arXiv:2601.10171v1 [math.CO] 15 Jan 2026

关于具有唯一可定向回路双重覆盖的3-连通平面图

Meike Weiß* Reymond Akpanya† Alice C. Niemeyer‡

摘要

无桥图的回路双覆盖是由偶子图构成的集合，其中每条边恰好包含在该集合的两个子图中。这种回路双覆盖描述了相应图在曲面上的嵌入。本文研究著名的可定向强嵌入猜想。该猜想认为，每个无桥图都有一种回路双覆盖，描述其在可定向曲面上的嵌入。在最近的一篇论文中，我们证明了一个3-连通三次平面图 G 恰有一个可定向回路双覆盖，当且仅当 G 是某个阿波罗尼奥斯网络的对偶图。本文通过证明这一刻画适用于任意3-连通平面图（无论其是否为三次图），拓展了这一结果。

1 引言

1985年，F. Jaeger提出了著名的**可定向强嵌入猜想**，见 [14]。该猜想断言，每个2-连通图都可以强嵌入某个可定向曲面。尽管这一猜想仍未解决，多年来，人们已取得了关于该猜想及相关问题的各种部分结果。有关部分结果，请参阅 [6, 12, 13, 16, 22]。上述猜想促使人们对平面图在非球面曲面上的嵌入展开了不同研究。例如， [17] 证明了每个3-连通平面图都可以强嵌入某个非球面曲面。最近，我们在可定向强嵌入猜想的背景下研究了**阿波罗尼奥斯对偶图**，即阿波罗尼奥斯网络的对偶图，见 [19]。这里，**阿波罗尼奥斯网络** 是指一种平面图，它可以通过递归地将完全图 K_4 的面细分为三个新面而构造出来；相关参考文献见 [1, 8, 11]。我们利用了 [7, 20] 中关于3-连通三次平面图重新嵌入的结果，证明阿波罗尼奥斯对偶图恰好是具有唯一可定向强嵌入的3-连通三次平面图。鉴于所有具有唯一可定向强嵌入的3-连通三次平面图由此已得到完整分类，自然会产生以下问题：

Que节。 哪些3连通平面图恰有一种可定向强嵌入 *?*

给定无桥图的强嵌入可以用回路双覆盖来描述。在我们的工作中，回路指每个顶点的度均为偶数的连通子图。因此，如果一个三次图有回路双覆盖，那么覆盖中的回路必定是圈，即连通的2-正则子图。这些观察使我们能够将 [19, 定理 5.4] 扩展如下：

定理 1.1. 一个3连通平面图 G恰有一种可定向回路双覆盖，当且仅当 f G 是一个阿波罗尼奥斯对偶图。且仅当

*德国亚琛，亚琛工业大学。电子邮件：weiss@art.rwth-aachen.de。
†澳大利亚悉尼悉尼大学。电子邮箱：reymond.akpanya@sydney.edu.au.
‡德国亚琛工业大学。电子邮箱：alice.niemeyer@art.rwth-aachen.de.

本文结构如下：第2节介绍图及其嵌入的相关概念，这些概念是本文研究的基础。第3节介绍对3-连通平面图的两种修改，即完全增广（定理 3.2）和完全截断（定理 3.5）。由于经过上述修改得到的图仍然是3-连通平面图，因此这些修改在本文中发挥着核心作用。我们利用它们证明本文的主要结果。第4节中，我们运用这些修改，并证明它们在3-连通平面图对偶化时具有以下良好性质：我们证明，对3-连通平面图的对偶图进行完全增广所得到的图 G 与对 G进行完全截断所得到的图的对偶图同构；上述结论的示意图见图6。我们利用这一结论证明，阿波罗尼奥斯对偶图恰好是具有唯一一个回路双覆盖的3-连通平面图。请注意，我们使用计算机代数系统 GAP [9]和 Magma [2]研究了阿波罗尼奥斯网络及其性质。

2 预备知识

我们首先介绍一些关于图的预备概念。关于本文所需理论背景的更详细描述，请读者参阅 [19, 第 2]节。本文中，我们假设所有图均为无向、连通、简单且有限图。设G 为这样的一个图。我们分别用 V(G)和 E(G)表示 G 的顶点集和边集。下面，我们形式化图中回路和圈的概念。尽管文献中的定义各不相同，本文采用以下约定： G 中的回路是 G的一个偶子图。如果 G中的某个回路是二正则图，则称其为 G中的一个圈。 G 中的三角形是长度为三的圈。若$G \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ 不再连通，则称 G 的三角形（v_1、 v_2、 v_3）为分离三角形。此外， G 的回路双覆盖是 G中的一组回路，使得 E（G）中的每条边恰好包含于其中两个回路中。如果存在为覆盖中的每个回路指定的定向，使得对于每条边 e ，覆盖 e 的两个回路沿相反方向经过e，则称该回路双覆盖是可定向的。圈双覆盖和可定向圈双覆盖的定义类似，只需将回路替换为圈即可。注意，在三次图中，所有回路都是圈，因为所有顶点的度均为三。为了给出一个不构成圈双覆盖的回路双覆盖示例，我们考虑图 K_2、2、2。

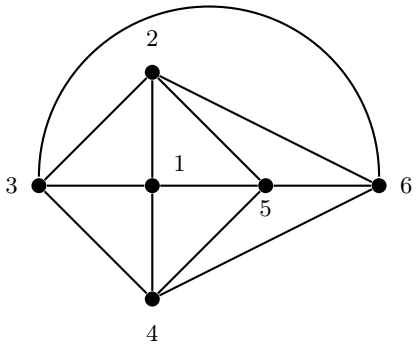


图1：一个平面嵌入$K_{2,\ 2,\ 2}$

该图可以配备如下回路双覆盖：

$$\{(1,2,3,1,4,5),(1,2,5,1,3,4),(6,2,3,6,4,5),(6,2,5,6,3,4)\}.$$

我们注意到，上述集合中的回路并不构成 $K_{2,2,2}$ 的圈。

图 G 在无边界紧致二维流形 S 上的嵌入，是一个单射且连续的映射 $\beta: G \to S$。该嵌入的胞腔是 $S \setminus \beta(G)$ 的连通分支；如果所有胞腔都由回路围成，则称该嵌入为强嵌入。回路双覆盖定义图嵌入，而圈双覆盖定义强图嵌入。如果这些双覆盖是可定向的，则它们定义可定向曲面上的嵌入。如果图 G 可以嵌入平面 G，则称其为平面图。此类平面嵌入的胞腔称为面，记作 $F(G)$。如果面 $F \in F(G)$ 由闭游走 $(v_1, \dots, v_k)$ 围成，则记作 $(v_1, \dots, v_k)$。此外，我们称 F 的长度为 k，并将其长度记作 $|F|$。注意，3-连通平面图在平面上有唯一嵌入，见 [21]。所有面均为三角形的平面图称为平面三角剖分。从组合视角来看， G 在平面上的每个嵌入都可以由旋转系统定义；旋转系统为 G 的每个顶点 v 定义与 v 关联的边的循环次序。为了描述平面图在非球面曲面上的嵌入，还必须额外定义一个符号$\lambda: E(G) \to \{-1, 1\}$。有关（平面）图的旋转系统和符号的更多信息，见 [10, 15]。

3 修改平面图

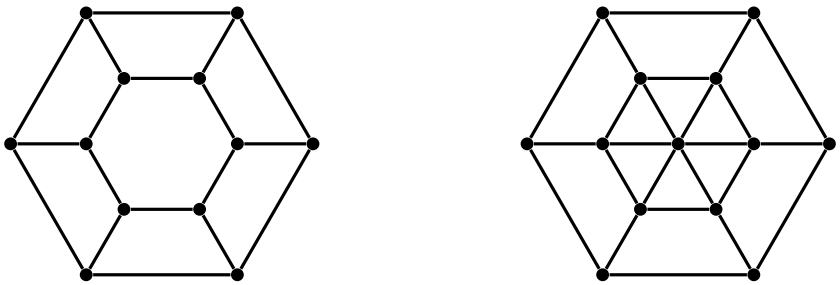
本节讨论 3-连通平面图的完全截断和完全增广。这些修改将用于证明，阿波罗尼奥斯对偶恰好是仅有一个可定向回路双覆盖的 3-连通平面图，参见定理 1.1。为得出这一结论，我们将证明这些修改保留给定图的平面性和 3-连通性。

3.1 增广

本节首先正式介绍在给定图的一个面处对 3-连通平面图进行增广的操作，更多详情参见 [5]。

定义 3.1。 设 G 是一个 3-连通平面图， $F = (v_1, \dots, v_k)$ 是 G 的一个面。我们通过以下方式定义图 G'：$V(G') := V(G) \cup \{v_F\}$，以及 $E(G') := (E(G) \cup \{\{v_F, v_i\} \mid i = 1, \dots, k\}$. 我们称 G' 是通过对 G 中的面 F 进行**增广**得到的。

注意，如果 G 是图2a所示的平面图，那么 G 恰有两个长度为 6 的面。对其中非外面的那个长度为 6 的面进行增广，得到图2b所示的图。



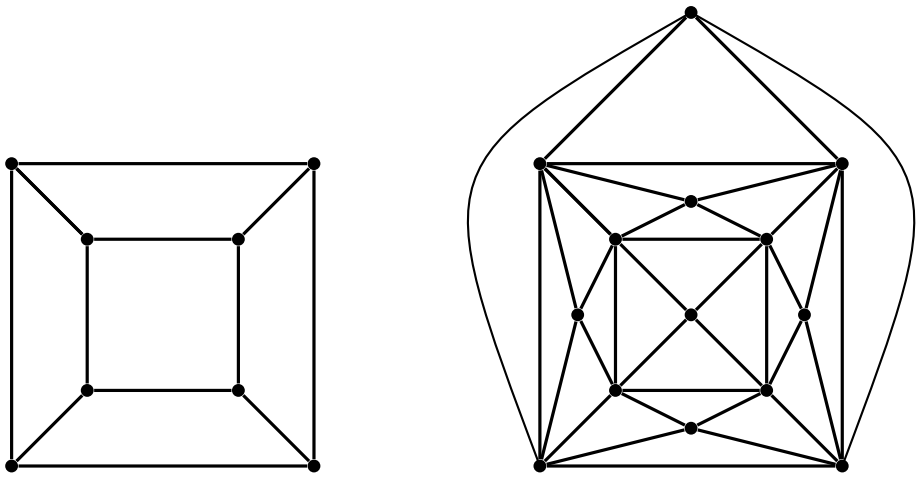
(a) (b)

图2：一个 3-连通平面图 G (a)，以及对 G 的长度为 6 的内面进行增广后得到的图(b)

接下来，我们运用定理3.1介绍一种构造图的方法：对给定的3-连通平面图的每个面进行增广。

定义3.2。 设 G 是一个3-连通平面图。对 G 的每个面进行增广后得到的图记作 G^a ，并称为 G.的**完全增广**。

F图 3b 展示了图 3 所示立方图的完全增广 a.



(a) (b)

图 3：立方图 G(a) 及其完全增广 G^a

我们观察到，3-连通平面图 G 的完全增广是一个平面图，恰好包含 $|V(G)| + |F(G)|$ 个顶点、$|E(G)| + \sum_{F\in F(G)} |F|$ 条边和 $\sum_{F\in F(G)} |F|$ 个面，其中 $|F|$ 定义了围成 F 的圈的长度。此外，我们注意到 G^a 构成一个极大平面图。

引理 3.3。 *3-*连通平面图的完全增广构成一个平面三角剖分。

证明。 设 G 是一个 3-连通平面图，且设 $F_1, \dots, F_\ell$ 恰好是其唯一平面嵌入的各个面。考虑面 F_i，其包含 $F_i = (v_1, \dots, v_k)$。通过增广面 F_i，它被细分为三角形 (v_F, v_i, v_{i+1})，其中 $i \in \{1, \dots, k\}$ 满足 $v_{k+1} = v_1$.。面的增广是一种局部操作，因此不会影响给定图 G 的其他面。特别是，图仍然是平面的。因此，对 G 的所有面进行增广后，G^a 成为一个平面三角剖分。

□

注意，平面三角剖分总是 3-连通的。因此，上述引理表明，如果 G是 3-连通平面图，那么这些性质对 G^a也成立。

3.2 截断

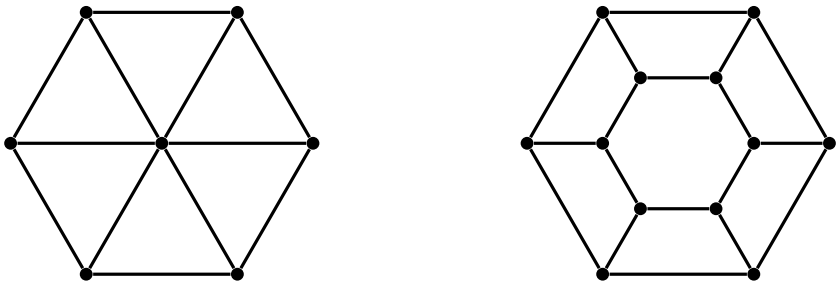
接下来，我们介绍如何在给定的 3-连通平面图的一个顶点处进行截断，更多细节请参见 [5] 。

定义 3.4。 设 G 是一个3连通平面图， ρ 是 G 的旋转系统，且 $v \in V(G)$ 是一个满足 $k := \deg(v)$ 的顶点。此外，设 $e_1 = \{v, v_1\}, \dots, e_k = \{v, v_k\} \in E(G)$ 恰为与 v 相接且满足 $\rho_v(e_i) = e_{i+1}$ 的边，其中 $e_{k+1} = e_1$; 也就是说，边 e_{i+1} 是相对于 ρ 而言在 v 处边 e_i 的后继。由此我们可以定义图 G' :

$$
\begin{aligned}
V(G') &:= (V(G) \setminus \{v\}) \dot\cup \{w_{(v,e_1)}, \dots, w_{(v,e_k)}\}, \\
E(G') &:= \bigcup_{i=1}^{k} \{\{w_{(v,e_i)}, w_{(v,e_{i+1})}\}, \{v_i, w_{(v,e_i)}\}\} \cup (E(G) \setminus \{e_1, \dots, e_k\})
\end{aligned}
$$

其中 $w_{(v,e_{k+1})} := w_{(v,e_1)}$ 且 $w_{(v,e_j)} \notin V(G)$ 对于 $1 \leq j \leq k$。我们称 G' 是通过对 G 中的顶点 v 进行**截断** 得到的。

对图4a所示的3-连通平面图中度为6的顶点进行截断后，所得的图如图4b所示。



(a) (b)

图4：3-连通平面图 G(a) 以及在度为6的顶点处对 G进行截断后所得的图 (b)

我们注意到，存在一个从 $V(G) \setminus \{v\}$ 到图 G'中顶点的单射，其中图 G'是对 G 在 v处进行截断后所得的图。利用上述操作，可以给出3-连通平面图的完全截断。

定义3.5。设 G 是一个3-连通平面图，且 $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. 首先，我们定义$G_0 := G$ 并按如下方式递归构造图 $G_1, \ldots, G_n$：对于 $0 \leq i \leq n-1$，设 G_i 已构造。顶点 v_{i+1} 可视为图 G_i 的一个顶点。因此，我们将图 G_{i+1} 定义为对 G_i 在顶点 v_{i+1}处进行截断后所得的图。我们称 $G^t := G_n$ 为 G.的**完全截断**

在图5b中，我们展示了由图K_4 （如图5a所示）经过完全截断后得到的图$(K_4)^t$ 。

对 3-连通平面图 G 进行完全截断后，得到的图有$\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ 个顶点、 $|E(G)| + \sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ 条边，以及 $|V(G)| + |F(G)|$ 个面。完全截断 G^t 包含两种不同类型的边。我们可以利用这些边，在 G 的顶点和边与 G^t. 的某些结构之间建立一一对应关系。这一观察总结如下述注记。

注记3.6. 设 G是一个3-连通平面图， ρ 是其（唯一的）旋转系统， G^t 是其完全截断。因此， G^t 的顶点由下式给出

$$V(G^t) = \{w_{(v,e)} \mid v \in V(G), e \in E(G) \ with \ v \in e\}.$$

如上所述， G^t 有两种类型的边，即

1. $|E(G)|$ 形如 $\{w_{(v,e)}, w_{(v',e)}\}$ 的边，其中 $e \in E(G)$ 是一条具有 $e = \{v, v'\}$ 的边；以及 2. $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ 条形如 $\{w_{(v,e)}, w_{(v,e')}\}$ 的边，其中 $e, e' \in E(G)$ 是具有 $v \in e \cap e'$ 的边，且 $\rho_v(e) = e'$.

因此我们看到，边 $e = \{v, v'\} \in E(G)$ 对应于边 $\{w_{(v,e)}, w_{(v',e)}\} \in E(G^t)$。此外，顶点 $v \in V(G)$ 的关联边为 $e_1, \ldots, e_m \in E(G)$，其中 $\rho_v(e_i) = e_{i+1}$ 对于 $i = 1, \ldots m$ 满足 $e_{m+1} := e_1$，对应于以下面：

$$(w_{(v,e_1)}, \ldots, w_{v_{(v,e_m)}}) \in F(G^t).$$

注意，剩余的 $|F(G)|$ 面与 G^t 的面一一对应G.



(a) (b)

图5：完全图 $G \cong K_4$ (a)及其完全截断 G^t ，其中类型1的边标为红色，类型2的边标为蓝色(b)

本节最后指出，完全截断 G^t 是一个三连通三次平面图。该结果源于凸多面体在截断下的性质，详见 [4]。

引理3.7。 设 G 为一个*3*-连通平面图，则完全截断 G^t 构成一个*3*-连通三次平面图。

证明。 显然， G^t 是三次且平面的。因此，只需证明 G^t 是3-连通的。根据Steinitz定理，见 [18], ，我们知道 G是描述凸多面体 P的顶点与边之间关联关系的图。将 P 的所有顶点截断后得到一个凸多面体，其顶点与边之间的关联关系由 G^t描述。因此，Steinitz定理意味着 G^t 是3-连通且平面的。 □

4 个可定向回路双覆盖的3-连通平面图

最后，我们研究阿波罗尼奥斯对偶这一类图，并证明这些图恰好是仅具有一个可定向回路双覆盖的3-连通平面图。为得出这一结果，我们需要进行一些准备工作。首先，我们证明阿波罗尼奥斯网络的边分为两类。为使这一点形式化，我们引入给定3-连通平面图中对一个面进行增广的逆操作，即删除一个顶点。给定一个3-连通平面图 G和一个顶点 $v \in V(G)$，我们将通过从 G中删除 v 以及与 v 关联的所有边所得到的图记为 G_v 。

命题4.1。 设 G 是一个阿波罗尼奥斯网络，且 $e \in E(G)$ 是一条边。那么， e 要么包含于 G的某个分离三角形中，要么与一个三度顶点关联。

证明。我们对 n 上的$= |V(G)| \geq 4$进行归纳，以验证该陈述。若 $n = 4$，则 G 同构于完全图 K_4。因此，很容易看出， $E(G)$中的每条边都与一个三度顶点关联。现在，假设 $n > 4$ 成立。因此， G 包含一个顶点 $v \in V(G)$，满足$\deg(v) = 3$ ，使得 G_v 是一个定义良好的阿波罗尼奥斯网络。于是， v 在 G中有三个邻点，即 w_1、 w_2 和 w_3。根据归纳假设， $E(G_v)$中的每条边要么包含于一个分离三角形中，要么与 G_v中的一个三度顶点关联。在 G中，除边$\{w_i, w_j\}$ （其中 i、$j \in \{1, 2, 3\}$和 $i \neq j$）之外的所有边，因此也都包含于一个分离三角形中，或与 G中的一个三度顶点关联。此外，对于 i、 $j \in \{1, 2, 3\}$和 $i \neq j$，边 $\{w_i, w_j\}$在 G中构成一个分离三角形。最后，在 G中与 v关联的边，即 $\{v, v_1\}$、 $\{v, v_2\}$和$\{v, v_3\}$，都与一个三度顶点关联。因此，结论得证。□

注意到，这一事实可直接由这些对象与堆叠二球面一一对应得出，参见 [3] 例如。尽管如此，为了完整起见，我们仍在本文的框架下给出证明。接下来，我们证明对偶化、截断和增广可以组合起来，从而得到同构图。为此，我们需要定义对偶图。平面图 G 的**对偶图** 记作 G^*，其构造方法是将每个面替换为一个顶点，并在对应的两个面共享一条边时，将相应的两个顶点连接起来。这意味着

G 的顶点对应于 G^*的面。我们证明，若 G是一个3-连通平面图，则 G^* 的完全增广（G^*）^{a} 构成的图与 G^t的完全截断的对偶图（G^t）*同构。图6进一步说明了这一结论。这一结论在多面体领域是经典结果（例如参见 [4]），根据Steinitz定理 [18]，它也适用于3-连通平面图。不过，为了完整起见，本文仍对这一结论给出证明。

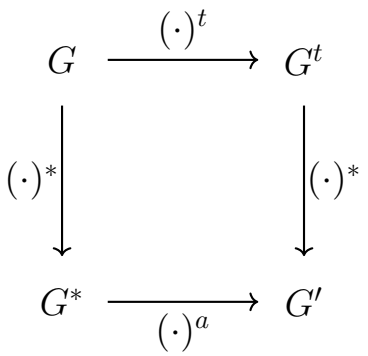


图6：描述 $G' \cong (G^*)^a \cong (G^t)^*$ 思路的交换图

定理 4.2. 设 G 是一个 *3*-连通平面图。那么 $(G^*)^a \cong (G^t)^*$.

证明。 我们首先给出上述图的显式描述，然后建立一个合适的同构 Φ: $(G^*)^a \to (G^t)^*$，以此证明该结论。先来描述 $(G^*)^a$ 的关联结构。根据定义， G^* 中的所有面和顶点分别对应于 G 中的顶点和面。因此，完全增广 $(G^*)^a$ 是一个平面三角剖分，其顶点对应于 G^* 的面和顶点（因而也对应于 G 的顶点和面）。更准确地说，$(G^*)^a$ 是由顶点 $V = \{w_v \mid v \in V(G)\} \cup \{w_F \mid F \in F(G)\}$ 以及边

$$\begin{aligned} E = &\{\{w_F, w_v\} \mid v \in F \text{ where } v \in V(G), F \in F(G)\} \cup \\ &\{\{w_F, w_{F'}\} \mid F \cap F' \in E(G) \text{ where } F, F' \in F(G)\}. \end{aligned}$$

现在，让我们考虑 $(G^t)^*$. 。我们知道， G^t 是一个三次平面图，其中各面要么对应于 G 的顶点，要么对应于其面。更准确地说，对于每个顶点 $v \in V(G)$，图 G^t 都包含一个面 H_v；对于每个面 $F \in F(G)$，它都有一个面 H_F.。注意，两个面 H， $H' \in F(G^t)$ 满足 $H \cap H' \in E(G^t)$，当且仅当以下两种情况之一成立:

1. $H = H_v$ 对应顶点 $v \in V(G)$，而 $H' = H_F$ 对应面 $F \in F(G)$，其中 $v \in F$，
2. $H = H_F$对应面 $F \in F(G)$，而 $H' = H'_F$对应面 $F' \in F(G)$，其中 $F \cap F' \in E(G$).

H因此，$(G^t)^* = (V',\ E')$ 是具有 $V' = \{u_v \mid v \in V(G)\} \cup \{u_F \mid F \in F(G)\}$ 的图，并且

$$\begin{aligned} E' = &\{\{u_F, u_v\} \mid v \in F \text{ where } v \in V(G), F \in F(G)\} \cup \\ &\{\{u_F, w_{F'}\} \mid F \cap F' \in E(G) \text{ where } F, F' \in F(G)\}. \end{aligned}$$

因此，很容易看出该映射

$$\Phi : (G^*)^a \to (G^t)^*, w \mapsto \begin{cases} u_v, & w = w_v \text{ for a vertex } v \in V(G), \\ u_F, & w = w_F \text{ for a face } F \in F(G). \end{cases}$$

构成从（G^*）^{a} 到（G^t）* 的同构，从而得出结论。 □

接下来的引理非常有用，它指出，3-连通平面图 G 的完全截断的可定向回路双覆盖可以转换为 G 的可定向回路双覆盖。

引理 4.3。设 G 为一个 *3*-连通平面图。若 G^t 有可定向回路双覆盖，则 G 有可定向回路双覆盖。

证明。回顾一下， G^t 的顶点和边由以下集合定义：

$$V(G^t) = \{w_{(v,e)} \mid v \in V(G), e \in E(G), v \in e\} \text{ and } E(G^t) = E_1 \cup E_2 \text{ with}$$

$$E_1 = \{\{w_{(v,e)}, w_{(v,e')}\} \mid e, e' \in E(G),\ v \in e \cap e',\ \rho_v(e) = e'\} \text{ and}$$
$$E_2 = \{\{w_{(v,e)}, w_{(v',e)}\} \mid e \in E(G),\ e = \{v, v'\}\}.$$

E_2 中的边与 $E(G)$ 一一对应，而 G^t 的面 F 对应于 G 的一个顶点或 G 的一个面，如定理 3.6 中所述。设 $\mathcal{C}^t$ 是 G^t 的一个可定向回路双覆盖。首先，我们证明可以将 $\mathcal{C}^t$ 转化为 G 的一个回路双覆盖 $\mathcal{C}$。在 G^t 中，圈 C 可按以下规则转化为 G 中的回路：

1. 若 G^t 的面 $C \in \mathcal{C}^t$ 对应于 G 的一个顶点，则在 G 的回路双覆盖中忽略 C。2. 若 G^t 的面 $C \in \mathcal{C}^t$ 对应于 G 的一个面，则如定理 3.6 所述，可将 C 直接转化为 G 的一个面。3. 若 $C \in \mathcal{C}^t$ 经过 G^t 的不同面，则可通过移除包含在 E_1 中的边，将 C 转化为 G 的回路。剩余的边，即 E_2 中的边，可转化为 G 中的边；这些边在 G 中构成一个圈，如定理 3.6 所述。

因此，按照上述规则，集合 $\mathcal{C}^t$ 可以转化为 $\mathcal{C}$ 的回路集合 G。由于 $e \in E_2$ 中的每条边都由 $\mathcal{C}^t$ 中的两个不同圈覆盖，而这些圈被转换为 $\mathcal{C}$ 中覆盖边 $e' \in E$（G）的不同回路，其中该边对应于 e，因此我们看到， $\mathcal{C}$ 构成了 G. 的回路双覆盖。还需证明 $\mathcal{C}$ 仍然是可定向的。注意，$\mathcal{C}^t$ 的圈仅被缩短以得到 $\mathcal{C}$，除此之外没有进行任何改变。通过这种缩短，仅保留了与 E（G）中的边建立双射的边。借助这一双射，可以将 $\mathcal{C}^t$ 中圈的定向直接转换为 $\mathcal{C}$ 中回路的适当定向。

□

定理 4.3 的证明中确立的规则使我们能够将 G^t 的不同圈双覆盖转换为 G 的不同回路双覆盖。因此，我们得到以下推论。

推论 4.4。设 G 为一个 *3*-连通平面图。如果 c_G 和 c_{G^t} 分别表示 G 和 G^t 的回路双覆盖数与圈双覆盖数，那么 $c_G \geq c_{G^t}$ 成立。

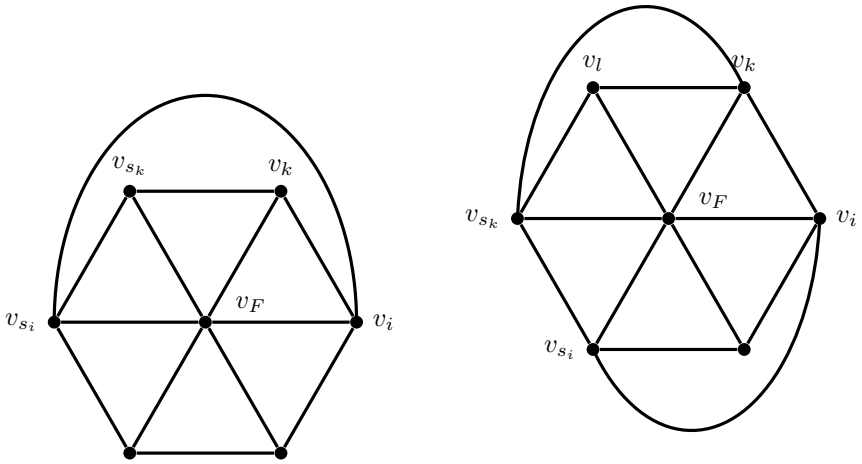
最后，我们已经介绍了所有必需的工具，现在可以证明定理 1.1。

证明。证明从假设 G 是阿波罗尼奥斯对偶开始。这意味着 G 是三次图，因此 G 的每个回路双覆盖都是圈双覆盖。因此，根据定理 5.4], 我们知道 G 恰有一个可定向回路双覆盖。

为得出结论，现在假设反方向不成立。这意味着存在一个 3-连通平面图 G，它不同构于阿波罗尼奥斯对偶，且恰有一个可定向回路双覆盖。注意，由于 [19,定理 5.4], G 不可能是三次图。此外，我们注意到，完全截断 G^t 的不同可定向圈双覆盖对应于 G的不同可定向回路双覆盖。根据定理 4.4 G^t必须是一个恰有一个可定向圈双覆盖的 3-连通三次平面图，也就是说，根据 [19]它是一个阿波罗尼奥斯对偶。因此，$(G^t)^*$ 是一个阿波罗尼奥斯网络。根据定理 4.2，图 $(G^*)^a$ 与 $(G^t)^*$同构，因此 $(G^*)^a$ 是一个阿波罗尼奥斯网络。下面我们证明，对 G^* 进行完全增广不可能得到阿波罗尼奥斯网络。

由于 G 不是三次图， G^* 包含一个长度为 $n \geq 4$的面 $F = (v_1, \ldots, v_n)$。因此，$(G^*)^a$包含一个由在面F处对 G^* 进行增广所产生的度至少为四的顶点 v_F 。注意，$(G^*)^a$ 中的顶点 $v_1, \ldots, v_n$ 的度至少为六，因为它们在 G^*中的度至少为三。这意味着，对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$，边 $\{v_F, v_i\}$ 在 G^*中不与任何三度顶点关联。因此，根据定理 4.1，为使$(G^*)^a$ 成为阿波罗尼奥斯网络，边 $\{v_F, v_i\}$ （ $i \in \{1, \ldots, n\}$）必须包含在一个分离三角形中。这意味着，对每个 $1 \leq i \leq n$，都存在一个指标 s_i （不一定唯一），使得(v_F, v_i, v_{s_i})是$(G^*)^a$的一个分离三角形，从而有 $|i - s_i| > 1$。接下来，我们论证，对每个 $1 \leq i \leq n$，都存在一个整数 k，满足 $\min(i, s_i) < k < \max(i, s_i)$，使得$(v_F, v_k, v_{s_k})$构成$(G^*)^a$的一个分离三角形，其中要么 $s_k < \min(i, s_i)$，要么 $s_k > \max(i, s_i)$。假设该陈述不成立。因此，存在某个 $1 \leq i \leq n$ ，使得对每个满足 $\min(i, s_i) < k < \max(i, s_i)$ 的值，都存在一个指标 s_k，满足 $\min(i, s_i) < s_k < \max(i, s_i)$，且$(v_F, v_k, v_{s_k})$构成一个分离三角形。于是，对每个满足 $\min(i, s_i) < \ell < \min(i, s_i) + \lfloor \frac{|i - s_i|}{2} \rfloor$的 ℓ，不等式 $|\ell - s_\ell| > |(\ell + 1) - s_{\ell+1}|$必须成立。因此， $k := \min(i, s_i) + \lfloor \frac{|i - s_i|}{2} \rfloor$)满足$|k - s_k| \in \{1, 2\}$.。若 $|k - s_k| = 1$，则$(v_F, \overline{v_k, v_{s_k}})$不可能构成分离三角形，因为它是$(G^*)^a$的一个面，见图 7a。此外，若 $|k - s_k| = 2$，我们知道 v_k 和v_{s_k} 都与顶点 v_ℓ关联，而该顶点不满足 $\min(i, s_k) < s_\ell < \max(i, s_k)$，见图 7b。因此，我们得到了所需的矛盾。这意味着，顶点 $v_F, v_1, v_{s_1}, v_k, v_{s_k}$表明$(G^*)^a$含有一个与完全图 K_5. 同构的子式。这与$(G^*)^a$ 的平面性矛盾，因此$(G^*)^a$ 不可能是阿波罗尼奥斯网络，由此得证。

□



(a) (b)

图 7： $|k - s_k| = 1$ （a）和 $|k - s_k| = 2$ （b）

致谢

我们谨此感谢德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）在协同研究中心 CRC/TRR 280“材料减量型碳纤维增强混凝土结构的设计策略——新型建筑方法的原理”（项目编号 417002380）框架下提供的资助。此外，R. Akpanya 获得了西蒙斯基金会（SFI-MPS-Infrastructure-00008650）的资助。

参考文献

[1] José S. Andrade、Hans J. Herrmann、Roberto F. S. Andrade 和 Luciano R. da Silva。阿波罗网络：同时具有无标度、小世界、欧几里得、空间填充特性并带有匹配图。*Phys. Rev. Lett.*，94：018702，2005年1月。[2] Wieb Bosma、John Cannon 和 Catherine Playoust。Magma代数系统。I. 用户语言。*J. Symbolic Comput.*，24(3-4)：235–265，1997年。计算代数与数论（伦敦，1993年）。[3] Benjamin A. Burton、Basudeb Datta 和 Jonathan Spreer。2-球面的叠置三角剖分和旗三角剖分的翻转图。*Electron. J. Combin.*，29(2)：论文编号2.6，共30页，2022年。[4] John H. Conway、Heidi Burgiel 和 Chaim Goodman-Strauss。万物的对称性。A K Peters, Ltd.，马萨诸塞州韦尔斯利，2008年。[5] H. S. M. Coxeter。正多胞体。Dover Publications, Inc.，纽约，第三版，1973年。[6] M.N. Ellingham 和 Xiaoya Zha。射影平面图的可定向嵌入与可定向圈双覆盖。*European Journal of Combinatorics*，32(4)：495–509，2011年。[7] Kengo Enami。在非负欧拉示性数曲面上的3-连通3-正则平面图的嵌入。*Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*，21(4)：论文编号11，共19页，2019年。[8] Thomas Fowler。平面图的唯一着色。博士论文，佐治亚理工学院数学系，1998年。[9] The GAP Group。*GAP – 群、算法与编程，4.13.1*版，2024。[10] Jonathan L. Gross 和 Thomas W. Tucker。拓扑图论。约翰斯·霍普金斯数学科学研究丛书。约翰斯·霍普金斯大学出版社，马里兰州巴尔的摩，2001年。[11] Branko Grünbaum。一个并非等面的凸多面体。2003年。[12] Radek Hušek 和 Robert Šámal。计数回路双覆盖。*J. Graph Theory*，108(2)：374–395，2025年。[13] Roland Häggkvist 和 Klas Markström。圈双覆盖与生成子式 I。*Journalof Combinatorial Theory, Series B*，96(2)：183–206，2006年。[14] Francois Jaeger。圈双覆盖猜想综述。载于 B.R. Alspach 和 C.D. Godsil 编，离散数学年刊（*27*）：图中的圈，施普林格出版社，北荷兰数学研究丛书第115卷，第1–12页。北荷兰出版社，1985年。[15] Bojan Mohar 和 Carsten Thomassen。曲面上的图。约翰斯·霍普金斯数学科学研究丛书。约翰斯·霍普金斯大学出版社，马里兰州巴尔的摩，2001年。[16] Seiya Negami。射影平面图的重新嵌入。*Journal of Combinatorial Theory,Series B*，44(3)：276–299，1988年。[17] R. B. Richter、P. D. Seymour 和 J. Širáň。非球面曲面上平面图的圆形嵌入。*Discrete Math.*，126(1-3)：273–280，1994年。[18] Ernst Steinitz 和 Hans Rademacher。关于多面体理论的讲义（包括拓扑学要素），数学科学基础丛书第41卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1976年。1934年版本重印。[19] Meike Weiß、Reymond Akpanya 和 Alice C. Niemeyer。关于3-连通三次平面图及其在可定向曲面上的强嵌入，2025年。

[20] Meike Weiß 和 Alice C. Niemeyer。非负欧拉示性数曲面上的 3-连通立方平面图的强嵌入。*arXiv* 电子预印本，页码 arXiv:2407.17972，2024 年。[21] Hassler Whitney。2-同构图。美国数学杂志，55(1-4)：245–254，1933 年。[22] Xiaoya Zha。2-连通双环面图的闭2-胞腔嵌入。离散数学，145(1)：259–271，1995 年。