arXiv:2601.10040v1 [math.CV] 15 Jan 2026

复平面上合流超几何函数和高斯超几何函数系数的递推关系

ZI-QIAO XU, ZHONG-XUAN MAO, JING-FENG TIAN*

Abstract. 对于 a, b, c, z, p, $\theta \in \mathbb{C}$, 其中 $\mathbb{C}$ 是复平面, $-c \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, 令

$$\mathcal{M}(z) = (1-\theta z)^p M(a;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n,$$

其中 $|z| < \frac{1}{\theta^+}$, $|\arg(1-\theta z)| < \pi$, 并令

$$\mathcal{G}(z) = (1-\theta z)^p F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n,$$

其中 $|z| < 1$, $|\arg(1-\theta z)| < \pi$。本文证明，对于$n \geq 0$，系数 u_n 和 v_n 满足三阶递推关系。这为研究合流超几何函数 $M(a;c;z)$ 和高斯超几何函数 $F(a,b;c;z)$ 提供了一种新方法。我们还给出了其他特殊函数的系数递推关系，例如误差函数、贝塞尔函数、不完全伽马函数、完全椭圆积分和切比雪夫多项式。

1. Introduction

对于复数 a, c，以及 z满足 $c \neq 0$, -1, -2, ...，合流超几何函数 [3] 定义如下:

$$M(a;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = {}_1F_1(a;c;z),$$

其中 $(a)_n$ 表示波赫哈默符号，定义为

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1),$$

当 $n = 1$, 2, ...时，以及当 $a \neq 0$ 时，$(a)_0 = 1$。合流超几何函数是合流超几何方程的一个解，而合流超几何方程是超几何微分方程的退化形式:

$$z\frac{d^2w}{dz^2} + (c-z)\frac{dw}{dz} - aw = 0$$

其中三个正则奇点中的两个合并为一个不规则奇点。作为特例，修正贝塞尔函数和下（上）不完全伽马函数 $\gamma(s, z)$ ($\Gamma(s, z)$)：

$$I_\alpha(x) = i^{-\alpha} J_\alpha(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

$$\gamma(s,z) = \int_0^z t^{s-1}e^{-t}dt$$

and

$$\Gamma(s,z) = \int_z^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 33C15, 33C05, 11B37, 41A05.*Key words and phrases.* 递推关系、合流超几何函数、高斯超几何函数、贝塞尔函数、特殊函数。*通讯作者：田景峰，电子邮箱：tianjf@ncepu.edu.cn。

可表示为合流超几何函数:

$$I_{a-\frac{1}{2}}(z)=M(a;2a;z)\frac{1}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}(\frac{z}{4})^{-\frac{1}{2}+a}e^{\frac{-z}{2}}$$

$$\Gamma(s,z)=e^{-z}U(1-s;1-s;z)$$

and

$$\gamma(s,z)=\frac{z^s}{s}M(1;s+1;-z),$$

分别为 $U(a;\ b;\ z)=\frac{\Gamma}{(1-b)\Gamma(a+1-b)}M(a;\ b;\ z)+\frac{\Gamma}{(b-1)\Gamma(a)}z^{1-b}M(a+1-b;\ 2-b;\ z)$。

此外，高斯超几何函数 [2, 1] 定义为

$$F\left(a,b;c;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_n\left(b\right)_n}{\left(c\right)_n}\frac{z^n}{n!}$$

对于复数 a，b，c，z，其中 $c\neq 0$，-1，-2，.....且 $|z|<1$。高斯超几何函数是欧拉超几何微分方程的一个解:

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{dw}{dz}-abw=0,$$

该方程有三个正则奇点：0，1 和 ∞，参见 [4]。第一类和第二类完全椭圆积分，

$$K(r)=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-r^2\sin^2 t}}\quad\text{and}\quad E(r)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-r^2\sin^2 t}\,dt,$$

可分别表示为以下超几何函数表示式

$$K(r)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2\right)\quad\text{and}\quad E(r)=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2\right).$$

在研究某些特殊函数时，经常会遇到函数 $\mathcal{M}(z)$ 和 $\mathcal{G}(z)$。如果 p 是整数，那么处理 $\mathcal{M}(z)$ 和 $\mathcal{G}(z)$ 就很容易。如果 p 不是整数且 $p\neq a+b-c$，那么$\mathcal{M}(z)$ 和 $\mathcal{G}(z)$ 就难以处理。那么，如何解决这类问题呢?

众所周知，给出递推关系是研究某些特殊函数的重要方法之一。2018年，Yang 和 Tian [6] 给出了 $(r')^pK(r)$ 和 $(r')^pE(r)$ 的麦克劳林级数系数的两个递推关系，$r,p\in\mathbb{R}$。2021年，Yang 和 Tian [5] 给出了 $(1-x)^{-q}F(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2};2;x)$ 的麦克劳林级数系数的另一个递推关系，$x,q\in\mathbb{R}$，并利用算术平均数与几何平均数的加权幂平均，为 $E(r)$ 给出了精确的上下界。2025年，Yang [7] 给出了 $(1-\theta x)^pF(a,b;\ c;\ x)$ 的递推关系，$\theta,p,a,b,c,x\in\mathbb{R}$。

受 [5] 和 [7], 中建立的递推公式启发，本文的主要目的是建立复数域中 $\mathcal{M}(z)$ 和 $\mathcal{G}(z)$ 的麦克劳林级数系数的一般递推关系。

2. Recurrence relations of coefficients involving confluent hypergeometric function

我们先给出一个关于合流超几何函数的必要引理。

引理 2.1。对于，a，b，$z\in\mathbb{C}$，$-b\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$，令

$$M\equiv M(a;c;z),\quad M(a-)\equiv M(a-1;c;z),\quad M(a+)\equiv M(a+1;c;z).$$

我们有如下关系:

$$z\frac{dM}{dz} = a(M(a+) - M) = (c-a)M(a-) + (a-c+z)M,$$

而第一个方程也可以写成:

$$z\frac{dM(a-)}{dz} = (a-1)(M(a) - M(a-))$$

Th定理 2.1. 令 $a, c, p, \theta, z \in \mathbb{C}$, $-c \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, 并令 $|\arg(1-\theta z)| < \pi$。假设 t

$$\mathcal{M}(z) = (1-\theta z)^p M(a, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \quad |z| < \frac{1}{|\theta|}.$$

则 $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{a}{c} - \theta p$, $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+a}{c^2+c} - \frac{2a\theta p}{c} + \theta^2(p-1)p\right)$ 以及

$$u_{n+1} = \beta_0(n)u_n + \beta_1(n)u_{n-1} + \beta_2(n)u_{n-2},$$

其中

$$\beta_0(n) = \frac{a + 2\theta n(c+n-1) - \theta p(c+2n) + n}{(n+1)(c+n)},$$
$$\beta_1(n) = \frac{\theta(-2a - \theta(n-p-1)(c+n-p-2) - 2n + p + 2)}{(n+1)(c+n)},$$
$$\beta_2(n) = \frac{\theta^2(a+n-p-2)}{(n+1)(c+n)}.$$

证明. 令 $\mathcal{M}^*(z) = (1-\theta z)^p M(a-1;\ c;\ z) = (1-\theta z)^p M(a-) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n z^n$。我们先分别对两个幂级数表达式求导，并乘以 $z(1-\theta z)$，于是得到

$$-p\theta z\mathcal{M}(z) + (1-\theta z)((c-a)\mathcal{M}^*(z) + (a-c+z)\mathcal{M}(z)) = (z-\theta z^2)\sum_{n=0}^{\infty} n u_n z^{n-1},$$

and

$$-p\theta z\mathcal{M}^*(z) + (a-1)(1-\theta z)(\mathcal{M}(z) - \mathcal{M}^*(z)) = (z-\theta z^2)\sum_{n=0}^{\infty} n u'_n z^{n-1}.$$

然后，我们只需将 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^*$ 展开成幂级数:

$$(b-a)u'_0 + (a-c)u_0 + z[-p\theta u_0 + (c-a)u'_1 - \theta(b-c)u'_0 + (a-c)u_1 + (1-\theta(a-c))u_0] +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n(-p\theta u_{n-1} + (c-a)u'_n - \theta(c-a)u'_{n-1} + (a-c)u_n + (1-\theta(a-c))u_{n-1} - \theta u_{n-2})$$
$$= u_1 z + \sum_{n=0}^{\infty}(nu_n - \theta u_{n-1})z^n$$

and

$$(a-1)(u_0 - u'_0) + z(-p\theta u'_0 + (a-1)u_1 - (a-1)\theta u_0 - (a-1)u'_1 + (a-1)\theta u'_0) +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n(-p\theta u'_{n-1} + (a-1)(u_n - u'_n) - \theta(a-1)(u_{n-1} - u'_{n-1}))$$
$$= zu'_1 + \sum_{n=2}^{\infty} z^n(nu'_n - (n-1)u'_{n-1}).$$

比较这些方程中 z^n 之间的系数，我们得到

$$u_0 = 1$$
$$u_1 = \frac{a}{c} - \theta p$$
$$(c-a)(u'_n - u'_{n-1}) = (1+c-a)u_n + (\theta(a-c+1) + p\theta - 1)u_{n-1} + \theta u_{n-2}$$
$$(a-1)(u_n - u_{n-1}) = au'_n + (p\theta - \theta a)u'_{n-1}$$

用 u_n、 u_{n-1} 和 u_{n-2}表示 u'_{n-1} ，我们得到

$$u'_{n-1} = \frac{C_0 u_n + C_1 u_{n-1} + C_2 u_{n-2}}{\theta(a-c)(p+1)},$$

其中， $C_0 = n(c+n-1)$ $C_1 = \theta\big(ap + a - cn - n^2 + np + 2n - p - 1\big) - a - n + 1,$

$C_2 = \theta(a+n-1)$。

现在我们将 u'_n 的递推关系代入原方程，最终得到 u_n 的递推关系。对于 u_2，我们只需考虑 $(1-\theta z)^p$ 和 $M(a;\ c;\ z)$ 的泰勒展开：

$$(1-\theta z)^p = 1 - p\theta + \frac{p(p-1)\theta}{2} z^2 + o(z^3)$$

$$M(a;c;z) = 1 + \frac{a}{c} z + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} z^2 + o(z^3)$$

容易看出， z^2 的系数为 $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+a}{c^2+c} - \frac{2a\theta p}{c} + \theta^2(p-1)p\right)$，由此完成证明。□

如果我们限定 $p \in \mathbb{Z}$，则由定理2.1可得到以下结果，而无需规范地设定 $\arg(1-\theta z) \in (-\pi,\ \pi)$。

定理 2.2。设 $a,\ c,\ \theta,\ z \in \mathbb{C},\ p \in \mathbb{Z},\ -c \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$。则

$$(1-\theta z)^p M(a,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \quad |z| < \frac{1}{|\theta|},$$

其中 $u_0 = 1,\ u_1 = \frac{a}{c} - \theta p,\ u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+a}{c^2+c} - \frac{2a\theta p}{c} + \theta^2(p-1)p\right)$ 且

$$u_{n+1} = \beta_0(n) u_n + \beta_1(n) u_{n-1} + \beta_2(n) u_{n-2},$$

其中

$$\beta_0(n) = \frac{a + 2\theta n(c+n-1) - \theta p(c+2n) + n}{(n+1)(c+n)},$$

$$\beta_1(n) = \frac{\theta(-2a - \theta(n-p-1)(c+n-p-2) - 2n + p + 2)}{(n+1)(c+n)},$$

$$\beta_2(n) = \frac{\theta^2(a+n-p-2)}{(n+1)(c+n)}.$$

现在我们将给出定理 2.1 在 $\theta = 1,\ -1,\ i,\ 1+i$ 时的一个特殊情形。将 $\theta = 1$ 代入定理 2.1，可得到以下结果。

推论 2.3。设 $a, c, z, p \in \mathbb{C},\ -c \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$，并设 $|\arg(1-z)| < \pi$。则

$$(1-z)^p M(a,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \quad |z| < 1,$$

其中 $u_0 = 1,\ u_1 = \frac{a}{c} - p,\ u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+a}{c^2+c} - \frac{2ap}{c} + (p-1)p\right)$ 且

$$u_{n+1} = \beta_0(n) u_n + \beta_1(n) u_{n-1} + \beta_2(n) u_{n-2},$$

其中

$$\beta_0(n) = \frac{a + 2n(c+n-1) - p(c+2n) + n}{(n+1)(c+n)},$$

$$\beta_1(n) = \frac{(-2a - (n-p-1)(c+n-p-2) - 2n + p + 2)}{(n+1)(c+n)},$$

$$\beta_2(n) = \frac{(a+n-p-2)}{(n+1)(c+n)}.$$

将 $\theta=-1$ 代入定理 2.1，可得以下结果。

推论 2.4。 设 $a,c,z,p\in\mathbb{C}$, $-c\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$，且令 $|\arg(1+z)|<\pi$。那么

$$(1+z)^pM(a,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n,\quad |z|<1,$$

其中 $u_0=1$, $u_1=\underline{\underline{\frac{a}{c}}}+p$, $u_2=\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\frac{a^2+a}{c^2+c}}}+\underline{\underline{\frac{2ap}{c}}}+(p-1)p\right)$ 以及

$$u_{n+1}=\beta_0(n)u_n+\beta_1(n)u_{n-1}+\beta_2(n)u_{n-2},$$

其中

$$\begin{aligned}\beta_0(n)&=\frac{a-2n(c+n-1)+p(c+2n)+n}{(n+1)(c+n)},\\ \beta_1(n)&=\frac{(2a-(n-p-1)(c+n-p-2)+2n-p-2)}{(n+1)(c+n)},\\ \beta_2(n)&=\frac{(a+n-p-2)}{(n+1)(c+n)}.\end{aligned}$$

将 $\theta=i$ 代入定理 2.1，得到以下结果。

推论 2.5。 设 $a,c,z,p\in\mathbb{C}$, $-c\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$，且令 $|\arg(1-iz)|<\pi$。那么

$$(1-iz)^pM(a,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n,\quad |z|<1,$$

其中 $u_0=1$, $u_1=\underline{\underline{\frac{a}{c}}}-ip$, $u_2=\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\frac{a^2+a}{c^2+c}}}-\underline{\underline{\frac{2iap}{c}}}-(p-1)p\right)$ 以及

$$u_{n+1}=\beta_0(n)u_n+\beta_1(n)u_{n-1}+\beta_2(n)u_{n-2},$$

其中

$$\begin{aligned}\beta_0(n)&=\frac{a+2in(c+n-1)-ip(c+2n)+n}{(n+1)(c+n)},\\ \beta_1(n)&=\frac{i(-2a-i(n-p-1)(c+n-p-2)-2n+p+2)}{(n+1)(c+n)},\\ \beta_2(n)&=-\frac{(a+n-p-2)}{(n+1)(c+n)}.\end{aligned}$$

将 $\theta=1+i$ 代入定理 2.1，可得以下结果。

推论 2.6。 设 $a,c,z,p\in\mathbb{C}$, $-c\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$，且 $|\arg(1-(1+i)z)|<\pi$。则

$$(1-(1+i)z)^pM(a,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n,\quad |z|<\frac{1}{\sqrt{2}},$$

其中 $u_0=1$, $u_1=\underline{\underline{\frac{a}{c}}}-(1+i)p$, $u_2=\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\frac{a^2+a}{c^2+c}}}-\underline{\underline{\frac{2a}{(1+i)c}}}+2i(p-1)p\right)$ 以及

$$u_{n+1}=\beta_0(n)u_n+\beta_1(n)u_{n-1}+\beta_2(n)u_{n-2},$$

其中

$$\begin{aligned}\beta_0(n)&=\frac{a+2(1+i)n(c+n-1)-(1+i)p(c+2n)+n}{(n+1)(c+n)},\\ \beta_1(n)&=\frac{(1+i)(-2a-(1+i)(n-p-1)(c+n-p-2)-2n+p+2)}{(n+1)(c+n)},\\ \beta_2(n)&=\frac{2i(a+n-p-2)}{(n+1)(c+n)}.\end{aligned}$$

3. Recurrence relations of coefficients involving gauss hypergeometric function

我们先给出一个关于高斯超几何函数的有用引理。

引理 3.1. [7] 设 $a,b,c,z\in\mathbb{C},-c\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$ 以及 $|z|<1$

$$F\equiv F\left(a,b;c,z\right),\qquad F_{a-}\equiv F\left(a-1,b;c,z\right),\qquad F_{a+}\equiv F\left(a+1,b;c,z\right)$$

Then

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\left(c-a\right)F_{a-}+\left(a-c+bz\right)F}{z\left(1-z\right)}, \tag{3.1}$$

$$\frac{dF_{a-}}{dz} = \frac{a-1}{z}\left(F-F_{a-}\right) \tag{3.2}$$

我现 在将陈述并证明关于高斯超几何函数的主要定理 .

定理 3.1. 设 $a,b,c,p,\theta,z\in\mathbb{C},\ -c\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$。则有

$$\mathcal{G}(z)=\left(1-\theta z\right)^{p}F\left(a,b;c;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}v_{n}z^{n},$$

其中 $|z|<1,\ |\arg(1-\theta z)|<\pi,\ v_0=1,\ v_1=ab/c-p\theta,$

$$v_2=\frac{1}{2}\theta^2p\left(p-1\right)-\theta p\frac{ab}{c}+\frac{1}{2}\frac{ab\left(b+1\right)\left(a+1\right)}{c\left(c+1\right)},$$

且对于 $n\geq 2,$

$$v_{n+1}=\frac{\mu_{n,p,\theta}\left(a,b,c\right)}{\left(n+1\right)\left(n+c\right)}v_n-\theta\frac{\zeta_{n,p,\theta}\left(a,b,c\right)}{\left(n+1\right)\left(n+c\right)}v_{n-1}+\theta^2\frac{\sigma_{n,p}\left(a,b\right)}{\left(n+1\right)\left(n+c\right)}v_{n-2}, \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mu_{n,p,\theta}\left(a,b,c\right) &= \left(n+a\right)\left(n+b\right)+\theta\left[2n^2-2n\left(p-c+1\right)-cp\right],\\
\zeta_{n,p,\theta}\left(a,b,c\right) &= 2n^2+2\left(a+b-p-2\right)n-\left(a+b-1\right)p+2\left(a-1\right)\left(b-1\right)\\
&\quad+\theta\left(n-p-1\right)\left(n-p+c-2\right),\\
\sigma_{n,p}\left(a,b\right) &= \left(n+a-p-2\right)\left(n+b-p-2\right).
\end{aligned}$$

证明。记

$$\mathcal{G}^{*}(z)\equiv\left(1-\theta z\right)^{p}F\left(a-1,b;c;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}v_{n}^{*}z^{n}.$$

证明过程与第 2 节中的定理 2.1 类似，我们首先考虑对 $\mathcal{G}(z)$ 求导

$$-p\theta\left(1-\theta z\right)^{p-1}F+\left(1-\theta z\right)^{p}F'=\sum_{n=0}^{\infty}nv_{n}z^{n-1}.$$

将（3.1）代入上述方程，并乘以 $z\left(1-z\right)\left(1-\theta z\right)$ ，得

$$\begin{aligned}
&-p\theta z\left(1-z\right)\mathcal{G}(z)+\left(c-a\right)\left(1-\theta z\right)\mathcal{G}^{*}(z)+\left(a-c+bz\right)\left(1-\theta z\right)\mathcal{G}(z)\\
&=\left(1-z\right)\left(1-\theta z\right)\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}nv_{n}z^{n}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

现在我们考虑将 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}^{*}$ 展开为假设的幂级数:

$$\begin{aligned}
&-p\theta\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_{n-1}z^{n}-\sum_{n=2}^{\infty}v_{n-2}z^{n}\right)+\left(c-a\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}v_{n}^{*}z^{n}-\theta\sum_{n=1}^{\infty}v_{n-1}^{*}z^{n}\right)\\
&+\left(a-c\right)\sum_{n=0}^{\infty}v_{n}z^{n}+\left(b-\theta\left(a-c\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}v_{n-1}z^{n}-b\theta\sum_{n=2}^{\infty}v_{n-2}z^{n}\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}nv_{n}z^{n}-\left(\theta+1\right)\sum_{n=2}^{\infty}\left(n-1\right)v_{n-1}z^{n}+\theta\sum_{n=2}^{\infty}\left(n-2\right)v_{n-2}z^{n}.
\end{aligned}$$

我们可以将上面的方程改写为

$$\begin{aligned}&(c-a)\left(v_0^*-v_0\right)+\left[-p\theta v_0+(c-a)\left(v_1^*-\theta v_0^*\right)+(a-c)v_1+(b-\theta(a-c))v_0\right]z\\&+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(c-a)\left(v_n^*-\theta v_{n-1}^*\right)+(a-c)v_n+(b-\theta(a-c+p))v_{n-1}+(p-b)\theta v_{n-2}\right]z^n\\=\;& v_1z+\sum_{n=2}^{\infty}\left[nv_n-(\theta+1)(n-1)v_{n-1}+\theta(n-2)v_{n-2}\right]z^n.\end{aligned}$$

然后，通过比较 z^n 的系数，可得以下结果，

$$(c-a)\left(v_0^*-v_0\right)=0,\quad (c-a)\left(v_1^*-\theta v_0^*\right)+(b-\theta(a-c+p))v_0+(a-c)v_1=v_1,$$

$$\begin{aligned}&(c-a)\left(v_n^*-\theta v_{n-1}^*\right)=(n-a+c)v_n+\theta(n-2+b-p)v_{n-2}\\&+\left[\theta(a-c+p)-b-(\theta+1)(n-1)\right]v_{n-1}\text{ for }n\geq 2.\end{aligned}\tag{3.5}$$

同理，对 $\mathcal{G}^*$ 求导，得到

$$-p\theta(1-\theta z)^{p-1}F_{a-}+(1-\theta z)^pF'_{a-}=\sum_{n=0}^{\infty}nv_n^*z^{n-1}.$$

将（3.2）代入上述方程，并乘以 x（$1-\theta x$），得到:

$$-p\theta z\mathcal{G}^*(z)+(a-1)(1-\theta z)\left(\mathcal{G}(z)-\mathcal{G}^*(z)\right)=(1-\theta z)\sum_{n=0}^{\infty}nv_n^*z^n.$$

然后，我们仍将 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}^*$ 展开成幂级数，得到

$$-p\theta\sum_{n=1}^{\infty}v_{n-1}^*z^n+(a-1)(1-\theta z)\sum_{n=0}^{\infty}\left(v_n-v_n^*\right)z^n=(1-\theta z)\sum_{n=0}^{\infty}nv_n^*z^n,$$

可改写为

$$\begin{aligned}&(a-1)\left(v_0-v_0^*\right)-p\theta\sum_{n=1}^{\infty}v_{n-1}^*z^n+(a-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(v_n-\theta v_{n-1}-v_n^*+\theta v_{n-1}^*\right)z^n\\=\;&\sum_{n=1}^{\infty}\left(nv_n^*-\theta(n-1)v_{n-1}^*\right)z^n.\end{aligned}$$

由 z^n 的系数相等可得 $(a-1)\left(v_0-v_0^*\right)=0$ 以及

$$(n+a-1)v_n^*-\theta(n-2+a-p)v_{n-1}^*=(a-1)v_n-\theta(a-1)v_{n-1}\text{ for }n\geq 1.\tag{3.6}$$

现在由方程（3.5）和（3.6），我们得到 v_{n-1}^* 关于 v_n、v_{n-1}、v_{n-2} 的表示，其中$n\geq 2$

$$\begin{aligned}&\theta(p+1)(a-c)v_{n-1}^*=n(n+c-1)v_n+\theta(n+a-1)(n+b-p-2)v_{n-2}\\&-\left[(\theta+1)n^2+(a+b+(c-p-2)\theta-2)n+(a-1)(b-(p+1)\theta-1)\right]v_{n-1}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

当 $\theta(p+1)$ 时 $\neq 0$，将上述 v_{n-1}^* 和 v_n^* 的表达式代入方程（3.5）可得

$$\begin{aligned}&v_{n+1}-\frac{(2\theta+1)n^2+(a+b+2\theta(c-1-p))n+(ab-cp\theta)}{(n+1)(n+c)}v_n\\&+\theta\frac{\begin{array}{c}(\theta+2)n^2+(2a+2b-2p+\theta(c-2p-3)-4)n\\+\theta(p+1)(p-c+2)+2ab-(p+2)(a+b-1)\end{array}}{(n+1)(n+c)}v_{n-1}\\&-\theta^2\frac{(n+a-p-2)(n+b-p-2)}{(n+1)(n+c)}v_{n-2}=0\text{ for }n\geq 2,\end{aligned}$$

这意味着（3.3）。

此外，利用柯西乘积公式可得以下表达式

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \frac{\theta^{n-k} (-p)_{n-k}}{(n-k)!},$$

这意味着 $v_0 = 1$,

$$v_1 = \frac{ab}{c} - p\theta \quad \text{and} \quad v_2 = \frac{1}{2}\theta^2 p(p-1) - \theta p \frac{ab}{c} + \frac{1}{2}\frac{ab(b+1)(a+1)}{c(c+1)}.$$

当 $\theta = 0$时，递推关系 (3.3) 显然成立。当 $p = -1$时，可以看出

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \theta^{n-k},$$

这可以写成

$$v_{n+1} - \theta v_n = \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1}}{(n+1)! (c)_{n+1}}.$$

这也满足递推关系 (3.3)，整个证明至此完成。 □

将 $\theta = -1$ 代入定理 3.1，可得以下结果。

推论 3.2。设 a, b, c, p, $z \in \mathbb{C}$, $-c \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|z| < 1$, $|\arg(1+z)| < \pi$。则

$$(1+z)^p F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n,$$

其中 $v_0 = 1$、 $v_1 = ab/c + p$,

$$v_2 = \frac{1}{2}p(p-1) + p\frac{ab}{c} + \frac{1}{2}\frac{ab(b+1)(a+1)}{c(c+1)},$$

且对于 $n \geq 2$,

$$v_{n+1} = \frac{\mu_{n,p}(a,b,c)}{(n+1)(n+c)} v_n + \frac{\zeta_{n,p}(a,b,c)}{(n+1)(n+c)} v_{n-1} + \frac{\sigma_{n,p}(a,b)}{(n+1)(n+c)} v_{n-2},$$

其中

$$\begin{aligned}
\mu_{n,p}(a,b,c) &= -n^2 + (a+b-2c+2p+2)n + (ab+cp), \\
\zeta_{n,p}(a,b,c) &= (n+2a+2b-c)(n-1) - p^2 - (a+b-c+2)p + 2ab, \\
\sigma_{n,p}(a,b) &= (n+a-p-2)(n+b-p-2).
\end{aligned}$$

将 $\theta = 1$ 代入定理 3.1，即可容易地得到一个特殊的三阶递推关系。然而，根据定理 3.1的证明，递推阶数可从 3 降至 2。

推论 3.3。设对于 a, b, c, p, $z \in \mathbb{C}$, $-c \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$。则

$$\mathcal{G}(z) = (1-z)^p F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n,$$

其中 $|z| < 1$、 $|\arg(1-z)| < \pi$、 $v_0 = 1$、 $v_1 = ab/c - p$，并且对于 $n \geq 1$,

$$v_{n+1} = \tau_n v_n - \rho_n v_{n-1}, \tag{3.8}$$

其中

$$\tau_n = \frac{2n^2 + (a+b+c-2p-1)n + ab - cp}{(n+1)(n+c)}, \tag{3.9}$$

$$\rho_n = \frac{(n+a-p-1)(n+b-p-1)}{(n+1)(n+c)}. \tag{3.10}$$

证明。 当 $\theta = 1$时，将（$1 - z$）除以关系式（3.4）可得

$$-pz\mathcal{G}(z) + (c-a)\,\mathcal{G}^*(z) + (a-c+bz)\,\mathcal{G}(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} nv_n z^n.$$

将 $\mathcal{G}(z)$ 和 $\mathcal{G}^*(z)$ 展开为幂级数，得到

$$\begin{aligned} & -p\sum_{n=1}^{\infty} v_{n-1}z^n + (c-a)\sum_{n=0}^{\infty} v_n^* z^n + (a-c)\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n + b\sum_{n=1}^{\infty} v_{n-1}z^n \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} nv_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,v_{n-1}z^n, \end{aligned}$$

比较 z^n 的系数，得到 $(c-a)\,(v_0^* - v_0) = 0$,

$$-pv_{n-1} + (c-a)\,v_n^* + (a-c)\,v_n + bv_{n-1} = nv_n - (n-1)\,v_{n-1} \text{ for } n \geq 1,$$

这意味着

$$(c-a)\,v_n^* = (n-a+c)\,v_n - (n-1+b-p)\,v_{n-1} \text{ for } n \geq 1. \tag{3.11}$$

当 $c \neq a$ 时，从关于 $\theta = 1$ 的方程（ v_n^* ）和（ v_{n-1}^* ）中消去 3.11和 3.6，得到

$$\begin{aligned} v_n = & \frac{2(n-1)^2 + (a+b+c-2p-1)(n-1) + ab - cp}{n(c+n-1)}v_{n-1} \\ & - \frac{(n+a-p-2)(n+b-p-2)}{n(c+n-1)}v_{n-2} \text{ for } n \geq 2. \end{aligned}$$

将 n 替换为 $n+1$，即可得到所需的递推公式（3.8）。

当 $c = a$ 时，由关系式（3.11）可得

$$v_n = \frac{n-1+b-p}{n}v_{n-1} \text{ for } n \geq 1,$$

经过简单验证可知，它满足递推关系（3.8）。

根据定理 v_0 和 v_1 的取值，定理 3.1的证明便完成了。 □

将 $\theta = -i$ 代入定理 3.1，可得以下结果。

推论 3.4. 设 $a,\ b,\ c,\ p,\ z \in \mathbb{C},\ -c \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$。则

$$(1-iz)^p\,F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n,$$

其中 $|z| < 1$, $|\arg(1-iz)| < \pi$, $v_0 = 1$, $v_1 = ab/c - ip$,

$$v_2 = -\frac{1}{2}p(p-1) - ip\frac{ab}{c} + \frac{1}{2}\frac{ab(b+1)(a+1)}{c(c+1)},$$

且对于 $n \geq 2$,

$$v_{n+1} = \frac{\mu_{n,p}(a,b,c)}{(n+1)(n+c)}v_n - i\frac{\zeta_{n,p}(a,b,c)}{(n+1)(n+c)}v_{n-1} - \frac{\sigma_{n,p}(a,b)}{(n+1)(n+c)}v_{n-2},$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_{n,p}(a,b,c) &= (n+a)(n+b) + i\left[2n^2 - 2n(p-c+1) - cp\right], \\ \zeta_{n,p}(a,b,c) &= 2n^2 + 2(a+b-p-2)n - (a+b-1)p + 2(a-1)(b-1) \\ &\quad + i(n-p-1)(n-p+c-2), \\ \sigma_{n,p}(a,b) &= (n+a-p-2)(n+b-p-2). \end{aligned}$$

将 $\theta = 1+i$ 代入定理 3.1，可得以下结果。

推论 3.5. 设 $a,b,c,p,z\in\mathbb{C},\ -c\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$. 则

$$(1-(1+i)z)^p F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n z^n,$$

其中 $|z|<1$、$z\neq\frac{1}{1+i}$、$|\arg(1-(1+i)z)|<\pi$、$v_0=1$、$v_1=ab/c-(1+i)p$,

$$v_2=-\frac{1}{2}p(p-1)-(1+i)p\frac{ab}{c}+\frac{1}{2}\frac{ab(b+1)(a+1)}{c(c+1)},$$

并且对于 $n\geq 2$,

$$v_{n+1}=\frac{\mu_{n,p}(a,b,c)}{(n+1)(n+c)}v_n-(1+i)\frac{\zeta_{n,p}(a,b,c)}{(n+1)(n+c)}v_{n-1}+2i\frac{\sigma_{n,p}(a,b)}{(n+1)(n+c)}v_{n-2},$$

其中

$$\begin{aligned}\mu_{n,p}(a,b,c) &= (n+a)(n+b)+(1+i)\left[2n^2-2n(p-c+1)-cp\right],\\ \zeta_{n,p}(a,b,c) &= 2n^2+2(a+b-p-2)n-(a+b-1)p+2(a-1)(b-1)\\ &\quad +(1+i)(n-p-1)(n-p+c-2),\\ \sigma_{n,p}(a,b) &= (n+a-p-2)(n+b-p-2).\end{aligned}$$

4. Applications

现在，我们将利用第 2 节和第 3 节中的主要结果，给出涉及其他特殊函数的麦克劳林递推关系。

4.1. 合流超几何函数的应用。

首先，我们给出一个涉及误差函数 $Erf(z)$ 的递推关系。

推论 4.1. 对于 $z,p\in\mathbb{C},\ |z|^2<\frac{1}{|\theta|}$ 和 $\arg(1+\theta z^2)\in(-\pi,\pi)$，我们可以得到误差函数的系数递推关系：

$$(1+\theta z^2)^p Erf(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{2n+1}$$

其中 $a_n=\frac{(-1)^n u_n}{\sqrt{\pi}}$, $u_0=1$, $u_1=\frac{1}{3}-\theta p$, $u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{2\theta p}{3}+\theta^2(p-1)p\right)$ 和

$$u_{n+1}=\beta_0(n)u_n+\beta_1(n)u_{n-1}+\beta_2(n)u_{n-2},$$

其中

$$\begin{aligned}\beta_0(n)&=\frac{1+2\theta n(1+2n)-\theta p(3+4n)+n}{(n+1)(3+2n)},\\ \beta_1(n)&=\frac{\theta(-1-\theta(n-p-1)(\frac{3}{2}+n-p-2)-2n+p+2)}{(n+1)(\frac{3}{2}+n)},\\ \beta_2(n)&=\frac{\theta^2(2n-2p-3)}{(n+1)(3+2n)},\end{aligned}$$

证明。 众所周知:

$$Erf(z)=\frac{z}{\sqrt{\pi}}M(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2)$$

然后，应用定理2.1，可得:

$$(1+\theta z^2)^p Erf(z)=\frac{z}{\sqrt{\pi}}(1+\theta z^2)^p M(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2)=\frac{z}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(-z^2)^n,$$

其中 $u_0=1$、$u_1=\frac{1}{3}-\theta p$、$u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{2\theta p}{3}+\theta^2(p-1)p\right)$ 和

$$u_{n+1}=\beta_0(n)u_n+\beta_1(n)u_{n-1}+\beta_2(n)u_{n-2},$$

其中

$$\beta_0(n) = \frac{1+2\theta n(1+2n)-\theta p(3+4n)+n}{(n+1)(3+2n)},$$
$$\beta_1(n) = \frac{\theta(-1-\theta(n-p-1)(\frac{3}{2}+n-p-2)-2n+p+2)}{(n+1)(\frac{3}{2}+n)},$$
$$\beta_2(n) = \frac{\theta^2(2n-2p-3)}{(n+1)(3+2n)},$$

可写为:

$$(1+\theta z^2)^p Erf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+1},$$

其中 $a_n = \frac{(-1)^n u_n}{\sqrt{\pi}}$，至此证明完毕。

□

接下来，我们分别给出涉及下不完全伽马函数 $\gamma(s,z)$ 和上不完全伽马函数 $\Gamma(s,z)$ 的递推关系。

推论 4.2. 设 $s, z \in \mathbb{C}$, $-(s+1) \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$，则有:

$$(1-\theta z)^p \gamma(s,z) = (1-\theta z)^p \frac{z^s}{s} M(1;s+1;-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} u_n}{s} z^{n+s}$$

其中 $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \frac{1}{|\theta|}$, $|\arg(1-\theta z)| < \pi$ *and* $|\arg z| < \pi$, $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{s+1} - \theta p$, $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(s+1)^2+s+1} - \frac{2\theta p}{s+1} + \theta^2(p-1)p\right)$ 和

$$u_{n+1} = \beta_0(n)u_n + \beta_1(n)u_{n-1} + \beta_2(n)u_{n-2},$$

其中

$$\beta_0(n) = \frac{1+2\theta n(s+n)-\theta p(s+1+2n)+n}{(n+1)(s+1+n)},$$
$$\beta_1(n) = \frac{\theta(-2-\theta(n-p-1)(s+n-p-1)-2n+p+2)}{(n+1)(s+1+n)},$$
$$\beta_2(n) = \frac{\theta^2(n-p-1)}{(n+1)(s+1+n)}.$$

证明。 应用定理2.1，即可得到:

$$(1-\theta z)^p M(1;s+1;-z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (-z)^n,$$

其中 $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{s+1} - \theta p$, $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(s+1)^2+s+1} - \frac{2\theta p}{s+1} + \theta^2(p-1)p\right)$ 以及

$$u_{n+1} = \beta_0(n)u_n + \beta_1(n)u_{n-1} + \beta_2(n)u_{n-2},$$

其中

$$\beta_0(n) = \frac{1+2\theta n(s+n)-\theta p(s+1+2n)+n}{(n+1)(s+1+n)},$$
$$\beta_1(n) = \frac{\theta(-2-\theta(n-p-1)(s+n-p-1)-2n+p+2)}{(n+1)(s+1+n)},$$
$$\beta_2(n) = \frac{\theta^2(n-p-1)}{(n+1)(s+1+n)}.$$

于是,

$$(1-\theta z)^p \gamma(s,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{s} (-z)^{n+s}$$

证明完毕。 □

推论 **4.3.** 设 s、z、$p \in \mathbb{C}$、$|z| < \frac{1}{|\theta|}$ 满足 $\arg(1-\theta z)$ and $\arg z \in (-\pi, \pi)$，则有：

$$(1-\theta z)^p \Gamma(s,z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^{n+s},$$

其中 $v_n = \Gamma(s) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u_{n-k}}{k!}$，$w_n = \frac{-1}{s} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u'_{n-k}}{k!}$，$u_0 = 1$、$u_1 = 1-\theta p$、$u_2 = \frac{1}{2}\left(1 - 2\theta p + \theta^2 (p-1)p\right)$、$u'_0 = 1$、$u'_1 = \frac{1}{s+1} - \theta p$、$u'_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}^2 \frac{1}{(s+2)} - \frac{2\theta p}{s+1} + \theta^2 (p-1)p\right)$ 以及

$$u_{n+1} = \beta_0(n) u_n + \beta_1(n) u_{n-1} + \beta_2(n) u_{n-2},$$

$$u'_{n+1} = \beta'_0(n) u'_n + \beta'_1(n) u'_{n-1} + \beta'_2(n) u'_{n-2},$$

其中

$$\beta_0(n) = \frac{1 - s + 2\theta n(n-s) - \theta p(1 - s + 2n) + n}{(n+1)(1-s+n)},$$

$$\beta_1(n) = \frac{\theta(-2(1-s) - \theta(n-p-1)(n-s-p-1) - 2n + p + 2)}{(n+1)(1-s+n)},$$

$$\beta_2(n) = \frac{\theta^2 (n-s-p-1)}{(n+1)(1-s+n)}.$$

$$\beta'_0(n) = \frac{1 + 2\theta n(c+n-1) - \theta p(s+1+2n) + n}{(n+1)(s+1+n)},$$

$$\beta'_1(n) = \frac{\theta(-2 - \theta(n-p-1)(s+n-p-1) - 2n + p + 2)}{(n+1)(s+1+n)},$$

$$\beta'_2(n) = \frac{\theta^2 (1+n-p-2)}{(n+1)(s+1+n)}.$$

证明。 众所周知：

$$\Gamma(s,z) = e^{-z} U(1-s; 1-s; z), \tag{4.1}$$

而 $U(a;\ b;\ z) = \frac{\Gamma}{(1-b)\Gamma(a+1-b)} M(a;\ b;\ z) + \frac{\Gamma}{(b-1)\Gamma(a)} z^{1-b} M(a+1-b;\ 2-b;\ z)$ 是库默尔方程的两个解的线性组合。

现在，将上述方程代入（4.1），可得：

$$\begin{aligned}
&(1-\theta z)^p \Gamma(s,z) = e^{-z}(1-\theta z)^p \left(\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1)} M 1 - s; 1-s; z) + \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(1-s)} z^s M(1; s+1; z)\right) \\
&= e^{-z}\left(\Gamma(s) \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n + \frac{-1}{s} z^s \sum_{n=0}^{\infty} u'_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} \left(\Gamma(s) \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n + \frac{-1}{s} z^s \sum_{n=0}^{\infty} u'_n z^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(s) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u_{n-k}}{k!} z^n + z^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{s} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u'_{n-k}}{k!} z^n
\end{aligned}$$

虽然可以直接根据定理 2.1计算 u_n 和 u'_n 的显式表达式，但我们可以直接得到最终表达式：

$$(1-\theta z)^p \Gamma(s,z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^{n+s}$$

其中 $v_n = \Gamma(s) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u_{n-k}}{k!}$，$w_n = \frac{-1}{s} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u'_{n-k}}{k!}$，由此完成证明。

□

我们进一步给出一个涉及修正贝塞尔函数 $I_{a-\frac{1}{2}}(z)$ 的推论。

推论 4.4。 设 a、θ、p、$z\in\mathbb{C}$、 $-2a\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$、 $|z|<\frac{1}{|\theta|}$ 以及 $|\arg(1-\theta z)|<\pi$，则有：

$$(1-\theta z)^p I_{a-\frac{1}{2}}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

其中

$$a_n=\frac{4^{\frac{1}{2}-a}}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k u_{n-k}}{2^k k!},$$

$$u_0=1,u_1=\frac{1}{2}-\theta p,u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{2a+1}-\theta p+\theta^2(p-1)p\right)$$

$$u_{n+1}=\beta_0(n)u_n+\beta_1(n)u_{n-1}+\beta_2(n)u_{n-2},$$

$$\beta_0(n)=\frac{a+2\theta n(2a+n-1)-\theta p(2a+2n)+n}{(n+1)(2a+n)},$$

$$\beta_1(n)=\frac{\theta(-2a-\theta(n-p-1)(2a+n-p-2)-2n+p+2)}{(n+1)(2a+n)},$$

$$\beta_2(n)=\frac{\theta^2(a+n-p-2)}{(n+1)(2a+n)}.$$

证明。 众所周知：

$$M(a;2a;z)=I_{a-\frac{1}{2}}(z)\Gamma(a+\frac{1}{2})(\frac{z}{4})^{\frac{1}{2}-a}e^{\frac{z}{2}}$$

因此，应用定理2.1 可得

$$\begin{aligned}(1-\theta z)^p I_{a-\frac{1}{2}}(z)&=e^{-\frac{z}{2}}\frac{4^{\frac{1}{2}-a}}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}z^{a-\frac{1}{2}}(1-\theta z)^p M(a;2a;z)\\&=\frac{4^{\frac{1}{2}-a}}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}z^{a-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n n!}\sum_{n=0}^{\infty}u_n z^n\\&=\frac{4^{\frac{1}{2}-a}}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}z^{a-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k u_{n-k}}{2^k k!}z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+a-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中 u_n可通过定理 2.1 计算，且 $a_n=\frac{4^{\frac{1}{2}-a}}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k u_{n-k}}{2^k k!}$，由此完成

证明。 □

4.2. **高斯超几何函数的应用**。

首先，通过将 $c=a+b$ 代入定理3.1，我们给出涉及零平衡超几何函数的递推关系。

推论 4.5。 设 a、b、$z\in\mathbb{C}$、 $-(a+b)\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$。则有：

$$(1-\theta z)^p F(a,b;a+b;z)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n z^n$$

其中 $|z|<1$、 $|\arg(1-\theta z)|<\pi$ 以及 $v_0=1$、 $v_1=\frac{ab}{a+b}-p\theta$,

$$v_2=\frac{1}{2}\theta^2 p(p-1)-\theta p\frac{ab}{a+b}+\frac{1}{2}\frac{ab(b+1)(a+1)}{(a+b)(a+b+1)},$$

并且对于 $n\geq 2$,

$$v_{n+1}=\frac{\mu_{n,p,\theta}(a,b)}{(n+1)(n+a+b)}v_n-\theta\frac{\zeta_{n,p,\theta}(a,b)}{(n+1)(n+a+b)}v_{n-1}+\theta^2\frac{\sigma_{n,p}(a,b)}{(n+1)(n+a+b)}v_{n-2},$$

其中

$$\begin{aligned}\mu_{n,p,\theta}(a,b) &= (n+a)(n+b)+\theta\left[2n^2-2n(p-(a+b)+1)-(a+b)p\right],\\ \zeta_{n,p,\theta}(a,b) &= 2n^2+2(a+b-p-2)n-(a+b-1)p+2(a-1)(b-1)\\ &\quad +\theta(n-p-1)(n-p+a+b-2),\\ \sigma_{n,p}(a,b) &= (n+a-p-2)(n+b-p-2).\end{aligned}$$

接下来，我们给出一个涉及对数函数与高斯超几何函数乘积的递推关系。

推论 4.6. 设 $a,b,c,z\in\mathbb{C}$, $-c\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$。则有

$$V(z)=\ln(1-z)\times F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n z^n,$$

其中 $|z|<1$, $|\arg(1-z)|<\pi$, $\lambda_0=0$, $\lambda_1=-1$ 且当 $n\geq 1$ 时,

$$\lambda_{n+1}=\tau_n\lambda_n-\rho_n\lambda_{n-1}+\gamma_n w_n, \tag{4.2}$$

其中 τ_n, ρ_n 在（3.9）、（3.10）中定义，且

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \frac{(c-b-a)n^2+(a+b-2ab)n-c(a-1)(b-1)}{(n+1)(n+a-1)(n+b-1)(n+c)},\\ w_n &= \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{n!\Gamma(n+c)}.\end{aligned}$$

证明。注意到

$$F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}w_n z^n \quad\text{and}\quad \lim_{p\to 0}\frac{(1-z)^p-1}{p}=\ln(1-z),$$

我们有

$$V(z)=\ln(1-z)\times F(a,b;c;z)=\lim_{p\to 0}\frac{(1-z)^p F(a,b;c;z)-F(a,b;c;z)}{p},$$

然后,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n z^n=\lim_{p\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n-w_n}{p}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{p\to 0}\frac{v_n-w_n}{p}\right)z^n,$$

这意味着

$$\lambda_n=\lim_{p\to 0}\frac{v_n-w_n}{p}\quad\text{for } n\geq 0.$$

显然, $\lambda_0=0$, $\lambda_1=-1$。为得到（4.2），我们将递推关系（3.8）改写为

$$\frac{v_{n+1}-w_{n+1}}{p}=\tau_n\frac{v_n-w_n}{p}-\rho_n\frac{v_{n-1}-w_{n-1}}{p}+\frac{\tau_n w_n-\rho_n w_{n-1}-w_{n+1}}{p}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\frac{\tau_n w_n-\rho_n w_{n-1}-w_{n+1}}{p} &= \frac{w_n}{p}\left[\tau_n-\rho_n\frac{n(n+c-1)}{(n+a-1)(n+b-1)}-\frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)}\right]\\ &= \frac{(c-b-a-p)n^2+(a+b-2ab+p-cp)n-c(a-1)(b-1)}{(n+1)(n+a-1)(n+b-1)(n+c)}w_n\\ &\to \frac{(c-b-a)n^2+(a+b-2ab)n-c(a-1)(b-1)}{(n+1)(n+a-1)(n+b-1)(n+c)}w_n=\gamma_n w_n,\end{aligned}$$

所需的递推关系（4.2）由此得到 $p\to 0$, 证明完毕 . □

通过将显式的 a, b, c代入定理3.1，我们还得到了对应于第一类和第二类完全椭圆积分的一个特例。

推论 4.7. 设 $0<r<1$，则有：

$$(1-\theta r^2)^p K(r)=\frac{\pi}{2}(1-\theta r^2)^p F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{2}v_n r^{2n}$$

$$(1-\theta r^2)^p E(r)=\frac{\pi}{2}(1-\theta r^2)^p F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{2}v'_n r^{2n},$$

其中 $v_0=1$, $v_1=-\frac{1}{4}-p\theta$, $v_2=\frac{1}{2}\theta^2p(p-1)-\frac{1}{4}\theta p+\frac{9}{64}$ 且 $v'_0=1$, $v'_1=-\frac{1}{4}-p\theta$, $v'_2=\frac{1}{2}\theta^2p(p-1)+\frac{1}{4}\theta p-\frac{3}{64}$.

且对于 $n\geq 2$,

$$v_{n+1}=\frac{\mu(n,p,\theta)}{(n+1)^2}v_n-\theta\frac{\zeta(n,p,\theta)}{(n+1)^2}v_{n-1}+\theta^2\frac{\sigma(n,p)}{(n+1)^2}v_{n-2},$$
$$v'_{n+1}=\frac{\mu'(n,p,\theta)}{(n+1)^2}v'_n-\theta\frac{\zeta'(n,p,\theta)}{(n+1)^2}v'_{n-1}+\theta^2\frac{\sigma'(n,p)}{(n+1)^2}v'_{n-2},$$

其中

$$\begin{aligned}\mu(n,p,\theta) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)+\theta\left[2n^2-2np-p\right],\\ \zeta(n,p,\theta) &= 2n^2-2(p+1)n+\frac{1}{2}+\theta(n-p-1)^2,\\ \sigma(n,p) &= \left(n-p-\frac{3}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu'(n,p,\theta) &= n^2-\frac{1}{4}+\theta\left(2n^2-2np-p\right),\\ \zeta'(n,p,\theta) &= 2n^2-2(p+2)n+p-\frac{3}{2}+\theta(n-p-1)^2,\\ \sigma'(n,p) &= \left(n-p-\frac{5}{2}\right)\left(n-p-\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

我们进一步给出了对数函数与幂函数乘积的显式幂级数展开。

花冠 **推论 4.8。** 设 $z,p\in\mathbb{C}$, $-p\notin\mathbb{N}$, $|z|<1$ 且 $|\arg(1-z)|,|\arg(1+z)|<\pi$, 则有

$$(1+z)^p ln(1-z)=-\sum_{n=0}^{\infty}v_n z^{n+1}$$

其中

$$v_n=\frac{(-1)^n(1-p)_n}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k k!}{(1-p)_k}\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j(-p-1)_j}{j!}\right]. \tag{4.3}$$

若存在一个 $-p_0\in\mathbb{N}$，使得 $(1-p_0)_k=0$ 对某些 $0\leq k\leq n$ 成立，则定义 $v_n=\lim_{p\to p_0}v_n(p)$。

证明。 我们只考虑 $-p\notin\mathbb{N}$ 的情形。注意：

$$-\frac{\ln(1-z)}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}=F(1,1;2;z).$$

取 $(a,b,c)=(1,1,2)$ 代入推论 3.2 可得 $v_0=1$, $v_1=\frac{1}{2}+p$, $v_2=\frac{3p^2+2}{6}$ 并且对于 $n\geq 2$,

$$v_{n+1}=-\frac{n-2p-1}{n+2}v_n+\frac{n^2+n-p^2-2p}{(n+1)(n+2)}v_{n-1}+\frac{(n-p-1)^2}{(n+1)(n+2)}v_{n-2}.$$

这个三阶递推关系可以化简为一个二阶递推关系：

$$v'_{n+1}=\frac{p+2}{n+2}v'_n+\frac{n(n-p-1)}{(n+2)(n+1)}v'_{n-1},\qquad n\geq 1. \tag{4.4}$$

其中

$$v_n' = v_n + \frac{n-p}{n+1} v_{n-1} \tag{4.5}$$

其中 $v_1' = (p+2)/2$ 和 $v_2' = (p^2+3p+4)/6$。此外，二阶递推关系（4.4）可以化为一阶递推关系：

$$v_{n+1}'' = -\frac{n-p-1}{n+2} v_n'', \qquad n \geq 2, \tag{4.6}$$

其中

$$v_n'' = v_n' - \tfrac{n}{n+1} v_{n-1}' \text{ with } v_2'' = \tfrac{1}{6}p(p+1).$$

求解递推方程（4.6）得到

$$v_n' - \frac{n}{n+1} v_{n-1}' = v_n'' = \frac{(-1)^n(-1-p)_n}{(n+1)!},$$

结合（4.5），可知

$$(k+1)v_k + (k-p)v_{k-1} = (k+1)v_k' = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j(-1-p)_j}{(j+1)!},$$

对于 $k \geq 1$。由此求解 v_k 得到（4.3），证明完毕。 □

下面的推论给出了 $(1-z^2)$ 与反双曲正切函数 $arctanhz$的乘积的系数递推关系。

推论4.9。令 $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$，则有：

$$f(z) = (1-z^2)arctanhz = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^{2n+1}$$

其中 $v_0 = 1, v_1 = -\frac{1}{6}$，且对于 $n \geq 1$,

$$v_n = \tau_n v_n - \rho_n v_{n-1},$$

其中

$$\tau_n = \frac{2n^2-1}{(n+\frac{3}{2})(n+1)}$$
$$\rho_n = \frac{(n-1)(2n-3)}{(n+1)(2n+3)}$$

证明。众所周知，反双曲正切函数有如下高斯超几何表示：

$$arctanhz = zF(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2)$$

因此，由推论 3.3，乘积变为：

$$f(z) = z(1-z^2)F(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2) = z\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^{2n}.$$

并且系数 v_n 可通过推论 3.3计算得出，从而完成证明。 □

下面的推论给出了切比雪夫多项式系数的递推关系$y = T_m(z) = T_n(\text{余弦 } \theta) = \text{余弦}(n\theta)$ $z \in \mathbb{C}$。切比雪夫多项式是下列方程的解：

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - z\frac{dy}{dz} + m^2 y = 0$$

并且它可以表示为高斯超几何函数：

$$T_m(z) = F(-m, m; \frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}) \tag{4.7}$$

推论 4.10。 设 $z,\theta,p\in\mathbb{C}$, $|\frac{1-z}{2}|<1$ 和 $|\arg(1-\theta\frac{1-z}{2})|<\pi$, 则有:

$$f(z)=(1-\theta\frac{1-z}{2})^{p}T_{m}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}v_{n}(\frac{1-z}{2})^{n}$$

其中 $v_0=1$, $v_1=-2m^2-p\theta$,

$$v_2=\frac{1}{2}\theta^2p\left(p-1\right)+2m^2\theta p+\frac{4m^2(m+1)(m-1)}{6},$$

且对于 $n\geq 2$,

$$v_{n+1}=\frac{\mu_{n,p,\theta}\left(m\right)}{\left(n+1\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}v_n-\theta\frac{\zeta_{n,p,\theta}\left(m\right)}{\left(n+1\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}v_{n-1}+\theta^2\frac{\sigma_{n,p}\left(m\right)}{\left(n+1\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}v_{n-2},$$

其中

$$\begin{aligned}\mu_{n,p,\theta}\left(m\right) &= \left(n-m\right)\left(n+m\right)+\theta\left[2n^2-2n\left(p-c+1\right)-cp\right],\\ \zeta_{n,p,\theta}\left(m\right) &= 2n^2-2\left(p+2\right)n+p+2\left(-m-1\right)\left(m-1\right)\\ &\quad+\theta\left(n-p-1\right)\left(n-p+\frac{1}{2}-2\right),\\ \sigma_{n,p}\left(m\right) &= \left(n-m-p-2\right)\left(n+m-p-2\right).\end{aligned}$$

证明。 我们只需利用方程 (4.7) 推导:

$$(1-\theta\frac{1-z}{2})^{p}T_{m}(z)=(1-\theta\frac{1-z}{2})^{p}F(-m,m;\frac{1}{2};\frac{1-z}{2}).$$

然后只需应用定理 3.1 计算递推关系的显式表达式, 即完成证明。 □

下面的推论给出了 $(1+\theta z)^p$ 与 $(1+z)^\alpha$ 的乘积的系数的递推关系。

推论 4.11. 设 $z,\theta,p,\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $|z|<1$ 和 $|\arg(1+\theta z)|<\pi$, 则有:

$$f(z)=(1+\theta z)^{p}(1+z)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}v_{n}(-z)^{n}$$

其中 $v_0=1$, $v_1=\alpha-p\theta$,

$$v_2=\frac{1}{2}\theta^2p\left(p-1\right)-\theta p\alpha+\alpha(\alpha+1),$$

且对于 $n\geq 2$,

$$v_{n+1}=\frac{\mu_{n,p,\theta}\left(\alpha,\beta\right)}{\left(n+1\right)\left(n+\beta\right)}v_n-\theta\frac{\zeta_{n,p,\theta}\left(\alpha,\beta\right)}{\left(n+1\right)\left(n+\beta\right)}v_{n-1}+\theta^2\frac{\sigma_{n,p}\left(\alpha,\beta\right)}{\left(n+1\right)\left(n+\beta\right)}v_{n-2},\tag{4.8}$$

其中

$$\begin{aligned}\mu_{n,p,\theta}\left(\alpha,\beta\right) &= \left(n+\alpha\right)\left(n+\beta\right)+\theta\left[2n^2-2n\left(p-\beta+1\right)-\beta p\right],\\ \zeta_{n,p,\theta}\left(\alpha,\beta\right) &= 2n^2+2\left(\alpha+\beta-p-2\right)n-\left(\alpha+\beta-1\right)p+2\left(\alpha-1\right)\left(\beta-1\right)\\ &\quad+\theta\left(n-p-1\right)\left(n-p+\beta-2\right),\\ \sigma_{n,p}\left(\alpha,\beta\right) &= \left(n+\alpha-p-2\right)\left(n+\beta-p-2\right).\end{aligned}$$

证明. 众所周知, $(1+z)^\alpha=F(\alpha,\beta;\beta;-z)$, 将其代入上述方程并应用定理 3.1, 即可完成证明。 □

下面的推论给出了 $(1-\theta z^2)^p$与反正弦 z的乘积的系数的递推关系。

推论 4.12. 设 $z, \theta, p \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ 和 $|\arg(1-\theta z^2)| < \pi$，则有：

$$f(z) = (1-\theta z^2)^p \arcsin z = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^{2n+1}$$

其中 $v_0 = 1$, $v_1 = \frac{1}{6} - p\theta$,

$$v_2 = \frac{1}{2}\theta^2 p\,(p-1) - \frac{1}{6}\theta p + \frac{3}{40},$$

且对于 $n \geq 2$,

$$v_{n+1} = \frac{\mu_{n,p,\theta}}{(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)} v_n - \theta \frac{\zeta_{n,p,\theta}}{(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)} v_{n-1} + \theta^2 \frac{\sigma_{n,p}}{(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)} v_{n-2}, \tag{4.9}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mu_{n,p,\theta} &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right) + \theta\left[2n^2 - 2n\left(p-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}p\right], \\
\zeta_{n,p,\theta} &= 2n^2 - 2\,(p+1)\,n + \frac{1}{2} + \theta\,(n-p-1)\left(n-p-\frac{1}{2}\right), \\
\sigma_{n,p} &= \left(n-p-\frac{1}{2}\right)\left(n-p-\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

证明。 众所周知，反正弦 $z = zF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 32; z^2)$,-然后我们将其代入上述方程，并应用定理 3.1，即可完成证明。 □

以下推论给出了 $(1+\theta z^2)^p$与反正切 z的乘积的系数的递推关系。

推论 4.13. 设 z、 θ、 $p \in \mathbb{C}$、 $|z| < 1$ 和 $|\arg(1+\theta z^2)| < \pi$，则有：

$$f(z) = (1+\theta z^2)^p \arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v_n z^{2n+1}$$

其中 $v_0 = 1$、 $v_1 = \frac{1}{3} - p\theta$,

$$v_2 = \frac{1}{2}\theta^2 p\,(p-1) - \frac{1}{3}\theta p + \frac{1}{5},$$

且对于 $n \geq 2$,

$$v_{n+1} = \frac{\mu_{n,p,\theta}}{(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)} v_n - \theta \frac{\zeta_{n,p,\theta}}{(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)} v_{n-1} + \theta^2 \frac{\sigma_{n,p}}{(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)} v_{n-2}, \tag{4.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mu_{n,p,\theta} &= \left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1) + \theta\left[2n^2 - 2n\left(p-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}p\right], \\
\zeta_{n,p,\theta} &= 2n^2 - 2\left(p+\frac{1}{2}\right)n - \frac{1}{2}p + \theta\,(n-p-1)\left(n-p-\frac{1}{2}\right), \\
\sigma_{n,p} &= \left(n+\frac{1}{2}-p-2\right)(n-p-1).
\end{aligned}$$

证明. 众所周知，反正切 $z = zF(\frac{1}{2}, 1; 32; -z^2)$,- 将其代入上面的方程并应用定理3.1，即可完成证明。□

以下推论给出了乘积 $(1 - \theta$ 正弦$^2\, z)^p$ 和余弦 ξz的系数的递推关系。

推论 4.14. 令 $z, \xi, \theta, p \in \mathbb{C}$, |正弦 $z| < 1$ 和 $|\arg(1-\theta$ 正弦$^2\, z)| < \pi$，则有：

$$f(z) = (1-\theta \sin^2 z)^p \cos \xi z = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (\sin z)^{2n}$$

其中 $v_0=1$, $v_1=-\frac{\xi^2}{2}-p\theta$,

$$v_2=\frac{1}{2}\theta^2p\left(p-1\right)+\frac{1}{2}p\theta\xi^2+\frac{\xi^2\left(\xi^2-4\right)}{24},$$

对于 $n\geq 2$,

$$v_{n+1}=\frac{\mu_{n,p,\theta}}{\left(n+1\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}v_n-\theta\frac{\zeta_{n,p,\theta}}{\left(n+1\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}v_{n-1}+\theta^2\frac{\sigma_{n,p}}{\left(n+1\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}v_{n-2},$$

其中

$$\begin{aligned}\mu_{n,p,\theta} &= n^2-\frac{\xi^2}{4}+\theta\left[2n^2-\left(2p+1\right)n-\frac{p}{2}\right],\\ \zeta_{n,p,\theta} &= 2n^2-2\left(p+2\right)n+p+2-\frac{\xi^2}{2}+\theta\left(n-p-1\right)\left(n-p-\frac{3}{2}\right),\\ \sigma_{n,p} &= \left(n-p-2\right)^2-\frac{\xi^2}{4}.\end{aligned}$$

证明。 众所周知，余弦 $\mu z=F(\frac{\xi}{2},\ -\frac{\xi}{2};\ \frac{1}{2};\ \text{正弦}^2\, z)$，然后将其代入上述方程，并应用定理 3.1，证明完毕。 □

下面的推论给出了 $(1-\theta\,\text{正弦}^2\, z)^p$ 与正弦 ξz之乘积的系数的递推关系。

推论 4.15。 设 $z,\xi,\theta,p\in\mathbb{C}$, $|\,\text{正弦}\ z|<1$ 和 $|\arg(1-\theta\,\text{正弦}^2\, z)|<\pi$，则有：

$$f(z)=(1-\theta\sin^2 z)^p\sin\xi z=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(\sin z)^{2n+1}$$

其中 $v_0=1$, $v_1=\frac{1-\xi^2}{6}-p\theta$,

$$v_2=\frac{1}{2}\theta^2p\left(p-1\right)+\frac{1}{6}p\theta\left(\xi^2-1\right)+\frac{\left(1-\xi^2\right)\left(9-\xi^2\right)}{120},$$

以及对于 $n\geq 2$,

$$v_{n+1}=\frac{\mu_{n,p,\theta}}{\left(n+1\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}v_n-\theta\frac{\zeta_{n,p,\theta}}{\left(n+1\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}v_{n-1}+\theta^2\frac{\sigma_{n,p}}{\left(n+1\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}v_{n-2},\tag{4.11}$$

其中

$$\begin{aligned}\mu_{n,p,\theta} &= n^2+n+\frac{1-\xi^2}{4}+\theta\left[2n^2-\left(2p-1\right)n-\frac{3p}{2}\right],\\ \zeta_{n,p,\theta} &= 2n^2-2\left(p+1\right)n+\frac{1-\xi^2}{2}\\ &\quad+\theta\left(n-p-1\right)\left(n-p-\frac{1}{2}\right),\\ \sigma_{n,p} &= \left(n-p-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{\xi^2}{4}.\end{aligned}$$

证明。 众所周知，正弦 $\mu z=\mu\,\text{正弦}\ zF(\frac{1+\xi}{2},\ \frac{1-\xi}{2};\ \frac{3}{2};\ \text{正弦}^2\, z)$，然后将其代入上述方程，并应用定理 3.1，证明完毕。 □

下面的推论给出了 $(1-\theta z^2)^p$与 $\log\frac{1+z}{1-z}$ 的乘积的系数的递推关系。

推论 4.16。 设 $z,,\theta,p\in\mathbb{C}$, $|z|<1$ 和 $|\arg(1-\theta z^2)|,|\arg(\frac{1+z}{1-z})|<\pi$，则有：

$$f(z)=(1-\theta z^2)^p\log\frac{1+z}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}2v_nz^{2n+1}$$

其中 $v_0 = 1$, $v_1 = \frac{1}{3} - p\theta$,

$$v_2 = \frac{1}{2}\theta^2 p\,(p-1) - \frac{1}{3}p\theta + \frac{1}{5},$$

且对于 $n \geq 2$,

$$v_{n+1} = \frac{\mu_{n,p,\theta}}{(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)}v_n - \theta\frac{\zeta_{n,p,\theta}}{(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)}v_{n-1} + \theta^2\frac{\sigma_{n,p}}{(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)}v_{n-2}, \tag{4.12}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mu_{n,p,\theta} &= n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2} + \theta\left[2n^2 - (2p-1)\,n - \frac{3p}{2}\right], \\
\zeta_{n,p,\theta} &= 2n^2 - (2p+1)\,n - \frac{p}{2} \\
&\quad + \theta\,(n-p-1)\left(n-p-\frac{1}{2}\right), \\
\sigma_{n,p} &= (n-p-1)\left(n-p-\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

证明。 众所周知，$\log\frac{1+z}{1-z} = 2zF(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2)$，然后只需将其代入上面的方程，并应用定理 3.1，即可完成证明。 □

最后，我们给出反三角函数与反双曲函数乘积的系数递推关系。

推论 4.17。 设 $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ 和 $|\arg(1-z^2)| < \pi$，则有：

$$f(z) = arcsinz \times arctanhz = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^{2n+2}$$

其中 $v_n = \frac{v'_n + v''_n}{2n+2}$ 和 $v'_0 = v''_0 = 1$, $v'_1 = \frac{5}{6}$, $v''_1 = \frac{7}{6}$，其中

$$\begin{aligned}
v'_{n+1} &= \frac{2n^2+3n+\frac{5}{4}}{(n+1)(n+\frac{3}{2})}v'_n - \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)}v'_{n-1} \\
u''_{n+1} &= \frac{2n^2+\frac{7}{2}n+\frac{7}{4}}{(n+1)(n+\frac{3}{2})}v''_n - \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n+1)(n+\frac{3}{2})}v''_{n-1}
\end{aligned}$$

证明。 对于 $f(z) = arcsinz \times arctanhz$，我们可以先对其求导，得到：

$$\begin{aligned}
f' &= (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}arctanhz + (1-z^2)^{-1}arcsinz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} v'_n z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} v''_n z^{2n+1}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

而 v'_n 和 v''_n 可直接通过推论 3.3计算：

$$\begin{aligned}
&v'_0 = v''_0 = 1, v'_1 = \frac{5}{6}, v''_1 = \frac{7}{6} \\
&v'_{n+1} = \frac{2n^2+3n+\frac{5}{4}}{(n+1)(n+\frac{3}{2})}v'_n - \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)}v'_{n-1} \\
&v''_{n+1} = \frac{2n^2+\frac{7}{2}n+\frac{7}{4}}{(n+1)(n+\frac{3}{2})}v''_n - \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n+1)(n+\frac{3}{2})}v''_{n-1}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

现在，根据上述两个特殊函数的麦克劳林展开，我们知道：

$$\begin{aligned}
arcsinz &\sim z + \frac{z^3}{6} + \frac{3}{40}z^5 + o(z^5) \\
arctanhz &\sim z + \frac{z^3}{3} + \frac{1}{5}z^5 + o(z^5)
\end{aligned}$$

因此，我们只需将 $f(z)$ 写成幂级数并对其求导：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^{2n+2}$$
$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) v_n z^{2n+1} \tag{4.15}$$

现在比较 z^{2n+1} 在（4.13）和（4.15）中的系数，可得：

$$v_n = \frac{v'_n + v''_n}{2n+2} \tag{4.16}$$

Comb结合（4.14）和（4.16）的结果，即得最终结果，证明完毕。 .

□

References

[1] K. Aomoto 和 M. Kita, *Theory of Hypergeometric Functions*, 《施普林格数学专著》, 施普林格, 东京, 2011年。[2] F. Beukers, Gauss 超几何函数, 载于 *Arithmetic and Geometry around Hypergeometric Functions*, 《数学进展》第 **260**卷, 23–42页, Birkhäuser, 巴塞尔, 2007年。[3] H. Buchholz, *The Confluent Hypergeometric Function with Special Emphasis on Its Applications*, 《施普林格自然哲学论丛》第15卷, 施普林格, 纽约, 1969年。[4] F. W. J. Olver、D. W. Lozier、R. F. Boisvert 和 C. W. Clark（编）, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2010年。[5] Z.-H. Yang 和 J.-F. Tian, 《涉及第一类完全椭圆积分的绝对单调性及其应用》, *Acta Math. Sci.* **42**, 847–864页, 2022年。[6] Z.-H. Yang, 《用单参数平均精确逼近第二类完全椭圆积分》, *J. Math. Anal. Appl.* **467(1)**, 446–461页, 2018年。[7] Z.-H. Yang, 《涉及超几何函数的麦克劳林级数系数的递推关系及其应用》, *Proc. Amer. Math. Soc.* **153(8)**, 2025年。

Zi-Qiao Xu, Hebei Key Laboratory of Physics and Energy Technology, Department of Mathematics andPhysics, North China Electric Power University, Yonghua Street 619, 071003, Baoding, P. R. China*Email address*: ziqiaoxu678@gmail.com

Zhong-Xuan Mao, Hebei Key Laboratory of Physics and Energy Technology, Department of Mathematicsand Physics, North China Electric Power University, Yonghua Street 619, 071003, Baoding, P. R. China*Email address*: maozhongxuan2001@126.com

Jing-Feng Tian, Hebei Key Laboratory of Physics and Energy Technology, Department of Mathematicsand Physics, North China Electric Power University, Yonghua Street 619, 071003, Baoding, P. R. China*Email address*: tianjf@ncepu.edu.cn