-j\ell}$3.7），则存在集合 $\mathcal{F}\subset X_{\delta^\kappa}$ ，满足$\mu_{t-3\ell}$（$\mathcal{F}$） $\gg\delta^{\star\kappa}$，从而 $\mu_{t-3\ell}$同时在 $b_4$、 $b_3$）和（$b_2$、 $b_1$）尺度上对 $\mathcal{F}$精确聚焦。由此我们得出

（A-1）对于除去一个测度为 $\ll\delta^{\star\kappa}$ 的集合之外的所有 $r\in[0,1]$，测度 $\mu_{t-2\ell}$ 在（ $b_2$、 $b_1$）尺度上对 $a_\ell u_r.\mathcal{F}$ 精确聚焦；（ A-2 ）类似地，对于除去一个测度为 $\ll\delta^{\star\kappa}$ 的集合之外的所有 $r\in[0,1]$ ，测度 $\mu_{t-\ell}$ 在（$b_2$、 $b_1$）尺度上对 $a_{2\ell}u_r\mathcal{F}$ 精确聚焦——我们利用 $\mu_{t-3\ell}$ 在（$b_4$、 $b_3$）尺度上对 $\mathcal{F}$ 精确聚焦这一事实，证明 $\mu_{t-\ell}$ 在 $a_{2\ell}u_r.\mathcal{F}$ 上于尺度 $b_2$ 具有精确维数。

利用(A-1) 和(A-2) ，我们将通过下述论证得出测度 $\mu_{t-2\ell}$ 具有全局障碍，正如在§3.2 开头所讨论的那样。

对于每个 $y\in\mathcal{F}$，令 $V_y$ 表示由定义 3.3 在测度 $\mu_{t-3\ell}$、点 $y$ 和尺度（$b_2,b_1$）下给出的盒中对应于长边（即大小约为 $b_1$ 的边）的线性子空间。再令 $r\in[0,1]$ 位于上文 (A-1) 中的例外集之外。考察稳定叶的一段（大小为 $\delta^\kappa$ ）在点 $y$ 处经过的 $b_1$-邻域内所有 $y'\in\mathcal{F}$ 对应的 $a_\ell u_r V_{y'}$ 的方向，我们得到如下结论：存在一个集合 $\mathcal{F}'\subset a_\ell u_r.\mathcal{F}$，使得 $\mu_{t-2\ell}(\mathcal{F}')\gg\delta^{\star\kappa}$，且 $\mu_{t-2\ell}$ 在 $\mathcal{F}'$ 上是（$b_2,b_1$）精确聚焦的。此外，对于每个 $z\in\mathcal{F}'$，都存在一个子空间

$$L_z^+\subset\mathbb{R}^3\simeq G^+$$

（即 $V_{y'}\cap\mathfrak{g}^+$ 其中 $a_\ell u_r y'\in\mathsf{B}_{b_1}^X(z)$）满足以下条件。 $\mathcal{F}'$ 与经过 $z$ 、大小为 $\delta^\kappa$的一段不稳定叶 的 $b_1$-邻域的交集，包含于 $E_z^+.z$的 $\delta^{-\star\kappa}b_1$-邻域内，其中 $E_z^+=B_{\delta^\kappa}^{L_z^+}$。此外，该交集的 $b_1$-覆盖数为 $\gg\delta^{\star\kappa}b_1^{-\alpha/3}$ 。

更仔细的分析实际上表明， $\mathcal{F}'$ 与围绕这样一段大小为 $b_1$ 、沿 $\mathfrak{g}^0$方向长度为 $\delta^\kappa$ 且沿 $\mathfrak{g}^-$方向长度为$b_2$ 的不稳定叶线段的管状邻域（一个“$b_1$, $b_2$-管状邻域”）的交集，在 $\mathfrak{g}^+$， $\mathfrak{g}^0$， $\mathfrak{g}^-$ 各方向上的距离分别至多为 $\exp(B_{\delta^\kappa}^{\mathfrak{g}^+\oplus\mathfrak{g}^0}\cap V_{y'}).z$, $y'$，如上所述。

类似地，对于 $\hat{}y \in a_{2\ell}u_r.\mathcal{F}$，令 $V_{\hat{y}}$ 为将定义 3.3 应用于 $\mu_{t-\ell}$、点 $\hat{}y$ 以及尺度 $(b_2, b_1)$ 所得到的子空间。在 $\hat{}y' \in a_{2\ell}u_r.\mathcal{F}$ 的 $b_1$-邻域内，考察经过 $\hat{}y$、大小为 $\delta^\kappa$ 的一段不稳定叶上的 $a_{-\ell}u_r.V_{\hat{y}'}$，可得如下结论。必要时对 $\mathcal{F}'$ 进行裁剪，则对每个 $z\in\mathcal{F}'$，都存在一个子空间 $L_z^-\subset\mathbb{R}^3\simeq G^-$，使得 $\dim L_z^- = \dim L_z^+$，并满足以下性质：对于任意 $z\in\mathcal{F}'$， $\mathcal{F}'$ 与经过该点、大小为 $\delta^\kappa$ 的一段稳定叶的 $b_1$-邻域的交集，包含于 $E_z^-.z$ 的 $\delta^{-\star\kappa}b_1$-邻域内，其中 $E_z^- = B_{\delta^\kappa}^{L_z^-}$。此外，该交集的 $b_1$-覆盖数为 $\gg \delta^{\star\kappa}b_1^{-\alpha/3}$；同样，当与上述的 $b_1, b_2$-管相交时，也可以得到更精确的信息；不过在当前情形下， $\mathfrak{g}^+$ 和 $\mathfrak{g}^-$ 的作用互换了。

接下来我们证明，除去大小为 $\delta^{-\star\kappa}b_1$的误差，子空间 $L_z^+$和 $L_z^-$分别是同一个 $H$-不变子空间的不稳定子空间和稳定子空间。为此，令 $z\in\mathcal{F}'$，并取 $y\in\mathcal{F}$ 使得 $a_\ell u_r y\in \mathsf{B}_{b_1}^X(z)$。令 $V_y$ 如上所述；类似地，令 $V_z$ 表示将定义 3.3 应用于测度 $\mu_{t-2\ell}$、点 $z$以及尺度（$b_2$， $b_1$）后得到的子空间。通过比较 $V_z$ 和 $V_y$的中心方向，并利用 $L_z^+$与 $V_y$的不稳定方向之间的关系，我们得出 $L_z^+$位于 $V_z$的 $\delta^{-\star\kappa}b_1$ 邻域内。类似地，对于$\hat{}y\in a_{2\ell}u_r.\mathcal{F}$，比较 $V_z$ 和 $V_{\hat{y}}$ 的中心方向，并利用 $V_z$ 的稳定方向与 $L_z^-$之间的关系，可得 $L_z^-$位于$V_z$的 $\delta^{-\star\kappa}b_1$ 邻域内。此外，上述讨论还表明 $\alpha$ 几乎等于 $\dim V_z$，参见定义 3.3 后的注释。

现在注意到

$$\mathcal{N}_{b_1}\left(E_z^-E_z^+E_z^-E_z^+\right)\gg\delta^{\star\kappa}b_1^{-\mathsf{k}}$$

其中，$\mathsf{k}\geq\hat{}\kappa+\dim V_z$，除非 $V_z$ 与某个 $H\leq M_z\leq G$ 的李代数 $\mathrm{Lie}(M_z)$ 的距离小于 $b_1^{1-\star\hat{\kappa}}$，其中 $\hat{}\kappa$ 很小（其大小仅取决于 $G$）。

另一方面，前面对 $\mathcal{F}'$ 沿稳定方向和不稳定方向的结构的讨论表明， $b_1$-覆盖数

$$\mathcal{F}'\cap\mathsf{Nhd}_{\delta^{-\star\kappa}b_1}\left(E_z^-E_z^+E_z^-E_z^+.z\right)$$

为 $\gg\delta^{\star\kappa}b_1^{-\mathsf{k}}$。由于 $\mathcal{N}_{b_1}(\mathcal{F}')\ll b_1^{-\alpha}$，且 $\alpha$ 几乎等于 $\dim V_z$，通过适当选择 $\hat{}\kappa$，我们得出结论（如有必要，修剪 $\mathcal{F}'$ 后），对所有 $z\in\mathcal{F}'$，都有

$$V_z\subset\mathsf{Nhd}_{b_1^{1/2}}\left(\mathrm{Lie}(M_z)\right)$$

对于一个子群 $H\leq M_z\leq G$。

回忆一下， $M_z^+M_z^-M_z^+$是 $M_z$中的扎里斯基开集且稠密。再次利用上述 $\mathcal{F}'$ 沿稳定方向和不稳定方向的结构，我们得出

$b_1$的覆盖数为

$$\mathcal{F}' \cap \mathsf{Nhd}_{Cb_1^{1/2}}\big(B_{\delta^\kappa}^{M_z^+} B_{\delta^\kappa}^{M_z^-} B_{\delta^\kappa}^{M_z^+}.z\big)$$

是 $\gg \delta^{\star\kappa} b_1^{-\alpha}$。因此，存在某个 $z \in \mathcal{F}'$ 使得

$$\mu_{t-2\ell}\big(\mathsf{Nhd}_{Cb_1^{1/2}}(B_{\delta^\kappa}^{M_z}.z)\big) \gg \delta^{\star\kappa}.$$

鉴于§3.1中讨论的闭合引理，这意味着定理1.1 中的 (2) 部分成立，或者 $M_z = G$。

3.4. **从高维到等分布**。 上一步推得 $\mu_{T-cR}$ 在 $\mathfrak{g}$ 尺度下的维数接近 dim $e^{-10cR} \leq b \leq \delta'$，除非定理1.1 中的 (2) 部分成立。因此，假设后者不成立，在最后阶段我们利用 $a_t$ 相对于$m_X$ 的指数混合性，得出 $\mu_T$ 相对于 $m_X$ 等分布。

这一步采用与 [LMWY25， §9]中类似的论证来完成。

## References


[BH24] Timoth´ee B´enard 和 Weikun He。某些齐性空间上随机游走的多重切片与有效等分布，2024 3, 4 。Bou Jean Bourgain。离散化和积定理[10] 与投影定理。*Anal. Math.* 112 193 236, 2010 3, 4 *J.* ，：–。[ELMW25] Manfred Einsiedler、Elon Lindenstrauss、Amir Mohammadi 和 Andreas Wieser。半单阿代尔周期的有效等分布与二次型的表示，2025 5 。He Weikun He。矩阵代数中的离散化和积估计。*Math.* 139 2 637 676, 2019 [19] *J. Anal.* ，（）：–。3 [20] He Weikun He。离散化集合的正交投影。*Journal of Fractal Geom* 3 271 317, 2020 3 ，（）：–。[LMM+24] Elon Lindenstrauss、Gregory Margulis、Amir Mohammadi、Nimish Shah 和 Andreas Wieser。幺幂流的有效闭合引理，2024 5 。LMWY Elon Lindenstrauss、Amir Mohammadi、王志仁和 Lei Yang。秩 2 齐性空间中的有效等分布与二次型的取值，[25] 2025 2, 5, 9 。MT G. A. Margulis 和 G. M. Tomanov。局部域上幺幂群在齐性空间上的作用的不变测度。*Invent. Math.*，116(1- 3 347 392, 1994 2 )：–。Rat Marina Ratner。半单群幺幂子群的测度刚性。[94] *Acta Math.* 165 3 4 229 309, 1990 2 ，（-）：–。SG Alireza Salehi Golsefidy。和积现象：[90] *Math.* 142 2 349 419, 2020 3 $\mathfrak{p}$ *J. Anal.* -进情形。，（）：–。[20] Shm Pablo Shmerkin。Bourgain投影定理的一个非线性版本。*Journal of the European Mathematical Society* 2020 *Jour-*，。3 [10] Ven Akshay Venkatesh。稀疏等分布问题、周期界与次凸性。 *Ann. of Math. (2)*, 172(2)：989–1094，2010。2

(E.L.) Institute for Advanced Study, 1 Einstein Drive, Princeton, NJ 08540, USA*and*The Einstein Institute of Mathematics, Edmund J. Safra Campus, Givat Ram, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem 91904, Israel*Email address*: elonl@ias.edu

A.M.: Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA94720*Email address*: amirmo@math.berkeley.edu

L.Y.: Department of Mathematics, National University of Singapore, 119076, Singapore*Email address*: lei.yang@nus.edu.sg