arXiv:2601.10026v1 [math.LO] 15 Jan 2026

通往经典简单类型论、Ketonen 型 Gentzen 与表列系统的新序曲*

Tadayoshi Miwa †1 和 Takao Inoué ‡2

[1]东京大学图书馆，东京，日本[2]大和大学信息学部，大阪，日本§

2026年1月15日

摘要

本文介绍一种 Ketonen 型 Gentzen 风格的经典简单类型论 **KCT**。此外，还介绍了与**KCT** 对应的表系统**KCT** 。本文进一步介绍了推理保持型 Gentzen 系统$\mathbf{KCT_h}$ （等价于**KCT**）和表系统$\mathbf{KCTT_h}$（等价于**KCTT**）。本文介绍了$\mathbf{KCTT_h}$的 Hintikka 序列概念，并证明了$\mathbf{KCTT_h}$的完备性定理和 Takahashi-Prawitz 定理。

MSC2020：03B38，03F03

关键词：Ketonen 型古典简单类型论，Ketonen 型 Gentzen 系统，Ketonen 型表方法，推理保持系统，欣蒂卡序列，部分赋值，Prawitz 对部分赋值的扩展，完备性定理，Takahashi-Prawitz 定理。

目录

1 引言 **3**

*arXiv 版本，第一版，v.1.0

†miwa.tadayoshi@mail.u-tokyo.ac.jp

‡通讯作者：

takaoapple@gmail.com§inoue.takao@yamato-u.ac.jp

1.1 一般引言：提出的系统与结果 . . . 3 1.2 为什么选择类型论？——罗素悖论、句法分层与基础.4

2 我们形式系统的准备工作 5
2.1 形式语言.5 2.2 子项链.8

3 推理的基本预备知识 9 4 Ketonen 型 Gentzen 经典简单类型论 KCT 11 5 经典简单类型论的 Ketonen 型表列系统 KCTT 12 6 Ketonen 型保推理 Gentzen 经典简单类型论 KCT
$_h$ 137 经典简单类型论的 Ketonen 型保推理语义树系统 KCTT$_h$ 14 8 序列的约简链与部分赋值 15

8.1 可约的、临界的、本原的序列.15 8.2 相继式约简链的定义.16 8.3 公式的部分赋值.17 8.4 序列的部分赋值.18

9 KCTT 的主要引理$_h$ 18

10 KCTT 的欣蒂卡序列$_h$ 21

11 KCTT 的可导序列与允许的推理$_h$ 22

12 KCTT 的语义$_h$ 23
12.1 集合系统上的全估值.23 12.2 可靠性定理.24 12.3 扩展部分赋值.25

13 KCTT 的完备性定理与切规则$_h$ 28

14 备注 29

1 引言

1.1 总体介绍：所提出的系统与结果

本文结构如下。在这篇概述性引言之后，我们首先沿着历史脉络，并结合技术细节，说明简单类型论的重要性，见 §1.2。§2 和 §3 为我们的系统提供形式化预备知识。§4 中，我们引入一种 Ketonen 型 Gentzen 风格古典简单类型论 $\mathbf{KCT}$ 。此外，§5 中还引入了与$\mathbf{KCT}$ 对应的表 tableau系统 $\mathbf{KCTT}$ 。§6 中进一步引入推理保持型 Gentzen 系统 $\mathbf{KCT_h}$（等价于 $\mathbf{KCT}$），§7 中则引入表 tableau系统 $\mathbf{KCTT_h}$ （等价于$\mathbf{KCTT}$）。§8 中给出了若干定义，用于证明我们的主要定理，其中包括公式和序列的约简链与部分赋值。§9 中列出了一些引理。从 §9 开始直到最后，我们的研究重点转向表 tableau系统 $\mathbf{KCTT_h}$。§10 中，我们为$\mathbf{KCTT_h}$ 引入欣蒂卡序列的概念。我们列举了$\mathbf{KCTT_h}$的一些可导序列和允许的推理。§12 中介绍语义。§13 中证明了$\mathbf{KCTT_h}$ 的完备性定理和 Takahashi-Prawitz 定理（参见 Takahashi [37] 和 Prawitz [27]）。最后，我们以一则简短的评论结束本文，也就是这篇关于简单类型论的新序曲。

我们遵循 Schütte 关于 [34] $\mathbf{KCT}$、$\mathbf{KCTT}$、$\mathbf{KCT_h}$ 和 $\mathbf{KCTT_h}$ 的基本符号和概念。

主要贡献。 本文的主要贡献如下：

- 我们引入一种 Ketonen 型 Gentzen 风格的简单类型表系统，并将其表述为推理保持系统 $\mathbf{KCTT_h}$，而不只是将其视为一种判定过程。

- 我们定义并系统地使用欣蒂卡序列 （§10）作为结构性对象，在表列规则与序列式推理之间发挥中介作用。

- 我们证明，所提出的系统为经典简单类型论提供了统一的证明论框架，从而阐明了表 tableau演算与Gentzen系统之间的关系。

- 我们证明，Schütte 的证明论 [34, 第四章] 中对简单类型论的呈现，可以自然地理解为一种 Ketonen 型表 tableau系统，并明确阐述了这种对应关系。

借助 Ketonen 类型框架，我们通过保持推理的切消除，建立了所提出系统的完备性结果，

并引入欣蒂卡序列的概念。本文也可视为使用 Ketonen 表 tableau 方法对 Schütte 证明论方法的重构。

1.2 为什么选择类型论？——罗素悖论、句法分层与基础

类型论的提出，是为了以原则化的方式应对朴素集合论和命题推理中由不受限制的概括原则引发的悖论，其中最著名的莫过于**罗素悖论** [32]。考虑如下概括：

$$R = \{\, x \mid x \notin x \,\}.$$

如果 $R \in R$，那么根据定义有 $R \notin R$；反过来，如果 $R \notin R$，那么 $R \in R$，从而导致矛盾。

类型论的核心思想是将**表达式分层为不同级别（类型）**，使不合法的自应用形式因类型错误而不合语法。为了在基础层面恢复一致性，罗素引入了**分层**概念，其依据是恶性循环原则，以确保谓词的意义范围受到限制 [32]。在《数学原理》 [45], 的传统中发展起来的分支型类型论，将逻辑实体安排在由类型和阶构成的层级中；函数（或谓词）只能接受适当的低类型、低阶参数。这种分层施加了严格的句法规范，将诸如 $x(x)$ 或集合论形式下的 $x \in x$ 等表达式视为不合语法，而不仅仅是假，从结构上杜绝了自指悖论的构造。

Church 的**简单类型论** [4] 将这种分层思想提炼为一种精简且在技术上易于处理的框架，其基础是函数类型。在 Church 的表述中——本文所研究系统的类型化逻辑背景正是由此提供的——项被赋予特定类型，逻辑运算则相对于这一类型层级来定义。因此，函数类型的项只能应用于具有适当输入类型的参数，而量化也明确地以类型为索引。由此，系统在句法层面上确保了一致性，也就是说，语法构成规则阻止了构造罗素悖论所必需的非良基构造。

本文研究的演算系统，包括根岑式系统及其 Ketonen 型变体，都是在这种类型化语言之上构建的。因此，我们的证明论结果，如完备性和切消去，都是在这样一个框架内确立的：在该框架中，良构性层面排除了罗素式自指

。这样一来，相继式演算和推理保持系统在操作层面的优势，便与最初促成类型论规范的基础性动机相契合。

2 我们形式系统的准备工作

2.1 形式语言

我们主要采用 Schütte 关于简单类型论的术语和定义（参见 Schütte [34]）。

按照惯例，在 [34], 中，我们将一个 n-**位名义形式** ($n \geq 1$) 定义为一个有限符号串，其中除形式语言的原始符号（句子变量、联结词和圆括号）外，**名义符号** $*_1, \ldots, *_n$ 各出现一次。如果 $\mathscr{E}$ 是一个 n-简单名义形式（$n \geq 1$），且 $r_1, \ldots, r_n$ 是非空有限符号串，那么 $\mathscr{E}[r_1, \ldots, r_n]$ 表示将 $\mathscr{E}$ 中的名义符号 $*_1, \ldots, *_n$ 分别替换为 $r_1, \ldots, r_n$ 后所得的结果。

定义 2.1 类型的归纳定义如下：*2.1.1.* 0 和1 是类型。*2.1.2.* 如果 $\tau_1, \ldots, \tau_n (n \geq 1)$ 是类型，那么 $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ 也是一个类型。

我们使用 σ、σ_i、τ_i 作为类型的**句法符号**，并使用 τ 表示类型的序列τ_1、.....、$\tau_n (n \geq 1)$。

定义 2.2 本原符号如下：*2.2.1* 每种类型都有可数无穷多个自由变量和约束变量。*2.2.2* 一个非空的对象符号集合。*2.2.3* 某些具有指定参数数量 ≥ 1 的函数字母。*2.2.4* 符号 $\supset$、$\forall$ 和 λ。*2.2.5* 圆括号和逗号。

对于变量的句法符号，我们使用

- a^σ、$a_i^{\tau_i}$表示类型 σ、τ_i的自由变量，
- x^σ、$x_i^{\tau_i}$表示类型 σ、τ_i的约束变量，
- a^τ 表示自由变量的序列 $a_1^{\tau_1} \ldots a_n^{\tau_n}$（$n \geq 1$），
- x^τ 对于两两不同的受约束变量序列 $x_1^{\tau_1} \ldots x_n^{\tau_n} (n \geq 1)$。

定义 2.3 系统中项及其类型的归纳定义如下:

2.3.1 每个类型为 σ 的自由变量都是类型为 σ 的项 。

2.3.2 每个对象符号都是类型为 *0* 的项。

2.3.3 如果 φ 是一个 n 元函数字母$(n \geq 1)$，并且 t_1^0、.. . 、 t_n^0 是类型为 *0* 的项，那么 $\varphi(t_1^0$、.. . 、 $t_n^0)$ 是类型为0的项。

2.3.4 如果 $t_1^{\tau_1}$、.. . 、 $t_n^{\tau_n}(n \geq 1)$ 和 $t^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}{}_0$ 是类型分别为 τ_1、.. . 、 τ_n 和 $(\tau_1$、.. . 、 $\tau_n)$ 的项，
那么 $t_0^{(\tau_1,\ldots\ \tau_n)}(t_1^{\tau_1}$ .. . $t_n^{\tau_n})$ 是类型为 *1* 的项。
(为简洁起见，我们有时将其记作 $t_0^{(\tau)}(t^\tau)$，其中 $\tau = \tau_1, \ldots, \tau_n$ 和 $t^\tau = (t_1^{\tau_1}, \ldots, t_n^{\tau_n})$。)

2.3.5 如果 A 和 B 是类型 *1* 的项，那么 $(A \supset B)$ 也是类型 *1* 的项。

2.3.6 如果 $\mathscr{F}[a^\sigma]$ 是类型 *1* 的项，且 x^σ 是一个在名义形式 $\mathscr{F}$ 中不出现的约束变量，那么 $\forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma]$ 也是类型 *1* 的项。

2.3.7 如果 $\mathscr{A}[a_1^{\tau_1}, \ldots, a_n^{\tau_n}](n \geq 1)$ 是类型 *1* 的项，且 $x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}$ 是一组两两不同、且不出现在 n-位置名义形式 $\mathscr{A}$ 中的约束变量，那么 $\lambda x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n} \mathscr{A}[x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}]$ 是类型为 $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ 的项。(为简洁起见，我们有时将其记作 $\lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau]$，其中 $x^\tau = x_1^{\tau_1}$, .. . , $x_n^{\tau_n}$。)

定义 2.4 类型为 1 的项称为公式。类型为 1 的自由变量，以及形如 $a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}{}_0(t_1^{\tau_1}, \ldots, t_n^{\tau_n})$ 的公式，其中 $a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}{}_0$ 是自由变量，称为原子公式。

其余部分的**句法符号**采用

- t^σ, $t_i^{\tau_i}$表示类型为 σ, τ_i的项,
- t^τ表示项的序列 $t_1^{\tau_1}, \ldots, t_n^{\tau_n}(n \geq 1)$,
- A, A_i, B, B_i, C, C_i, F, F_i, G, G_i 表示公式,
- P, P_i 表示原子公式,
- $\mathscr{F}$、 $\mathscr{F}_i$ 对于一元名词形式，使得 $\forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma]$、 $\forall x^\sigma \mathscr{F}_i[x^\sigma]$是公式,
- $\mathscr{A}$、 $\mathscr{A}_i$对于 n元名词形式（$n \geq 1$），使得 $\lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau]$、 $\lambda x^\tau \mathscr{A}_i[x^\tau]$是类型（$\tau$）的项，其中 $\tau = \tau_1$、.....、 τ_n。

我们将仅在其中出现的约束变量的选择上有所不同的项视为相同。当我们写作 $\mathscr{F}[t^\sigma]$ 或 $\mathscr{A}[t^\tau]$ 时，我们假定其中的约束

变量分别出现在 t^σ 和 t^τ 中，并且所选变量不会同时出现在名义形式 $\mathscr{F}$ 或 $\mathscr{A}$ 中。

定义 2.5 我们设定 $\bot := \forall x^1 x^1$。对于任意公式 A、B，我们设定

2.5.1. $\neg A :=A \supset \bot$，*2.5.2.* $A \vee B :=\neg A \supset B$，*2.5.3.* $A \wedge B :=\neg (A \supset \neg B)$，*2.5.4.* $\exists x A :=\neg \forall x \neg A$.

定义 2.6 我们将序列 定义为 $\Gamma \to \Delta$，其中 Γ、Δ 是公式的序列，而 Γ、Δ 可以是空序列。设 $\Gamma \to \Delta$ 为一个序列，其中Γ、Δ 是公式的序列。 Γ 中包含的每个公式都称为**A-公式**，而 Δ 中包含的每个公式都称为**S-公式**。

序列的直观含义如下。IM1. $A_1, A_2, \ldots,$ $A_n \to B_1, B_2, \ldots, B_m (n \geq 1, m \geq 1)$ 是 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \supset (B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_m)$。IM2. $A_1, A_2, \ldots, A_n \to (n \geq 1)$ 是$\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n)$。IM3. $\to B_1, B_2, \ldots, B_m$ $(m \geq 1)$ 是$B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_m$.IM4. $\to$是 $\bot$。

定义 2.7 我们把序列 S 的对应公式 称为公式 F_S，它是按照 *IM1-IM4* 对 S 进行解释后的直观含义。

遵循 Schütte [34], 的做法，我们将仅在其中出现的约束变量选择不同的项视为相同。当我们写 $\mathscr{F}[t^\sigma]$ 或 $\mathscr{A}[t^\tau]$时，假定 t^σ 和 t^τ 中出现的约束变量经过选择后，也不会出现在名义形式 $\mathscr{F}$ 或 $\mathscr{A}$中。

命题 2.1

1. 若 $\forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma]$ 是一个公式，且 t^σ 是类型为 σ的项，则 $\mathscr{F}[t^\sigma]$ 是一个公式。

2. 如果 $\lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau]$ 是类型为 $(\tau) = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ 的项，并且 $t^\tau = t_1^{\tau_1}, \ldots, t_n^{\tau_n}$ 是类型分别为 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ 的项序列，那么 $\mathscr{A}[t^\tau]$ 是一个公式。

2.2 子项链

在本小节中，为了进行归纳证明，我们需要为公式赋予一个秩。我们借助子项链来定义这个秩。

定义 2.8 我们称类型为 *0* 的项和自由变量为素项。

定义 2.9 我们如下定义一个项的子项：

2.9.1 素项没有子项。

2.9.2 原子公式 $a^{(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,0}(t_1^{\tau_1},\ldots,t_n^{\tau_n})$ 以 $t_1^{\tau_1},\ldots,t_n^{\tau_n}$ 为子项。

2.9.3 公式 $\lambda x^{\tau}\mathscr{A}[x^{\tau}](t^{\tau})$ 以 $\mathscr{A}[t^{\tau}]$ 为子项。

2.9.4 公式$(A \supset B)$ 以 A 和 B 为子项。

2.9.5 公式 $\forall x^{\sigma}\mathscr{F}[x^{\sigma}]$ 以每个公式 $\mathscr{F}[a^{\sigma}]$（对于每个类型为 σ 的自由变量 a^{σ}）为子项。

2.9.6 项 $\lambda x^{\tau}\mathscr{A}[x^{\tau}]$ 以每个公式 $\mathscr{A}[a^{\tau}]$（对于每个由类型为 τ_1、$\ldots$、τ_n 的自由变量组成的序列 $a^{\tau} = a_1^{\tau_1},\ldots,a_n^{\tau_n}$）为子项。

定义 2.10 项 t^{σ} 的子项链 是指如下构成的项序列

$$t_0^{\tau_0}, t_1^{\tau_1}, t_2^{\tau_2}, \ldots$$

由以下方式构成的项：

2.10.1 子项链的初始项 $t_0^{\tau_0}$是项 t^{σ}。

2.10.2 如果子项链中的项 $t_i^{\tau_i}$ 不是素项，那么该子项链包含 $t_i^{\tau_i}$ 的一个子项 $t_{i+1}^{\tau_{i+1}}$，且它是 $t_i^{\tau_i}$ 的直接后继。

2.10.3 如果子项链中的项 $t_i^{\tau_i}$ 是素项，那么它就是子项链中的最后一项。此时我们称该子项链的长度为 i。

定义 2.11 如果项 t^{σ} 的所有子项链都有一个最大有限长度 m，则称该项为正则项。我们将此数 m 定义为正则项 t^{σ} 的秩 Rt^{σ} 。

以下设 ν 是一个一元名词形式，且 $\nu[a^{\sigma}]$ 是项。

引理 2.1 ([34])

如果 $\nu[a_1^{\sigma}]$ 是正则项，那么 $\nu[a_2^{\sigma}]$ 是一个与 $\nu[a_1^{\sigma}]$ 秩相同的正则项。

引理 2.2 ([34])如果项 t^{σ} 的每个子项都是正则的，那么 t^{σ} 就是正则的。

定义 2.12 我们将类型 σ 的高度 定义为其中出现的圆括号的数量 σ。

引理 2.3 ([34])
以下条件足以保证项 $\nu[t^\sigma]$ 是正则的：(1) $\nu[a^\sigma]$ 和 t^σ 是正则项。(2) 对于每个高度小于 σ 的类型 τ_i，都有：若$\mathscr{W}[a_i^{\tau_i}]$ 和$t_i^{\tau_i}$是正则项，则$\mathscr{W}[t_i^{\tau_i}]$ 是正则项。(3) 对于每个秩小于 $s[a^\sigma]$的正则项 $\nu_i[\alpha^\sigma]$， $\nu_i[t^\sigma]$ 是正则项。

引理 2.4 ([34]) 若 $\nu[a^\sigma]$ 和 t^σ 是正则项，则 $\nu[t^\sigma]$ 也是正则项。

定义 2.13 我们将项的**长度** 定义为其中出现的原始符号的数量 t^σ

定理 2.1 ([34]) 每个项 t^σ 都是正则的。

推论 2.1 ([34]) 每个公式都有可计算的有限秩。

定理 2.2 ([34])
以下关于公式的秩的结论成立：(1) $RA < R(A \supset B)$ 和 $RB < R(A \supset B)$.(2) $R\mathscr{F}[a^\sigma] < R\forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma]$.(3) $R\mathscr{A}[t^\tau] < R\lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau)$.

3 关于推理的基本预备知识

(1) 基本推理 以下形式的某些构型

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B$$

其中， $A_1, \ldots, A_n, B$是公式，通常将 $n = 1$ 或 $n = 2$定义为**基本推理**。符号 $\vdash$左侧的公式称为给定基本推理的**前提**。符号 $\vdash$ 右侧的公式称为给定基本推理的**结论** 。

(2) 可推导性 形式系统中公式的可推导性由公理和基本推理根据以下归纳定义确定。

1. 每个公理都是可导出的。

2. 如果某个基本推理的每个前提都是可导出的，那么该推理的结论也是可导出的。

根据上述 1 和 2，对公式 A 的可推导性所作的证明（演示）称为 A 的**推导** 。

定义 3.1（可推导性阶数）有时我们需要更具体地说明一个公式的可推导性；因此，我们为该公式指定一个自然数，作为其阶，具体采用以下归纳定义：

DO 1. 每个公理的阶均为0，即均可导出。

DO 2. 如果某个基本推理的前提 A_1、...、 $A_n\,(n \geq 1)$ 分别以阶数 m_1、...、 m_n 可导出，那么该推理的结论可导出的阶数为

$$\max(m_1, \ldots, m_n) + 1$$

一个公式可能以许多不同的阶可导出。然而，既然一个公式是可导出的，我们总可以假定它是以某个固定的阶可导出的。

(3) 可约性 可以说，约简是可推导性的逆过程。给定一个待证公式 A ， A 通过应用约化规则约简为公理。

在§7中，我们将介绍这样一个表 tableau系统，作为我们的主要方法。在§8中，我们确定可约序列和约简链的概念。在本文中，我们主要的理论兴趣在于可约性。

（4）转承符号 $\vdash$ 在本文中的含义（注意）。全文中，我们使用形式 $\vdash_{\mathsf{X}}$ 作为关于序列的可导关系（在 Gentzen 系统或表中），而不是主要关于公式的可导关系。具体而言，对于任意系统 X $\in$\{KCT、KCT$_h$、KCTT、KCTT$_h$\} 以及任意序列 S，我们记 $\vdash_{\mathsf{X}} S$，表示存在一个有限推导（视情况而定，为证明图或闭语义树），其根为 S。当说某个单一公式 A在 X 中“可证明”时，这是关系 $\vdash_{\mathsf{X}} A$的简写，即在序列形式中为 $\vdash_{\mathsf{X}} \to A$ 。如果上下文明确，也可以省略 X 。

（6）允许的推理若构型 A_1、.....、 $A_n \vdash B$ 中的 A_1、.....、 A_n和 B 是公式（或序列）（$n \geq 1$），则称其为允许的推理，如果满足以下条件：若 A_1、.....、 A_n 可导出，则 B 也可导出。

（7）弱推理A弱推理是一种允许的推理， $A \vdash B$满足以下条件：如果公式（或序列） A的阶为 m且可导出，那么公式（或序列，分别） B 的阶为 $\leq m$且可导出。

4 Ketonen 型 Gentzen 经典简单类型论 KCT

下面介绍一种 Ketonen 型 Gentzen 经典简单类型论$\mathbf{KCT}$。

Axioms: $\Gamma_1, P, \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta_1, P, \Delta_2,$

其中， P 是原子的， Γ_1、 Γ_2、 Δ_1、 Δ_2 的所有 A-公式和 S-公式都是原子的，且 Γ_1、 Γ_2、 Δ_1、 Δ_2 可以分别为空。

推理规则：

$$\frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta_1, B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta_1, A \supset B, \Delta_2} \ (\rightarrow\supset)$$

$$\frac{\Gamma_1, A \supset \forall x^1 x^1, \Gamma_2 \rightarrow \Delta \quad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, A \supset B, \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta} \ (\supset\rightarrow),$$

如果 B 不是公式 $\forall x^1 x^1$。

$$\frac{\Gamma \ \rightarrow \ \Delta_1, \mathscr{F}[a^\sigma], \Delta_2}{\Gamma \ \rightarrow \ \Delta_1, \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Delta_2} \ (\rightarrow \forall^\sigma),$$

前提是变量 a^σ 不出现在下方序列式中。

$$\frac{\Gamma_1, \mathscr{F}[t^\sigma], \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta}{\Gamma_1, \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta} \ (\forall^\sigma \rightarrow),$$

其中 t^σ 是一个项。

$$\frac{\Gamma \ \rightarrow \ \Delta_1, \mathscr{A}[t^\tau], \Delta_2}{\Gamma \ \rightarrow \ \Delta_1, \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau), \Delta_2} \ (\rightarrow \lambda^\sigma)$$

$$\frac{\Gamma_1, \mathscr{A}[t^\tau], \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta}{\Gamma_1, \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau), \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta} \ (\lambda^\sigma \rightarrow)$$

用于推导经典谓词逻辑中矛盾的 Ketonen 型 Gentzen 系统由 Inoué 于 [14]年提出。经典（分别为直觉主义）谓词逻辑的 Ketonen 型 Gentzen 系统由 Inoué 于 [15] 年（分别于 [16]年）提出。

在 KCT 系统中，证明图（推导）是一棵有限树，其叶节点是上述公理模式的实例，内部节点则由上述某条推理规则单次应用得到。若存在这样一个推导，其根节点为 S，则称序列 S 在 KCT 中可证（记作 $\vdash_{\mathsf{KCT}} S$）。特别地，若存在一个推导，其终结序列为空前提序列 $\rightarrow A$，则称公式 A 可证（记作$\vdash_{\mathsf{KCT}} A$）。因此，每当一个从公理出发的证明图到达形如 $\rightarrow A$ 的节点时，公式 A 就已在 KCT 中得到证明。

5 经典简单类型论的 Ketonen 型表列系统 KCTT

下面介绍经典简单类型论的 Ketonen 型表列系统**KCTT** 如下。

Axioms: $\Gamma_1, P, \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta_1, P, \Delta_2,$

其中 P 是原子的，并且 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_1, \Delta_2$ 中所有 A-公式和 S-公式均为原子的，而 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_1, \Delta_2$ 可以分别为空。

推理规则：

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta_1, A \supset B, \Delta_2}{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta_1, B, \Delta_2} \ (\rightarrow\supset)$$

$$\frac{\Gamma_1, A \supset B, \Gamma_2 \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, A \supset \forall x^1 x^1, \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta \quad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \ (\supset\rightarrow),$$

如果 B 不是公式 $\forall x^1 x^1$。

$$\frac{\Gamma \ \rightarrow \ \Delta_1, \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Delta_2}{\Gamma \ \rightarrow \ \Delta_1, \mathscr{F}[a^\sigma], \Delta_2} \ (\rightarrow \forall^\sigma),$$

前提是变量 a^σ 不出现在上方序列中。

$$\frac{\Gamma_1, \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta}{\Gamma_1, \mathscr{F}[t^\sigma], \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Gamma_2 \ \rightarrow \ \Delta} \ (\forall^\sigma \rightarrow),$$

其中 t^σ 是一个项。

$$\frac{\Gamma \ \ \to \ \ \Delta_1, \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau), \Delta_2}{\Gamma \ \ \to \ \ \Delta_1, \mathscr{A}[t^\tau], \Delta_2} \ (\to \lambda^\sigma)$$

$$\frac{\Gamma_1, \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau), \Gamma_2 \ \ \to \ \ \Delta}{\Gamma_1, \mathscr{A}[t^\tau], \Gamma_2 \ \ \to \ \ \Delta} \ (\lambda^\sigma \to)$$

经典谓词逻辑的 Ketonen 型表列系统由 Inoué 在 [15] 中引入。

在系统 KCTT 中，序列 S 的表 是一棵由序列构成的有限树，其根为 S，内部节点是通过单次应用其中给出的某条表列规则得到的，而叶节点则是由此得到的终结相继式。若某个分支的叶节点是其中所述公理模式的一个实例，则称该分支为闭合的；否则，该分支为开放的。如果一个表的所有分支都是闭合的，则称该表为闭合的；如果它至少有一个开放分支，则称该表为开放的。若沿着每个开放分支，所有适用的表列规则都已得到彻底且公平的应用，则称该表为完备的（按表的意义而言）。

解析表列与相继式演算之间存在一种众所周知的对应关系：表列可以看作上下颠倒的相继式系统。因此，一个闭合且完备的表对应于一个（无切割的）Gentzen 式证明图，反之亦然。

6 Ketonen 型保推理 Gentzen 经典简单类型论 $\mathbf{KCT_h}$

这里我们介绍一种 Ketonen 型 Gentzen 经典简单类型论$\mathbf{KCT_h}$，如下所示。

Axioms: $\Gamma_1, P, \Gamma_2 \ \ \to \ \ \Delta_1, P, \Delta_2,$

其中 P 是原子的，并且 Γ_1、Γ_2、Δ_1、Δ_2 的所有 A-公式和 S-公式都是原子的，而 Γ_1、Γ_2、Δ_1、Δ_2 则可以分别为空。

推理规则：

$$\frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \ \ \to \ \ \Delta_1, B, A \supset B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \ \ \to \ \ \Delta_1, A \supset B, \Delta_2} \ (\to\supset)$$

$$\frac{\Gamma_1, A \supset \forall x^1 x^1, A \supset B, \Gamma_2 \to \Delta \quad \Gamma_1, B, A \supset B, \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1, A \supset B, \Gamma_2 \ \ \to \ \ \Delta} \ (\supset\to),$$

如果 B 不是公式 $\forall x^1 x^1$。

$$\frac{\Gamma \ \to \ \Delta_1, \mathscr{F}[a^\sigma], \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Delta_2}{\Gamma \ \to \ \Delta_1, \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Delta_2} \ (\to \forall^\sigma),$$

前提是变量 a^σ 未出现在上方的序列中。

$$\frac{\Gamma_1, \mathscr{F}[t^\sigma], \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Gamma_2 \ \to \ \Delta}{\Gamma_1, \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Gamma_2 \ \to \ \Delta} \ (\forall^\sigma \to),$$

其中 t^σ 是一个项。

$$\frac{\Gamma \ \to \ \Delta_1, \mathscr{A}[t^\tau], \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau), \Delta_2}{\Gamma \ \to \ \Delta_1, \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau), \Delta_2} \ (\to \lambda^\sigma)$$

$$\frac{\Gamma_1, \mathscr{A}[t^\tau], \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau), \Gamma_2 \ \to \ \Delta}{\Gamma_1, \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau), \Gamma_2 \ \to \ \Delta} \ (\lambda^\sigma \to)$$

经典（分别为直觉主义）谓词逻辑的 Ketonen 型保推理 Gentzen 系统由 Inoué 在 [15] （分别在 [16]）中提出。

在 KCT$_h$系统中，证明图 （推导）和可证性 的概念与 KCT 中的相同。

7 经典简单类型论的 Ketonen 型保推理语义树系统 $\mathbf{KCTT_h}$

在此，我们介绍如下经典简单类型论的 Ketonen 型保推理语义树系统 $\mathbf{KCTT_h}$。

在此，我们将如下介绍经典简单类型论的 Ketonen 型 Gentzen 系统 $\mathbf{KCTT_h}$。

Axioms: $\Gamma_1, P, \Gamma_2 \ \to \ \Delta_1, P, \Delta_2,$

其中 P 是原子的， Γ_1， Γ_2， Δ_1， Δ_2 的所有 A-公式和 S-公式都是原子的，而 Γ_1， Γ_2， Δ_1， Δ_2 分别可以为空。

推理规则：

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \ \to \ \Delta_1, A \supset B, \Delta_2}{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \ \to \ \Delta_1, B, A \supset B, \Delta_2} \ (\to\supset).$$

$$\frac{\Gamma_1, A \supset B, \Gamma_2 \ \to \ \Delta}{\Gamma_1, A \supset \forall x^1 x^1, A \supset B, \Gamma_2 \to \Delta \quad \Gamma_1, B, A \supset B, \Gamma_2 \to \Delta} \ (\supset\to),$$

如果 B 不是公式 $\forall x^1 x^1$。

$$\frac{\Gamma \ \to \ \Delta_1, \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Delta_2}{\Gamma \ \to \ \Delta_1, \mathscr{F}[a^\sigma], \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Delta_2} \ (\to \forall^\sigma),$$

前提是变量 a^σ 不出现在下方序列式中。

$$\frac{\Gamma_1, \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Gamma_2 \ \to \ \Delta}{\Gamma_1, \mathscr{F}[t^\sigma], \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Gamma_2 \ \to \ \Delta} \ (\forall^\sigma \to),$$

其中 t^σ 是一个项。

$$\frac{\Gamma \ \to \ \Delta_1, \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau), \Delta_2}{\Gamma \ \to \ \Delta_1, \mathscr{A}[t^\tau], \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau), \Delta_2} \ (\to \lambda^\sigma)$$

$$\frac{\Gamma_1, \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau), \Gamma_2 \ \to \ \Delta}{\Gamma_1, \mathscr{A}[t^\tau], \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau), \Gamma_2 \ \to \ \Delta} \ (\lambda^\sigma \to)$$

经典谓词逻辑（相应地，直觉主义谓词逻辑）的 Ketonen 型保推理语义树系统由 Inoué 在 [15]（相应地，在 [16]）中提出。

在系统 KCTT$_h$ 中，表以及分支或表是闭合的、开放的或完备的（按表的意义）的概念，均按照 KCTT 中的定义给出。

8 序列的约简链与部分赋值

8.1 可约的、临界的、本原的序列

我们首先假设，对于每个类型 σ，都给定了一个该类型所有自由变量的枚举 α_0^σ，α_1^σ，α_2^σ，，…，以及一个该类型所有项的枚举 s_0^σ，s_1^σ，s_2^σ，，… σ。

定义 8.1 序列 S 的可约公式定义为以下（1）—（3）之一：

（1） A 是 S 中形如 $\forall x^\sigma \mathcal{F}[x^\sigma]$ 或 $\lambda x^\tau \mathcal{A}[x^\tau]\,(t^\tau)$ 的 S-公式，（2） B 是 S 中形如 $\lambda x^\tau \mathcal{A}[x^\tau]\,(t^\tau)$ 的 A-公式，（3） $A \supset B$ 是 S 中的 S-公式，其中 B 不是公式 $\forall x^1 x^1$。若一个序列至少含有一个可约公式，则称该序列为可约的。

定义 8.2 可约序列 S 的特定公式 是指 S 中位于最右侧的 S 的可约公式。

定义 8.3 序列 S 的临界公式 是指 S 中形如 $\forall x^\sigma \mathcal{F}[x^\sigma]$的 *A*- 公式。若一个序列不可约且至少含有一个临界公式，则称其为临界的。

定义 8.4 如果一个序列既不可约也非临界，则称它为本原的。显然，当且仅当该序列中的每个极小 *A*-公式和每个极小 *S*-公式都是原子公式时，情况才是如此。

8.2 序列约简链的定义

定义 8.5 序列 S 的***R*-**链（约简链）是指由以下方式构成的序列序列：

$$S_0, S_1, S_2, \ldots$$

构成如下：

R1. *R*-链的初始相继式 S_0 是序列 S。

R2. 如果 *R*-链中的公式 S_m 是公理或原子相继式，则它就是 *R*-链的最后一个相继式。此时称 *R*-链的长度为 m。

R3. 如果 *R*-链中的一个序列 S_m 是可约序列或临界序列，但不是公理，那么 S_m 在 *R*-链中有一个直接后继 S_{m+1}，其中 S_{m+1} 由 S_m 如下确定：

R3.1. 如果 S_m 是带有指定的 *A*-公式 （$A \supset B$）的可约序列 Γ_1、$A \supset B$、$\Gamma_2 \to \Delta$，那么 S_{m+1} 或者是序列 Γ_1、$A \supset \forall x^1 x^1$、$\Gamma_2 \to \Delta$，或者是序列 Γ_1、B、$\Gamma_2 \to \Delta$。

R3.2. 如果 S_m 是带有指定的 *S*-公式 $\forall x^\sigma \mathcal{F}[x^\sigma]$的可约序列 $\Gamma \to \Delta_1$、$\forall x^\sigma \mathcal{F}[x^\sigma]$、$\Delta_2$，那么 S_{m+1} 就是序列 $\Gamma \to \Delta_1$、$\mathcal{F}\alpha_i^\sigma$、$\Delta_2$，其中 i 是满足以下条件的最小数： α_i^σ不出现在 S_m中。

R3.3.1. 如果 S_m 是可约序列 $\Gamma_1, \lambda x^\tau \mathcal{A}[x^\tau]\,(t^\tau)\ \Gamma_2 \to \Delta$，且其指定的 *A*-公式为 $\lambda x^\tau \mathcal{A}[x^\tau]\,(t^\tau)$，那么 S_{m+1}就是序列 $\Gamma_1, \mathcal{A}[t^\tau], \Gamma_2 \to \Delta$。

R3.3.2 如果 S_m是一个可约序列 $\Gamma \to \Delta_1, \lambda x^\tau \mathcal{A}[x^\tau](t^\tau)\ \Delta_2$，其中指定的 *S*-公式为 $\lambda x^\tau \mathcal{A}[x^\tau](t^\tau)$，那么 S_{m+1}就是序列 $\Gamma \to \Delta_1, \mathcal{A}[t^\tau], \Delta_2$。

R3.4. 如果 S_m 是一个临界序列

$$\Gamma_1, \forall x_1^{\sigma_1}\mathcal{F}_1[x_1^{\sigma_1}], \ldots, \forall x_1^{\sigma_k}\mathcal{F}_k[x_k^{\sigma_k}], \Gamma_2 \to \Delta_1, A, \Delta_2$$

含有临界公式

$$\forall x_1^{\sigma_1}\mathcal{F}_1[x_1^{\sigma_1}], \ldots, \forall x_1^{\sigma_k}\mathcal{F}_k[x_k^{\sigma_k}],$$

那么 S_{m+1} 就是该序列

$$\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_{Suc},$$

其中 $\Delta_{Suc} =$

$$\Delta_1, (A_1 \supset (\ldots \supset (A_{(m+1)\cdot k} \supset A)\ldots)) \ \Delta_2$$

其中 $A_{i+j.k} := \mathcal{F}_i[s_j^{\sigma_i}]\,(i = 1, \ldots, k;\ \ j = 0, \ldots, m)$。

注释。 我们的约简链（R-链）不过就是 Schütte 的 D-链。若考虑其实际含义，Schütte 使用的术语似乎并不恰当。我们将使用约简链（R-链）这一术语，取代 D-链，因为前者在含义上更为准确。

8.3 公式的部分赋值

定义 8.6 我们将（针对公式的）部分赋值定义为一个函数 V，它为某些公式F_i 赋予真值 $VF_i = t$ 或 $VF_i = f$ （但不一定对所有公式都有定义），并满足以下条件:

V1. 如果 $V(A \supset B) = t$，那么 $VA = f$ 或 $VB = t$。（在这种情况下， VB 或 VA可能没有定义。）

V2. 如果 $V(A \supset B) = f$，那么 $VA = t$ 且 $VB = f$。

V3. 如果 $V^{x^\sigma}\mathcal{F}[x^\sigma] = t$，那么对于类型为 σ的每个项 t^σ，都有 $V\mathcal{F}[t^\sigma] = t$。

V4. 如果 $V^{x^\sigma}\mathcal{F}[x^\sigma] = f$，那么存在一个类型为 σ 的自由变量 α^σ，使得 $V\mathcal{F}[\alpha^\sigma] = f$。（在这种情况下，对于类型为 σ的每个项t^σ ， $V\mathcal{F}[t^\sigma]$不一定有定义。）

V5. 若定义了 $V\lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau)$，则有 $V\mathscr{A}[t^\tau] = V\lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau)$。

备注。 这些部分赋值对应于 Schütte1951、Takahashi [37], 和 Prawitz [27] 中的半赋值。

8.4 序列的部分赋值

定义 8.7 我们将一种（针对序列的）部分赋值定义为一个函数 V^s，它将序列 $V\Gamma \to V\Delta\,(= V^s(S),\ S = \Gamma \to \Delta)$赋予值，其中$V\Gamma = VA_1$、.....、$VA_n$适用于 $\Gamma = A_1$、.....、$A_n(n \geq 0)$，而 $V\Delta = VB_1$、.....、VB_m适用于 $\Delta = B_1$、.....、$B_m(m \geq 0)$。

定义 8.8 我们将真值 $tv(S)$ 称为序列 S 在真值赋值下的真值，即根据 S 的对应公式计算得出的真值。

示例。
(1) $S = t, f, t \to f, t, f,$
$tv(S) = (t \wedge f \wedge t) \supset (t \vee f \vee t) = f \supset t = t.$
(2) $S = t, f, t, f \to,$
$tv(S) = \neg(t \wedge f \wedge t \wedge f) = \neg f = t.$
(3) $S = \to f, f, f,$
$tv(S) = f \vee f \vee f = f.$
(4) $S = \to,$
$tv(S) = f.$

9 KCTT 的主要引理$_{\mathbf{h}}$

本节将介绍 KCTT 的若干引理。然而，对于其他系统，同样的定理也成立。

引理 9.1（序列的主要句法引理）如果序列 S 的每条 *R*-链都包含一个公理，那么序列 S 可导出。

证明。在这种情况下， S 的每条 R-链都是有限的。因此，根据柯尼希引理，S只有有限条 R-链。这些 R-链构成序列*S*的一个约简。 □

引理 9.2（序列的主要语义引理）如果序列 S 存在一条不包含公理的 *R*-链，那么存在一个部分赋值 V^s，使得 $tv(S) = f$

证明。假设

$$(\mathrm{RC}) \quad S_0, S_1, S_2, \ldots$$

是一个不包含公理的 R-链，其中 S_0 是序列 S。利用欣蒂卡序列的定义，我们现在可以类比《Schütte 的证明论》第 5.3 节中的内容来证明,

Schütte 的证明论 [34], 如果我们将正（分别为负）部分理解为对应于 S-公式（分别为 A-公式），那么具体而言，我们可以在给定公式（序列）中的原子 A-公式（分别为 S-公式）前置 t（分别为 f），从而得到给定公式（序列）的假性。 □

引理 9.3 如果某个原子公式在 *R*-链的一个序列 F_m 中作为 *S*-公式（或 *A*-公式）出现，那么它也会在 *R*-链的每个序列 S_m （$m \geq n$）中作为 *S*-公式（或 *A*-公式）出现。

证明。由 R-链的定义可立即得出。 □

引理 9.4 如果 *R*-链的一个序列 S_n 中有一个可约 *A*-公式（或可约 *S*-公式） C，那么 *R*-链中就存在一个可约序列 S_m（$m \geq n$），其指定的 *S*-公式（或 *A*-公式）为 C。

证明。对 S_n 中可约公式的秩之和作归纳，这些公式在 S_n 中出现于右侧 C。 □

引理 9.5 如果链中的任意序列 S_n 含有 *A*-公式 $\forall x^\sigma \mathcal{F}[x^\sigma]$，那么链中就有无穷多个含有 *A*-公式 $\forall x^\sigma \mathcal{F}[x^\sigma]$的临界序列。

证明。在引理 9.5 的假设下，只需证明该链包含一个临界序列 S_m (
$m \geq n$)。我们将序列的秩之和称为该序列的**可约性秩**。根据假设，序列 S_n 要么是可约的，要么是临界的。因此，R- 链包含一个序列 S_{n+1}，该序列还将公式 $\forall x^\sigma \mathcal{F}[x^\sigma]$ 作为 A-公式包含其中。我们通过对序列 S_{n+1} 的**可约性秩**进行归纳来证明我们的断言。

如果 S_{n+1} 是临界序列，则取 $m = n+1$ 即可满足该断言。否则，R-链包含一个序列 S_{n+2}，其可约性秩小于 S_{n+1}，并且还将公式 $\forall x^\sigma \mathcal{F}[x^\sigma]$ 作为 A-公式包含其中。在这种情况下，该断言由归纳假设推出。 □

现在，如果 C 在 R-链（RC）中作为 S-公式（或 S-公式）出现，则我们设 $VC = f$ （或 $VC = f$ ）。

引理 9.6 函数 V 满足偏部分赋值的条件 *V1–V5*。

证明。

1. 假设 $V(A \supset B) = t$，则 $(A \supset B)$ 是 (RC) 中的 A-公式。如果 B 是一个公式 $\forall x^1 x^1$，则 A 是 (RC) 中的 S-公式，因此 $VA = t$。否则，根据引理 9.4 和 R-链的定义可知，A 是 S-公式，或 B 是 (RC) 中的 A-公式，因此 $VA = f$ 或 $VB = t$。2. 假设 $V(A \supset B) = f$，则 $(A \supset B)$ 是 (RC) 中的 S-公式。但此时 A 是 A-公式，且 B 是 (RC) 中的 S-公式，所以 $VA = f$ 且 $VB = t$。3. 假设 $\forall x^\sigma \mathcal{F}[x^\sigma] = t$，则 $\forall x^\sigma \mathcal{F}[x^\sigma]$ 是 (RC) 中的 A-公式。由引理 9.5 和 R-链的定义可知，对于每个类型为 σ 的项 t^σ，$\mathcal{F}[t^\sigma]$ 是 (RC) 中的 A-公式。因此，对于所有类型为 σ 的 t^σ，$VF[t^\sigma] = t$。4. 假设 $V\forall x^\sigma \mathcal{F}[x^\sigma] = f$，则 $\forall x^\sigma \mathcal{F}[x^\sigma]$ 是 (RC) 中的 S-公式。由引理 9.4 和 R-链的定义可知，存在一个类型为 σ 的变量 a^σ，使得 $\mathcal{F}[a^\sigma]$ 是 (RC) 中的 pS-公式，因此 $V\mathcal{F}[a^\sigma] = f$。

5. 假设 $V\lambda x^\tau \mathcal{A}[x^\tau][t^\tau]$ 已定义。那么 $\lambda x^\tau \mathcal{A}[x^\tau][t^\tau]$ 是 (RC) 中的一个 S-公式（或 A-公式）。由引理 9.4 和 R-链的定义可知，$\mathcal{A}[t^\tau]$ 是 (RC) 中的一个 S-公式（或 A-公式）。因此

$$V\mathcal{A}[t^\tau] = V\lambda x^\tau \mathcal{A}[x^\tau][t^\tau].$$

由于 R-链 (RC) 不含公理，由引理 9.3 可知，没有原子公式既作为 S-公式又作为 A-公式出现在 (RC) 中。因此，不存在原子公式 P 使得 $VP = t$ 和 $VP = f$。由引理 9.6，通过对公式 C 的秩进行归纳可知，不存在公式 C 使得 $VC = t$ 和 $VC = f$。

因此，V 是一个部分赋值。
因此 $VF = f$，因为 F 作为 S-公式出现在 (RC) 中。 □

引理 9.7 序列的函数 V^s 满足部分赋值的条件 *V1–V5*。

证明。由定义 8.6、定义 8.7 和引理 9.6 立即可得。 □

10 KCTT 的欣蒂卡序列$_{\mathbf{h}}$

定义 10.1 设 Γ 为一个公式序列。我们定义一个 Γ_s 的 Γ序列集如下:

$$\Gamma_s := \{A \mid A \text{ occurs in } \Gamma\}$$

定义 10.2（序列式集合对）设 S 是一个序列，记作 $S := \Gamma \to \Delta$。一个序列式集合对 S_s 是一个有序对(Γ_s, Δ_s)。

定义 10.3（序列集合对的饱和性）设 S 是一个序列，记作 $S := \Gamma \to \Delta$。若序列集合对(Γ_s, Δ_s) 满足以下条件，则称其为 S 的饱和的序列集合对。

（*H1*） $A \supset B \in \Delta_s \Rightarrow$ （$A \in \Gamma_s$ 和 $B \in \Delta_s$）.

(H2) $(A \supset B \in \Gamma_s$ 和$(B$ 不是公式 $\forall x^1 x^1))$ $\Rightarrow (A \supset \forall x^1 x^1 \in \Gamma_s$ 或 $B \in \Gamma_s)$。

(H3) $\forall x^\sigma\, \mathscr{F}[x^\sigma] \in \Delta_s \Rightarrow (\mathscr{F}[a^\sigma] \in \Delta_s$ 和 a^σ 只以公式 $\mathscr{F}[a^\sigma]$ 的形式出现)。

(H4) $\forall x^\sigma\, \mathscr{F}[x^\sigma] \in \Gamma_s \Rightarrow$ （存在一个项 t^τ 使得 $\mathscr{F}[t^\sigma] \in \Gamma_s$）。

（*H5*） $\lambda x^\tau\, \mathscr{A}[x^\tau]\,(t^\tau) \in \Delta_s \Rightarrow \mathscr{A}[t^\tau] \in \Delta_s$。

(H6) $\lambda x^\tau\, \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau) \in \Gamma_s \Rightarrow \mathscr{A}[t^\tau] \in \Gamma_s$.

我们称 *(H1)–(S6)* 为饱和性质。

注。 饱和性质对应于$\mathbf{KCTT_h}$ 的约化规则。

定义 10.4（欣蒂卡序列）设 S 为一个序列，记作 $S := \Gamma \to \Delta$。若序列 S 满足以下条件，则称其为欣蒂卡序列:

(1) 存在一个序列 $\to A$，使得 S 是该序列 $\to A$的 *R*-链的最后一个元素。

(2) 序列式集合对 S 在与饱和性质相对应的约化的每一步中都是饱和的。

(3) 不存在公式 A，使得 $A \in \Gamma_s$ 且 $A \in \Delta_s$。

(4) 设 S 的 *R-chanin* 的首个元素为 $\to A$。设 S 的序列集合对为 (Γ_s, Δ_s)。那么，对于每个原子子公式 B， $B \in \Gamma_s \cup \Delta_s$ 都成立。

引理10.1（欣蒂卡序列引理）设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbf{KCTT_h}$ 的一个完备语义表。若该表是开放的，那么存在一个开放分支，其底部（记作 $S := \Gamma \to \Delta$）是一个欣蒂卡序列。

证明。由$\mathbf{KCTT_h}$的约化规则、定义10.1–10.4以及R-链的定义可直接得出。 □

11 KCTT的可导出序列与允许的推理$_\mathbf{h}$

本节以下定理均可用标准方法证明，因此省略证明。

定理11.1（公理定理）形如 $\Gamma_1, A, \Gamma_2 \ \to \Delta_1, A, \Delta_2$ 的每个序列均可导出。

定理11.2每个序列 $\Gamma_1, \forall x^1 x^1, \Gamma_2 \ \to \ \Delta$ 均可导出。

定理11.3（逆规则）以下均为弱推理。

(1) ($\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \ \Gamma_1, A \supset \forall x^1 x^1, A \supset B, \Gamma_2 \to \Delta$ 且 $\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \ \Gamma_1, B, \Gamma_2 \to \Delta$) 蕴含 $\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \ \Gamma_1, A \supset B, \Gamma_2 \to \Delta$.*(2)* $\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \ \Gamma \ \to \ \Delta_1, \mathscr{F}[a^\sigma], \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Delta_2$ 蕴含 $\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \ \Gamma \ \to \Delta_1, \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Delta_2$.*(3)* $\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \ \Gamma_1, \mathscr{A}[t^\tau], \Gamma_2 \to \Delta$ 蕴含 $\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \ \Gamma_1, \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau(t^\tau)], \Gamma_2 \to \Delta$.*(4)* $\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \ \Gamma \to \ \Delta_1, \mathscr{A}[t^\tau], \Delta_2$ 蕴含 $\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \ \Gamma \to \Delta_1, \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau(t^\tau)], \Delta_2$.

$S \vdash^s T$ （“S 在结构上由 T 推出”）表示： S 的每个极小 S-公式也出现在 T 中，且 S 的每个极小 A-公式也出现在 T中。

定理11.4（结构推理规则）如果 $F \ \vdash^S \ G$ 成立，那么$F \vdash G$ 就是一个弱推理。

定理11.5 以下是一个允许的推理：

$\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \ \Gamma_1, \mathscr{F}[t^\sigma], \Gamma_2 \ \to \ \Delta$ 蕴含$\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \ \Gamma_1, \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Gamma_2 \ \to \Delta$.

定理 11.6（一般替换规则）

(1) 如果 a^σ 不出现在名义形式 $\mathscr{F}$中，则以下是允许的推理：

$\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \Gamma_1,\ \mathscr{F}[a^\sigma],\ \Gamma_2 \to \Delta$ 蕴涵 $\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \Gamma_1,\ \forall x^\sigma \mathscr{F}[t^\sigma],\ \Gamma_2 \to \Delta$.

(2) 如果 a^σ 不出现在名义形式 $\mathscr{F}$ 中，则以下是允许的推理：

$\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \Gamma \to \Delta_1,\ \mathscr{F}[a^\sigma],\ \Delta_2$ 蕴涵 $\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \Gamma \to \Delta_1,\ \mathscr{F}[t^\sigma],\ \Delta_2$.

12 KCTT 的语义$_\mathbf{h}$

12.1 关于集合系统的全估值

我们考虑 $\mathbf{KCTT_h}$ 的语义。

定义 12.1 所谓集合 M 系统，是指对每种类型 σ，都有一族非空集合 M^σ，使得 M^{σ_1} 和 M^{σ_2} 在 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ 时不相交。

对于给定的集合 M 系统，我们引入以下术语。

定义 12.2

(1) 类型 σ 的基本 M项 是 M^σ 中元素的名称。(2) 类型 σ 的 M项 是这样一些表达式：由类型 σ 的项得到，其中出现的所有自由变量都替换为相同类型的基本M项。

(3) M公式 是类型 1 的 M项 。

(4) </style}公式 的 -变体 是指由 F 得到的一个 M-公式：将 F 中出现的自由变量替换为类型相同的 M-项；若某个自由变量在 F 中出现多次，则其所有出现位置都替换为同一个 M-项。

(5)</style}-序列 对序列的含义与 *(3)* 类似。

(6)</style}序列的 -变体 的含义与 *(4)* 类似。

我们使用$c^\sigma, c_i^{\tau_i}$作为类型为 σ的基本 M-项的句法符号，使用 τ_i,c^τ 表示基本 M-项序列 c^{τ_1}, ..., c^{τ_n} $(n \geq 1)$, 使用$u^\sigma, u_i^{\tau_i}$表示类型为 σ的 M-项，使用 τ_i,u^τ 表示 M-项序列 $u_i^{\tau_1}, \ldots, u_n^{\tau_n} (n \geq 1)$，使用$A', B', C', F', G'$, $\forall x^\sigma \mathscr{F}'[x^\sigma]$ 表示 M-公式，并使用$\lambda x^\tau \mathscr{A}'[x^\tau]$ 表示类型为$(\tau) = (\tau, \cdots, \tau_n)$的 M-项。

定义 12.3 我们把集合系统 M 上的全赋值 定义为一个函数 W，它为每个 M-公式 F' 赋予真值 $WF' = t$ 或 $WF' = f$，并满足以下条件：

W1. $W(A' \supset B') = t$ 当且仅当 $WA' = f$ 或 $WB' = t$。
W2. $W\forall x^\sigma \mathscr{F}'[x^\sigma] = t$ 当且仅当 $W\mathscr{F}'[u^\sigma] = t$ 对于每个类型为 σ 的 M-项 u^σ 。

W3. $W\lambda x^\tau \mathscr{A}'[x^\tau](u^\tau) = W\mathscr{A}'[u^\tau]$.
公式 F 属于 $\mathbf{KCTT_h}$，若对于 F 的每个 M-变体 F'，它在全赋值 W 下都为真，则称其在M上为真。

定义12.4 设 W 是集合系统 M 上的一个全赋值。所谓（针对序列式的）全赋值，是指一个函数 W^s，它将一个序列 $W\Gamma \to W\Delta$ $(= W^s(S),$ $S = \Gamma \to \Delta)$ 赋值，其中 $W\Gamma = WA_1, \ldots\ldots, WA_n$ 对应 $\Gamma = A_1, \ldots\ldots, A_n (n \geq 0)$，而 $W\Delta = WB_1, \ldots\ldots, WB_m$ 对应 $\Delta = B_1, \ldots\ldots, B_m (m \geq 0)$。

定义 12.5 $\mathbf{KCTT_h}$ 中的公式若在某个集合系统上的每个全赋值下都为真，则称其为有效 。

我们遵循以下约定。

真值约定。 对于关于序列的全赋值，我们也使用真值函数 tv （参见定义 8.8）。

12.2 可靠性定理

这里假设$\mathbf{KCTT_h}$ 的每个序列 S 都按照以下约定满足。

名称约定：当 S 中的自由变量被替换为类型相同的基本 M-项时，我们用 S' 表示。

对于每个全赋值 W 在 M 上，我们显然有：

引理 12.1（SA 引理） 设 $S: = \Gamma_1, A, \Gamma_2 \to \Delta$ 以及 $T: = \Gamma \to \Delta_1, A, \Delta_2$。

（1）如果 $WA' = f$，那么 $tv(A') = t$ 对于 S'。
（2）如果 $WA' = t$，那么 $tv(A') = t$ 对于 T'。

定理 12.1（可靠性定理） $\mathbf{KCTT_h}$ 中每个可导出的公式都是有效的。

证明。设 S 是一个满足 $\to F$ 的序列。设 F 是一个可导出的公式，W 是集合系统 M 上的一个全赋值，而 F' 是 F 的一个 M- 变体。我们通过对 F 的约简次序进行归纳，证明 $WF' = t$。

1. 假设 S 是公理 $\Gamma_1,\ P,\ \Gamma_2 \to \Delta_1,\ P,\ \Delta_2$。那么 S' 是一个 M-序列 $\Gamma_1',\ A',\ \Gamma_2' \to \Delta_1',\ A',\ \Delta_2'$。根据 SA 引理，我们有 $WF' = t$

2. 假设 S 是一个序列 $\Gamma_1, A \supset B, \Gamma_2 \to \Delta$，它通过（$\supset\to$）-推理化简为 $\Gamma_1, A \supset \forall x^1 x^1$，$A \supset B, \Gamma_2 \to \Delta$ 和 $\Gamma_1, B, A \supset B, \Gamma_2 \to \Delta$。那么 S' 是一个 M-序列 $\Gamma_1', A' \supset \forall x^1 x^1, A' \supset B'$，$\Gamma_2' \to \Delta'$。若 $WA' = t$，则 $W(A' \supset B') = WB'$。由于根据归纳假设，$W(\Gamma_1, B, A \supset B, \Gamma_2 \to \Delta) = t$，我们有 $WF' = t$。若 $WA' = f$，则 $W(A' \supset B') = t = W(A' \supset \forall x^1 x^1)$。由于根据归纳假设，$W(\Gamma_1', A' \supset \forall x^1 x^1, A' \supset B', \Gamma_2' \to \Delta') = t$，我们有 $WF' = t$。

3. 假设 S 是序列 $\Gamma \to \Delta_1, \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Delta_2$，它经由（$\to \forall^\sigma$）推理化简为 $\Gamma \to \Delta_1, \mathscr{F}[a^\sigma], \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Delta_2$。那么 S' 是一个 M-序列 $\Gamma' \to \Delta_1', \forall x^\sigma \mathscr{F}'[x^\sigma], \Delta_2'$。若 $W\forall x^\sigma \mathscr{F}'[x^\sigma] = t$，则由 SA 引理可得 $WF' = t$。若 $W\forall x^\sigma \mathscr{F}'[x^\sigma] = f$，则存在一个 M-项 u^σ，使得 $W\mathscr{F}'[u^\sigma] = f$。$\Gamma \to \Delta_1, \mathscr{F}[u^\sigma], \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Delta_2$ 是 $\Gamma \to \Delta_1, \mathscr{F}[a^\sigma], \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Delta_2$ 的一个 M-变体。因此，根据归纳假设，$W(\Gamma \to \Delta_1, \mathscr{F}[u^\sigma], \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma], \Delta_2) = t$。所以 $WF' = t$。

4. 假设 S 是一个序列 $\Gamma_1,\ \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma],\ \Gamma_2 \to \Delta$，它通过（$\forall^\sigma \to$）-推理约简为 $\Gamma_1, \mathscr{F}[t^\sigma],\ \forall x^\sigma \mathscr{F}[x^\sigma],\ \Gamma_2 \to \Delta$。那么 S' 是一个 M-序列$\Gamma_1',\ \forall x^\sigma \mathscr{F}'[x^\sigma],\ \Gamma_2' \to \Delta'$。根据归纳假设，我们有 $W(\Gamma_1',\ \mathscr{F}'[u^\sigma],\ \forall x^\sigma \mathscr{F}'[x^\sigma],\ \Gamma_2' \to \Delta') = t$，其中 M 是一个项 u^σ。如果 $W\mathscr{F}'[u^\sigma] = t$，那么 $WF' = t$。如果 $W\mathscr{F}'[u^\sigma] = f$，那么 $W\forall x^\sigma \mathscr{F}'[x^\sigma] = f$ 也成立。于是，根据 SA 引理，有 $WF' = t$。

5. 假设 S 是一个序列 $\Gamma \to \Delta_1,\ \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau)\ \Delta_2$，它经由（$\to \lambda^\sigma$）-推理约化为 $\Gamma \to \Delta_1, \mathscr{A}[t^\tau],\ \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau)\ \Delta_2$。那么 S' 是一个 M-序列 $\Gamma \to \Delta_1,\ \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](u^\tau)\ \Delta_2$。根据归纳假设，$W(\Gamma' \to \Delta_1',\ \mathscr{A}'[t^\tau],\ \lambda x^\tau \mathscr{A}'[x^\tau](t^\tau)\ \Delta_2') = t$。由于 $W\lambda x^\tau \mathscr{A}'[x^\tau](u^\tau) = W\mathscr{A}'[u^\tau] = t$，因此可得 $WF' = t$。

6. 假设 S 是一个序列 $\Gamma_1,\ \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau)\ \Gamma_2 \to \Delta$，它经由（$\lambda^\sigma \to$）-推理约化为 $\Gamma_1, \mathscr{A}[t^\tau],\ \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](t^\tau)\ \Gamma_2 \to \Delta$。那么 S' 是一个 M-序列 $\Gamma_1,\ \lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau](u^\tau)\ \Gamma_2 \to \Delta$。根据归纳假设，$W(\Gamma_1',\ \mathscr{A}'[t^\tau],\ \lambda x^\tau \mathscr{A}'[x^\tau](t^\tau)\ \Gamma_2' \to \Delta') = f$。由于 $W\lambda x^\tau \mathscr{A}'[x^\tau](u^\tau) = W\mathscr{A}'[u^\tau] = f$，因此可得 $WF' = t$。 □

12.3 扩展部分赋值

我们进一步考察 KCTT 的语义$_{\mathbf{h}}$。令 V 为一个部分赋值。我们将定义一个全赋值 W，它建立在一个适当的集合系统 M 之上，使得不存在公式 F 满足：$VF = f$ 在全赋值 W 下为真。我们遵循 D. Prawitz [27]。本小节 12.3 的论述完全得益于 Schütte [34]。

定义 12.6 ([34]) 归纳定义 一个集合 Pt^σ （由可能赋值构成），每个项 t^σ 对应一个这样的集合（按类型 σ的高度归纳；参见定义 *2.12*）。

P1. $Pt^0 := \{t^0\}$。

P2. 若 Vt^1 有定义，则令 $Pt^1 := \{Vt^1\}$。否则令 $Pt^1 := \{t, f\}$。

P3. 对于 $\tau = \tau_1, \ldots, \tau_n\,(n \geq 1)$ $p_0 \in Pt_0^{(\tau)}$，当且仅当以下条件成立：

P3.1. p_0 是一个由 n-元组组成的集合

$$(\langle t_1^{\tau_1}, p_1\rangle, \ldots, \langle t_1^{\tau_n}, p_n\rangle)$$

使得 $p_i \in Pt_i^{\tau_i}(i = 1, \ldots, n)$。

P3.2. 若 $Vt_0^{(\tau)}\,(t_1^{\tau_1}, \ldots, t_n^{\tau_n})$ 有定义，且 $p_i \in Pt_i^{\tau_i}(i = 1, \ldots, n)$，则

$$(\langle t_1^{\tau_1}, p_1\rangle, \ldots, \langle t_1^{\tau_n}, p_n\rangle) \in p_0$$

当且仅当，$Vt_0^{(\tau)}$ （$t_1^{\tau_1}$、.....、$t_n^{\tau_n}$） $= t$。

对于每个类型 σ，令 M^σ 为由满足 $p \in Pt^\sigma$ 的有序对 $\langle t^\sigma$、$p\rangle$ 构成的集合。显然，M^σ 非空。因此，集合 M^σ 构成一个集合系统 M。现在我们考察这个系统 M，并使用 *§12.1* 中引入的句法符号。

如果 u^σ 是一个类型为 σ 的 M-项，令 $u^{\sigma *}$ 为这样一个类型为 σ 的项：将 u^σ 中的每个基本 M- 项 $\langle t_i^{\tau_i}$、$p_i\rangle$ 替换为项 $t_i^{\tau_i}$。

定义 12.7 （[34]）类型为 M的 项 u^σ的 度 du^σ 的归纳定义。

d1. $du^\sigma := 0$，如果 $\sigma = 0$ 或 u^σ 是基本 M-项 u^σ。*d2.* $du_0^\tau(u_1^{\tau_1}$、.....、$u_n^{\tau_n})$: $= max(du_0^{(\tau)}$、$du^{(\tau_1)}1$、.....、$du^{(\tau_n)}{}_n) + 1$。*d3.* $d(A' \supset B')$: $=$ $max(dA'$、$dB') + 1$。*d4.* $d\forall x^\sigma[x]\mathscr{F}'[x^\sigma] := d\mathscr{F}'[c^\sigma] + 1$，其中 c^σ 是基本 M-项。*d5.* $d\lambda x^\tau \mathscr{A}'[x^\tau] := d\mathscr{A}[c^\tau] + 1$，其中 c^τ 是基本 M-项的序列。

定义 12.8 ([34]) 归纳定义 Wu^σ对每个 M-项 u^σ（按度 du^σ归纳）。*W1*。$Wu^0 := u^{0*}$。

W2。$W\langle t^\sigma$、$p\rangle := p$对于 $p \in Pt^\sigma$。（如果 $\sigma = 0$，我们有 $p = t^0$，因此根据 *W2*，$W\langle t^0$、$p\rangle = t^0 = \langle t^0$、$p\rangle *$，与 *W1* 一致。）

W3. $Wu_0^{(\tau)}\,(u_1^{\tau_i}, \ldots, u_n^{\tau_n}) := t$，如果

$$(\langle u_1^{\tau_1 *}, Wu_1^{\tau_1}\rangle, \ldots, \langle u_n^{\tau_n *}, Wu_n^{\tau_n}\rangle) \in Wu_0^{(\tau)}.$$

否则令 $Wu_0^{(\tau)}(u_1^{\tau_i},\ldots,u_n^{\tau_n}) = f$。**W4.** $W(A' \supset B') := t$，如果 $WA' = f$ 或 $WB' = t$。否则令 $W(A' \supset B') := f$。**W5.** $W\forall x^\sigma \mathscr{F}'[x^\sigma] := t$，如果对每个基本 M-项 c^σ（类型为 σ）都满足 $W\mathscr{F}'[c^\sigma] = t$。否则令 $W\forall x^\sigma \mathscr{F}'[x^\sigma] := f$。**W6.** 对于 $\tau = \tau_1,\ldots,\tau_n (n \geq 1)$，令 $W\lambda x^\tau \mathscr{A}'[x^\tau]$ 为满足条件 $W\mathscr{A}[c_1^{\tau_1}\ldots c_n^{\tau_n}] = t$ 的 n 元组 $(c_1^{\tau_1}\ldots c_n^{\tau_n})$ 的集合。

引理 12.2 ([34]) $Wu^\sigma \in Pu^{\sigma *}$。

证明。对度 du^σ 作归纳证明。

1. 假设 $\sigma = 0$。那么我们有 $Wu^0 = u^{0*}$ 和 $Pu^{0*} = \{u^{0*}\}$，因此 $Wu^{0*} \in Pu^{0*}$。

2. 假设 u^σ 是一个基本的 M-项 $\langle t^\sigma, p\rangle$。那么 $Wu^\sigma = p \in Pt^\sigma$ 和 $u^{\sigma *} = t^\sigma$，因此 $Wu^\sigma \in Pu^{\sigma *}$。假设 $\sigma = 1$，且 u^1 不是一个基本的 M-项。根据定义 $Wu^1 \in \{t, f\}$。现在我们只需证明：若 Vu^{1*} 有定义，则 $Wu^1 = Vu^{1*}$。

3.1 假设 u^1 是一个 M-公式 $u_0^{(\tau)}(u_1^{\tau_1},\ldots,u_n^{\tau_n})$。那么根据归纳假设 $Wu_0^{(\tau)} \in Pu_0^{(\tau)*}$ 和 $Wu_i^{\tau_i} \in Pu_i^{\tau_i *} (i = 1,\ldots,n)$。若 Vu^{1*} 有定义，则根据 $Pu_0^{(\tau)*}$ 的定义，

$$(\langle u_1^{\tau_1 *}, Wu_1^{\tau_1}\rangle,\ldots,\langle u_n^{\tau_n *}, Wu_n^{\tau_n}\rangle) \in Wu_0^{(\tau)}.$$

当且仅当 $Vu^{1*} = t$。因此在这种情况下 $Wu^1 = Vu^{1*}$。

3.2 假设 u^1 是一个 M公式（$A' \supset B'$）。那么根据归纳假设，$WA' \in PA'^*$且 $WB' \in PB'^*$。如果 $Vu^{1*} = t$，那么 $VA'^* = f$或 $VB'^* = t$。于是根据归纳假设，$WA' = f$或 $WB' = t$，因此 $Wu^1 = t$。如果 $Vu^{1*} = f$，那么$VA'^* = t$ 且 $VB'^* = f$。于是根据归纳假设，$WA' = t$且 $WB' = f$，因此 $Wu^1 = f$。

3.3 假设 u^1是一个 M公式 $\forall x^{\sigma 0}\mathscr{F}'[x^{\sigma 0}]$。那么 u^{1*}是一个公式 $\forall x^{\sigma 0}\mathscr{F}[x^{\sigma 0}]$。根据归纳假设，对于每个类型为 σ_0的基本 M项，$W\mathscr{F}[c^{\sigma 0}] \in P\mathscr{F}[c^{\sigma 0*}]$。如果 $Vu^{1*} = t$，那么对于每个类型为 σ_0的项 $t^{\sigma 0}$，$V\mathscr{F}[t^\sigma] = t$成立。于是根据归纳假设，对于每个类型为 σ_0的基本 M项 $c^{\sigma 0}$，$W\mathscr{F}'[c^{\sigma 0}] = t$，因此 $Wu^1 = t$。如果 $Vu^{1*} = f$，那么存在一个类型为 σ_0的自由变量 $a^{\sigma 0}$，使得 $V\mathscr{F}[a^{\sigma 0}] = f$。于是根据归纳假设，对于某个类型为 σ_0的基本 M项 $c^{\sigma 0}$，$W\mathscr{F}[c^{\sigma 0}] = f$，因此 $Wu^1 = f$。

4. 假设 u^σ是一个 M-项 $\lambda x^\tau \mathscr{A}'[x^\tau]$，其中 $\sigma = (\tau) = (\tau_1,\ldots,\tau_n)$ $(n \geq 1)$。那么 $u^{\sigma *}$是一个项 $\lambda x^\tau \mathscr{A}[x^\tau]$。若 $Vu^{\sigma *}(c_1^{\tau_1 *},\ldots,c_n^{\tau_n *})$ 有定义，则 $V\mathscr{A}[c_1^{\tau_1 *},\ldots,c_n^{\tau_n *}] = Vu^{\sigma *}(c_1^{\tau_1 *},\ldots,c_n^{\tau_n *})$。于是根据归纳假设，$W\mathscr{A}[c_1^{\tau_1},\ldots,c_n^{\tau_n}] = V\mathscr{A}(c_1^{\tau_1 *},\ldots,c_n^{\tau_n *})$。在这种情况下，根据 Wu^σ 的定义，

$$(c_1^{\tau_1},\ldots,c_n^{\tau_n}) \in Wu^\sigma$$

当且仅当 $Vu^{\sigma*}(c_1^{\tau_1*},\ldots,c_n^{\tau_n*}) = t$。因此，根据 $Pu^{\sigma*}$ 的定义，我们有 $Wu^{\sigma} \in Pu^{\sigma*}$。 □

引理 12.3 ([34]) </style}若 是一元名词形式，且 是一个 -项，则) $= W\nu[\langle u^{\sigma*}, Wu^{\sigma}\rangle]$。

证明。由引理 12.2， $Wu^{\sigma} \in Pu^{\sigma*}$，因此 $\langle u^{\sigma*}, Wu^{\sigma}\rangle$ 是类型为 σ 的基本 M-项。若 $\nu = *_1$，则根据$W\langle u^{\sigma*}, Wu^{\sigma}\rangle$的定义，断言成立。其他情况下，断言可由对名义形式 ν 的长度进行归纳得出。 □

引理 12.4 ([34]) $W\forall x^{\sigma}\mathscr{F}'[x^{\sigma}] = t$ 当且仅当，对于每个类型为 σ 的 M-项 u^{σ}，都有 $W\mathscr{F}'[u^{\sigma}] = t$。

证明。若对于每个类型为 σ 的 M-项 u^{σ}，都有 $W\mathscr{F}'[u^{\sigma}] = t$，则根据定义有 $W\forall x^{\sigma}\mathscr{F}'[x^{\sigma}] = t$。若 $W\forall x^{\sigma}\mathscr{F}'[x^{\sigma}] = t$，则 $W\mathscr{F}'[\langle u^{\sigma*}, Wu^{\sigma}\rangle] = t$，并且根据引理 2 $W\mathscr{F}'[u^{\sigma}] = t$，对于每个类型为 σ 的 M-项 u^{σ}，都有此结论。 □

引理 12.5 ([34]) $W\lambda x^{\tau}\mathscr{A}'[x^{\tau}](u^{\tau}) = W\mathscr{A}'[u^{\tau}]$.

证明。设 $c_i^{\tau_i} := \langle u_i^{\tau_i*}, Wu_i^{\tau_i}\rangle (i = 1,\ldots,n)$ 和 $c^{\tau} := c_1^{\tau_1},\ldots,c_n^{\tau_n}$. 根据定义， $W\lambda x^{\tau}\mathscr{A}'[x^{\tau}](u^{\tau}) = t$ 当且仅当 $(c_1^{\tau_1},\ldots,c_n^{\tau_n}) \in W\lambda x^{\tau}\mathscr{A}'[x^{\tau}]$。当且仅当 $W\mathscr{A}'[c^{\tau}] = t$ 时，情况即如此，继而由引理 12.3$W\mathscr{A}'[u^{\tau}] = t$。 □

定理 12.2 ([34]) W 在 M-公式上的限制是 M 上的一个全赋值，在此赋值下，没有任何满足 $VF = f$ 的公式 F 为真。

证明。根据 W 的定义以及引理 12.4 和 12.5 W， M上的一个全赋值。假设 $VF = f$。将 F中出现的每个自由变量 a替换为一个基本 M-项 $\langle^{\sigma}, p\rangle$，使得 $p \in Pa^{\sigma}$，从而得到一个 M-公式 F'。那么 F'是 F的一个 M-变体，且 $F'^{*} = f$。根据引理 12.2， $WF' \in PF$。由于 $VF = f$，我们有 $WF' = f$。因此，在全赋值 W下， F不为真。 □

13 KCTT 的完备性定理与切规则$_{\mathbf{h}}$

定理 13.1（完备性定理）每个有效公式都是可导出的。

证明。假设 S ($\rightarrow A$) 不可导出。那么根据主句法引理（引理 9.1），存在一条 R-链，其中包含 S，但不包含任何公理；因此，根据主语义引理（引理 9.2），存在一个部分赋值 V，使得 $VA = f$。由定理 12.2 可知，A 无效。□

切规则的可许可性最初由 W. Tait [36] 针对二阶谓词演算（经典简单类型论的一个子系统）证明。M. Takahashi [37]和 D. Prawitz [27]则证明了它对完整的经典简单类型论成立。这些证明与 Takeuti [40] 的句法基本猜想的一个语义等价命题有关；该命题由 K. Schütte [33] 借助部分赋值发展而来。

定理 13.2（割消去定理）

$(\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \Gamma \rightarrow \Delta_1, A, \Delta_2 \ and \vdash_{\mathbf{KCTT_h}} A \rightarrow B)$ *implies*
$\vdash_{\mathbf{KCTT_h}} \Gamma \rightarrow \Delta_1, B, \Delta_2.$

证明。假设 $\Gamma \rightarrow \Delta_1, A, \Delta_2$ 和 $\vdash A \rightarrow B$ 均可导出，则由定理 12.1 可知它们有效。设 W 是集合系统M上的一个全赋值。若 $\Gamma' \rightarrow \Delta'_1, A', \Delta'_2$ 和 $\vdash A' \rightarrow B'$ 是它们的 M-变体，则 $W(\Gamma' \rightarrow \Delta'_1, A', \Delta'_2) = t$ 且 $W(A' \rightarrow B') = t$。若 $WB' = t$，则 $W(\Gamma' \rightarrow \Delta'_1, B', \Delta'_2) = t$，也就是说，根据 SA 引理（引理 12.1），$tv(B') = t$。若 $WB' = f$，则由于 $W(A' \rightarrow B') = t$，我们有 $WA' = f$。于是，由 $W(\Gamma' \rightarrow \Delta'_1, A', \Delta'_2) = t$ 可得 $W(\Gamma' \rightarrow \Delta'_1, B', \Delta'_2) = t$。因此，无论哪种情况，$W(\Gamma' \rightarrow \Delta'_1, A', \Delta'_2) = t$，也就是说，$tv(B') = t$。因此因此，$\Gamma \rightarrow \Delta_1, B, \Delta_2$ 有效，并且根据定理 13.1 可导出。□

14 评述

表列系统为自动化证明公式开辟了道路。这是 Oiva Ketonen 对逻辑、计算机科学和人类智识的巨大贡献（参见 Inoué 和 Miwa [20], Ketonen（由 Negri 和 von Plato 编） [8] 以及 Inoué [15, 16, 18]）。

我们对欣蒂卡序列的定义是针对$\mathbf{KCTT_h}$的。我们可以在更一般的设定下给出该定义，这使得形式化工作（例如 Mizar 形式化）更加容易。

本文第二作者认为，证明可以理解为层。这一观点将在 Inoué [17]中进一步探讨，未来也将把这项研究与本文联系起来。

参考文献

[1] P. B. Andrews, 《**数理逻辑与类型论导论：通过证明走向真理**》**第二版**，Kluwer Academic，2002 年。[2]J. Barwise, 《**数理逻辑手册**》，North-Holland，阿姆斯特丹，1977 年。（另有俄语译本。）[3] J. Barwise, 《一阶逻辑导论》，载于 [2], 第 5–46 页。[4] A. Church, 《简单类型论的一种表述》，《**符号逻辑杂志**》，第 5 卷，第 2 期（1940 年），第 56–68 页。[5] G. Gentzen, 《关于逻辑推理的研究》，《**数学杂志**》，第 39 卷（1935 年），第 176–210 页、第 405–431 页。[6]G. Gentzen, 《纯数论的无矛盾性》，《**数学年刊**》，第 112 卷（1936 年），第 493–565 页，第 493–565 页。（英语译本见 [35], 第 132–213 页。）[7] J.-Y. Girard, 《**证明与类型**》，剑桥大学出版社，1989 年。[8] O. Ketonen（S. Negri 和 J. von Plato 编），《**谓词演算研究**》，College Publications，2022 年。[9] S. C. Kleene，Gentzen 的 LK 和 LJ 演算系统中推理的可置换性，《**美国数学会回忆录**》，（1952 年），第 1–26 页。[10] S. C. Kleene, 《**元数学导论**》，North-Holland，阿姆斯特丹，1952 年。[11] S. C. Kleene, 《**数理逻辑**》，J. Wiley and Sons，纽约，1967 年。[12] L. Henkin，类型论中的完备性，《**符号逻辑杂志**》，第 14 卷（1949 年），第 159–169 页。[13]T. Hosoi, 《**计算机科学逻辑数学**》，（日语），日本评论社，1992 年。[14] Takao Inoué, 《关于 Stahl 的对偶系统的注记》，《**数学逻辑与数学基础杂志**》，第 35 卷，第 387–399 页（1989 年）。

[15] Takao Inoué, 《经典谓词逻辑的 Ketonen 型 Gentzen 与表系统》，2024年，ResearchGate 上 Takao Inoué 个人页面的预印本。[16] Takao Inoué, 《直觉主义谓词逻辑的 Ketonen 型 Gentzen 与表系统》，2025，ResearchGate 上 Takao Inoué 个人页面的预印本。[17] Takao Inoué, 《作为层的证明》。即将出版。[18] Takao Inoué, 《直觉主义简单类型理论的 Ketonen 型 Gentzen 与表系统》。即将出版。[19] Takao Inoué, 《经典一元谓词逻辑的 Ketonen 型 Gentzen 与表系统及其公理化拒斥》。即将出版。[20] Takao Inoué 和 Tadayoshi Miwa（编），**Ketonen 复兴：Oiva Ketonen 的博士论文及其证明论意义**。即将出版。[21] S. Negri 和 J. von Plato，**结构证明论**，剑桥大学出版社，2001。[22] Sara Negri 和 Jan von Plato（编），Oiva Ketonen（作者），**谓词演算研究**，College Publications，2022。[23] M. Machover，**集合论、逻辑及其局限**，剑桥大学出版社，1996。[24] P. Martin-Löf, 《直觉主义简单类型理论的主定理》，载于**P. Suppes 等编，《第四届逻辑、方法论与科学哲学国际大会论文集》，布加勒斯特，1971，《逻辑与数学基础研究》**，第74卷，1973，North-Holland，第279–290页。[25] P. Martin-Löf, 《关于直觉主义类型理论的模型与定义相等的概念》，载于**S. Kanger（编），《第三届斯堪的纳维亚逻辑研讨会论文集》，《逻辑与数学基础研究》**，第82卷，1975，North-Holland，第81–109页。[26] P. S. Novikov，**数学逻辑基础**，Oliver & Boyd，爱丁堡和伦敦，1964。（此书由 L. F. Goron 从俄语原版译成英语。）

[27] D. Prawitz，《高阶逻辑的主定理》，《**符号逻辑杂志**》，第33卷（1968），第452–457页。[28] A. Prestel 和 C. N. Delzell，**数理逻辑与模型论：简明导论**，Springer，2010。[29] D. J. Pym、E. Ritter 和 E. Robinson，《范畴证明论语义学》，《**逻辑学研究**》，第113卷（2025），第125–162页。[30] A. V. Gheorghiu 和 D. J. Pym，《归约推理的语义基础》，Topoi，2025。DOI：https://doi.org/10.1007/s11245-025- 10211-6[31] B. Russell，《**数学原理**》，剑桥大学出版社，剑桥，1903。[32]B. Russell，《以类型论为基础的数理逻辑》，《**美国数学杂志**》，第30卷（第3期）（1908），第222–262页。[33] K. Schütte，《纯数论中对无穷归纳的证明论处理》，《**数学年刊**》第122卷（1951），第369–389页。[34] K. Schütte，**证明论**，Springer，1977。[35] M. E. Szabo（编），**Gerhard Gentzen 论文集**，North-Holland，阿姆斯特丹，1987。[36] W. W. Tait，《超限类型的无限长项》，载于《**形式系统与递归函数：1963年牛津第八届逻辑学研讨会论文集。阿姆斯特丹，1965**》，第176–185页。[37] M. Takahashi，《简单类型论中切消定理的一个证明》，**日本数学会杂志**第19卷（1967），第399–410页。[38] M. Takahashi，《带外延性推理规则的根岑风格简单类型论》，**日本学士院纪要**第44卷（1968），第43–45页。[39] G. Takeuti，《关于一种广义逻辑演算》，《**日本数学杂志**》第23卷（1953），第39–96页。

[40] G. Takeuti，**证明论**，**第2版**，North-Holland，阿姆斯特丹，1987。

[41] T. Tanninen，von Wright 与 Hintikka 论模态逻辑：1951–1962，**Logica Universalis**，第19卷（2025），第517–551页。

[42] A. S. Troelstra，**选择序列**，Clarendon Press，1977。

[43] A. S. Troelstra 与D. van Dalen，**数学中的构造主义：引言，第I、II卷**，North-Holland，阿姆斯特丹，1988。

[44] D. van Dalen，**逻辑与结构，第5版**，Springer，2013。

[45]A. N. Whitehead 与 B. Russell，《**数学原理**》，**第I卷**，剑桥大学出版社，1910。

Tadayoshi Miwa 图书馆，东京大学图书馆，日本东京文京区本乡7-3-1，113-0033
miwa.tadayoshi@mail.u-tokyo.ac.jp

Takao Inoué 信息学部 大和大学 日本大阪吹田市片山町2-5-1，564-0082 inoue.takao@yamato-u.ac.jp（个人）
takaoapple@gmail.com（我更喜欢使用个人邮箱）