arXiv:2601.10166v1 [quant-ph] 15 Jan 2026

在当前量子硬件上计算速度场的统计性质

MiriamGoldack [1]、Yosi Atia[3],Ori Alberton[3],和 Karl Jansen[1,4]

[1]德国电子同步加速器DESY，Platanenallee 6，15738 Zeuthen，德国[2]柏林工业大学流体力学与技术声学研究所（ISTA），Straße des 17. Juni 135，10623 Berlin，德国[3]Qedma量子计算，Rokach Blvd 101，特拉维夫，以色列[4]基于计算的科学与技术研究中心，塞浦路斯研究所，20 Kavafi Street，2121 Nicosia，塞浦路斯

2025年12月29日

摘要

量子算法因其良好的伸缩性而日益受到计算流体力学（CFD）领域的关注，因为将物理场编码为量子概率振幅，只需 n个量子比特即可表示 2^n 空间点。量子计算流体动力学面临的一项关键挑战，是如何高效读出模拟结果，而这一问题在文献中鲜有探讨。本文提出了一些方法，可直接从参数化试探电路中提取空间速度场的统计性质，例如中心矩和结构函数，而无需进行完整的量子态层析。作为概念验证，我们将此方法应用于一维速度场，用4个量子比特编码16个空间点，并分析正弦波信号以及Burgers方程演化过程中的四个快照。借助Qedma误差缓解软件QESEM，我们证明此类计算可在当前量子设备上实现高精度，具体使用的是IBMQ的Heron2系统ibm fez。

关键词： 量子计算流体动力学（QCFD）、量子误差抑制与误差缓解（QESEM）、读出问题、湍流、统计性质、Burgers方程

1 引言

流体动力学系统由偏微分方程（PDEs）所支配，例如纳维–斯托克斯方程或其简化形式Burgers方程 [1]。由于其固有的非线性以及对初始条件的敏感性，解析解通常无法获得，因此数值模拟至关重要。然而，要实现高精度模拟，就必须通过包含大量网格点的精细空间离散化来解析精细尺度结构，尤其是在湍流、复杂几何结构或三维系统中更是如此。这显著增加了内存和处理需求，给经典计算流体力学（CFD）带来了重大挑战。

经典流体模拟的高计算成本促使人们日益关注量子计算流体动力学（QCFD）算法。线性偏微分方程可以使用量子线性系统算法求解，相关总结见 [2]。从2009年提出的Harrow-Hassidim-Lloyd算法 [3] 开始，该算法是首个用于求解线性方程组的量子算法，其运行时间随输入矩阵维度呈对数级增长，此领域已经取得了多项进展 [4–9]。相干变分量子线性求解器甚至已被用于求解非线性Burgers方程 [10]。处理非线性偏微分方程的其他方法包括将其变换为常微分方程，如 [11–13], 所示的格子玻尔兹曼方法 [14], ，或用于Burgers方程的Cole-Hopf变换 [15]。变分量子算法（VQA）如 [16–18],所述，基于经典离散化和时间积分方法，并将方程的解视为一个变分问题，其中代价函数在量子计算机上进行评估。通过根据给定的方程、边界条件和外部强迫调整代价函数，这使得求解各种偏微分方程成为可能 [19]。

这些算法大多使用振幅编码，将完整场表示在量子态中：在一个 n量子比特系统中，

每个 2^n 基态都编码一个空间位置，其振幅表示速度等物理量。这种紧凑的编码原则上能够实现远高于经典方法的空间分辨率，并为模拟超越经典极限的复杂流体系统提供了有前景的途径 [17]。

虽然量子算法在解决流体动力学问题时能够提供理论上的计算加速，但仍有两个主要挑战：制备并验证合适的量子态，以及从中提取有意义的结果。在简单情况下，状态制备可能十分直接，例如初始化狄拉克δ函数或高斯分布；对于这些情况，已有高效的方法 [20, 21]。对于更复杂的初始条件，近期方法通过利用目标状态的张量网络表示来构建量子电路 [22–25]。在某些情况下，这使得电路深度比一般指数加载方案所需的电路深度缩短了数个数量级，这表明许多经典数据集的加载效率可能高于此前的假设 [26]。尽管状态制备取得了这些改进，流体动力学实用量子模拟算法面临的主要概念性障碍，仍然是从量子态中提取相关物理量。

正如 Aaronson [27] 所指出的，量子算法通常输出的是一个量子态，而不是完整的解向量。要从该量子态中获取详细信息，例如单个速度值，通常需要进行重复测量，其成本随系统规模呈指数增长，从而不仅削弱了潜在的计算加速，也削弱了使这类编码具有吸引力的指数级内存效率。对于大型系统而言，全态层析变得不可行，因为重构一个 n量子比特的密度矩阵，需要通过在不同基下进行重复测量来估计 $4^n - 1$个独立实参数。尽管替代性读出方法（例如压缩感知 [28, 29], MPS层析 [30], 神经量子态 [31], 或影子层析 [32] 和经典阴影 [33]）相较于全态层析能够显著降低测量成本，但它们通常只能提供近似结果，或依赖特定假设。这些假设包括低秩结构或受限纠缠等，而这些性质通常未必适用于一般的 CFD应用，并且可能使此类方法在更大尺度上变得不可行。张量网络方法也存在类似局限；它们通常被视为量子方法的直接竞争者，其输出同样是一个完整的量子态，这意味着当需要完整的量子态信息时，它们最终也会面临相同的层析瓶颈。

在许多实际场景中，尤其是在湍流研究中，并不需要掌握速度场的全部信息。相反，人们通常最关注其关键统计性质 [34, 35]。如果能直接在量子计算机上计算这些性质，就可以避免成本随规模呈指数增长的态层析，并显著简化后处理。支持这一思路的是 Uchida等人 [15]最近提出的一种求解 Burgers方程 的量子算法。该算法无需进行全态层析，便能从量子态中高效提取多点函数，但前提是能够使用容错量子硬件。

本研究沿用了 Uchida等人 [15], 的类似思路，同样无需进行全态层析，即可提取量子态的统计性质。与他们的方法不同，我们开发了一种适用于当前可用硬件的方法，并在 IBM量子处理单元（QPU）上进行了演示。我们不通过层析重构完整的量子态，而是直接计算编码在量子态向量振幅中的速度场关键空间统计量。为此，我们假设某种量子算法能够求解底层偏微分方程，并利用振幅编码将每个时间步的速度空间分布编码到量子态中。在我们的实现中，该量子态由变分量子算法制备，采用了类似于 [16–18]的参数化试探电路。尽管我们以 Burgers湍流为例演示了该方法，但这一概念也适用于其他方程或一般情境。

所有计算均在 IBM 量子计算的 Heron2 系统 `ibm fez`上完成。该系统是一台 156 量子比特量子计算机，运行 Qedma 的误差抑制与误差缓解软件 QESEM [36]（见附录 B）。结果表明，即使在含噪量子硬件上运行，利用误差缓解也能提取这些数量不多但信息丰富的统计量。这显著降低了对读出和后处理的要求，并为在近期量子设备上开展有意义的量子模拟提供了切实可行的途径。

第 2 节介绍伯格斯方程、湍流统计和振幅编码。在此基础上，我们将在第 3 节提出一种专门的测量策略，用于从量子态中提取计算中心矩和结构函数所需的分量。接下来，第 4 节将介绍电路设计，并展示如何通过硬件感知型修改来优化其在 IBM 重六边形设备上的执行。随后，第 5 节将展示在真实量子硬件上进行测量所得的结果。最后，我们将在第 6 节总结研究发现，并展望未来的发展。

2 背景

2.1 湍流统计

一维黏性伯格斯方程 [1] 是一种非线性偏微分方程，常用作简化模型来研究湍流和非线性波传播。其形式如下：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{1}$$

其中， $u(x,t)$ 是速度场， ν 是运动黏度，而 $f(x,t)$ 表示外部强迫项。尽管该方程形式简单，却能捕捉更复杂的流体动力学系统的关键特征，例如激波的形成、陡峭的速度梯度，以及湍流中典型的能量级联 [34, 35]。先前的研究表明，基于路径积分和蒙特卡罗方法的统计方法能够有效捕捉 Burgers方程中的稀有事件和反常标度行为 [37, 38]。这促使我们专注于提取能够表征流动结构和湍流的统计性质，而非重建完整的速度场。

To 为此，我们将空间区域离散为 N 个点，并定义空间平均值 as

$$\langle u \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i. \tag{2}$$

据此，可以定义一类重要的统计描述量，即固定时间步下空间速度分布的中心矩：

$$\langle u'^k \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (u_i - \langle u \rangle)^k. \tag{3}$$

这些空间平均矩能够简洁地描述空间异质性，对于识别相干涡旋或剪切增强区域等流动结构尤其有用 [35]。

均值是速度值的平均值，而中心矩指的是相对于均值的偏差。第一中心矩（平均偏差）根据定义为零。第二阶矩（方差）量化了速度场围绕其均值波动的强烈程度，并与湍流强度以及流场中波动部分的动能相关。高阶矩，尤其是第三阶矩（与偏度相关）和第四阶矩（与峰度相关），能够更深入地揭示速度分布的不对称性和极端行为。具体而言，偏度反映了不对称程度，这通常与流动中的各向异性有关。它有助于了解涡旋或局部高能量区域等相干结构的普遍程度。峰度可作为间歇性的度量，并凸显极端事件的普遍程度 [34]。

这类矩对类冲击结构的存在尤其敏感。在 Burgers方程中，这些结构表现为由非线性平流项驱动的陡峭梯度。这些结构会导致局部速度发生较大变化，从而使偏度和峰度值增大。因此，即使没有明确重构完整的场，激波也会留下统计特征，如图 1所示：对于具有 $N = 16$ 个网格点、黏度为 $\nu = 0.1$并受到随机强迫的随机初始条件，在 $t = 0.8\,T$处出现了显著结构，其中 T表示总模拟时间（完整的模拟细节请参见小节 5.2 ）。此时，第四阶中心矩中的尖锐峰值与空间剖面中的陡峭速度跃变相重合。

用于分析湍流多尺度特性等特征的另一种工具是结构函数。 k阶结构函数定义如下：

$$S_k(r) = \langle |\Delta u|^k \rangle_{x,t} = \langle |u(x+r,t) - u(x,t)|^k \rangle_{x,t} \tag{4}$$

其中 Δu 表示空间间隔 r上的速度增量，尖括号表示对空间和时间取平均。结构函数描述速度差如何随间隔距离变化，尤其适用于刻画能量在不同长度尺度上的分布以及间歇性 [34, 35]。它们揭示了速度场中的相关长度、相干结构和标度特性，并有助于理解不同湍流状态之间的转变。

通过直接在量子设备上计算中心矩和结构函数，我们旨在以简洁且有意义的方式表征流动行为，而无需承担全态层析带来的开销。

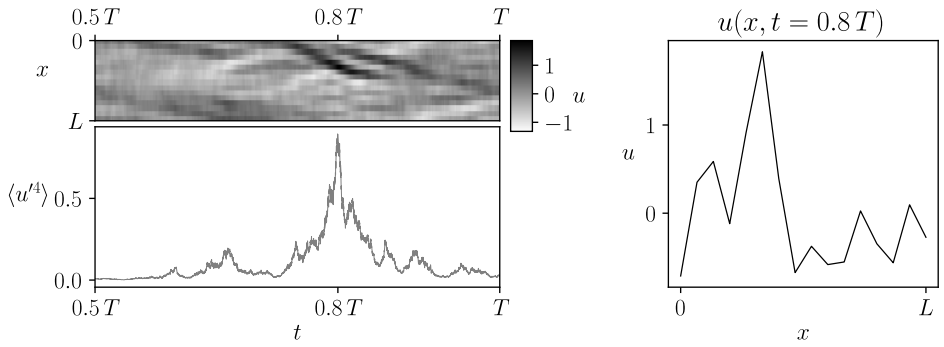


图 1：左上：受迫 Burgers 方程时空演化示例（随机初始条件，$N = 16$，$\nu = 0.1$），展示了激波的形成与传播。该面板是图 11 顶部面板所示完整模拟的一部分。左下：相应四阶中心矩的时间演化，在 $0.8\,T$ 处达到峰值，其中 T表示最终模拟时间。右侧：在 $0.8\,T$时的空间速度分布，显示出陡峭的速度梯度。

2.2 感兴趣的量

第二、第三和第四阶中心矩，如公式（3）所定义，可以改写为均值 $\langle u\rangle$ 与所谓的原始矩 $\langle u^k\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^k$的线性组合：

$$\text{mean} \qquad \langle u\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i \tag{5}$$

$$\text{二阶中心矩} \qquad \langle u'^2\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \langle u\rangle^2 \tag{6}$$

$$\text{三阶中心矩} \qquad \langle u'^3\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^3 - 3\langle u\rangle\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^2 + 2\langle u\rangle^3 \tag{7}$$

$$\text{4th central moment} \qquad \langle u'^4\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^4 - 4\langle u\rangle\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^3 + 6\langle u\rangle^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - 3\langle u\rangle^4 \tag{8}$$

对于结构函数，可以计算单个时间步的空间平均值，表示为

$$\langle|\Delta u|^k\rangle_x = \langle|u(x+r) - u(x)|^k\rangle_x. \tag{9}$$

要获得完整的时空平均值，需要对每个时间步分别计算该值，然后再取平均。

由于速度值为实数，这些偶数指数的表达式 k 可以分解为数据上基本代数和的线性组合。这简化了结构函数的计算，因为所需项仅涉及速度值的幂和乘积。因此，结构函数的计算可视为中心矩计算的直接扩展，只需根据具体指数调整相关求和项。作为示例，我们展示指数 $k = 2$ 和 $k = 4$对应的可测量求和分解：

$$\langle|\Delta u|^2\rangle_x = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N} u_{i+r}u_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} u_{i+r}^2}_{=\sum_i u_i^2}\right] = \frac{1}{N}\left[2\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N} u_{i+r}u_i\right] \tag{10}$$

$$\langle|\Delta u|^4\rangle_x = \frac{1}{N}\left[2\sum_{i=1}^{N} u_i^4 - 4\sum_{i=1}^{N} u_{i+r}^3u_i - 4\sum_{i=1}^{N} u_{i+r}u_i^3 + 6\sum_{i=1}^{N} u_{i+r}^2u_i^2\right]. \tag{11}$$

估算原始矩以及方程（10）和（11）中出现的各项，可重构中心矩及其对应的结构函数，它们构成本研究的主要可观测量。

2.3 量子编码

为实现速度场的高度紧凑表示，并相较于经典方法获得指数级的存储效率，我们采用振幅编码。在这种方法中，速度场的归一化值直接映射为量子态的概率振幅，即:

$$|\phi_u\rangle = \frac{1}{\|u\|}\sum_j u_j |j\rangle \tag{12}$$

其中， u_j 是归一化后的速度场元素， $||u||$ 是 u的二范数。这意味着每个基态对应一个特定的空间点，其振幅对应该位置处的速度场值。因此，完整的量子态表示了固定时间点的速度空间分布。

为制备量子态 $|\phi_u\rangle$，我们使用拟设电路。拟设电路是一种旨在近似目标量子态的参数化量子电路。我们对该量子电路的参数进行优化，使所得量子态尽可能接近所需编码的速度场。通过调整拟设$U(\theta)$的参数 θ ，可以制备状态 $|\phi_u\rangle$:

$$|\phi_u\rangle = U(\theta)|0\rangle^{\otimes n} \tag{13}$$

其中， n 是变分形式量子比特的数量。由于 n量子比特寄存器的 $N = 2^n$ 个基态分别编码一个空间位置，因此该表示方式相对于量子比特数实现了指数级的存储效率。

基于使用参数化量子电路近似量子态这一思想，诸如变分量子算法 [16–18] 的量子计算流体力学方法将偏微分方程的时间演化视为一系列变分优化问题。在每个时间步，都会重新优化拟设 $U(\theta)$的参数，使底层偏微分方程的残差最小化，从而以类似经典时间积分方案的方式更新状态。由于量子态在构造时已归一化，而物理速度场并非如此，因此必须单独恢复整体振幅。为此，将速度场 $\|u\|$ 的范数提取出来，并将其作为额外的标量参数，与拟设参数一同优化。这样便能确保拟设编码速度分布的形状，同时由 $\|u\|$ 恢复其正确的物理量级。关于这一变分表述的更多讨论，请参阅 [16, 17]。

这里，我们假设采用这种时间积分方案，并且每个时间步都会进行参数优化。这意味着，实际编码系统演化的参数是已知的，可用于重构各个状态。本文其余部分将重点从所得状态中提取感兴趣的统计性质。

3 测量策略

方程（5）至（11）中推导出的中心矩和结构函数表达式，分别涉及对速度分量的各次幂求和以及高阶相关函数。由于量子态已归一化，平方和显然等于一，无需显式计算。用于提取这些统计量的算法在设计时考虑了当前量子硬件的噪声特性，因此振幅估计和分块编码等高级技术 [39, 40] 并不实用。相反，我们将关注的统计性质表述为适当可观测量的期望值，从而能够使用误差缓解策略（具体而言，即 QESEM）来降低测量数据中由噪声引起的偏差。

3.1 估计 $\langle u\rangle$

速度场的空间平均值 $\langle u\rangle$ 使用哈达玛测试计算 [41], 。哈达玛测试是一种用途广泛的量子子程序，能够高效估计内积和期望值。其标准形式如图 2 左侧所示，通过测量来估计期望值 $\langle\phi|U|\phi\rangle$的实部，即顶端辅助量子比特的泡利-$X$ 可观测量:

$$\langle X_a\rangle = P(+) - P(-) = \mathrm{Re}\langle\phi|U|\phi\rangle. \tag{14}$$

这里, $P(+)$ 和 $P(-)$ 表示在 X 基中测量基态的概率 .

这一原理可用于估算两个不同量子态之间的内积 $|\phi_1\rangle = U_1|0\rangle$ 和$|\phi_2\rangle = U_2|0\rangle$，方法是采用 [42]中所述的改进的哈达玛测试。如右侧图 2 所示，量子电路在负控制下施加 U_1 ，并在正控制下施加 U_2 。在 [42], 中，重叠 $\langle\phi_1|\phi_2\rangle$ 的实部为

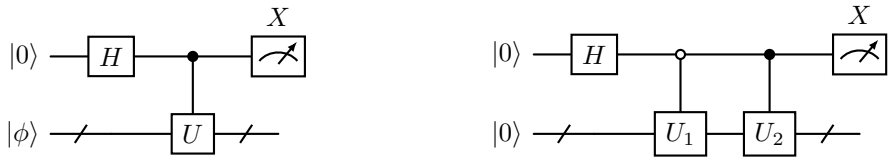


图 2：左：哈达玛测试。辅助量子比特在 X 基下进行测量（由测量仪符号表示），得到 Pauli-X 期望值 $\mathrm{Re}\langle\phi|U|\phi\rangle$。右：改进的哈达玛测试，用于估计 $\mathrm{Re}\langle\phi_1|\phi_2\rangle$，其中 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ 分别通过在全零态上施加 U_1, U_2 制备。

在最后施加哈达玛门后，通过在 Pauli-Z 基底上测量辅助量子比特即可得到。从概念上说，这等同于直接在 X 基底上进行测量。由此得到相同的量：

$$\langle X_a\rangle = \mathrm{Re}\langle\phi_1|\phi_2\rangle. \tag{15}$$

在我们的应用中，量子态 $|\phi_u\rangle = U(\theta)\,|0\rangle$ 通过其振幅编码实值速度场。为了计算空间平均值 $\langle u\rangle$，我们评估速度编码态与均匀叠加态之间的重叠 $\langle\phi_u|+\cdots+\rangle$。后者表示所有空间位置的等权和，即 $|+\cdots+\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i |i\rangle$。以显式向量形式表示，这对应于归一化速度向量与全 1 列向量之间的内积：

$$\langle u\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i = \frac{1}{N}\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_N \end{bmatrix}}_{\|u\|\langle\phi_u|} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\sqrt{N}|+\cdots+\rangle} = \frac{\|u\|}{\sqrt{N}}\langle\phi_u|+\cdots+\rangle \tag{16}$$

由于速度场为实数，内积也是实数，通过哈达玛测试进行测量可高效估计空间平均值。

为进行误差分析，我们计算 $\langle X_a\rangle$（无噪声）测量结果的单次测量标准差。由于对 X_a 进行投影测量会得到 ±1，因此，为了计算测量方差，可以将其视为伯努利随机变量；等价地，利用 $\langle X_a^2\rangle = 1$，方差为

$$\Delta\langle X_a\rangle = \sqrt{1-\langle X_a\rangle^2}.$$

因此，

$$\Delta\langle u\rangle = \frac{||u||}{\sqrt{N}}\Delta\langle X_a\rangle = \frac{||u||}{\sqrt{N}}\sqrt{1-\langle X_a\rangle^2} = \frac{||u||}{\sqrt{N}}\sqrt{1-\frac{\langle u\rangle^2 N}{||u||^2}} = \sqrt{\frac{||u||^2}{N}-\langle u\rangle^2}. \tag{17}$$

要达到加性精度 ε，对 $\langle u\rangle$ 使用哈达玛测试所需的测量次数按以下方式缩放：$O(1/\varepsilon^2)$。哈达玛测试还有几种可选方案。振幅估计 [39] 在拟设电路调用次数（对应电路深度，相当于总量子处理器时间）方面，实现了理论上最优的 $O(1/\varepsilon)$ 缩放。然而，振幅估计所需的深层相干量子电路目前尚不适用于近期量子硬件。另一种方法是对态 $|+\rangle^{\otimes n}$ 进行直接投影测量，从而高效估计振幅大小。与哈达玛测试相比，该方法在拟设调用次数方面具有相同的 $O(1/\varepsilon^2)$ 缩放，但电路深度较低。不过，该方法无法区分 $\langle u\rangle$ 的正负。

估计 $\langle u\rangle$ 的加性统计不确定性按 $\Delta\langle u\rangle \sim \|u\|/\sqrt{N}$缩放，这可直接由方程（17）得出。从相对角度看，这对应于有效信噪因子 $\|u\|^{-1}$，也就是说，较小的速度范数会降低相对精度。在经典流体动力学中，$\|u\|$ 与系统的总动能有关（总动能与 $\|u\|^2$成正比），其大小会因物理设置不同而有很大差异。它由初始条件、边界条件、耗散和外部强迫之间的相互作用决定。在没有外部强迫且边界条件具有耗散性或为零的衰减流中，由于黏性效应，该范数通常会随时间推移而减小。相比之下，在持续流或驱动流中，它可能会在某个统计稳态值附近波动，甚至

如果注入了足够的能量，还可能暂时增大。重要的是，$\|u\|$ 并非仅由底层动力学决定：在无量纲表述中，它设定了能量尺度，却不会影响解的定性行为。因此，通常可以对该范数进行重缩放或选择其取值，以兼顾物理相关性和统计精度。较小的范数可能会放大量子测量中的不确定性，但它并非仅由方程结构决定，在无量纲设置中可以进行调整。

3.2 估计 $\langle u^3\rangle$

通过并行运行两个独立的量子电路，并测量一个记为 O_3 的共同可观测量的期望值，来估计期望值 $\langle u^3\rangle = \frac{1}{N}\sum_i u_i^3$。第一个量子电路与用于估计 $\langle u\rangle$ 的哈达玛测试相同，第二个量子电路则制备 $|\phi_u\rangle$。所制备的状态如下：

$$\frac{|0\rangle_a|+\cdots+\rangle + |1\rangle_a|\phi_u\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |\phi_u\rangle = \frac{1}{2}\Big(|+\rangle_a \cdot \big(|+\cdots+\rangle + |\phi_u\rangle\big) + |-\rangle_a \cdot \big(|+\cdots+\rangle - |\phi_u\rangle\big)\Big) \otimes |\phi_u\rangle, \tag{18}$$

其中，a 是哈达玛测试中的辅助量子比特。我们选择可观测量 O_3 为 ：

$$\begin{aligned} O_3 &= X_a \otimes \sum_i |ii\rangle\langle ii| = O_3^{(+)} - O_3^{(-)} \\ O_3^{(\pm)} &= |\pm\rangle\langle\pm|_a \otimes \sum_i |ii\rangle\langle ii|. \end{aligned} \tag{19}$$

O_3 的期望值给出缩放后的和 $\sum u_i^3$。请注意，分别只有状态的 $|\pm\rangle$ 分支会对 $O_3^{(\pm)}$ 的期望值有贡献。

$$\begin{aligned} \langle O_3^{(\pm)}\rangle &= \frac{1}{4}\mathrm{tr}\Big(\sum_i |ii\rangle\langle ii| \cdot [(|+\cdots+\rangle \pm |\phi_u\rangle) \cdot (\langle+\cdots+| \pm \langle\phi_u|) \otimes |\phi_u\rangle\langle\phi_u|]\Big) \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{tr}\Big(\sum_i |ii\rangle\langle ii| \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4} \Big(\frac{1}{2^{n/2}} \pm \frac{u_{j_1}}{||u||}\Big)\Big(\frac{1}{2^{n/2}} \pm \frac{u_{j_2}^*}{||u||}\Big)\frac{u_{j_3}u_{j_4}^*}{||u||^2}|j_1j_3\rangle\langle j_2j_4|\Big) \\ &= \frac{1}{4}\sum_i \left(\frac{1}{2^{n/2}} \pm \frac{u_i}{||u||}\right)^2 \frac{u_i^2}{||u||^2} = \frac{1}{4||u||^2}\sum_i \left(\frac{1}{2^n} \pm \frac{2u_i}{2^{n/2}||u||} + \frac{u_i^2}{||u||^2}\right)u_i^2 \\ \langle O_3\rangle &= \langle O_3^{(+)}\rangle - \langle O_3^{(-)}\rangle = \frac{1}{4||u||^2}\sum_i \frac{4u_i^3}{2^{n/2}||u||} = \frac{1}{\sqrt{N}||u||^3}\sum_i u_i^3. \end{aligned} \tag{20}$$

我们注意到，更先进的方法（例如 [43]，中的方法）目前在 NISQ 设备上并不实用，但随着量子硬件日趋成熟，这些方法或许会变得可行。

3.3 估计 $\langle u^4\rangle$

计算 $\langle u^4\rangle = \frac{1}{N}\sum_i u_i^4$的依据是：在计算基下测量状态 $|\phi_u\rangle$ 的两个副本时，得到相同测量结果的概率为 $\sum_i u_i^4$。这是因为 $|\phi_u\rangle$的振幅均为实数。我们采用并行态制备方法，也就是说，在分区量子线路中并行制备两次该状态：

$$|\phi_u\rangle^{\otimes 2} = |\phi_u\rangle \otimes |\phi_u\rangle\,. \tag{21}$$

通过测量投影到两个电路产生相同输出的子空间的可观测量

$$O_4 = \sum_j |jj\rangle\langle jj|, \tag{22}$$

我们得到

$$\mathrm{tr}\big(|\phi_u\rangle\langle\phi_u|^{\otimes 2} \cdot O_4\big) = \mathrm{tr}\Big(\frac{1}{\|u\|^4}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,j} u_{i_1}u_{i_2}u_{i_3}^*u_{i_4}^*|i_1i_2\rangle\langle i_3i_4| \cdot |jj\rangle\langle jj|\Big), \tag{23}$$

此处仅为清晰起见保留了复共轭。只有 $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = j$ 的项会对求和有贡献，因此可简化为

$$\frac{1}{\|u\|^4}\sum_j u_j^4. \tag{24}$$

当量子态在计算基下测量时，该量子电路实际上计算的是碰撞概率。除了直接测量 O_4，还可以尝试根据从 $|\phi_u\rangle$ 获得的 M 个计算基样本，通过经验方法估计相同的量。样本中测量结果相同的样本对的期望数量为 $\binom{M}{2}\sum_i u_i^4$。然而，噪声会显著扭曲测量分布，导致这种估计方法产生较大的偏差。

3.4 估计移位和

结构函数的计算涉及速度分量乘积的移位和。这些量可以表示为特定（通常为非对角）投影算符的期望值。为确保可观测量是厄米的（因而可在物理上测量），我们将其定义如下：

$$O^{(r)}_{\text{shifted }1,1} := \frac{1}{2}\sum_j \left(|j\rangle\langle j+r| + |j+r\rangle\langle j|\right) \tag{25}$$

$$O^{(r)}_{\text{shifted }3,1} := \frac{1}{2}\sum_j \left(|j,j\rangle\langle j,j+r| + |j,j+r\rangle\langle j,j|\right) \tag{26}$$

$$O^{(r)}_{\text{shifted }1,3} := \frac{1}{2}\sum_j \left(|j,j+r\rangle\langle j+r,j+r| + |j+r,j+r\rangle\langle j,j+r|\right) \tag{27}$$

$$O^{(r)}_{\text{移位 }2,\ 2} := \sum_j |j,\ j+r\rangle\langle j,\ j+r|. \tag{28}$$

请注意，$O^{(r)}_{\text{移位 }3,\ 1}$ 与 $O^{(r)}_{\text{移位 }1,\ 3}$ 仅在索引顺序上有所不同，重新标记移位 r 后会得到等价的量。

这些可观测量可以分解为泡利算符，并可高效测量。然而，在一般情况下，不同泡利项的数量会呈指数级增长；更大系统规模下的高效实现留待未来研究。

方程（25）中的可观测量只需要一份状态 $|\phi_u\rangle$，而方程（26）、（27）和（28）中的其余表达式则涉及两份状态 $|\phi_u\rangle^{\otimes 2}$，这与用于测量 $\sum_i u_i^4$的设置类似。在每种情况下，都会将所选移位 r 对应的可观测量插入测量电路，从而能够高效估计相应的结构函数分量。

$$\frac{1}{\|u\|^2}\sum_i u_i u_{i+r} = \text{tr}\left(|\phi_u\rangle\langle\phi_u| \cdot O^{(r)}_{\text{shifted }1,1}\right) \tag{29}$$

$$\frac{1}{\|u\|^4}\sum_i u_i^3 u_{i+r} = \text{tr}\left(|\phi_u\rangle\langle\phi_u|^{\otimes 2} \cdot O^{(r)}_{\text{shifted }3,1}\right) \tag{30}$$

$$\frac{1}{\|u\|^4}\sum_i u_i u_{i+r}^3 = \text{tr}\left(|\phi_u\rangle\langle\phi_u|^{\otimes 2} \cdot O^{(r)}_{\text{shifted }1,3}\right) \tag{31}$$

$$\frac{1}{\|u\|^4}\sum_i u_i^2 u_{i+r}^2 = \text{tr}\left(|\phi_u\rangle\langle\phi_u|^{\otimes 2} \cdot O^{(r)}_{\text{shifted }2,2}\right) \tag{32}$$

重要的是，在估计出方程（30）至（32）中的最后三个期望值后，必须先将它们乘以 $||u||^4$，再代入方程（11）。当 $||u||$取值较大时，这种缩放会显著放大任何误差，使移位和对误差极为敏感，后文将对此进行讨论。

与估计 $\langle u^4\rangle$类似，可以使用样本计算结构函数，但量子处理器噪声引起的偏差会十分显著。

4 IBM Heavy-Hex 设备的定制化电路设计

4.1 参数化拟设电路

在当前的 IBM 量子处理单元上实现量子算法面临着实际挑战，尤其是量子比特连通性有限这一问题。我们工作中最复杂的量子电路出现在哈达玛测试的应用中，因为该测试需要实现受控拟设操作。本节将介绍我们如何调整砖墙拟设，以便在这些硬件约束下实现哈达玛测试。

拟设电路需要满足若干要求。它必须具有足够的表达能力，以捕捉各种分布，同时还需要能够训练。这意味着，合适的拟设应包含达到所需精度所必需的参数，且不应存在冗余。此外，还可以根据待展示数据的特征调整拟设结构。由于速度仅取实值，因此可以使用 R_Y 旋转门和 CNOT 门来构造纠缠拟设电路。这种组合具有足够的表达能力，可以生成各种实值量子态，但受电路深度限制，并非所有可能的量子态都能够实现。我们从规范砖墙拟设开始（见图 3），与 [18]类似。

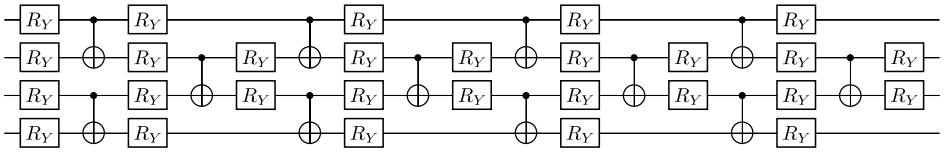


图 3：拟设架构示例，采用由 CNOT 和 R_Y 门构成的砖墙结构，适用于 4个量子比特。初始层包含 R_Y 门，随后是八层 CNOT-R_Y 模块。

本研究使用 IBM Heron r2 设备 `ibm fez`，其采用重六边形拓扑 [44]。在这种布局中，每个量子比特与另外两个或三个量子比特相连（如图 5所示），这限制了需要全连接性的门操作的直接适用性。

这里设计的拟设旨在满足这些约束，同时保持足够的表达能力。为此， R_Y 旋转门仅作用于奇数量子比特。减少拟设的自由度，降低了在重六边形连接结构中实现受控拟设所需的复杂度，正如我们将在第 4.2.1 节所示。然而，这也会降低表达能力；通过在所有量子比特上添加最后一层 R_Y 旋转门（见图 4），可以在一定程度上弥补这一损失。

此外，拟设电路的开头包含一层哈达玛门。此设计考虑了后续使用哈达玛测试的需要（见第 4.2.1 节），因为这样一来，拟设本身便包含了哈达玛测试所需的两种状态。将所有 R_Y 角度设为零时，仅通过哈达玛门即可制备均匀参考态 $|+\rangle^{\otimes n}$；启用 R_Y 旋转门则会生成速度编码态。因此，在哈达玛测试中，只需控制单量子比特 R_Y 旋转门。CNOT 无需受控，也就是说，无需将其替换为门开销较大的 Toffoli 门，因为它们同时属于这两种状态。综合上述特征，该电路的架构如图 4所示。为便于说明，我们展示了 4 量子比特情形下的构造，但该拟设可直接扩展至更大的系统规模。

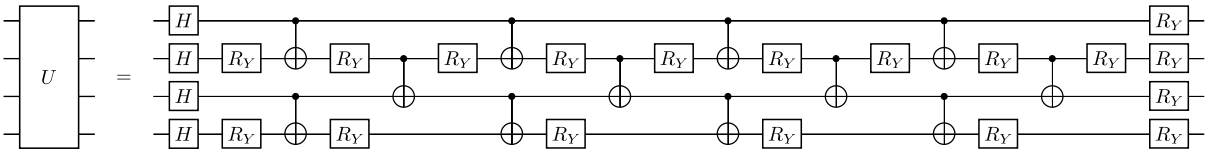


图 4：拟设架构，以 4个量子比特为例，展示了针对给定硬件要求所做的调整。与原始拟设架构相比，该架构增加了初始的哈达玛门层，在八个受控非门-R_Y 拟设层中仅对每隔一个量子比特施加旋转门，并在最后一层对每个量子比特施加旋转门。

进行了维度表达能力分析（DEA） [45]，以评估调整后的试探电路的表达能力（见附录C）。DEA 根据拟设参数对应的雅可比矩阵的秩，量化拟设在希尔伯特空间中能够探索的独立方向数量。对于实值 4 量子比特量子电路，可达到的最大秩为 15，而本文提出的调整后的试探电路的秩为 7，表明存在冗余参数且

局部表达能力有限。尽管如此，进一步的数值测试表明，仍能以较高精度逼近随机采样的目标态，最终误差约为 10^{-11}。未来的研究可以探索在受控非门-R_Y 层之间引入 SWAP 门，以提高量子电路的表达能力。

4.2 测量电路

4.2.1 测量 $\langle u \rangle$

哈达玛测试的标准实现使用单个辅助量子比特来控制整个试探电路。然而，在重六边形架构上，该量子比特必须经过电路的所有活动区域，因此会产生大量 SWAP 操作，并相应地使电路深度大幅增加。为避免这一开销，我们采用分布式控制策略。一般情况下，我们在每隔一个电路量子比特旁放置一个辅助量子比特，并将所有辅助量子比特纠缠成猫态 $|00\ldots0\rangle + |11\ldots1\rangle$。这样便可在电路的各个子区域内局部施加控制，同时由猫态确保受控操作的全局相干性。对于 4量子比特试探电路，这可简化为两个辅助量子比特 a_1 和 a_3。

制备猫态的开销仅取决于辅助量子比特之间的拓扑距离。具体而言，沿长度为 d 的路径创建猫态需要 $O(d)$ 次双量子比特操作，即分离距离带来的线性开销（使用电路中途测量和经典前馈 [46]可以实现次线性深度）。在实践中，与使用 Qiskit [47] 和 BQSKit [48]的标准转译器路由单个全局控制量子比特相比，这种方法可将电路深度降低三倍以上。

图 5展示了一个包含 4 个量子电路量子比特的量子比特布局示例，其中辅助量子比特和拟设量子比特的摆放方式旨在尽量减少量子比特交换。如图6所示，对于 4 个量子电路量子比特和 2 个辅助量子比特，猫态制备需要 4 个 CNOT 层。不过，只要将辅助量子比特放置在各自对应的受控电路量子比特旁边，这种方案也可以推广到更大的编码。在这种布局下，SWAP 开销仍局限于局部范围，因此该方法具有良好的扩展性。因此，哈达玛测试中的可观测量 X_a 被替换为 $\bigotimes_{a\in cat} X_a$。由于猫态量子比特紧邻活跃的拟设量子比特，因此可以将其用作受控 R_Y门的控制量子比特，无需额外的 SWAP 门。需要注意的是，通过不同的辅助量子比特（它们处于猫态纠缠中）分别控制拟设的不同子块，在代数上并不等同于单个全局多重控制；但对于我们的构造，这种做法能够产生哈达玛测试所需的相同干涉，同时避免使用代价高昂的多重控制门。

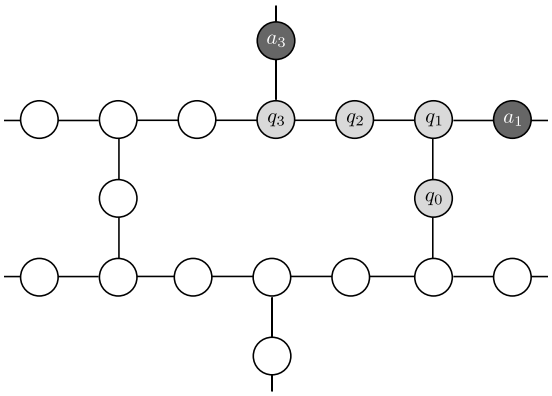


图 5：IBM 量子处理器连接关系中量子比特位置的示例。量子电路中的量子比特以浅灰色显示，相邻的辅助量子比特以深灰色显示。

关键在于，这种方法利用了第 4.1 节所述拟设的结构：将所有旋转角设为零时，拟设会生成均匀态 $|+\rangle^{\otimes n}$。将每个 R_Y 门升级为受控 R_Y 门（由猫态提供控制），即可实现一种简洁的切换机制：在辅助量子比特叠加态的 $|00\rangle$ 分支中，受控旋转保持不激活，仅施加 Hadamard 门和 CNOT 门，从而有效制备状态 $|+\rangle^{\otimes n}$。相比之下，在 $|11\rangle$ 分支中，受控旋转会被激活，进而制备速度编码态。这种受控切换机制如图 6 所示。

对图中量子电路应用了最后一轮 BQSKIT 优化。6这进一步降低了整体电路深度。表 1总结了调整后的哈达玛测试电路的关键属性。该构造使哈达玛测试能够在严格的硬件约束下实现，同时最大限度地减少量子比特交换并降低门数量。

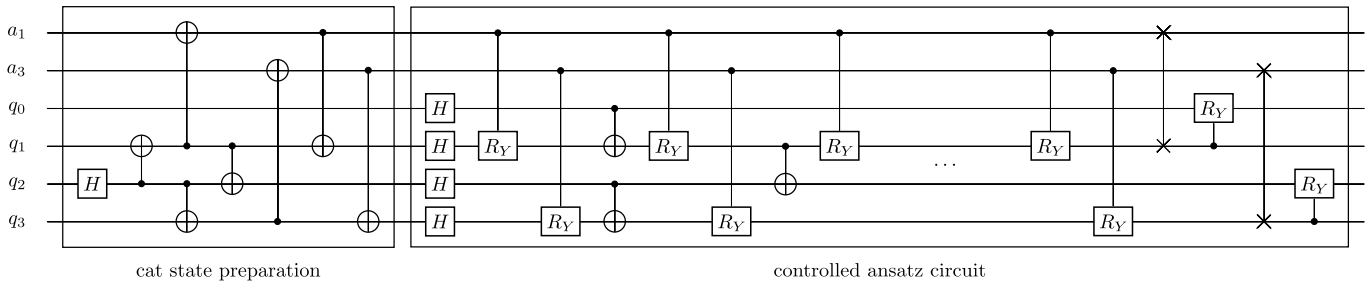


图6：哈达玛测试的实现。两个制备为猫态的辅助量子比特 a_1， a_3 专门用于控制拟设电路中的 R_y 旋转门。在量子电路的大部分部分中，受控旋转作用于 q_1和 q_3。为控制拟设的最后一个 R_y 层，需要执行两个 SWAP 门： $a_1 \leftrightarrow q_1$， $a_3 \leftrightarrow q_3$，使辅助量子比特 a_1， a_3 能够分别在量子比特 q_0， q_2上施加 ctrl-R_y 。最后，对 $\langle X_{q_1} X_{q_3} \rangle$ 进行估计（ SWAP 后，辅助量子比特处于q_1， q_3 中）。

电路属性	值
量子比特数	6
双量子比特门数量	39
双量子比特层数	24

表1：调整后的哈达玛测试量子电路的关键属性。

4.2.2 测量 $\langle u^3 \rangle$

如第 3.2 节所述，和 $\sum_i u_i^3$ 需要并行运行两个电路：哈达玛测试和拟设（见图 7）。

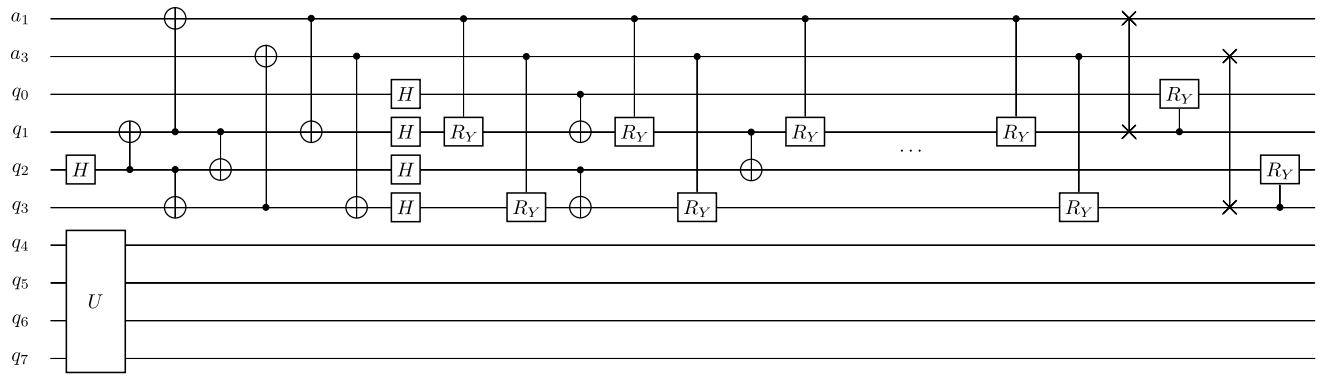


图7：用于测量振幅立方的缩放和的量子电路，由用于测量振幅缩放和的量子电路与拟设并行组成。

回顾可观测量 O_3:

$$
\begin{aligned}
O_3 &= X_a \otimes \sum_i |ii\rangle\langle ii| = O_3^{(+)} - O_3^{(-)} \\
O_3^{(\pm)} &= |\pm\rangle\langle\pm|_a \otimes \sum_i |ii\rangle\langle ii|.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

此处，投影算符 $\sum_i |ii\rangle\langle ii|$ 作用于系统寄存器的两个副本： $q_0 \dots q_3$ 和 $q_4 \dots q_7$。测量该可观测量的期望值可得到所需的量 $\sum_i u_i^3$ （相差一个全局因子），因为它会投影到约化密度矩阵的对角元素上，从而有效地分离出每个振幅的立方。

关键资源指标汇总于表 2。值得注意的是，尽管量子比特数量增加，但由于拟设制备采用并行结构，整体量子电路深度仍保持不变。

电路属性	值
量子比特数	10
双量子比特门数量	51
双量子比特层数	24

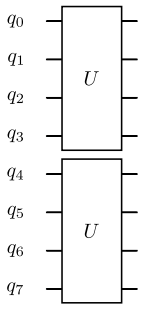
表2: 用于测量振幅立方和的量子电路的关键属性 .

4.2.3 测量 $\langle u^4 \rangle$及移位和

计算 $\langle u^4 \rangle$ 和移位和的方法是按照第 3.3 节和第 3.4 节所述，通过并行运行两次状态制备并使用一个共同的可观测量，形成张量积态 $|\phi_u\rangle^{\otimes 2}$。
特别地，振幅四次方和 $\sum_i u_i^4$ 对应于在两个态副本上观测到相同测量结果的概率。这可以通过测量可观测量

$$O_4 = \sum_j |jj\rangle\langle jj|, \tag{34}$$

来实现，其期望值选取乘积密度矩阵的对角元素，从而分离出四次项。
图8提供了实现该测量的量子电路示意图及其关键属性。该实现仅需变分形式深度和两倍的变分形式量子比特数。



电路属性	值
量子比特数	8
双量子比特门数量	24
双量子比特层数	8

图8：用于测量振幅四次方之和的电路布局及其对应的关键属性。

所有形式为 $\sum_i u_i^m u_{i+r}^\ell$ 的求和（包括特殊情形 $\sum_i u_i^4$）均可通过共享电路结构进行测量，其中变分拟设态 $|\phi_u\rangle$ 只需制备一次（对于 $m+\ell=2$），或制备两份 $|\phi_u\rangle^{\otimes 2}$（对于 $m+\ell=4$）。关键在于，要提取不同的矩组合，只需修改测量可观测量这一部分。例如，测量公式（28）中定义的平移 2、$_2 = \sum_j |j、\ j+r\rangle\langle j、\ j+r|$ 的可观测量 $O^{(r)}$，即可得到 $\sum_i u_i^2 u_{i+r}^2$（尚未归一化）。同样，公式（26）和（27）中定义的非对角算子 $O^{(r)}$ 平移 3,1 和 $O^{(r)}$ 平移 1,3，可用于获取 $\sum_i u_i^3 u_{i+r}$ 或 $\sum_i u_i u_{i+r}^3$ 等非对称组合。这样便能重复利用量子处理器测量结果，从而显著降低实验开销。

5 硬件结果

为了评估在当前量子硬件上提取速度场统计性质的可行性，我们在 IBM 的超导量子设备 Heron r2 ibm fez 上部署了量子电路。该设备采用 156 量子比特重六边形晶格，并配备 TLS 噪声缓解功能，以提升相干性和稳定性。

为了减少量子处理器使用量和作业总数，我们将多个可观测量和时间步的测量合并到一次量子电路执行中，从而实现并行测量。具体而言，通过在一个16量子比特系统上并行嵌入两个相互独立的8量子比特电路，我们同时测量了两种不同空间分布对应的总和 $\sum_i u_i^4$ 及移位和，从而在一次作业中评估两种空间分布所需的全部66个可观测量。我们使用 QESEM 软件 [36]作为误差抑制和误差缓解工具。每个可观测量的目标精度设为 0.1 至 0.05 之间；每项作业（即向量子处理器提交的一次任务，其中可将多个可观测量的测量打包到一个量子电路中）的运行时间限制设为 12 分钟至

一小时，具体取决于量子电路的复杂程度。尽管时间限制较为宽松，每项作业实际占用的量子处理器时间仍不到 3 分钟，因此本文所示全部结果的量子处理器使用量总计不超过 40 分钟。

在接下来的各节中，我们将展示并分析在真实量子硬件上运行量子电路所得的结果，包括空间速度矩的计算以及初步的结构函数。

5.1 SineSignal 测试案例

我们使用基于正弦函数的简单离散测试信号，从量子处理器运行时间和精度两方面对统计矩估计电路进行基准测试。该信号定义在区间 $[0, 2\pi]$ 内的 2^n 个等距点上，采用两种分辨率：4个量子比特对应 16 个格点，8个量子比特对应 256 个格点：

$$u_i = \frac{\sin\left(\frac{2\pi i}{2^n}\right) + 1}{\sqrt{\sum_{j=0}^{2^n-1}\left[\sin\left(\frac{2\pi j}{2^n}\right) + 1\right]^2}}, \quad i = 0, \cdots, 2^n - 1. \tag{35}$$

添加常数偏移可确保平均值非零，而归一化则消除缩放效应，从而得到单位范数向量 $\|u\| = 1$。随后对拟设进行经典优化，以制备以下状态：

$$|\phi_u\rangle = \sum_j u_j \, |j\rangle \, . \tag{36}$$

我们比较了编码在 $n = 4$ 和 $n = 8$ 个量子比特上的正弦信号所对应的量子计算中心矩与其经典预期理想值，分别对应 2^4 和 2^8 个空间点。结果如图 9所示。为量化差异，我们计算测量值与理想值之间的归一化偏差：

$$N_\sigma = \frac{|\hat{x} - x_{\text{ref}}|}{\Delta x}, \tag{37}$$

通常称为 z 分数或 N_σ 偏差。此处，$\hat{x}$ 表示量子估计值，x_{ref} 表示经典理想值，而 Δx 表示通过误差传播 QESEM 报告的误差棒所获得的不确定性。对于所有矩，归一化偏差均低于 2，表明与参考值具有统计一致性。该阈值约对应两个标准差；在正态测量噪声下，数值以较高概率在此范围内出现。

除中心矩外，正弦信号速度场的空间平均二阶和四阶结构函数也展示于图10中。如预期所示，速度差随空间间隔长度 r 增加，这是由于正弦函数具有平滑的周期性，且信号波长较长，导致速度差随距离逐渐累积。

对于二阶结构函数（图10左），量子结果与经典基线高度吻合。数值几乎总是重叠或落在误差棒范围内，展现了量子计算对这一可观测量的稳健性。

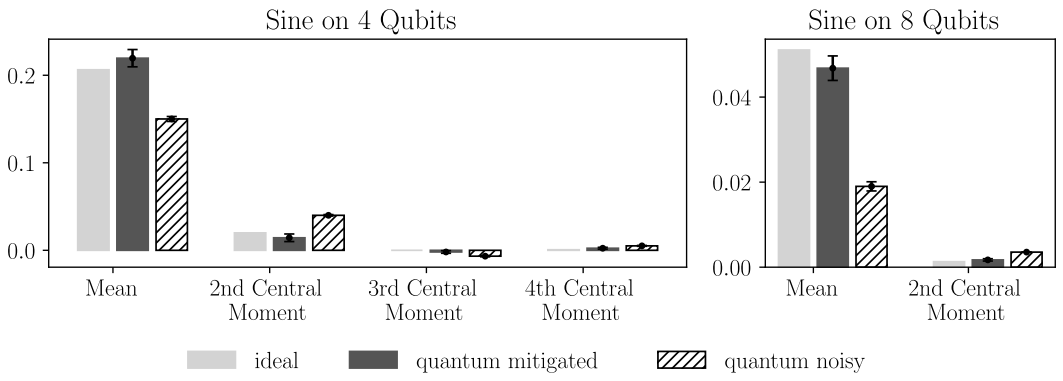
在四阶情形下（图 10右侧），误差棒变大，反映出统计不确定性增加。尽管如此，误差缓解后的数据在这些不确定性范围内仍与理想值在统计上相符。这种现象主要源于速度向量的归一化，使得四阶结构函数的绝对值非常小。因此，即使量子处理器上测得的量存在很小的统计误差，也会导致明显的相对偏差。换算为未归一化单位后，这些差异也会相应增大，这同样解释了不确定性增大以及含噪值存在较大偏差的原因。

5.2 Burgers湍流

我们的主要成果是测量由一维Burgers方程支配的速度场在真实演化过程中各快照的统计矩。我们在经典硬件上执行演化并优化参数，将量子实现留待未来工作。

该方程采用伪谱方法，在具有周期性边界条件、包含 $N = 16$ 个点的空间网格上求解。空间区域从 $x_b = 0$ 延伸至 $x_e = 10 \times 2\pi$，网格间距定义如下：

$$dx = \frac{x_e - x_b}{N}. \tag{38}$$



	4个量子比特上的正弦				8个量子比特上的正弦	
	Mean	二阶中心矩	三阶中心矩	四阶中心矩	Mean	二阶中心矩
经典参考 x_{ref}	0.2041	0.0208	0	0.0007	0.0510	0.0013
状态向量模拟	0.2063	0.0199	0	0.0006	0.0511	0.0013
含噪值	0.1501 ± 0.0028	0.0399 ± 0.0008	-0.0067 ± 0.0007	0.0051 ± 0.0005	0.0190 ± 0.0011	0.0035 ± 0.0001
缓解后的值 $\hat{x} \pm \Delta x$	0.2195 ± 0.0099	0.0143 ± 0.0043	-0.0019 ± 0.0015	0.0024 ± 0.0010	0.0468 ± 0.0029	0.0017 ± 0.0003
归一化偏差 $N_\sigma = \frac{\lvert\hat{x}-x_{\text{ref}}\rvert}{\Delta x}$	1.34	1.3	1.28	1.66	1.48	1.33

图9：正弦信号测试案例的量子计算的中心矩与其理想参考值的比较。结果展示了四种情况：经典参考值、理想状态向量模拟、含噪量子处理器测量值（未进行误差缓解）以及误差缓解后的量子处理器测量值（进行了误差缓解）。

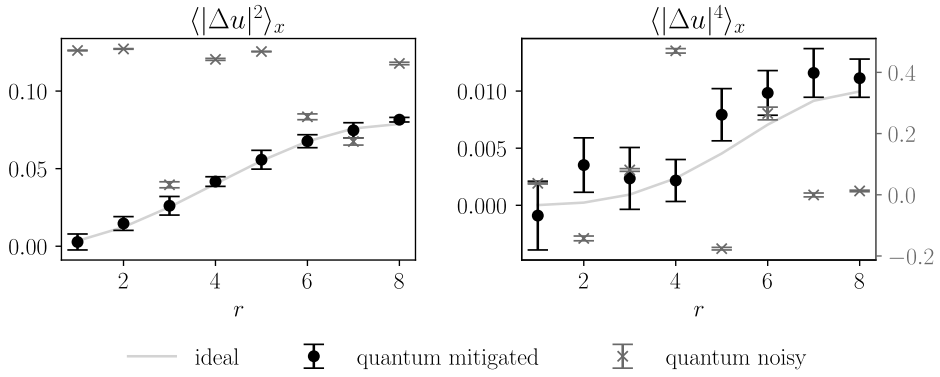


图10：正弦信号测试案例的空间平均二阶（左）和四阶（右）结构函数。四阶图中的左侧纵轴刻度对应理想量子值和经过误差缓解的量子值，而右侧纵轴刻度对应含噪量子结果。未经误差缓解时，结果与预期行为显著偏离。

采用 $dt = 0.01$ 的时间步，模拟总共运行了54,000个时间步。黏度设为$\nu = 0.1$。

初始速度场设为零，并在每个时间步施加一个强迫项以驱动系统。所选的强迫函数旨在在系统中产生激波，其特点是时间上为白噪声，且

空间上自相似。具体而言，强迫项在傅里叶空间中的定义如下：

$$f_k(t) = D_0|k|^{\beta}\xi_k(t) \tag{39}$$

其中， $D_0 = 0.5$、 $\beta = -1$ 和 $\xi_k(t)$ 是复值高斯噪声项，其实部和虚部相互独立，且均取自方差为 $1/2$ 的正态分布。该表述确保了外力具有所需的统计性质，能量注入主要发生在大尺度上。

图11 展示了受迫 Burgers 方程所支配的速度场的时空演化（上图），以及其统计矩随时间的演化（下图）。经典参考曲线以连续曲线显示，而量子计算结果则在选定的时间点呈现。上图中，随着系统演化，类冲击结构逐渐形成，不过粗分辨率限制了最终图样的复杂程度。为考察不同的动力学状态，选取了四个具有代表性的时间点： $0.2T$、 $0.4T$、 $0.6T$和 $0.8T$，其中T 表示总模拟时间。这些时间点涵盖了平静阶段、明显的冲击形成，以及从静止到湍流的过渡阶段。

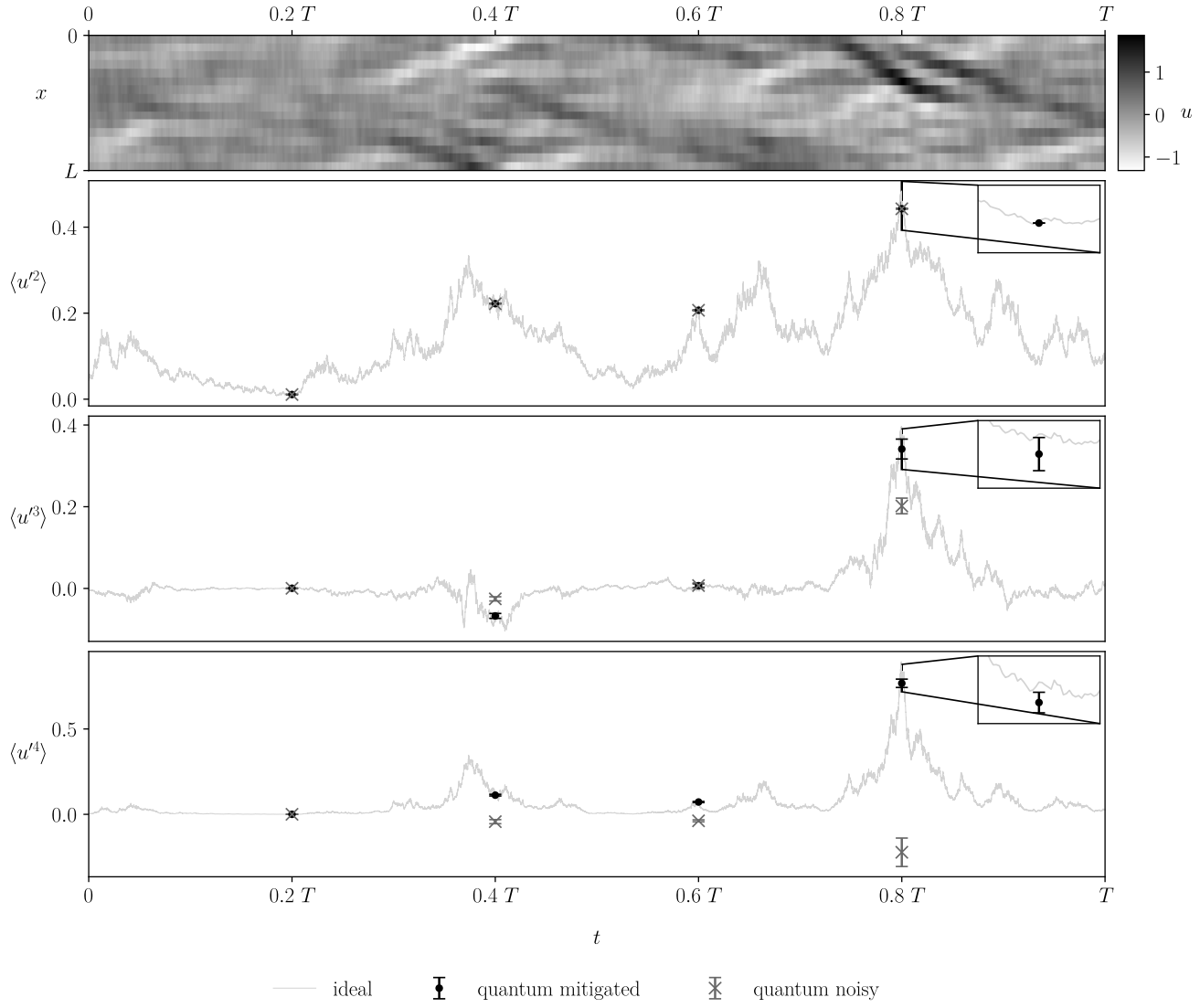
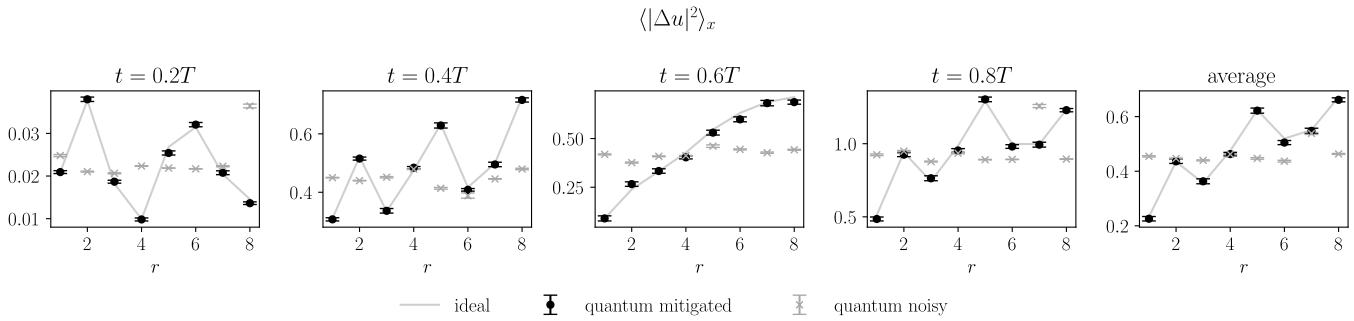


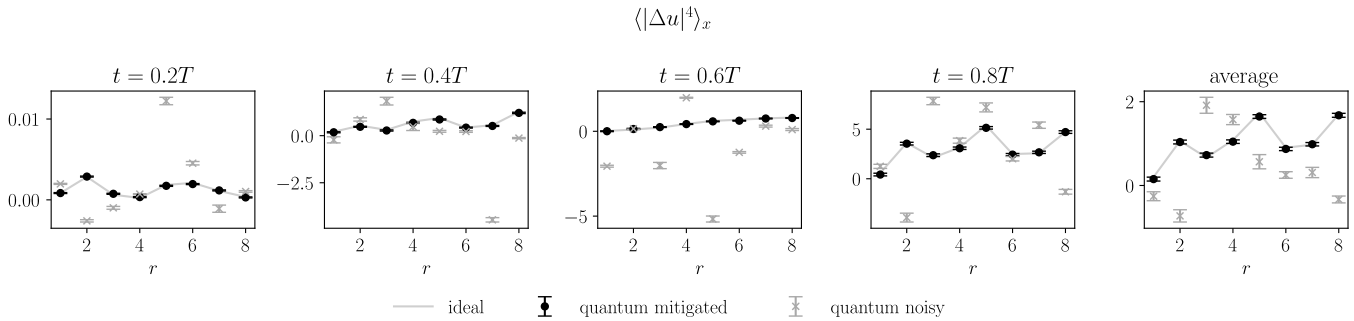
图11：受迫 Burgers 模拟中速度场的时空演化（上图），以及二阶、三阶和四阶中心矩的时间演化（第二、第三和第四图）。速度场中的陡峭梯度表明冲击形成，并与统计矩的极值相对应。经典参考值以灰色线条表示。误差缓解后的量子结果以带误差棒的黑点表示；未缓解（含噪声）的结果则以带误差棒的深灰色叉号表示，数据取自选定的时间步。所有缓解后的量子估计值均保持在约两个标准差范围内，表明具有统计一致性。

在整个演化过程中，经误差缓解的量子估计值与经典计算的参考值高度吻合。其偏差均保持在两个标准差以内，表明结果具有统计一致性。在时间 $0.8T$，明显的冲击结构带来了更极端的统计特征，第二、第三和第四中心矩显著增大。尽管经过误差缓解的结果仍能捕捉总体趋势，但在这一状态下，可以观察到轻微偏差和略大的不确定性。相比之下，未经误差缓解的（含噪）数值偏差更大，尤其是在高阶矩以及动力学活跃阶段（例如 $0.4T$ 和 $0.8T$），此时可以观察到含噪结果存在较大的偏差。

图 12a 和12b 分别展示了在以下时刻计算的二阶和四阶结构函数：$0.2T$、 $0.4T$、 $0.6T$和 $0.8T$，以及这四个快照的平均值。在充分发展湍流中，结构函数（即不同空间间隔下速度差的统计矩）预计会呈现特征性的标度行为。根据经典的柯尔莫哥洛夫–奥布霍夫理论， 1941 [49, 50],第 k阶结构函数随空间偏移量 r 按 $r^{k/3}$标度。后来的改进，包括 She和Leveque 提出的间歇性修正 [51], ，对这一理论进行了修正，以纳入偏离简单标度的情况，尤其是在高阶时 [52]。这些标度律已成为分析湍流（包括 Burgers湍流）的核心基准；在 Burgers湍流中，激波主导动力学会导致其明显偏离高斯统计。



(a) 空间平均二阶结构函数 $S_2(r,\ t)$。



(b) 空间平均四阶结构函数 $S_2(r,\ t)$。

图 12：不同模拟时间步 t 下的二阶和四阶空间平均结构函数。经过误差缓解的量子结果与理想值高度吻合。若不进行误差缓解，结果会明显偏离预期行为，因为计算涉及将估计的期望值缩放 $||u||^2$ 或 $||u||^4$，从而放大误差。给定时间步下空间速度分布的范数分别为 $\|u(t = 0.2T)\| = 0.42$、$\|u(t = 0.4T)\| = 1.88$、 $\|u(t = 0.6T)\| = 1.82$ 和 $\|u(t = 0.8T)\| = 2.66$（无量纲，这是由于控制方程经过了无量纲化）。

由于空间分辨率非常粗，只有 16 个网格点，因此无法用这些结果提取标度律或研究惯性区行为；这需要更精细的空间离散化，并对大规模速度场系综进行平均。尽管如此，结构函数确实揭示了具有物理意义的特征。在某些时间步，例如 $t = 0.6T$，结构函数随空间间隔 r 几乎单调递增，这表明存在长程速度相关性和相干流动结构。在其他时刻，则会出现振荡或非单调模式（例如 $t = 0.2T$、 $0.4T$ 或 $0.8T$），反映出速度场中的特征长度尺度或相互竞争的梯度。时间平均后的结构函数表现得更平滑，并显示出在较大的 r 处趋于饱和的趋势，这暗示即使在这种粗略表征中，也存在占主导地位的结构尺度。

经典结果（浅灰色曲线）清楚地显示了这些特征，而在含噪结果中（带误差棒的深灰色叉号）却完全看不到这些特征，因为噪声诱导偏差实际上将其掩盖了。重要的是，误差缓解后的量子结果（带误差棒的黑色点）与经典参考解高度吻合。在几乎所有情况下，量子估计值都与经典值相差不到两个标准差，证明了该方法具有统计可靠性。虽然空间分辨率限制了对细尺度行为的物理可解释性，但这些结果验证了在近期量子硬件上进行结构函数分析是可行的，并且只要应用合适的误差缓解技术，就能得到可信的结果。

6 讨论与展望

量子计算流体动力学中的一个核心瓶颈，是如何大规模读出具有物理意义的量：全态层析不可行，而且许多文献侧重于量子算法本身，却常常没有充分说明如何提取可解释输出。为此，我们提出了若干测量方案，无需进行全态层析即可从振幅编码速度场中恢复空间统计量。这展示了量子计算流体力学流程的概念验证：通过实用的读出层，将紧凑的振幅编码态转换为可用统计量，同时降低后处理开销。

结果表明，中心矩以及二阶和四阶结构函数等非平凡统计量，可以在当前量子设备上可靠地获取。经过误差缓解的量子估计值与经典参考值一致，通常相差不超过一到两个标准差。精度的进一步提升预计主要受当前量子设备限制，以及用于误差缓解的量子处理器时间所制约。

一个自然的下一步是将该方法扩展到更大的量子系统，以解析更精细的空间特征，并探究湍流中的标度律或间歇性效应等统计特征。然而，当前方法的可扩展性从根本上取决于编码策略、试探电路的表达能力和深度，以及测量可观测量的结构。所有测量方案都依赖于相对于速度场范数 $\|u\|$ 的归一化；该范数如何随系统规模变化，取决于物理设置和归一化约定。用于估计均值的期望值随 $\|u\|/\sqrt{N}$ 缩放，而高阶矩会引入更强的范数依赖，例如 $N^{-1/2}\|u\|^{-3}$ 或 $\|u\|^{-4}$，使其对噪声以及 $\|u\|$ 中的波动更加敏感。对于固定的目标精度，这些依赖会提高所需的估计量精度，进而增加量子处理器时间。因此，未来的研究需要仔细权衡物理保真度、范数控制和测量开销，以确保方法能够超越概念验证实现并具备可扩展性。

致谢

我们衷心感谢 Greta Sophie Reese 和 Takis Angelides 提供宝贵的讨论和建设性建议，这些意见对本研究的推进起到了重要作用。我们也感谢 Stefan K¨uhn 就维度表达能力分析提供了富有见地的建议，并感谢 Eyal Bairey 和 Omri Golan 在整个项目过程中给予的支持和有益意见。

本研究获得勃兰登堡州科学、研究与文化部的资助，资助项目隶属量子技术与应用中心（CQTA）。



参考文献

[1] J.M. Burgers. 展示湍流理论的数学模型。编者：Richard Von Mises 和 Theodore Von K´arm´an。1948年。 DOI: https : / / doi . org / 10 . 1016 / S0065 - 2156(08) 70100 - 5。 URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0065215608701005。[2] Mauro E. S. Morales, Lirand¨e Pira, Philipp Schleich, Kelvin Koor, Pedro C. S. Costa, Dong An, Al´an Aspuru- Guzik, Lin Lin, Patrick Rebentrost, and Dominic W. Berry. 量子线性系统求解器：算法与应用综述。2025年。 URL: https://arxiv.org/abs/2411.02522。[3] Aram W. Harrow, Avinatan Hassidim, and Seth Lloyd. “线性方程组量子算法”。载于：《物理评论快报》103 (15 2009)。 DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.150502。 URL: https://link.aps.org/ doi/10.1103/PhysRevLett.103.150502。[4] Dominic W. Berry, Andrew M. Childs, Aaron Ostrander, and Guoming Wang. “量子算法求解线性微分方程：精度依赖性呈指数级改善”。载于：《数学物理通讯》356.3 (2017)。 DOI: 10.1007/s00220-017-3002-y。 URL: http://dx.doi.org/10.1007/ s00220-017-3002-y。[5] Andrew M. Childs, Jin-Peng Liu, and Aaron Ostrander. “偏微分方程高精度量子算法”。载于：《Quantum》5 (2021)。 DOI: 10.22331/q-2021-11-10-574。 URL: http://dx.doi.org/10.22331/q- 2021-11-10-574。[6] Carlos Bravo-Prieto, Ryan LaRose, M. Cerezo, Yigit Subasi, Lukasz Cincio, and Patrick J. Coles. “变分量子线性求解器”。载于：《Quantum》7 (2023)。 DOI: 10.22331/q-2023-11-22-1188。 URL: http://dx.doi.org/10.22331/q-2023-11-22-1188。[7] David Jennings, Matteo Lostaglio, Sam Pallister, Andrew T S ornborger, and Yi˘git Suba.sı. 高效量子线性求解算法及详细运行成本。2023年。 URL: https://arxiv.org/abs/2305.11352。[8] David Jennings, Matteo Lostaglio, Robert B Lowrie, Sam Pallister, and Andrew T Sornborger. “在量子计算机上求解线性微分方程的成本：快进至明确的资源计数”。载于：《Quantum》8 (2024)。[9] Zhao-Yun Chen et al. 在近期量子计算机上实现大规模高精度流体模拟。2024年。 DOI: 10.2139/ssrn.4870898。[10] Ferdin Sagai Don Bosco, Dhamotharan S, Rut Lineswala, and Abhishek Chopra. 计算流体力学变分量子线性求解器的可扩展性与准确性演示。2024年。 URL: https: //arxiv.org/abs/2409.03241。[11] Frank Gaitan. “通过量子计算求解纳维–斯托克斯流体的流动”。载于：npj Quantum Information 6.1 (2020)。 DOI: 10.1038/s41534-020-00291-0。 URL: https://doi.org/10.1038/s41534-020-00291-0。[12] Furkan Oz, Rohit K. S. S. Vuppala, Kursat Kara, and Frank Gaitan. “用量子计算求解Burgers方程”。载于：《量子信息处理》21.1 (2021)。 DOI: 10.1007/s11128- 021- 03391- 8。 URL: https://doi.org/10.1007/s11128-021-03391-8。[13] Jin-Peng Liu, Herman Øie Kolden, Hari K. Krovi, Nuno F. Loureiro, Konstantina Trivisa, and Andrew M. Childs. “耗散非线性微分方程的高效量子算法”。载于：《美国国家科学院院刊》118.35 (2021)。 DOI: 10.1073/pnas.2026805118。 URL: http://dx.doi.org/10.1073/pnas. 2026805118。[14] Xiangyu Li, Xiaolong Yin, Nathan Wiebe, Jaehun Chun, Gregory K. Schenter, Margaret S. Cheung, and Johannes M¨ulmenst¨adt. 流体动力学模拟的潜在量子优势。2024年。 URL: https: //arxiv.org/abs/2303.16550。[15] Fumio Uchida, Koichi Miyamoto, Soichiro Yamazaki, Kotaro Fujisawa, and Naoki Yoshida. 伯格斯湍流的量子模拟：非线性变换与统计量的直接评估。2024年。 URL: https://arxiv.org/abs/2412.17206。[16] Michael Lubasch, Jaewoo Joo, Pierre Moinier, Martin Kiffner, and Dieter Jaksch. “非线性问题的变分量子算法”。载于：《物理评论 A 辑》101.1 (2020)。 DOI: 10.1103/physreva.101.010301。 URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.101.010301。[17] Dieter Jaksch, Peyman Givi, Andrew J. Daley, and Thomas Rung. 计算流体力学的变分量子算法。2022年。 URL: https://arxiv.org/abs/2209.04915。[18] Pia Siegl, Greta Sophie Reese, Tomohiro Hashizume, Nis-Luca van H¨ulst, and Dieter Jaksch. 用于求解微分方程的张量可编程量子电路。2025年。 URL: https://arxiv.org/abs/2502.04425。

[19] Paul Over、Sergio Bengoechea、Thomas Rung、Francesco Clerici、Leonardo Scandurra、Eugene de Villiers 和 Dieter Jaksch。“量子计算机上偏微分方程变分量子模拟的边界处理”。发表于：Computers & Fluids 288（2025年）。 DOI：10.1016/j.compfluid.2024.106508。 URL：http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2024.106508。[20] Lov Grover 和 Terry Rudolph。创建对应于可高效积分概率分布的叠加态。2002年。 URL：https://arxiv.org/abs/quant-ph/0208112。[21] Alexei Kitaev 和 William A. Webb。使用量子计算机进行波函数制备与重新采样。2009年。URL：https://arxiv.org/abs/0801.0342。[22] Shi-Ju Ran。“将矩阵乘积态编码为由单量子比特门和双量子比特门组成的量子电路”。发表于：Physical Review A 101（3，2020年）。 DOI：10.1103/PhysRevA.101.032310。 URL：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.101.032310。[23] Daniel Malz、Georgios Styliaris、Zhi-Yuan Wei 和 J. Ignacio Cirac。“使用对数深度量子电路制备矩阵乘积态”。发表于：《物理评论快报》132（4，2024年）。 DOI：10.1103/PhysRevLett.132.040404。URL：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.132.040404。[24] Jason Iaconis、Sonika Johri 和 Elton Yechao Zhu。“使用矩阵乘积态制备正态分布的量子态”。发表于：npj Quantum Information 10.1（2024年）。 DOI：10.1038/s41534-024-00805-0。 URL：https://doi.org/10.1038/s41534-024-00805-0。[25] Kevin C. Smith、Abid Khan、Bryan K. Clark、S.M. Girvin 和 Tzu-Chieh Wei。“使用自适应量子电路进行常数深度的矩阵乘积态制备”。发表于：PRX Quantum 5（3，2024年）。 DOI：10.1103/ PRXQuantum.5.030344。 URL：https://link.aps.org/doi/10.1103/PRXQuantum.5.030344。[26] Raghav Jumade 和 Nicolas PD Sawaya。数据通常可以在较浅深度下加载：用于金融、图像、流体和蛋白质的张量网络量子电路。2023年。 URL：https://arxiv.org/abs/2309.13108。[27] Scott Aaronson。“阅读细则”。发表于：Nature Physics 11.4（2015年）。 DOI：10 . 1038 / nphys3272。 URL：https://doi.org/10.1038/nphys3272。[28] Marcus Cramer、Martin B. Plenio、Steven T. Flammia、Rolando Somma、David Gross、Stephen D. Bartlett、Olivier Landon-Cardinal、David Poulin 和 Yi-Kai Liu。“高效量子态层析”。发表于：Nature Communications 1.1（2010年）。 DOI：10.1038/ncomms1147。 URL：https://doi.org/10.1038/ncomms1147。[29] Steven T Flammia、David Gross、Yi-Kai Liu 和 Jens Eisert。“通过压缩感知进行量子层析：误差界、样本复杂度与高效估计量”。发表于：New Journal of Physics 14.9（2012年）。 DOI：10.1088/1367-2630/14/9/095022。 URL：http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/14/9/095022。[30] B. P. Lanyon 等。“量子多体系统的高效层析”。发表于：Nature Physics 13.12（2017年）。DOI：10.1038/nphys4244。 URL：http://dx.doi.org/10.1038/nphys4244。[31] Hannah Lange、Anka Van de Walle、Atiye Abedinnia 和 Annabelle Bohrdt。从架构到应用：神经量子态综述。2024年。 URL：https://arxiv.org/abs/2402.09402。[32] Scott Aaronson。量子态的影子层析。2018年。 URL：https://arxiv.org/abs/1711.01053。[33] Hsin-Yuan Huang、Richard Kueng 和 John Preskill。“仅凭极少量测量预测量子系统的多种性质”。发表于：Nature Physics 16.10（2020年）。 DOI：10.1038/s41567- 020-0932- 7。 URL：http://dx.doi.org/10.1038/s41567-020-0932-7。[34] Uriel Frisch。湍流：A. N. Kolmogorov 的遗产。剑桥大学出版社，1995年。[35] Stephen B. Pope。湍流流动。剑桥大学出版社，2000年。[36] Dorit Aharonov 等。实用规模量子电路的可靠高精度误差缓解。2025年。 URL：https://arxiv.org/abs/2508.10997。[37] D Mesterh´azy 和 K Jansen。“随机力驱动的伯格斯方程中的反常标度：一项蒙特卡罗研究”。发表于：New Journal of Physics 13.10（2011年）。 DOI：10.1088/1367- 2630/13/10/103028。 URL：http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/13/10/103028。[38] G. Margazoglou、L. Biferale、R. Grauer、K. Jansen、D. Mesterh´azy、T. Rosenow 和 R. Tripiccione。“用于对随机场时空历史中的稀有事件进行采样的混合蒙特卡罗算法”。发表于：Physical Review E 99.5（2019年）。 DOI：10.1103/physreve.99.053303。 URL：http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.99.053303。[39] Gilles Brassard、Peter Hoyer、Michele Mosca 和 Alain Tapp。“量子振幅放大与估计”。发表于：arXiv 预印本 quant-ph/0005055（2000年）。

[40] Andr´as Gily´en、Yuan Su、Guang Hao Low 和 Nathan Wiebe。“量子奇异值变换及其拓展：量子矩阵运算的指数级改进”。发表于：第51届 ACM SIGACT 年度计算理论研讨会论文集。2019年。[41] R. Cleve、A. Ekert、C. Macchiavello 和 M. Mosca。“重新审视量子算法”。发表于：伦敦皇家学会会刊。A辑：数学、物理与工程科学 454.1969（1998年）。 DOI：10.1098/rspa.1998.0164。 URL：http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1998.0164。[42] Hao Xiong、Yehui Tang、Xinyu Ye 和 Junchi Yan。“量子内积的电路设计与高效模拟，以及其对近期混合量子经典机器学习影响的实证研究。补充材料”。发表于：2024年 IEEE/CVF 计算机视觉与模式识别会议（CVPR）。2024年。 DOI：10.1109/CVPR52733.2024.02472。[43] Zo¨e Holmes、Nolan J Coble、Andrew T Sornborger 和 Yi˘git Suba¸sı。“量子计算中的非线性变换”。发表于：Physical Review Research 5.1（2023年）。[44] IBM Quantum。2025年。 URL：https://quantum-computing.ibm.com/。[45] Lena Funcke、Tobias Hartung、Karl Jansen、Stefan K¨uhn 和 Paolo Stornati。“参数化量子电路的维度表达能力分析”。发表于：《Quantum》5（2021年）。 DOI：10.22331/q-2021-03-29-422。 URL：http://dx.doi.org/10.22331/q-2021-03-29-422。[46] S Siddardha Chelluri、Stephan Schuster、Riccardo Roma 等。“NISQ 设备上的浅深度 GHZ 态生成”。发表于：arXiv 电子预印本（2025年）。[47] Ali Javadi-Abhari 等。使用 Qiskit 进行量子计算。2024年。 DOI：10.48550/arXiv.2405.08810。[48] Ed Younis、Costin C Iancu、Wim Lavrijsen、Marc Davis 和 Ethan Smith。伯克利量子综合工具包（bqskit）v1。技术报告。劳伦斯伯克利国家实验室（LBNL），加利福尼亚州伯克利（美国），2021年。[49] A. N. Kolmogorov。“极大雷诺数下不可压缩黏性流体中湍流的局部结构”。俄文。发表于：Dokl. Akad. Nauk SSSR 30（1941年）。重印于：*Proc. R. Soc. Lond. A* **434**，9–13（1991年），英文译本。[50] A. M. Obukhov。“湍流流动能量在频谱中的分布”。俄文。发表于：Dokl. Akad. Nauk SSSR 32（1941年）。[51] Zhen-Su She 和 Emmanuel Leveque。“充分发展湍流的普适标度律”。发表于：《物理评论快报》72.3（1994年）。 DOI：10.1103/PhysRevLett.72.336。[52] Bj¨orn Birnir。“湍流的 KOSL 标度、不变测度与概率密度函数”。发表于：《湍流研究进展 V》。Alessandro Talamelli、Martin Oberlack 和 Joachim Peinke 编。第149卷。Springer 物理学会议录。Cham：Springer 国际出版公司，2014年。 DOI：10 . 1007 / 978 - 3 - 319 - 01860 - 7 _ 11。 URL：https://doi.org/10.1007/978-3-319-01860-7_11。[53] Joonho Kim、Jaedeok Kim 和 Dario Rosa。“变分本征值问题中高深度电路的普适有效性”。发表于：《物理评论研究》3.2（2021年）。 DOI：10.1103/physrevresearch.3.023203。 URL：http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.023203。[54] Enrico Fontana、Nathan Fitzpatrick、David Mu˜noz Ramo、Ross Duncan 和 Ivan Rungger。“评估变分量子算法的抗噪性”。发表于：《物理评论 A 辑》104.2（2021年）。 DOI：10.1103/physreva. 104.022403。 URL：http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.104.022403。

附录

附录A 提供了所有获得的硬件测量结果，以补充正文中展示的数据。附录B 介绍了本研究中使用的 QESEM 误差抑制与缓解框架。最后，附录C展示了试探电路的维度表达能力分析。

A 硬件测量结果

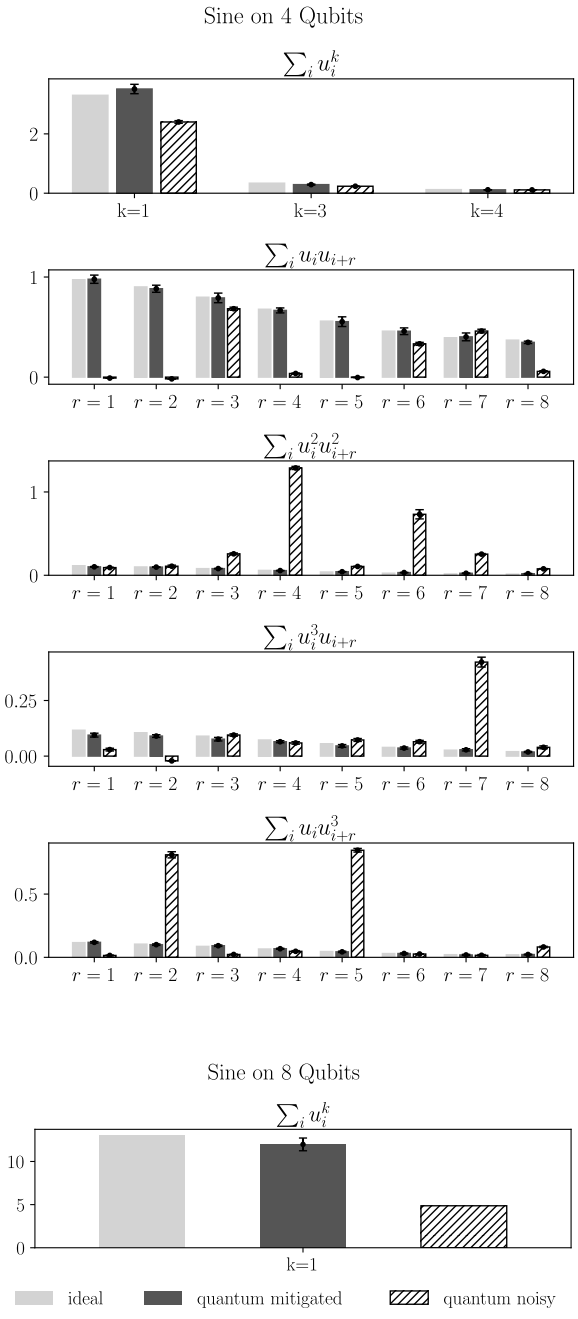


图 13：正弦信号测试案例中，4 个和 8 个量子比特下理想值、经误差缓解的量子测量结果与含噪量子测量结果的比较。

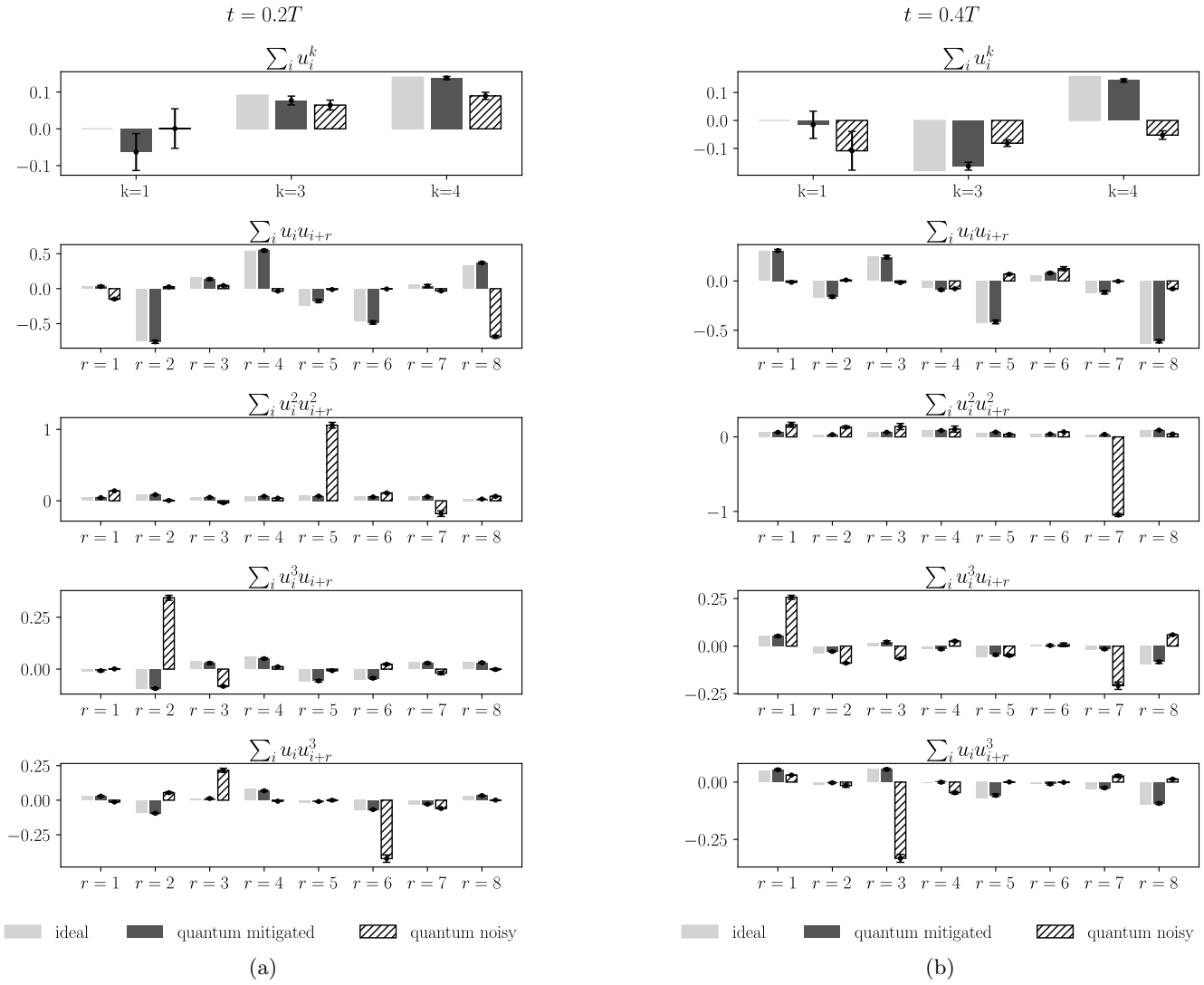


图14：Burgers演化中时间步的理想值、经误差缓解的量子测量和含噪量子测量对比，见图 $t = 0.2T$ 和 $t = 0.4T$ 图11。

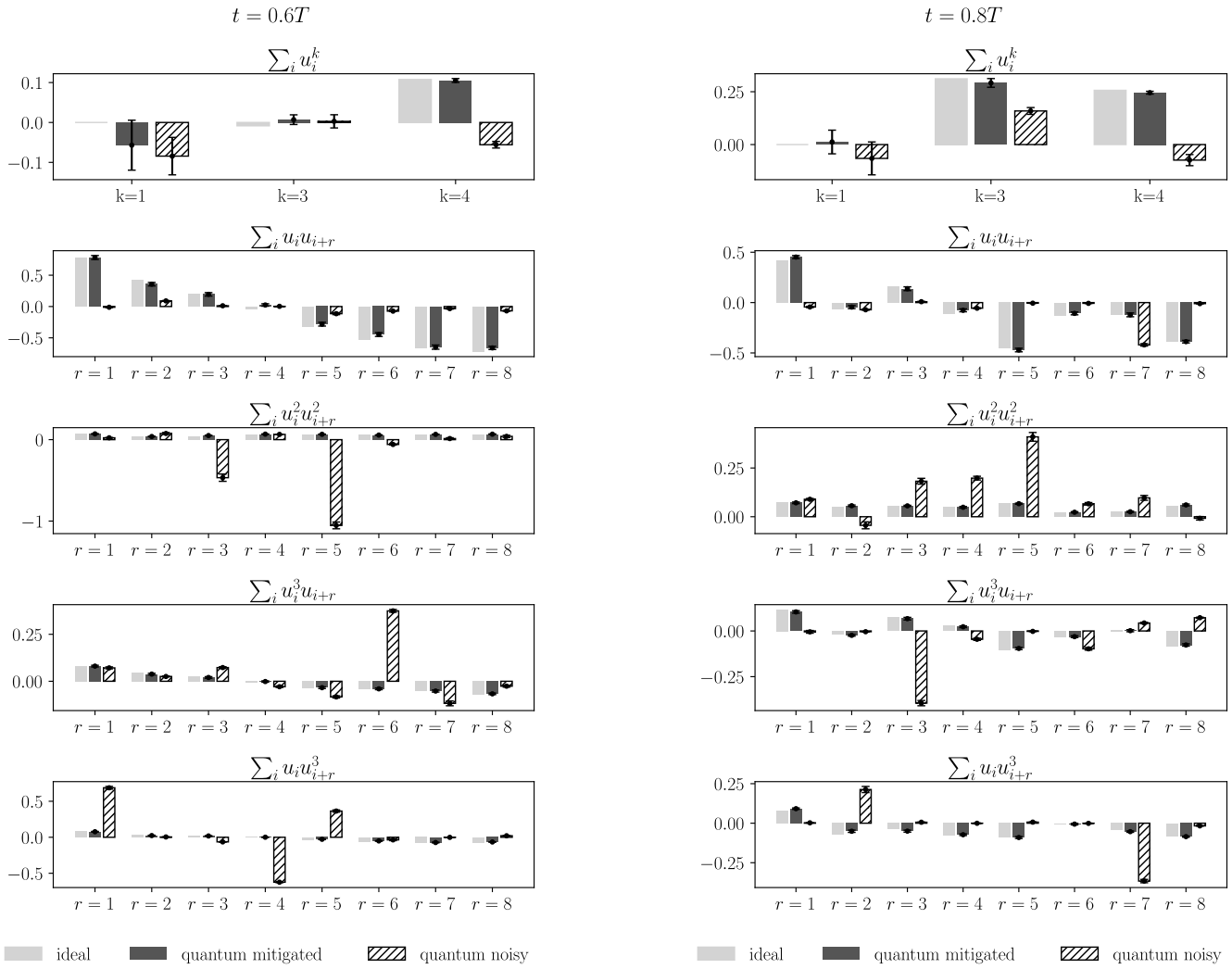


图15：对比Burgers演化中时间步 $t = 0.6T$ 和 $t = 0.8T$ 对应的理想值、经误差缓解的量子测量结果以及含噪量子测量结果，见图11。

B QESEM（量子误差抑制与误差缓解）

本文所述实验使用 QESEM 软件套件在 IBM 量子处理单元上进行。量子硬件本质上受到门不保真度的限制（例如由退相干和校准误差引起），这从根本上限制了可执行电路的深度和规模。运行一个包含 V 个门且无任何错误的量子电路的概率会按 $\exp(-V \cdot IF)$ 衰减，其中 IF 表示门不保真度。在 $V \cdot IF \gtrsim 1$ 的情况下，期望值估计会受到系统偏差的主导。

消除这种偏差的误差缓解技术，需要以增加采样复杂度和量子处理器运行时间为代价。无偏估计量（例如基于准概率分解的估计量）通常会表现出按 $\exp(\lambda\, IF\, V_a)$ 缩放的方差开销，其中 V_a 是“有效”电路体量（即可观测量因果光锥内的门），而 $\lambda \in [2, 4]$ 则代表该协议的资源指数。这种缩放反映了一种根本性的权衡：尽管可以将偏差抑制到任意精度，但所需的采样成本会呈指数级增长。

QESEM（量子误差抑制与误差缓解）通过可证明的收敛保证来应对这种权衡。其端到端流程包括：快速进行全设备表征，以识别相干误差并绘制原生门保真度；进行噪声感知转译，优化量子比特映射和门分解，以最大限度地减少活动体积；通过定制的门重新校准和泡利随机化抑制相干误差；进行预测性重新表征，为门和态制备与测量操作拟合局部泡利误差模型；以及自适应准概率误差缓解，

该方法交错执行表征电路和缓解电路，以纠正残余误差，同时跟踪硬件漂移。

QESEM 提供简洁易用的应用程序接口，用户可以通过与硬件无关的方式指定量子电路、可观测量和目标误差容限。该软件会自动处理设备表征、电路转译和自适应误差缓解，让从业者能够专注于算法开发，而非设备特定的细节。如下所示，典型工作流程只需几行代码：

```
导入 qiskit，qedma_api
来自 qiskit.quantum_信息 导入 SparsePauliOp

# 加载量子电路和可观测量
量子电路 = qiskit.qasm2.load("example.qasm")
可观测量 = 稀疏泡利算子("IIXIXI")
量子处理器_时间_限制_小时 = 0.5

# 创建并运行任务
任务 = qedma_客户端.创建_作业(
    量子电路=circ,
    可观测量=[可观测量],
    精度=0.05,
    后端="ibm_fez",
    量子电路_选项=qedma_应用程序接口.CircuitOptions(转译_等级=1),
)
Qedma_客户端.启动_作业(
    作业_编号=作业.作业_编号
    最大_量子处理器_时间=日期时间.时间间隔(小时=量子处理器_时间_限制_小时)
)

# 获取结果
作业 = Qedma_客户端.获取_作业(作业_编号='123456789', 包含_结果=真)
打印(作业.结果)
```

有关 QESEM 的更多详细信息，请参阅 [36]）。

C 维度表达能力分析

维度表达能力分析（DEA） [45] 可以揭示拟设中的冗余参数数量，并提供有关其局部表达能力的信息，即它围绕给定初始化点对希尔伯特空间的可达子空间进行参数化的能力。具体而言，雅可比矩阵定义为关于拟设参数 θ的方程（13）中状态的实导数，其秩对应于量子电路能够改变输出状态的独立方向数量。对于作用于 n 个量子比特的实值量子电路，该秩的上限为 $2^n - 1$，对应于实射影希尔伯特空间的维度（不包括归一化）。

在我们的情况下，最大可达到的秩为 15，因为该量子电路仅在 4个量子比特上产生实振幅。正如图 16所示，当层数足够大时，完整的砖墙试探电路达到了这一上限，这表明它完全覆盖了可达的实子空间。相比之下，调整后的试探电路的雅可比矩阵秩饱和于 7，表明存在参数冗余。尽管如此，这种表达能力足以捕获广泛的相关状态，同时使用的参数少于完整的砖墙试探电路。

调整后的试探电路中一个明确的冗余来源，是量子电路末端量子比特 2 和 4 上存在两个连续的 R_Y门。由于 $R_Y(\theta_1)$ $R_Y(\theta_2) = R_Y(\theta_1 + \theta_2)$，单个参数即可实现相同的变换，从而使拟设能够高效地实现所需变换。此外，整体纠缠结构也会影响量子电路的表达能力。交替改变受控非门的方向或引入 SWAP 操作，可以提高雅可比矩阵的秩，从而增强量子电路的表达能力。

虽然这类冗余看似效率低下，但过参数化实际上可以增强变分量子算法的可训练性。冗余参数可能有助于平滑优化景观、减轻硬件噪声的影响，并提高找到合适极小值的可能性 [45, 53, 54]。

为进一步评估调整后的4个量子比特量子电路在实际中的表达能力，我们进行了额外测试，优化量子电路参数，使其复现从对应的

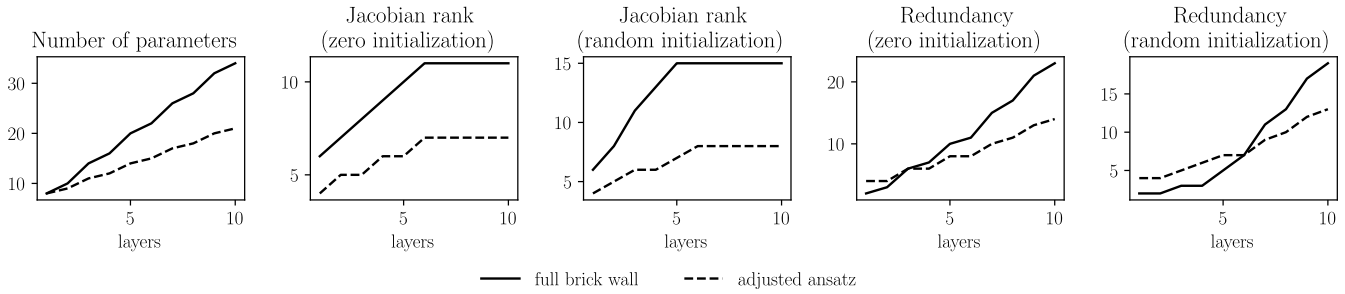


图16：完整砖墙结构化拟设与硬件调整拟设的维度表达能力分析。

希尔伯特空间中随机采样得到的目标态。优化过程旨在最小化余弦距离，该距离衡量两个向量方向上的偏差，同时不受全局幅度缩放的影响。代价函数 C 定义为

$$C = 1 - \frac{\langle \phi_{\text{target}}, \phi_{\text{prepared}} \rangle}{\|\phi_{\text{target}}\| \cdot \|\phi_{\text{prepared}}\|}. \tag{40}$$

尽管 DEA 秩未达到最大值，优化结果表明，调整后的量子电路能够准确表示目标态，余弦距离达到 10^{-11} 量级。这表明，尽管理论上的表达能力有所降低，该拟设在实践中仍然非常有效。

这些结果表明，调整后的拟设已经能够高效地捕捉相关状态空间。不过，未来的工作仍可探索有针对性的架构修改，例如增加纠缠层或重新分配参数，以进一步增强其表达能力。