arXiv:2601.10278v1 [math.GT] 15 Jan 2026

具有二分对偶图的交错链环带长的新上界

HYUNGKEE YOO

Abstract. 链环的带长是一种几何不变量，定义为链环的带状折叠实现中长度与宽度之比的下确界。本文证明，若一个交错链环存在具有二部对偶图的交替图，则其带长满足

$$\mathrm{Rib}(L) \leq \sqrt{3}\, c(L).$$

利用这一结果，我们给出了若干交叉数较小的纽结和链环的改进带长上界，并确定霍普夫链环的精确带长为 $2\sqrt{3}$。

1. 引言

链环是嵌入三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的一维闭流形。只有一个连通分支的链环称为纽结。为了衡量纽结和链环的几何复杂性，人们对实现链环所需的最小长度进行了广泛研究：将链环实现为单位粗细的绳子时，这一长度称为绳长。2005年，Kauffman[13] 引入了带长，即绳长的二维版本。折叠带状链环是将一条窄矩形带折叠成平面形状而得到的，该平面形状沿着由有限条直线段组成的多边形链环延伸，如图1所示。2015年，Denne 等人 [6] 对折叠带结作出了如下严格定义。

定义。设 K 为该纽结，则 K_w 是 K 的宽度为 w 的折叠带状结，并满足以下两个条件：

(1) 带状物是平坦的，其折痕线彼此不相交。(2) K_w 的中心线由有限条首尾相接的直线段组成，并带有表示 K纽结类型的交叉信息。

注意，对于平凡纽结，可以将两个宽为 1、长为 ε 的全等矩形叠放在一起，为任意的 $\varepsilon > 0$ 构造一个折叠纽结。将它们长度为 1 的边粘合起来，即可得到所需的折叠纽结，如图 1 所示。在这一构造中，带长可以任意小。因此，我们将折叠带长定义为下确界。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 57K10.*Key words and phrases.* 带长、三页表示、交错链环、对偶图。

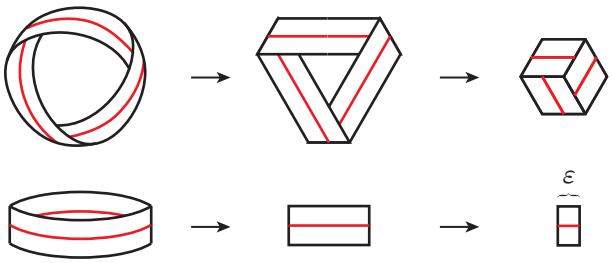


FIGURE 1. 平凡纽结的两个折叠带结

定义。设 K 是一个纽结（或链环），w 是一个正实数。那么

$$Rib(K) = \inf_{K' \in [K]_w} \frac{Len(K')}{w}$$

称为 K 的一种折叠带长。这里，$[K]_w$ 表示宽度为 w 且表示纽结类型 K 的折叠带结集合，Len(K') 是 K' 的中心线长度，并且我们不区分带状物是单侧还是双侧。

链环图是链环在平面上的正则投影 $\mathbb{R}^2$，其中每个交叉点都附有上穿/下穿交叉信息。交叉数 $c(L)$ 定义为所有表示 L 的链环图中交叉点数量的最小值。Kusner 于 2005 年猜想，带长存在关于交叉数的线性上界。对于许多类别的纽结和链环，Kusner 猜想已得到验证 [5, 14, 16, 17]。Tian [24] 随后建立了二次上界，Denne [4] 于 2020 年进一步改进了该上界。最近，Kim、No 和 Yoo [15] 证明了

$$\mathrm{Rib}(L) \leq \frac{5}{2}\, c(L) + 1,$$

从而证实了 Kusner 的猜想 [4]。与此同时，Diao 和 Kusner 猜想，以交叉数表示的带长下界是次线性的。最近，Denne 和 Patterson [7] 证明了这个下界实际上是一个常数。

本文旨在进一步改进某些满足额外组合条件的特殊类别链环的这一上界。我们的方法结合了利用等边三角形的几何构造，以及涉及链环图相关棋盘对偶图的图示技巧。具体而言，我们关注那些存在最小交叉图且其对偶图为二部图的交替链环。

我们的主要结果如下。

定理1. 若交替链环 L 有一个对偶图为二部图的交替图，则

$$\mathrm{Rib}(L) \leq \sqrt{3}c(L).$$

这一结果加强了 Kim、No 和 Yoo 针对这类链环给出的一般线性上界。它为此前已研究过带长的低交叉数纽结和链环给出了更优的上界，并确定霍普夫链环的精确带长为 $2\sqrt{3}$。此外，

我们证明，这一上界在连通和运算下保持不变，从而首次为满足上述假设的连通和给出了带长的明确估计。

本文结构如下。第2节中，我们考察霍普夫链环的折叠带实现，作为启发性示例。第3节介绍圆形三页表示，这是我们构造中的关键工具。第4节讨论具有二分对偶图的交替图。最后，在第5节中，我们证明定理1。利用这一结果，我们给出若干纽结和链环带长的改进上界，并将其与先前已知的估计进行比较。

2. Example: the Hopf link

本节探讨如何将霍普夫链环实现为折叠带状链环。霍普夫链环是最简单的非平凡链环，由两个恰好相互缠绕一次的分支组成。2020年，Denne [4] 提出了霍普夫链环的折叠带构造，如图2所示。在这种实现中，每个分支的长度恰好是其宽度的两倍。

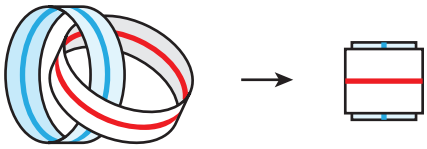


Figure 2. 霍普夫链环的折叠带状链环

现在我们给出一种更短的霍普夫链环折叠带构造。考虑两个宽度为单位宽度、长度为 $\sqrt{3}$ 的矩形。如图 3 所示，将这两个矩形交错排列，使它们的对角线相交。依次将多余部分向内折叠后，我们便得到一个形状由层叠等边三角形组成的折叠带状链环。注意，这种构造由六个等边三角形组成，每个三角形的带长为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$。因此，总带长为 $2\sqrt{3}$，短于 Denne 的原始构造所得的 4。

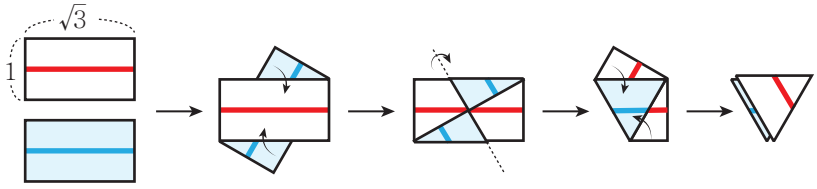


Figure 3. 一种新的折叠带状霍普夫链环

图 4 展示了折叠过程的夸张示意图。

值得注意的是，在这种构造中，折叠带状链环的每个分支都形成了莫比乌斯带结构。最近，Schwartz [22]证明，光滑嵌入的纸莫比乌斯带的长宽比必须大于 $\sqrt{3}$。利用这一事实，我们得到以下定理。

定理 2。霍普夫链环的带长为 $2\sqrt{3}$。

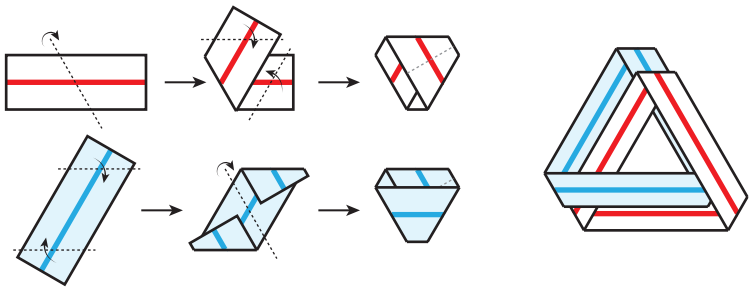


FIGURE 4. 折叠带状霍普夫链环的构造过程

3. ROTATED CIRCULAR THREE-PAGE PRESENTATIONS

1995年，Cromwell [3] 证明了，任意链环都可以嵌入到一组共享公共轴（称为粘合轴）的有限个半平面中，这些半平面构成 $\mathbb{R}^3$的开书分解。这些半平面被称为页。当每一页恰好包含链环的一条弧时，这种嵌入称为弧表示。这类表示对于研究链环不变量特别有用，因为它们提供了一种组合方法，用于分析纽结和链环的结构。如果修改这一设置，允许每页包含多条互不相交的弧，同时将页的总数限制为三页，所得结果称为三页表示。

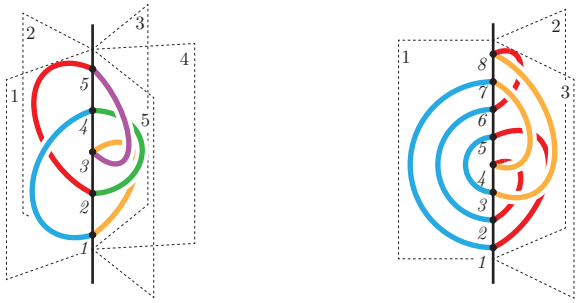


FIGURE 5. 三叶结的弧表示和三页表示

1999年，Dynnikov [8] 证明，每个链环都可以用三页表示来表示。这种表示不仅广泛应用于纽结和链环的研究，也用于三价空间图和奇异纽结等更一般的对象 [8, 9, 10, 11, 18, 19, 20, 25]。在弧表示和三页表示中，每条弧都由一个绑定指标和一个页码以组合方式描述。粘合轴与链环相交于有限多个点，这些点称为粘合点，通常从下到上依次编号为 1、2、...、n，并称为绑定指标。每条弧还标有一个页码，表示它所属的开书分解中的页面。

考虑配备开书结构的 $\mathbb{R}^3$ 的一点紧化。此时，粘合轴变为一个平凡结圆，而每个半平面都变成一个圆盘。这个圆称为绑定圆。在此背景下，圆形三页表示的概念被引入

于 [25] 中。绑定指标原本以垂直高度表示，现在则沿绑定圆依次排列。

圆形三页表示可以表示为链环图，从而为该表示提供一种方便的平面描述。首先，我们选取一条简单闭曲线作为绑定圆。若将第一页和第二页置于绑定圆内部，而将第三页置于外部，则所有交叉点都可以安排在绑定圆的内部。在这种构型中，下穿弧位于第一页上，而上穿弧位于第二页上，如图6所示。

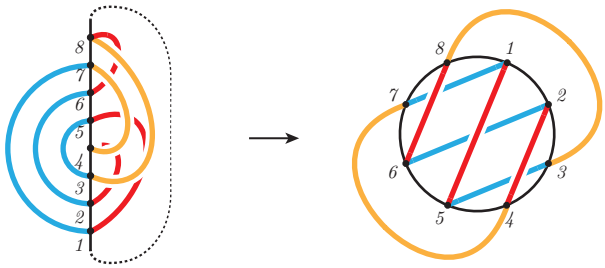


FIGURE 6. 三页表示及其圆形三页表示

为使这一平面描述形式化，我们引入以下定义。

定义。设 D 为一个链环图。若简单闭曲线 γ 满足以下条件，则称其为 D 的三页表示的绑定圆：

(1) 曲线 γ 与 D 相交于有限个点。(2) D 的所有交叉点均位于 γ 内部。(3) 被 γ 截断的 D 中的每条弧均属于以下三种类型之一：(a) 位于 γ外部；(b) 位于 γ 内部，且仅参与上交叉；(c) 位于 γ 内部，且仅参与下交叉。(4) 沿 γ，同一类型的两条弧不相邻。

对于任意链环图，均可通过一个直接的论证验证此类绑定圆的存在性。首先，我们忽略图中的交叉信息，将其视为四价平面图。若该图是连通的，我们选取一棵生成树，并考虑在 $\mathbb{R}^2$ 中该树的一个足够小的 ε 邻域的边界。很容易验证，这条边界曲线满足三页表示中绑定圆定义所要求的条件。若底层图不连通，则可为每个连通分支构造一个绑定圆，再通过连通和将它们连接起来，由此得到的曲线同样满足所需性质。更多细节将在后续工作中给出。

引理3. 设 D 为一个链环图。若 D 的三页表示存在一个具有 n 个绑定点的绑定圆，则 D 可表示为由 n条弧组成的三页表示。

现在回顾第2节中介绍的霍普夫链环的堆叠等边三角形构型。随后，可将三角形沿着一条穿过其形心的轴对齐，并根据它们的邻接关系用弧连接，如图7所示，从而构造出一个三页表示。我们注意到，每个等边三角形对应一个绑定点。假设带状物的宽度为单位宽度，则每个等边三角形所代表的带状物长度为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$。因此，所得折叠带状结的总长度为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 乘以绑定点的数量。

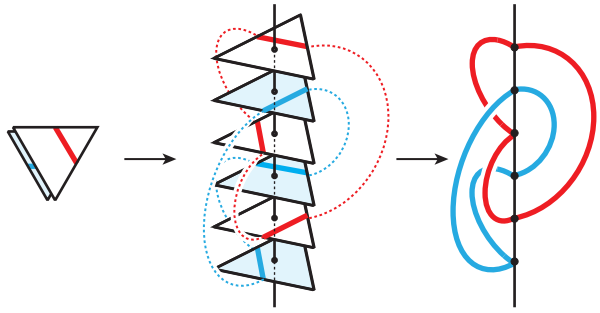


FIGURE 7. 从折叠带状链环到三页表示的转换

与霍普夫链环的例子一样，我们来考察沿着等边三角形轮廓折叠带状物来构造链环的过程。当带状物沿每个分支缠绕时，可以看出每条边依次沿三角形的各边折叠。这一观察表明，在相应的三页表示中，每个分支的弧都按照图8所示的循环次序穿过各页。

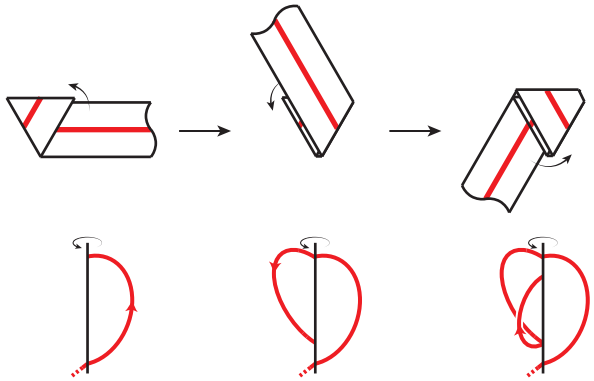


FIGURE 8. 转换过程的细节

基于这种循环行为，我们引入以下定义。

定义。若每个分支的弧都按循环次序穿过各页，则称该三页表示为旋转的。

请注意，每个分支的弧穿过各页的循环次序并非固定。特别是，反转这一顺序不会影响

旋转三页表示的定义。显然，旋转三页表示中的弧数是三的倍数。现在我们引入一个关键引理，它将在证明主要结果的过程中发挥核心作用。

引理4. 设 L 是一个具有由 $3n$ 条弧组成的旋转三页表示的链环。则 L 可实现为长度为 $\sqrt{3}n$ 、宽度为单位宽度的折叠带状链环。

证明。假设给定一个旋转三页表示。对于每个粘合点，我们在粘合轴上放置一个以其为中心的等边三角形。这些三角形之间的连接方式由旋转三页表示中的弧决定。正如前面讨论的霍普夫链环示例所示，当带状物的宽度为单位宽度时，每个等边三角形对应一段长度为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的带状物。因此，这一构造得到一个折叠带实现，其总带长等于绑定点数量的$\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍。□

由于这些三角形依次连接，带状物的正面和背面也交替确定。因此，如果构成链环某个分支的三角形数量为奇数，相应的带状物就是单面的；如果数量为偶数，则是双面的。

4. Alternating diagrams with bipartite dual graphs

本节介绍与二分对偶图相关的交替图的定义和基本性质。若一个链环存在这样一种图示，使得沿链环的每个分支，上穿和下穿交替出现，则称该链环为交替链环。在链环图中，若存在一条简单闭曲线经过某个交叉，且不与图示的其他部分相交，则该交叉称为可约交叉。没有可约交叉的链环图称为约化图。Kauffman [12], 、Murasugi [21], 和 Thistlethwaite [23]分别于1987年运用基于琼斯多项式的技巧证明，任何约化交替图都实现了相应链环的最小交叉数。

给定一个链环图 D，我们对图中的区域进行棋盘着色。对偶图 $\Gamma(D)$ 的构造方法是：在每个着色区域内放置一个顶点，并在相应区域于某个交叉处相接时连接这两个顶点。请注意， $\Gamma(D)$ 一般是多重图，可能包含环或多重边。 $\Gamma(D)$ 的每条边都根据 D 的局部交叉信息赋予一个符号。有关这一构造及相关符号约定的详细说明，请参阅 Adams 的著作 [1]。

如果给定的链环图 D 是交替的，那么对偶图$\Gamma(D)$的每条边都具有相同的符号。不失一般性，我们可以假设所有边都带正号；否则，可以将 D 替换为其镜像。这个假设是合理的，因为带长在取镜像后保持不变。因此，当链环图是交替图时，可以忽略对偶图各边上的符号。

二分多重图是一种图，其顶点集被划分为两个互不相交的子集，边只能连接来自不同子集的顶点。

同一对顶点之间可以有多条边，但不能有边连接同一子集中的两个顶点。因此，二分多重图中没有环。特别是，其中不含奇圈。我们的目标是为交错链环的带长建立一个改进的上界，这类交错链环具有如图9所示的最小交叉图，且其对偶图是二部的。

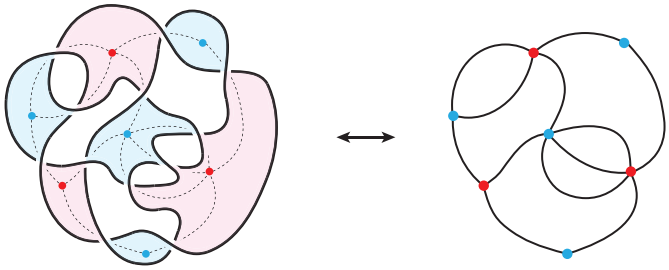


FIGURE 9. 具有二部对偶图的最小交叉数交替图

现在假设 D中存在一个可约交叉。 $\Gamma(D)$中与该交叉对应的边要么是环，要么是割边，如图10所示。如果该交叉构成 $\Gamma(D)$两部分之间唯一的连接，那么对应的边就是割边，即移除后会使图不连通的边。反之，如果两个相邻的阴影区域重合，那么该边就是环。反过来，如果 $\Gamma(D)$包含环或割边，那么与之对应的交叉处存在一条简单闭曲线，它仅在该交叉处与D 相交，因此该交叉是可约的。特别地，图D 是约化的，当且仅当 $\Gamma(D)$既没有环，也没有割边。

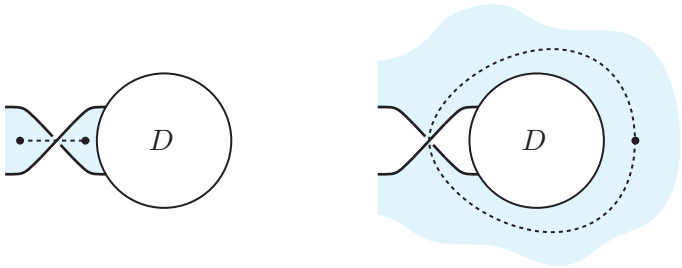


FIGURE 10. 从链环图到其对偶图的转换规则

纽结 K_1 和 K_2 的连通和 $K_1\#K_2$ 是纽结理论中的一项基本运算，它通过沿短弧连接两个纽结来产生一个新的纽结。更确切地说，从每个纽结中移除一小段开弧，并以保持定向的方式用两条弧连接所得的端点。所得的纽结类型在环境同痕意义下是良定义的，并且与构造中所作的具体选择无关。通过对选定的分支取连通和，该运算自然地推广到链环。在交替纽结的情形下，交叉数在连通和运算下具有可加性。

现在，我们考察具有二分对偶图的交替图这一性质在连通和运算下的表现。

引理5. 设 L_1 和 L_2 为交替链环，且各自都存在一个对偶图为二部图的交替图。若连通和 $L_1\#L_2$ 是交替的，则它也存在一个对偶图为二部图的交替图。

证明. 设 D_1 和 D_2 分别为 L_1 和 L_2的交替图，其对偶图 $\Gamma(D_1)$和 $\Gamma(D_2)$均为二部图。对于每个 $i=1$，在平面中选取一个小圆盘，使其与 D_i 相交于一条嵌入弧，且不包含任何交叉点。通过移除这些弧，并以标准方式粘合所得端点，即可得到 $L_1\#L_2$ 的一个连通和图 D 。根据假设， $L_1\#L_2$ 是交替的，因此我们选择一种粘合方式，使 D成为 $L_1\#L_2$的交替图。

在此操作下，对偶图 $\Gamma(D)$ 是通过将 $\Gamma(D_1)$ 的一个顶点 v_1 与 $\Gamma(D_2)$ 的一个顶点 v_2 识别而得到的。如果 v_1 和 v_2 在 $\Gamma(D_1)$ 和 $\Gamma(D_2)$ 的二部划分中颜色相同，那么 $\Gamma(D)$ 显然是二部的。如果 v_1 和 v_2 颜色不同，我们就交换 $\Gamma(D_2)$ 的二部划分中的两个部分。由于此操作保持二部性，因此所得图 $\Gamma(D)$ 无论哪种情况都是二部的。□

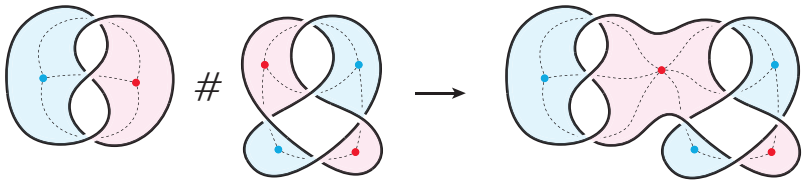


FIGURE 11. 连通和

定理1讨论的是以交叉数为参数的带长上界。因此，必须使用最小交叉图。下面的引理保证，对于任意一个对偶图为二部图的交替图，都存在一个具有相同性质的最小交叉图。

引理6. 如果一个链环有一个对偶图为二部图的交替图，那么它也有一个对偶图为二部图的最小交叉图。
证明。设 D 是一个交替图，其对偶 $\Gamma(D)$ 是二部的。若 D是约化的，则根据 Kauffman、Murasugi 和 Thistlethwaite 的结果， D 是最小交叉图，证毕。

否则，假设 D 有一个可约交叉 c。令 e_c 为 Γ（D）中对应于 c 的边。由于 Γ（D）是二部的， e_c 不是环。因为 c 是可约交叉，所以 e_c 是 Γ（D）中的割边。从 D 中移除 c ，对应于在 Γ（D）中收缩 e_c 。由于 e_c 是割边，它不包含在 Γ（D）的任何圈中。因此，收缩 e_c 不会产生新的奇圈，所得对偶图仍为二部图。从 D 中移除 c 后得到的图仍是交替图，且交叉点更少。重复这一过程，最终会得到一个约化交替图，其对偶图是二部图。□

根据引理，只需考虑对偶图为二部图的交替图，而无需假设其为极小。

5. Construction of Folded Ribbon Links

本节中，我们研究与对偶图为二部图的交替图相关联的旋转圆形三页表示的绑定圆。为完成定理1的证明，只需证明以下定理。

定理7. 设 L 是一个交错链环， D 是 L 的一个交替链环图，且有 n个交叉点。如果对偶图 $\Gamma(D)$是二部的，那么L 有一个旋转圆形三页表示，恰由 $3n$ 条弧组成。

证明. 设 D 是链环 L 的一个交替图，有 n 个交叉点，且其对偶图如定理所假设的那样是二部图。我们根据 $\Gamma(D)$的二部划分，将其顶点染成红色和蓝色。我们的目标是在 D 中构造一个合适的绑定圆，从而得到 L的旋转圆形三页表示。然后，引理3保证所得图是一个旋转圆形三页表示。

首先，我们考虑 $\Gamma(D)$ 连通的情形。为每个交叉点分配一个以该交叉点为中心且足够小的圆盘，使这些圆盘两两不相交。不失一般性，选择 $\Gamma(D)$ 二部划分中的红色颜色类，并沿相应区域合并相邻的圆盘。这样得到一组互不相交的圆盘，它们对应于 $\Gamma(D)$ 的红色顶点。随后对每个圆盘稍作扰动，使其恰好与原区域的每一条边相接一次，如图12所示。

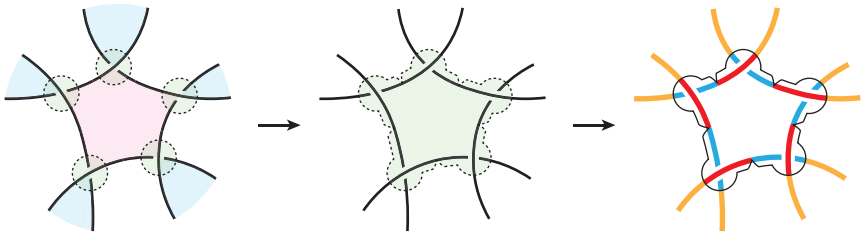


Figure 12. 在选定区域周围构造一个圆

通过这一构造，图中的每个交叉都位于这些圆盘之一的内部。沿着这些圆盘的边界切开链环图后，它便分解为上交叉股、下交叉股以及位于这组圆盘之外的弧。对于每个交叉，圆盘内部恰有两条弧，一条对应上交叉股，另一条对应下交叉股。因此，圆盘内部共有 $2n$条这样的弧。加上这组圆盘之外的 n 条弧，此分解总共得到 $3n$ 条弧。此外，由于 D 是交替的，沿着适当的定向遍历链环图时，这些弧会按以下顺序重复出现：位于圆盘之外、作为上交叉股经过，以及作为下交叉股经过。因此，

剩下的任务是适当地合并这些圆盘，从而得到旋转圆形三页表示的一个结合圆。

对偶图 $\Gamma(D)$ 是连通的，因此存在一棵生成树。我们固定这样一棵生成树，并沿其边依次进行连通和运算，将集合中的圆盘合并。由此，我们得到一个单独的圆盘，它保留了上述所有性质。因此，该圆盘的边界就是所需的绑定圆，如图13所示。

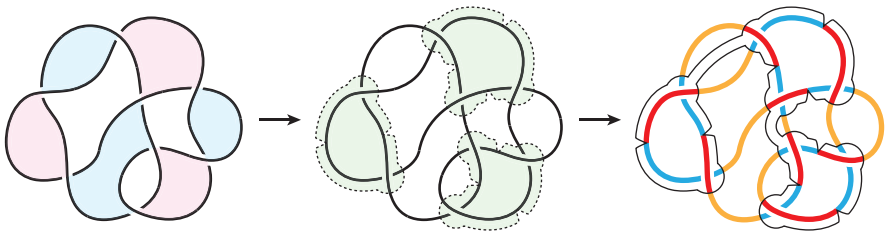


FIGURE 13. 将圆连接起来以得到绑定圆

现在考虑 $\Gamma(D)$ 不连通的情形。此时，原链环图可分解为平面上的若干部分，并且这些部分可由一条与图不相交的简单闭曲线分隔开，这表明该图是一个分裂图。然而，对于每个连通分支，都可以构造一个绑定圆；将它们取连通和，即可得到所需的绑定圆。□

现在证明定理1。

定理1的证明。设 L 是一个交替链环。假设 L 存在一个交替图，其对偶图是二部的。根据引理6，L 也存在一个最小交叉图，且其对偶图是二部的。应用定理7，我们便得到 L 的一个旋转圆形三页表示，其中包含 $3c(L)$ 条弧。最后，根据引理4，即可得到所需的上界，证明完成。□

定理1不仅加强了 Kim、No 和 Yoo 的结果，也改进了适用于多类交替链环的若干已知界。若两个交替链环 L_1 和 L_2 满足定理的条件，且具有交叉符号相容的交替图，那么它们的连通和 $L_1\#L_2$ 具有一个对偶图为二部图的交替图。由于交替链环的交叉数具有可加性，连通和 $L_1\#L_2$ 也满足该定理。虽然连通和并非我们的主要研究重点，但我们的方法可以自然地推广到这种情形。

推论8. 设 L_1 和 L_2 为交替链环，且各自都具有一个对偶图为二部图的交替图。那么

$$\mathrm{Rib}(L_1\#L_2) \leq \sqrt{3}\, c(L_1\#L_2).$$

据我们所知，此前尚无研究探讨折叠带长在连通和运算下的变化。具体而言，尚无以交叉数表示的链环连通和带长的显式上界。

我们的结果的重要意义在于，利用旋转三页表示推导出带长的上界。然而，随着交叉数增加，满足我们假设的链环会越来越少。迄今为止，与带长相关的已有结果已由 Chen 等人 [2] 系统总结。作为主要结果的直接推论，我们得到以下改进后的带长上界。

推论 9. 以下是指定纽结的带长紧上界：

$$\mathrm{Rib}(K) \leq \begin{cases} 3\sqrt{3}, & \textit{if } K \textit{ is the trefoil knot}, \\ (n+2)\sqrt{3}, & \textit{if } K = T_n \textit{ with } n = 1, 3, 5, \\ 6\sqrt{3}, & \textit{if } K = P(2,2,2). \end{cases}$$

此处， T_n 表示具有 n 个半扭转的扭结，而 P(2, 2, 2)表示(2, 2, 2)-椒盐纽结。

Declaration of generative AI and AI-assisted technologies in the manuscript preparation process

在准备本稿件期间，作者使用人工智能语言工具改善语法和可读性。作者审阅并修订了所有内容，并对稿件的最终版本负全部责任。

Acknowledgements

作者谨向庆北国立大学的Hyoungjun Kim教授和京畿大学的Sungjong No教授致谢，感谢他们对证明提出的宝贵意见，以及为示例提供的建议。本研究得到韩国国家研究基金会（NRF）基础科学研究计划资助，该资助由韩国政府教育部提供（RS-2023-00244488）。

References

[1] C. Adams. *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots*. 美国数学学会，2004. [2] Z. Chen, E. Denne, K. Patterson, 和 T. Patterson. 小交叉数结与链环的带长上界。*arXiv preprint arXiv:2510.16190*，2025年。[3] P. Cromwell. 在开书中嵌入结与链环 I：基本性质。*Topology and its Applications* 64 1 37 58, 1995，(): – 。[4] E. Denne. 折叠带结的带长与交叉数。*Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 30 04 2150028, 2021，(): 。[5] E. Denne, J. C. Haden, T. Larsen, 和 E. Meehan. 折叠带结族的带长。*Involve, a Journal of Mathematics*, 15(4):591–628, 2023年。[6] E. Denne, M. Kamp, R. Terry, 和 X. C. Zhu. 平面上折叠带平凡结的带长。*Knots, Links, Spatial Graphs, and Algebraic Invariants*, 689:37, 2015年。[7] E. Denne 和 T. Patterson. 结族与多重扭转的莫比乌斯带的有界带长。*arXiv preprint arXiv:2509.18370*，2025年。[8] I. Dynnikov. 结理论的三页方法：编码与局部变换。*Funktsional Analysis and Its Applications* 33 4 260 269, 1999，(): – 。

[9] I. Dynnikov. 结理论的三页方法：万有半群。 *Functional Analysis and Its Applications* 34 1 29 40, 2000 , ( ): – 。[10] I. Dynnikov. 表示链环的新方法：一维形式体系与解缠技术。 *Acta Applicandae Mathematicae*, 69(3):243–283, 2001年。[11] U. Jang, M. Lee, 和 H. Yoo. 环面链环的三页指标。*Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 34 12 2550063, 2025 , ( ): 。[12] L. H. Kauffman. 状态模型与琼斯多项式。 *Topology* 26 3 395 407, , ( ): – 。[13] L. H. Kauffman. 最小平扁结带。载于 *Physical And Numerical Models In Knot Theory: Including Applications to the Life Sciences* 495 506 , 第 – 页。世界科学出版社，2005年。[14] B. Kennedy, T. W. Mattman, R. Raya, 和 D. Tating. 环面结的带长。 *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 17(01):13–23, 2008年。[15] H. Kim, S. No, 和 H. Yoo. 结与链环带长的线性上界。 *Algebraic & Geometric Topology*。即将出版。[16] H. Kim, S. No, 和 H. Yoo. 扭环面结的带长。*Theory and Its Ramifications* 31 12 2250092, 2022 , ( ): 。[17] H. Kim, S. No, 和 H. Yoo. 2 *Journal of Knot*-桥结的折叠带长。, *Theory and Its Ramifications* 32 04 2350030, 2023 ( ): 。[18] V. Kurlin. 相连的 3 *Functional Anal*-价图的三页 *ysis and Its Applications* 35 3 230 233, 2001 Dynnikov 图。, ( ): – 。[19] V. Kurlin. 空间图的三页编码与复杂性理论。 *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 16 1 59 102, 2006 , ( ): – 。[20] V. Kurlin 和 V. Vershinin. 奇异结的三页嵌入。 *Functional Analysis and Its Applications* 38 1 14 27, 2004 , ( ): – 。[21] K. Murasugi. 琼斯多项式与纽结理论中的经典猜想。 *Topology*, 26 2 187 194, 1987年 ( ): – 。[22] R. Schwartz. 最优纸莫比乌斯带。 *Annals of Mathematics*, 201(1):291–305, 2025年。[23] M. B. Thistlethwaite. 琼斯多项式的生成树展开。 *Topology*, 26 3 297 309, 1987年 ( ): – 。[24] G. Tian. 环面结与扭结带长的线性上界。*arXiv preprint arXiv:1809.02095v1*, 2018年。[25] H. Yoo. 有理链环与椒盐链环的三页指标。*and Its Ramifications* 35 1 2550074, 2026 *Journal of Knot Theory* , ( ): 。

Department of Mathematics Education、 Sunchon National University、 Sun-cheon 57922、 Republic of Korea*Email address*: hyungkee@scnu.ac.kr