arXiv:2601.10280v1 [math.AP] 15 Jan 2026

双曲平面外部区域中最低罗宾特征值的优化

ˇˇ´ANTONIO CELENTANO、DAVID KREJCIRIK 和 VLADIMIR LOTOREICHIK

摘要。我们研究双曲平面中一个有界单连通利普希茨区域外部的罗宾拉普拉斯算子。我们证明，该算子的本质谱为 $[\frac{1}{4},\infty)$；并且在对区域作出凸性假设时，当且仅当罗宾参数小于一个非正临界常数时，才存在低于 $\frac{1}{4}$ 的离散特征值，该临界常数取决于区域的形状。作为主要结果，我们证明，对于双曲平面中一个有界测地凸区域 Ω 的外部，其最低 Robin 特征值不超过如下区域外部的相应特征值：该区域为测地圆盘，且其边界测地曲率不小于 Ω 边界的平均测地曲率。由此可知，在固定面积或固定周长的约束下，测地圆盘的外部在所有有界测地凸区域的外部中使最低 Robin 特征值达到最大。此外，在相同的几何约束下，我们还得到了临界常数之间的反向不等式。

1. 引言

1.1. **背景与动机**。关于微分算子的特征值相对于区域形状的优化，是谱几何中的经典课题，已有许多研究成果，也存在不少具有挑战性的开放问题；参见 例如专著 [36, 37] 及其中的参考文献。在这一背景下，一个重要问题是：在适当的几何约束（如固定体积或固定周长）下，如何优化具有特定边界条件的拉普拉斯算子的第一特征值。狄利克雷边界条件的情形最为经典，可追溯至 Faber [26]和 Krahn [47, 48]的论文。对于诺伊曼拉普拉斯算子，最低特征值恒为零，因此人们自然会关注如何优化第一个非零特征值 [63, 65]。在这两个典型例子中，与经典等周不等式相似，球最终成为最优几何形状。

近年来，罗宾边界条件受到了广泛关注。在这种情形下，边界参数的符号起着重要作用。Bossel [12]首先在二维情形中证明，随后 Daners [25]将其推广至所有空间维数：在固定体积约束下，当边界参数为正时，球使最低 Robin 特征值达到最小。文献 [3, 16, 17]中提出了其他证明方法。因此，尽管需要应对重大的方法论挑战，正参数的 Robin 情形并无意外：球仍然是最优几何形状。

负边界参数下，情况会发生巨大变化。Freitas 与本文第二作者 [27] 证明，在固定体积约束下，球通常并非优化解；但在二维情形中，若负 Robin 参数小于某个临界负常数，则球是最大化者，而该常数仅取决于区域的面积。另一方面，已有研究证明，在二维情形下施加固定周长约束 [7]，以及在高维情形下施加固定边界面积约束并额外假设凸性 [15], 时，对于所有负边界参数，球都是最低特征值的最大化者。

2020 数学主题分类。35P15,58J50。关键词和短语。罗宾拉普拉斯算子，负边界参数，凸集外部，双曲平面，最低特征值，谱等周不等式，谱等容不等式，平行坐标。

此外， [7] 文中提出猜想：在固定体积约束下，对于单连通平面域以及高空间维数下的凸域，带负边界参数时，球是最低 Robin 特征值的最大化者。

在流形 [1, 23, 43, 60] 上的有界区域以及存在均匀磁场 [40]的情形下，最低 Robin 特征值的优化问题也得到了研究。论文 [43]尤其给出了双曲平面或更一般的负曲率流形上有界区域的优化结果。然而，据我们所知，对于双曲平面上所有具有固定周长的有界光滑单连通域，负边界参数下罗宾拉普拉斯算子的最低特征值是否由测地圆盘取得最大值，仍是一个悬而未决的问题。

人们也对欧几里得空间 [28, 29, 32, 44] 和流形 [52]中有界区域上拉普拉斯算子的第二和第三 Robin 特征值的优化问题给予了大量关注。后一篇论文尤其研究了双曲平面上有界区域的第二 Robin 特征值优化问题，并证明在适当的几何约束以及取自某个自然范围的边界参数下，测地圆盘具有最优性。

除了对一般有界区域上的拉普拉斯算子特征值进行优化外，人们也对双连通域上的此类特征值优化感兴趣；经典研究见 [38, 57] ，较新的进展见 [5, 6] 。

作为双连通域的一种极值情形，本文的第二作者和第三作者在一系列论文 [49, 50, 51]中率先研究了负边界参数下外域上的罗宾拉普拉斯算子的特征值优化问题。这里的主要挑战在于，所讨论几何形状的无界性会导致本质谱的出现。在平面情形中，文献 [49, 50]证明，对于有界单连通光滑区域Ω的补集$\Omega^{\mathrm{ext}} := \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$，负边界参数下罗宾拉普拉斯算子的本质谱与非负半轴重合，且该算子至少有一个负离散特征值；当Ω的面积或周长固定时，圆盘的外部区域使该特征–值达到最大值。高维外域的情形更为复杂 [50], ，但球仍至少是局部最优的 [18]。

外域上的 Robin 拉普拉斯算子的对偶问题，是外域上的 Steklov 特征值问题，近期已有详细研究 [19]。此外， [35]证明，至少在某些特殊情形下，外部欧几里得区域上的 Robin 拉普拉斯算子的特征值，会出现在球面上逐渐扩展至整个球面的区域上的 Robin 拉普拉斯算子特征值的渐近行为中。

本文的主要动机是将上述欧几里得结果 [49, 50] 推广到双曲平面中的外域。在双曲情形下，会遇到一些新的挑战，例如本质谱的起点不为零，以及有界凸域外部的诺伊曼拉普拉斯算子并非临界。因此，测地圆盘在谱意义上的最优性远非显而易见。

1.2. **算子的定义及其最低谱点的刻画**。设 $\mathbb{H}^2$ 表示双曲平面。在双曲模型中，它可以看作配备了 $\mathbb{R}^3$ 中闵可夫斯基度量的拉回度量的双叶双曲面的上叶。有关双曲平面的更多细节，请参见小节 2.2。我们用 μ 表示 $\mathbb{H}^2$ 上由其（黎曼）度量诱导的黎曼测度。

设 $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ 是一个有界单连通利普希茨区域，其边界为 $\partial\Omega$。下文中，σ 表示 $\partial\Omega$上的自然一维豪斯多夫测度。我们用 $\Omega^{\mathrm{ext}} := \mathbb{H}^2 \setminus \overline{\Omega}$ 表示 Ω 在双曲平面中的补集。Lebesgue空间$L^2(\Omega^{\mathrm{ext}}, \mathrm{d}\mu)$和 Sobolev空间 $W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}}, \mathrm{d}\mu)$按标准方式定义。对于任意$u \in W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}}, \mathrm{d}\mu)$，其迹 $u|_{\partial\Omega^{\mathrm{ext}}}$ 作为 $L^2(\partial\Omega, \mathrm{d}\sigma)$中的函数是良定义的。下文中，我们省略测度 $\mathrm{d}\mu$ 的标记，分别用 $L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})$和 $W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}})$代替 $L^2(\Omega^{\mathrm{ext}}, \mathrm{d}\mu)$和 $W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}}, \mathrm{d}\mu)$。我们也省略测度 $\mathrm{d}\sigma$ 的标记，并用 $L^2(\partial\Omega)$代替 $L^2(\partial\Omega, \mathrm{d}\sigma)$。

令边界参数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 固定。我们在命题 3.1 中证明二次型

$$Q_\alpha^{\mathrm{ext}}[u] := \int_{\Omega^{\mathrm{ext}}} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu + \alpha \int_{\partial\Omega^{\mathrm{ext}}} |u|^2 \,\mathrm{d}\sigma, \qquad \operatorname{dom} Q_\alpha^{\mathrm{ext}} := W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}}), \tag{1.1}$$

在 $L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})$中是闭的、稠密定义的、对称的且下半有界的。因此，它在希尔伯特空间 $L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})$中诱导出唯一的自伴算子，记为 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}$。我们还将该算子的最低谱点记为 $\lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}}) := \inf \sigma(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}})$。根据极小极大原理，它具有如下变分刻画

$$\lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}}) = \inf_{u \in W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}})\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\Omega^{\mathrm{ext}}} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu + \alpha \int_{\partial\Omega^{\mathrm{ext}}} |u|^2 \,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\Omega^{\mathrm{ext}}} |u|^2 \,\mathrm{d}\mu}.$$

该最低谱点可以是离散特征值，也可以是本质谱的底端，这取决于边界参数 α的取值。

1.3. 主要结果。 我们的第一个主要结果给出了算子 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}$ 的本质谱刻画。不出所料，该算子的本质谱与整个双曲平面上拉普拉斯算子的本质谱相同。

定理A. $\sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}) = [\frac{1}{4}, \infty)$ 对所有 $\alpha \in \mathbb{R}$成立。

定理 A 将在下文作为命题 3.4 陈述，并通过证明两个集合之间的包含关系来加以证明：其中一个包含关系借助适当的 Weyl序列得到证明，另一个则依赖于 Neumann夹逼。

我们还将在引理 3.5 中证明 $\lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}}) \to -\infty$ 关于 $\alpha \to -\infty$ 是非递减的，并且 $\mathbb{R} \ni \alpha \mapsto \lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 是一个非递减函数。因此，自然地，我们引入并研究以下量

$$\alpha_\star(\Omega^{\mathrm{ext}}) := \sup\left\{\alpha \in \mathbb{R} \colon\ \lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}}) < \frac{1}{4}\right\}.$$

显然，$\lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 因而是 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}$ 的离散特征值，当且仅当 $\alpha < \alpha_\star(\Omega^{\mathrm{ext}})$。我们的第二个主要结果涉及这个临界常数。

定理 B. 以下结论成立。

(i) $\alpha_\star(\Omega^{\mathrm{ext}}) \le 0$ 对任意有界的测地凸 C^2-光滑区域 $\Omega \subset \mathbb{H}^2$均成立。若区域 Ω 还严格凸，则 $\alpha_\star(\Omega^{\mathrm{ext}}) < 0$.(ii) $\alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}}) \le \frac{1}{2}(e^{-R} -$ 双曲余切 $R)$ 对半径为 $R > 0$ 的测地圆盘 $B_R \subset \mathbb{H}^2$ 成立。-

定理B 的（i）部分将在定理3.10 中陈述，并借助某些一维 Poincar´e 型不等式，采用平行坐标法加以证明。定理B 的（ii）部分将在引理4.1 中证明：通过变量分离，再将离散特征值的存在性归结为一个涉及特殊函数的标量方程的可解性。我们还猜想，对于双曲

平面中的某些非凸有界域，临界边界参数 $\alpha_\star(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 可能为正。备注3.11中概述了一种支持这一猜想的几何构造。

本文的核心结果是比较双曲平面中有界测地凸区域外部的罗宾拉普拉斯算子的最低特征值与测地圆盘外部的同一特征值。下文中，对于区域 $\Omega \subset \mathbb{H}^2$，我们分别用 $|\Omega|$ 和 $\mathcal{H}^1(\partial\Omega)$ 表示其面积和周长。顾名思义，后者是通过拓扑边界 $\partial\Omega$ 的豪斯多夫测度引入的；但在当前的正则性假设下，它也与 De Giorgi 意义下的周长概念（即约化边界的豪斯多夫测度）一致。

定理 C。 设 $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ 是一个有界测地凸区域，并设 $B \subset \mathbb{H}^2$ 是一个测地圆盘，使得

$$\frac{|\Omega| + 2\pi}{\mathcal{H}^1(\partial\Omega)} \leq \frac{|B| + 2\pi}{\mathcal{H}^1(\partial B)}. \tag{1.2}$$

那么，对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，有

$$\lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}}) \leq \lambda_1^\alpha(B^{\mathrm{ext}}).$$

特别地，关于临界边界参数 $\alpha_\star(\Omega^{\mathrm{ext}}) \geq \alpha_\star(B^{\mathrm{ext}})$，反向不等式成立。

我们指出，根据高斯-博内定理，对于光滑的 $|\Omega| + 2\pi$，该量等于 $\int_{\partial\Omega}\kappa$，其中 $\kappa \geq 0$ 是 $\partial\Omega$ 的测地曲率，符号约定适当。因此，量 $(|\Omega| + 2\pi)/\mathcal{H}^1(\partial\Omega)$ 可解释为 $\partial\Omega$ 的平均测地曲率。上述优化结果将在下文的定理 5.1 中重新表述，并通过试探函数加以证明；这些函数仅依赖于到区域边界的距离。对于 1.2，其条件在分析中自然出现，这是由 $\mathbb{H}^2$中有界凸区域的外平行曲线长度公式所致。证明中的另一个要点是，双曲平面内测地圆盘外部区域上的罗宾拉普拉斯算子的基态特征函数所确定的某个商具有单调性。同一商的单调性还意味着函数 $R \mapsto \lambda_1^\alpha(B_R^{\mathrm{ext}})$（这里 R 是圆盘的半径）单调不减。下文的命题4.4 陈述并证明了这一性质的一个更精确版本。

定理C蕴含了固定周长或固定面积约束下的等周不等式。事实上，可以证明，与 Ω 具有相同面积或相同周长的测地圆盘满足条件（1.2）。因此，我们也可以表述如下推论。

推论。 设 $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ 是一个有界测地凸域，并设 $B \subset \mathbb{H}^2$ 为满足下列条件之一的测地圆盘：$|\Omega| = |B|$ 或 $H^1(\partial\Omega) = H^1(\partial B)$。则对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，有

$$\lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}}) \leq \lambda_1^\alpha(B^{\mathrm{ext}}).$$

1.4. 论文结构。 第2 节汇总了黎曼流形的必要符号和双曲平面的基本性质。第3 节探讨双曲平面中有界 Lipschitz 域外部区域上的罗宾拉普拉斯算子的一般谱性质。在该节中，我们刻画了 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}$ 的本质谱，并讨论离散特征值的存在性。第4 节详细分析双曲平面中测地圆盘外域上的罗宾拉普拉斯算子。本文的核心结果（引言中的定C）及其主要推论在第5节陈述并证明。本文另附三个附录。附录A回顾黎曼流形中凸集的概念。附录B回顾 Steiner公式。最后，附录C探讨双曲平面外域上 Sobolev空间 $W^{1,2}$ 中函数的一些精细性质。

2. 预备知识

2.1. **流形的基本概念**。 设(M, g)是一个维数为n的光滑黎曼流形。我们定义与 g 相关联的距离函数 d_M 为

$$d_M(p,\ q) := \text{下确界}\ \left\{\int_0^1 \sqrt{g(\gamma'(t)\ \gamma'(t))}\,\mathrm{d}t\colon\ \gamma\in C^\infty([0,1];\ M)\ \ \gamma(0)\ =p,\quad \gamma(1)\ =q\right\},\ \ p,q\in M.$$

我们用 μ 表示由 g 诱导的黎曼测度，并将可测集 $E\subset M$ 的体积记为

$$|E| := \int_E \mathrm{d}\mu.$$

定义 2.1. 设 K 是黎曼流形 M 的一个紧子集。对于每个 $t\geq 0$， K 在距离 t 处的外平行体定义为

$$K_t = \{p\in M\colon d_M(p,K)\leq t\}.$$

拓扑边界 ∂K_t 称为 K 在距离 t 处的外平行集。

定义 2.2 （豪斯多夫距离）。设 $K_1,\ K_2\subset M$ 是黎曼流形 M 的两个紧子集。 K_1 与 K_2 之间的豪斯多夫距离定义为

$$d^H(K_1,K_2) = \inf\{t\geq 0:\ K_1\subset (K_2)_t,\ K_2\subset (K_1)_t\}.$$

2.2. **双曲平面的性质**。关于双曲平面以及高维双曲空间的理论，可参见 例如，见 [10]。本小节将概述双曲平面的基本性质，主要依据专著 [10] ，同时也参考 [24, 第 2]节。

二维双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 是唯一的、单连通的二维完备黎曼流形，其高斯曲率为常数，等于负值 -1。根据基灵–霍普夫定理 [54, 定理 12.4], ，双曲平面的唯一性意味着，任何两个具有这些性质的二维黎曼流形都彼此等距。

构造双曲平面有多种方法。这里我们考虑双曲面模型。给定 $x,\ y\in\mathbb{R}^3$，其中 $x=(x_0,\ x_1,\ x_2)$ 和 $y=(y_0,\ y_1,\ y_2)$，$\mathbb{R}^3$ 上的洛伦兹内积定义为

$$\langle x,y\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2.$$

由以下方程给出的双曲面分支

$$\left\{x\in\mathbb{R}^3:\ \langle x,x\rangle = -1, x_0>0\right\},$$

并配备度量张量

$$\mathrm{d}l^2 = -\,\mathrm{d}x_0^2 + \,\mathrm{d}x_1^2 + \,\mathrm{d}x_2^2 \tag{2.1}$$

是 $\mathbb{R}^3$的一个模型。根据 [31, 第 4 节，2]两点 $x,\ y\in\mathbb{H}^2$ 之间的双曲距离为

$$d_{\mathbb{H}^2}(x,y) = \operatorname{arcosh}\left(-\langle x,y\rangle\right). \tag{2.2}$$

I在该模型中，以 $x\in\mathbb{H}^2$ 为起点、具有单位速度 $y\in T_x\mathbb{H}^2$ 的测地线由下式给出 y

$$\mathbb{R}\ni t\to \cosh(t)x + \sinh(t)y\in\mathbb{H}^2,$$

也就是说，它是 $\mathbb{H}^2$ 与 $\mathbb{R}^3$ 中由 x和 y张成的平面的交集；参见 [10, 命题 A.5.1]。

沿用 [24, 第 2] 节的思路，我们将点 $O=(1,\ 0,\ 0)$固定为 $\mathbb{H}^2$ 的原点，并采用以 O为中心的测地线极坐标“坐标”$(r,\ \theta)\in[0,\infty)\times\mathbb{S}^1$。任意点$(x_0,\ x')\in\mathbb{H}^2$，其中 $x'=(x_1,\ x_2)$，均可表示为

$$(x_0,x') = (\cosh r, \theta\sinh r)\ ,$$

其中 $r \geq 0$ 表示从 O 到$(x_0,\ x')$的双曲距离。由于

$$\mathrm{d}x_0 = \sinh r\,\mathrm{d}r, \qquad \mathrm{d}x' = \theta\cosh r\,\mathrm{d}r + \sinh r\,\mathrm{d}\theta,$$

那么度量可写为

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r\,\mathrm{d}\theta^2.$$

最后，在这些测地极坐标中，拉普拉斯–贝尔特拉米算子 Δ 在 $\mathbb{H}^2$ 上的表达式为

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{\cosh r}{\sinh r}\partial_r + \frac{\partial_\theta^2}{\sinh^2 r}.$$

接下来，我们讨论双曲平面中凸集的性质。黎曼流形中的集合凸性比欧几里得空间中的情形更微妙。凸性有三种相关概念：弱、强和局部凸性，定义见附录A。在双曲平面中，弱凸集与强凸集的概念一致，因为任意两点之间都存在唯一一条连接它们的最短测地线。因此，在接下来的章节中，我们将统称为测地凸集。

命题 2.3。设 $C \subset \mathbb{H}^2$ 是一个闭、连通、局部凸集。那么 C 是强凸的。

证明。的局部凸性 C结合其连通性，保证了其内部$\mathring{C}$ 是连通的（见 [21, 引理 1。5]）。因此，我们可以对A.4 应用定理 $\mathring{C}$，从而确保$\mathring{}$每个边界点 $p \in \partial C$ 都有一个支撑元素。由于在双曲平面中，所有点p的割迹 Cut(p)均为空集，因此有

$$\mathring{C} \setminus \mathrm{Cut}(p) = \mathring{C},$$

$\mathring{}$其为连通集。因此，应用命题 A.3可知， C 是弱凸的，因而也是强凸的；这里我们默认 $\mathbb{H}^2$中任意两点之间都存在唯一的极小测地线。最后，由于 C 是闭的且局部凸，它等于其内部的闭包（见 [21, 定理 1.6]），因此 C 继承了$\mathring{}$的强凸性 C。□

$\mathbb{H}^2$ 的凸子集可以通过 C^∞类凸集来逼近，且所依据的是豪斯多夫距离。

命题 2.4. 设 $C \subset \mathbb{H}^2$ 是一个闭、有界的强凸集，且满足 $\mathring{C} \neq \emptyset$。那么存在一个闭、有界且强凸集的序列 $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，其边界为 C^∞，使得

$$\lim_{k\to\infty}\left(d^H(C_k, C) + d^H(\partial C_k, \partial C)\right) = 0.$$

证明。 由于 $\mathbb{H}^2$ 中的高斯曲率为负，定理 A.5 适用，因此可得到一个由连通紧致局部凸集组成的逼近序列 $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，其边界为 C^∞，并且满足 $\mathring{C}_k \neq \emptyset$。命题 2.3 保证了 C_k 对每个 $k \in \mathbb{N}$都是强凸的。□

设 $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ 是一个连通、紧且局部凸的集合。根据命题 B.4(ii)，集合 Ω 的可达半径为 $\mathcal{R}(\Omega) = +\infty$。此外，假设 Ω 是 C^2-光滑的，并结合定理 B.5 中的 Steiner 公式与高斯–博内定理 [20, §III.1],可得外平行集 $\partial\Omega_t$ 的一维豪斯多夫测度为

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(\partial\Omega_t) &= \cosh(t)\mathcal{H}^1(\partial\Omega) + \sinh(t)\int_{\partial\Omega} H_1(p)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1(p)\\ &= \cosh(t)\mathcal{H}^1(\partial\Omega) + \sinh(t)\big(2\pi + |\Omega|\big),\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中， $H_1 \geq 0$ 是 $\partial\Omega$的测地曲率。

现在，我们将恒等式（2.3）从 C^2-光滑有界凸集推广到 $\mathbb{H}^2$ 一般有界凸集，不对边界作任何正则性假设。论证通过用光滑集合逼近非光滑集合来完成。

定理 2.5. 设$\Omega \subset \mathbb{H}^2$ 是有界的测地凸区域。则

$$\mathcal{H}^1\left(\partial\Omega_t\right) = \cosh(t)\mathcal{H}^1(\partial\Omega) + \sinh(t)\big(2\pi + |\Omega|\big), \qquad \textit{for all } t > 0.$$

证明。 我们将使用以下量$\{\Phi_k(\cdot)\}_k$，其定义及分析见附录 B。由备注 B.7 可知 $\Phi_1(\Omega) = \mathcal{H}^1(\partial\Omega)$。对 Ω 应用命题 2.4 ，可得一个由闭、连通且强凸光滑集组成的逼近序列 $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$。由高斯-博内定理，我们推得

$$\Phi_0(C_k) = 2\pi + |C_k| = 2\pi + \Phi_2(C_k),$$

于是有

$$\Phi_0(\Omega) = 2\pi + |\Omega|,$$

这是定理 B.8的推论。利用定理B.5中的 Steiner 公式，即得所述结论。 □

我们还回顾双曲平面中的经典等周不等式，该不等式对 De Giorgi 意义下的有限周长集成立（例如，参见 [59, 定理 5.16]；其精确量化版本另见 [14] ）。此处，我们在凸集这一受限框架下陈述该不等式；如备注 $\mathcal{H}^1$所示，在此框架中，周长这一概念与拓扑边界的 B.7-测度一致。

定理 2.6. 设$\Omega \subset \mathbb{H}^2$ 为测地凸集， B 为与Ω 面积相同的测地圆盘，则

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega) \geq \mathcal{H}^1(\partial B),$$

等号成立当且仅当Ω是测地圆盘。

Rema注 2.7. 在 $\mathbb{H}^2$ 中，半径为 r 的测地圆盘的面积和周长分别为

$$|B_r| = 2\pi\big(\cosh r - 1\big), \qquad \mathcal{H}^1(\partial B_r) = 2\pi\sinh r.$$

y

注 2.8. 若 $B_1(x_0)$是以 x_0 为圆心且周长与 Ω 相同的测地圆盘，$B_2(x_0)$表示以同一点为圆心且面积与 Ω 相同的测地球，则由等周不等式可得 $B_2(x_0) \subset B_1(x_0)$。

3. 双曲平面外域上的谱问题

设 $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ 是一个开、有界的利普希茨集，且其外部区域 Ω^{ext} 连通。我们考虑以下谱问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega^{\mathrm{ext}}, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 & \text{on } \partial\Omega^{\mathrm{ext}}, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中， n 表示 Ω 的外单位法向量， $\alpha \in \mathbb{R}$ 是一个固定的边界参数。为了严格引入这一谱问题，我们考虑半双线性型

$$Q_\alpha^{\mathrm{ext}}[u] := \int_{\Omega^{\mathrm{ext}}} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu + \alpha \int_{\partial\Omega^{\mathrm{ext}}} |u|^2 \,\mathrm{d}\sigma, \qquad \mathrm{dom}(Q_\alpha^{\mathrm{ext}}) := W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}}),$$

其中，边界项按迹的意义理解 $W^{1,\,2}(\Omega^{\mathrm{ext}}) \to L^2(\partial\Omega^{\mathrm{ext}})$。迹映射从 $W^{1,\,2}(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 到 $L^2(\partial\Omega^{\mathrm{ext}})$ 有良定义且连续，这一点可通过将 Sobolev 函数限制到某个紧利普希茨集 $K \setminus \Omega$ 上立即得到，其中某个

紧 $K \supset \Omega$，并对有界区域的情形应用标准迹定理；参见例如 [13, 定理 7。5]。可以证明，半双线性型在希尔伯特空间 $L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 中是对称、稠密定义、闭且下半有界的。型 Q_α^{ext}对称且稠密定义这一事实显而易见。下面我们着重证明该型是闭且下半有界的。

命题 3.1。 半双线性型 Q_α^{ext}是闭的，且下半有界。

证明。 首先，我们注意到$Q_0^{\mathrm{ext}}(\alpha = 0)$是闭的且非负的。非负性显而易见，而闭性则源于该型所诱导的范数与 Sobolev空间 $W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}})$中的标准范数一致。根据附录 C 中的引理 C ，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 $C(\varepsilon) > 0$ ，使得不等式成立

$$\int_{\partial\Omega^{\mathrm{ext}}} |u|^2 \, \mathrm{d}\sigma \leq \varepsilon \int_{\Omega^{\mathrm{ext}}} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\mu + C(\varepsilon) \int_{\Omega^{\mathrm{ext}}} |u|^2 \, \mathrm{d}\mu$$

对所有 $u \in W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}})$均成立。因此，取充分小的 $\varepsilon > 0$，结合关于扰动下型保持闭性的稳定性结果 [41, 第六章，定理 3。4] ，可得半双线性型 Q_α^{ext}对于任意$\alpha \in \mathbb{R}$，均为闭的且下半有界。 □

第一表示定理 [41, 第六章，定理 2。1] 保证型 Q_α^{ext}定义了希尔伯特空间 $L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})$中的唯一自伴算子 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}$ ，称为罗宾拉普拉斯算子，其作用形式为

$$\begin{aligned} -\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}} u &= -\Delta u, \\ \operatorname{dom}\left(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}\right) &= \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}}) : \ \Delta u \in L^2(\Omega^{\mathrm{ext}}), \ -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega^{\mathrm{ext}}} + \alpha u|_{\partial\Omega^{\mathrm{ext}}} = 0 \right\}, \end{aligned}$$

其中诺伊曼迹 $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega^{\mathrm{ext}}}$ 被视为 $W^{-1/2}$中的分布，$_2(\partial\Omega^{\mathrm{ext}})$. 因此，形式问题 (3.1) 指的是自伴算子 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}$ 在 $L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 中的谱问题。嵌入 $W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}}) \to L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 并非紧嵌入，正如以下注释所示。

注 3.2. 设 $\varphi \in C_c^\infty(B_1(p))$ 是一个非零截断函数。选取点 $p_k \in \Omega^{\mathrm{ext}}$ ，使得$d_{\mathbb{H}^2}(p_k, p) \to \infty$ 且 $d_{\mathbb{H}^2}(p_k,p_j) > 2$对 $k \neq j$成立。取等距变换 $g_k \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$，满足 $g_k(p) = p_k$，并令 $\varphi_k := \varphi \circ g_k^{-1}$。于是，对所有 $k \in \mathbb{N}$，$\operatorname{supp}\varphi_k \subset B_1(p_k)$，集合 $\{\varphi_k\}$ 的支集两两不相交，$\|\varphi_k\|_{W^1,2(\Omega^{\mathrm{ext}})} = \|\varphi\|_{W^1,2(\Omega^{\mathrm{ext}})}$ 且 $\|\varphi_k - \varphi_j\|_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})} = \sqrt{2}\,\|\varphi\|_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})}$，其中 $k \neq j$。因此，φ_k 在 $W^{1,2(\Omega^{\mathrm{ext}})}$ 中有界，但在 $L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 中没有收敛子列。

因此，罗宾拉普拉斯算子的预解算子 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}$ 不是紧算子。我们将证明罗宾拉普拉斯算子的本质谱 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}$ 非空。对于接下来的讨论，回顾谱的最低点的变分刻画 [58,定理 XIII。1]成立

$$\lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}}) := \inf \sigma\left(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}\right) = \inf_{\substack{u \in W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}}) \\ u \neq 0}} \frac{Q_\alpha^{\mathrm{ext}}[u]}{\|u\|^2_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})}}. \tag{3.2}$$

接下来，我们证明一个带有边界项的加权 Poincaré 型不等式。稍后将在罗宾拉普拉斯算子 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}$ 本质谱刻画的证明中使用该不等式。

引理 3.3。令 $b>0$ 和 $\alpha \geq 2^{-1}$（$b^{-1}-\coth(b)$）。则

$$\inf_{\substack{\psi\in C_c^1([b,\infty))\\ \psi\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_b^\infty |\psi'(t)|^2 \sinh(t)\,\mathrm{d}t + \alpha\sinh(b)|\psi(b)|^2}{\displaystyle\int_b^\infty |\psi(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t} \geq \frac{1}{4}.$$

证明。首先，我们推导一个辅助不等式。注意到

$$\forall f\in C_c^1([b,\infty)),\quad \int_b^\infty |f'(t)|^2\, t\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

通过作代换 $g(t)=\sqrt{t}\,f(t)$，得到

$$\begin{aligned}
\int_b^\infty |f'(t)|^2\, t\,\mathrm{d}t &= \int_b^\infty \left|\frac{g'}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\frac{g}{t^{3/2}}\right|^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_b^\infty \left|g' - \frac{1}{2}\frac{g}{t}\right|^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_b^\infty |g'|^2\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_b^\infty (|g|^2)'\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_b^\infty \frac{|g|^2}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_b^\infty |g'|^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2b}|g(b)|^2 - \frac{1}{4}\int_b^\infty \frac{|g|^2}{t^2}\,\mathrm{d}t \geq 0. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

对于任意不恒为零的 $\psi\in C_c^1([b,\infty))$，令 $\varphi(t)=\sqrt{\sinh(t)}\,\psi(t)$，得到

$$\begin{aligned}
\int_b^\infty |\psi'(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t &= \int_b^\infty \left|\frac{\varphi'}{\sqrt{\sinh(t)}} - \frac{1}{2}\frac{\varphi\cosh(t)}{\sinh^{3/2}(t)}\right|^2 \sinh(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_b^\infty \left|\varphi' - \frac{1}{2}\varphi\coth(t)\right|^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_b^\infty |\varphi'|^2\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_b^\infty (|\varphi|^2)'\coth(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_b^\infty |\varphi|^2\coth^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_b^\infty |\varphi'|^2\,\mathrm{d}t + \frac{\coth(b)|\varphi(b)|^2}{2} + \frac{1}{4}\int_b^\infty \left(\coth^2(t) - \frac{2}{\sinh^2(t)}\right)|\varphi|^2\,\mathrm{d}t. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

利用

$$\coth^2(t) - \frac{2}{\sinh^2(t)} = 1 - \frac{1}{\sinh^2(t)} \geq 1 - \frac{1}{t^2},$$

并回顾（3.3），在（$\frac{1}{2b}|\varphi(b)|^2$ 中加上并减去项 3.4），得到

$$\begin{aligned}
\int_b^\infty |\psi'(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t + \alpha\sinh(b)|\psi(b)|^2 &\geq \frac{1}{4}\int_b^\infty |\varphi|^2\,\mathrm{d}t + \left(\frac{\coth(b)}{2} - \frac{1}{2b} + \alpha\right)|\varphi(b)|^2 \\
&\geq \frac{1}{4}\int_b^\infty |\varphi|^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_b^\infty |\psi|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \square
\end{aligned}$$

在下一个命题中，我们刻画双曲平面中有界利普希茨集外部区域上的罗宾拉普拉斯算子的本质谱。正如预期，该本质谱与整个双曲平面上拉普拉斯算子的本质谱一致。

命题 3.4。罗宾拉普拉斯算子 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}$ 的本质谱为

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\left(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}\right) = \left[\frac{1}{4},\infty\right).$$

证明。*第 1 步*：包含关系 $\sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}) \supseteq \left[\frac{1}{4},\infty\right)$。我们应用韦尔判据证明包含关系 $\supseteq$。对于每个 $\lambda\in\left[\frac{1}{4},\infty\right)$，我们将构造一个序列 $f_n\in\mathrm{dom}\,(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}})$，使得

(1) $\|f_n\|_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})} = 1$, (2) $\|(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}} - \lambda) f_n\|_{L^2($ $\Omega^{\mathrm{ext}}) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时。(3) $f_n \rightharpoonup 0$ 属于 L^2 (Ω^{ext})。

这一构造遵循 [11, 命题 7 的证明2]中概述的方法。给定 $\lambda \geq \frac{1}{4}$，我们令

$$s = \frac{1}{2} + i\rho, \quad \text{where } \rho = \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}},$$

于是 $\lambda = s(1-s)$。对于 $2 \leq a < b$，我们用测地极坐标在 $\mathbb{H}^2$ 上定义一族紧支撑函数：

$$f_{a,b}(r) := e^{-sr}\psi_{a,b}(r),$$

其中 $\psi_{a,\ b} \in C_c^\infty((0,\ \infty))$ 是一个径向截断函数，满足

$$\psi_{a,b}(r) = \begin{cases} 1, & r \in [a,b], \\ 0, & r \notin [a-1, b+1], \end{cases} \quad \text{with } 0 \leq \psi_{a,b} \leq 1,\ \|\psi'_{a,b}\|_\infty,\ \|\psi''_{a,b}\|_\infty \leq C_1,$$

其中 $C_1 > 0$ 是与 a, b 无关的某个常数，并且不失一般性地取其大于 1。直接计算可得

$$\begin{aligned} f'_{a,b}(r) &= -se^{-sr}\psi_{a,b}(r) + e^{-sr}\psi'_{a,b}(r), \\ f''_{a,b}(r) &= s^2 e^{-sr}\psi_{a,b}(r) - 2se^{-sr}\psi'_{a,b}(r) + e^{-sr}\psi''_{a,b}(r). \end{aligned}$$

由于 $f_{a,\ b}$ 是径向的，我们用测地极坐标计算 $f_{a,\ b}$ 的拉普拉斯算子

$$\begin{aligned} -\Delta f_{a,b}(r) &= -f''_{a,b}(r) - \coth r \cdot f'_{a,b}(r) \\ &= -e^{-sr}\left[\left(s^2 - s\coth r\right)\psi_{a,b}(r) + (\coth r - 2s)\,\psi'_{a,b}(r) + \psi''_{a,b}(r)\right]. \end{aligned}$$

因此

$$-\Delta f_{a,b} - \lambda f_{a,b} = -e^{-sr}\left[s\,(1 - \coth r)\,\psi_{a,b} + (\coth r - 2s)\psi'_{a,b} + \psi''_{a,b}\right].$$

我们估计$f_{a,\ b}$ 在 $L^2(\mathbb{H}^2)$中的范数为

$$\|f_{a,b}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^2)} = 2\pi\int_0^\infty |f_{a,b}(r)|^2 \sinh r\,\mathrm{d}r \geq 2\pi\int_a^b e^{-r}\sinh r\,\mathrm{d}r \geq \frac{\pi}{2}(b-a). \tag{3.5}$$

我们有

$$\|(-\Delta - \lambda)f_{a,b}\|^2_{L^2(\mathbb{H}^2)} = 2\pi\int_{a-1}^{b+1} |(-\Delta - \lambda)f_{a,b}(r)|^2 \sinh r\,\mathrm{d}r.$$

接下来，我们将积分拆分为三部分。注意，对于任意 $c \geq 1$

$$\begin{aligned} &\int_c^{c+1} |(-\Delta - \lambda)f_{a,b}(r)|^2 \sinh r\,\mathrm{d}r \\ &\leq 3C_1^2\int_c^{c+1} e^{-r}\sinh(r)\Big(|s|^2(1-\coth r)^2 + |\coth r - 2s|^2 + 1\Big)\,\mathrm{d}r \\ &\leq \frac{3}{2}C_1^2\Big(|s|^2(\coth(1)-1)^2 + 2\coth^2(1) + 4|s|^2 + 1\Big). \end{aligned} \tag{3.6}$$

此外

$$\begin{aligned} &\int_a^b |(-\Delta - \lambda)f_{a,b}(r)|^2 \sinh r\,\mathrm{d}r \\ &\leq |s|^2\int_2^\infty (\coth(r)-1)^2 e^{-r}\sinh(r)\,\mathrm{d}r \\ &\leq |s|^2\int_2^\infty \frac{2e^{-4r}}{1-e^{-2r}}\,\mathrm{d}r \leq \frac{2|s|^2}{1-e^{-4}}\int_0^\infty e^{-4r}\,\mathrm{d}r = \frac{|s|^2}{2(1-e^{-4})}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

因此，利用（3.6）以及 $c=a-1$ 和 $c=b$，并使用（3.7）中的最后一个界，我们得到，量（$-\Delta-\lambda$）$f_{a,\,b}$ 在 $L^2(\mathbb{H}^2)$ 中的范数有一个仅依赖于 λ、而不依赖于 a和 b的常数界。现在，我们定义

$$f_n := \frac{f_{n^2,n^2+n}}{\|f_{n^2,n^2+n}\|_{L^2(\mathbb{H}^2)}}.$$

这样$\|f_n\|_{L^2(\mathbb{H}^2)}=1$，各支集彼此不相交，同时，$f_n$的支集在所有充分大的 n时离开任意有界集。因此，我们得出 $f_n \rightharpoonup 0$，此外，由界（3.5）和（3.6）、（3.7）可知

$$\|(-\Delta-\lambda)f_n\|_{L^2(\mathbb{H}^2)} \to 0, \qquad n\to\infty.$$

此外，对于所有充分大的 n，我们有 $\operatorname{supp} f_n \subset \Omega^{\mathrm{ext}}$。因此，我们推知 $f_n \in \operatorname{dom}(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}})$，总之，$f_n$ 是对应于点 λ 的算子 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}$ 的 Weyl序列。因此，$\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}\left(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}\right)$。由于 $\lambda \in [\frac{1}{4},\infty)$ 是任意的，我们得到

$$\left[\frac{1}{4},\infty\right) \subseteq \sigma_{\mathrm{ess}}\left(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}\right).$$

步骤 *2*：包含关系 $\sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}) \subseteq \left[\frac{1}{4},\infty\right)$。为证明相反的包含关系，我们使用一个Neumann夹逼论证。引入记号 $|x| := d_{\mathbb{H}^2}(x,\ O)$ 表示 $x\in\mathbb{H}^2$。令H_n 为作用方式与 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}$ 相同、但在半径为 $n\in\mathbb{N}$ 的圆$\mathcal{C}_n := \{x\in\mathbb{H}^2\colon\ |x|=n\}$ 上满足额外 Neumann 条件的算子。具体而言，H_n 是 $L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 中与以下半双线性型相关联的自伴算子

$$h_n[u] := \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})} + \alpha\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega^{\mathrm{ext}})}, \quad \operatorname{dom}(h_n) := W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}}\setminus\mathcal{C}_n).$$

由于区域包含关系 $\operatorname{dom}(h_n) \supset \operatorname{dom}(Q_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}})$，按照相应半双线性型的序关系，有 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}} \geq H_n$，由极小极大原理可得，

$$\inf\sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}) \geq \inf\sigma_{\mathrm{ess}}(H_n) \quad \text{for all } n\in\mathbb{N}.$$

假设 $n\in\mathbb{N}$ 足够大，使得 Ω 包含于圆盘 $B_n := \{x\in\mathbb{H}^2\colon\ |x|<n\}$ 中，则 H_n 分解为两个算子的正交和：相对于分解 $L^2(\Omega^{\mathrm{ext}}) = L^2(\Omega^{\mathrm{ext}}\cap B_n)\oplus L^2(\Omega^{\mathrm{ext}}\setminus B_n)$，$H_n = H_n^{(1)}\oplus H_n^{(2)}$。这里，$H_n^{(1)}$和 $H_n^{(2)}$分别是 $L^2(\Omega^{\mathrm{ext}}\cap B_n)$ 和 $L^2(\Omega^{\mathrm{ext}}\setminus \overline{B_n})$ 中与以下半双线性型相关联的算子

$$\begin{aligned}
h_n^{(1)}[u] &:= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}}\cap B_n)} + \alpha\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega^{\mathrm{ext}})}, & \operatorname{dom}(h_n^{(1)}) &:= W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}}\cap B_n),\\
h_n^{(2)}[u] &:= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}}\setminus\overline{B_n})}, & \operatorname{dom}(h_n^{(2)}) &:= W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}}\setminus\overline{B_n}).
\end{aligned}$$

由于 $\Omega^{\mathrm{ext}}\cap B_n$ 是有界利普希茨开集，$W^{1,\,2}(\Omega^{\mathrm{ext}}\cap B_n)$ 到 $L^2(\Omega^{\mathrm{ext}}\cap B_n)$ 的嵌入是紧的，且 $H_n^{(1)}$ 的谱纯离散。因此，

$$\begin{aligned}
\inf\sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}) &\geq \inf\sigma_{\mathrm{ess}}(H_n^{(2)}) \geq \inf\sigma(H_n^{(2)})\\
&= \inf_{\substack{u\in W^{1,2}(B_n^{\mathrm{ext}})\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{B_n^{\mathrm{ext}}} |\nabla u(r,\theta)|^2\,\mathrm{d}\mu}{\displaystyle\int_{B_n^{\mathrm{ext}}} |u(r,\theta)|^2\,\mathrm{d}\mu}\\
&\geq \inf_{\substack{u\in W^{1,2}(B_n^{\mathrm{ext}})\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_n^\infty \left|\frac{\partial}{\partial r}u(r,\theta)\right|^2 \sinh(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_n^\infty |u(r,\theta)|^2\sinh(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta} \geq \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $C_c^1(B_n^{\text{ext}})$ 在 $W^{1,2}(B_n^{\text{ext}})$ 中的稠密性（参见引理 C.2），最后一个不等式则由引理 3.3 取 $\alpha = 0$得到。事实上，给定 $\theta \in [0, 2\pi)$，我们令 $\varphi(r) := u(r, \theta) \in C_c^\infty(B_n^{\text{ext}})$，于是有

$$\int_n^\infty |\varphi'(r)|^2 \sinh(r)\, \mathrm{d}r \geq \frac{1}{4} \int_n^\infty |\varphi(r)|^2 \sinh(r)\, \mathrm{d}r.$$

因此，证明完成。 □

由于本质谱非空，$\lambda_1^\alpha(\Omega^{\text{ext}})$ 不一定是离散特征值。利用标准论证，我们证明量 $\lambda_1^\alpha(\Omega^{\text{ext}})$ 关于 α 非递减，并且当 $\alpha \to -\infty$ 时趋于 $-\infty$。

引理 3.5. 函数

$$\alpha \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_1^\alpha(\Omega^{\text{ext}}) \in \mathbb{R}$$

是非递减的。此外，

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \lambda_1^\alpha(\Omega^{\text{ext}}) = -\infty.$$

证明。给定 $\alpha_1 > \alpha_2$ 以及算子 $-\Delta_{\alpha_1}^{\Omega^{\text{ext}}}$ 的极小化序列 $\varphi_n \in W^{1,2}(\Omega^{\text{ext}})$，其对应于最低谱点 $\lambda_1^{\alpha_1}(\Omega^{\text{ext}})$，那么对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n > n_0$，以下关系成立

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{\alpha_1}(\Omega^{\text{ext}}) + \varepsilon &\geq \frac{\displaystyle\int_{\Omega^{\text{ext}}} |\nabla \varphi_n|^2 \,\mathrm{d}\mu + \alpha_1 \int_{\partial\Omega^{\text{ext}}} |\varphi_n|^2 \,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\Omega^{\text{ext}}} |\varphi_n|^2 \,\mathrm{d}\mu} \\
&\geq \frac{\displaystyle\int_{\Omega^{\text{ext}}} |\nabla \varphi_n|^2 \,\mathrm{d}\mu + \alpha_2 \int_{\partial\Omega^{\text{ext}}} |\varphi_n|^2 \,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\Omega^{\text{ext}}} |\varphi_n|^2 \,\mathrm{d}\mu} \\
&\geq \lambda_1^{\alpha_2}(\Omega^{\text{ext}}).
\end{aligned}$$

为证明命题的第二部分，我们固定一个测试函数 $\varphi \in W^{1,2}(\Omega^{\text{ext}})$，使得$\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega^{\text{ext}})} \neq 0$。于是

$$\lambda_1^\alpha(\Omega^{\text{ext}}) \leq \frac{\displaystyle\int_{\Omega^{\text{ext}}} |\nabla \varphi|^2 \,\mathrm{d}\mu + \alpha \int_{\partial\Omega^{\text{ext}}} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\Omega^{\text{ext}}} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}\mu} \quad \xrightarrow{\alpha \to -\infty} \quad -\infty. \quad \square$$

下面我们回顾引言中临界边界参数的定义。

定义 3.6。 我们引入临界值 $\alpha_\star(\Omega^{\text{ext}})$，定义为

$$\alpha_\star(\Omega^{\text{ext}}) := \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \ \lambda_1^\alpha(\Omega^{\text{ext}}) \text{ is a discrete eigenvalue}\}.$$

注 3.7。 由引理 3.5 和命题 3.4，我们可以推 deduce that if α 足够小，则罗宾拉普拉斯算子具有离散特征值。因此，定义 3.6 是适定的，因为所取上确界的集合非空。引理3.5进一步保证，对于每个 $\alpha < \alpha_\star(\Omega^{\text{ext}})$，算子 $-\Delta_\alpha^{\Omega^{\text{ext}}}$ 具有离散特征值。

为了证明 $\alpha_\star(\Omega^{\text{ext}})$ 在 Ω 为测地凸时非正，我们首先在接下来的两个引理中建立某些带边界项的加权庞加莱型不等式，其思路与引理´ 3.3相同。

引理 3.8。 设 $b > 0$ 和 $\alpha \geq -2^{-1}$。则

$$\inf_{\substack{\psi \in C_c^1([b,\infty)) \\ \psi \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_b^\infty |\psi'(t)|^2 e^t \,\mathrm{d}t + \alpha e^b |\psi(b)|^2}{\displaystyle\int_b^\infty |\psi(t)|^2 e^t \,\mathrm{d}t} \geq \frac{1}{4}.$$

证明。 令 $\psi \in C_c^1([b,\infty))$。设 $\varphi(t) := \psi(t) e^{\frac{t}{2}}$。于是得到

$$\psi'(t) = \varphi'(t) e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\varphi(t) e^{-\frac{t}{2}}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\int_b^\infty |\psi'(t)|^2 e^t \,\mathrm{d}t &= \int_b^\infty \left|\varphi'(t) - \frac{1}{2}\varphi(t)\right|^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_b^\infty |\varphi'(t)|^2 \,\mathrm{d}t - \int_b^\infty \mathrm{Re}\left(\varphi'(t)\overline{\varphi(t)}\right) \mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_b^\infty |\varphi(t)|^2 \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

注意，利用分部积分可得

$$-\int_b^\infty \mathrm{Re}\left(\varphi'(t)\overline{\varphi(t)}\right) \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_b^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}|\varphi(b)|^2.$$

因此，最终得到

$$\begin{aligned}\int_b^\infty |\psi'(t)|^2 e^t \,\mathrm{d}t + \alpha e^b |\psi(b)|^2 &\geq \int_b^\infty |\varphi'(t)|^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_b^\infty |\varphi(t)|^2 \,\mathrm{d}t + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)|\varphi(b)|^2 \\ &\geq \frac{1}{4}\int_b^\infty |\varphi(t)|^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\int_b^\infty |\psi(t)|^2 e^t \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

引理 3.9。 设 $b \geq 0$，且 $\alpha \geq -2^{-1}$双曲正切(b)。则

$$\inf_{\substack{\psi \in C_c^1([b,\infty)) \\ \psi \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_b^\infty |\psi'(t)|^2 \cosh(t) \,\mathrm{d}t + \alpha \cosh(b)|\psi(b)|^2}{\displaystyle\int_b^\infty |\psi(t)|^2 \cosh(t) \,\mathrm{d}t} \geq \frac{1}{4}.$$

证明。 对于任意不恒为零的 $\psi \in C_c^1([b,\infty))$，设 $\varphi(t) = \sqrt{\cosh(t)}\ \overline{\psi(t)}$。沿用前一个引理的证明思路，可得

$$\begin{aligned}\int_b^\infty |\psi'(t)|^2 \cosh(t) \,\mathrm{d}t &= \int_b^\infty \left|\frac{\varphi'}{\sqrt{\cosh(t)}} - \frac{1}{2}\frac{\varphi \sinh(t)}{\cosh^{3/2}(t)}\right|^2 \cosh(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_b^\infty \left|\varphi' - \frac{1}{2}\varphi \tanh(t)\right|^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_b^\infty |\varphi'|^2 \,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_b^\infty (|\varphi|^2)' \tanh(t) \,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_b^\infty |\varphi|^2 \tanh^2(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_b^\infty |\varphi'|^2 \,\mathrm{d}t + \frac{\tanh(b)|\varphi(b)|^2}{2} + \frac{1}{4}\int_b^\infty \left(\tanh^2(t) + \frac{2}{\cosh^2(t)}\right)|\varphi|^2 \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

利用双曲函数的恒等式

$$\tanh^2(t) + \frac{2}{\cosh^2(t)} = 1 + \frac{1}{\cosh^2(t)},$$

我们最终得到

$$\begin{aligned}\int_b^\infty |\psi'(t)|^2\cosh(t)\,\mathrm{d}t+\alpha\cosh(b)|\psi(b)|^2 &\geq \frac{1}{4}\int_b^\infty |\varphi|^2\,\mathrm{d}t+\left(\alpha+\frac{\tanh(b)}{2}\right)|\varphi(b)|^2\\ &\geq \frac{1}{4}\int_b^\infty |\varphi|^2\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\int_b^\infty |\psi|^2\cosh(t)\,\mathrm{d}t.\quad\square\end{aligned}$$

现在我们可以陈述并证明一个定理，讨论双曲平面中测地凸集外部区域的临界耦合常数的符号。

定理 3.10. 假设$\Omega\subset\mathbb{H}^2$是一个开、有界的测地凸集，且具有$C^2$-光滑边界。那么，

$$\alpha_\star(\Omega^{\mathrm{ext}})\leq 0,$$

当Ω是严格测地凸集时，上述不等式为严格不等式。

证明。根据关于Ω的假设，补集Ω^{ext}必然是连通的。我们采用测地平行坐标

$$\mathcal{L}:\partial\Omega\times(0,\infty)\ni(s,t)\mapsto\exp_s(tn(s))\in\Omega^{\mathrm{ext}},$$

其中n表示$\partial\Omega$的外单位法向量。命题 B.4 中所述的度量投影到Ω上的存在性和唯一性确保映射$\mathcal{L}$是双射。由光滑性假设可知，$\mathcal{L}\in C^1(\partial\Omega\times(0,\infty))$。此外，关于变量$C^\infty$，在固定$t$时，它属于$s$类。根据[34, 第 2], 节，在测地平行坐标下，拉回度量的表达式为

$$\mathrm{d}\mathcal{L}^2=J^2(s,t)\,\mathrm{d}s^2+\mathrm{d}t^2.$$

映射$J\colon\partial\Omega\times(0,\infty)\to\mathbb{R}_+$是一个连续函数[1]，满足

$$\begin{cases}J_{tt}=J,\\ J(s,0)=1,\\ J_t(s,0)=-\kappa(s),\end{cases}\tag{3.8}$$

其中$\kappa(s)$表示$\partial\Omega$在s处相对于外单位法向量计算的测地曲率。根据引理 3.，该曲率非正，因为Ω是强凸的[30, 引理 3。1]。求解方程组（3.8）可得

$$J(s,t)=\cosh t-\kappa(s)\,\sinh t.$$

变换$\mathcal{L}$的雅可比行列式为J，且严格为正，因此$\mathcal{L}$是一个全局微分同胚。因此，对于任意不恒为零的$\psi\in C_{\mathrm{c}}^2(\Omega^{\mathrm{ext}})$,

$$\begin{aligned}\frac{\displaystyle\int_{\Omega^{\mathrm{ext}}}|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}\mu+\alpha\int_{\partial\Omega}|\psi|^2\,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\Omega^{\mathrm{ext}}}|\psi|^2\,\mathrm{d}\mu} &= \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega}\int_0^\infty|(\nabla\psi)(\mathcal{L}(s,t))|^2J(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma(s)+\alpha\int_{\partial\Omega}|\psi(\mathcal{L}(s,0))|^2\,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\partial\Omega}\int_0^\infty|\psi(\mathcal{L}(s,t))|^2J(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma(s)}\\ &\geq \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega}\int_0^\infty\left|\frac{\partial}{\partial t}(\psi(\mathcal{L}(s,t))\right|^2J(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma(s)+\alpha\int_{\partial\Omega}|\psi(\mathcal{L}(s,0))|^2\,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\partial\Omega}\int_0^\infty|\psi(\mathcal{L}(s,t))|^2J(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma(s)},\end{aligned}$$

[1] $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$

其中在第二步中，我们将 ψ 的梯度投影到向量 $n(s)$ 上，该向量位于 Ω^{ext} 在点 $\mathcal{L}(s,t)$ 处的切平面内。令 $\eta(s,t) = \psi(\mathcal{L}(s,t))$，可得

$$\frac{\displaystyle\int_{\Omega^{\mathrm{ext}}} |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}\mu + \alpha \int_{\partial\Omega} |\psi|^2 \,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\Omega^{\mathrm{ext}}} |\psi|^2 \,\mathrm{d}\mu} \geq \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega}\int_0^\infty \left|\frac{\partial\eta}{\partial t}(s,t)\right|^2 J(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma(s) + \alpha\int_{\partial\Omega} |\eta(s,0)|^2\,\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{\partial\Omega}\int_0^\infty |\eta(s,t)|^2 J(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma(s)}. \tag{3.9}$$

我们将 $\partial\Omega$ 分成三个互不相交的子集 U_1, U_2 和 U_3，其中 $s \in U_1$ 当且仅当 $-1 < \kappa(s) \leq 0$；$s \in U_2$ 当且仅当 $\kappa(s) = -1$；否则，$s \in U_3$。若 $s \in U_1$，则存在 $z_1(s) \geq 0$ 使得

$$-\kappa(s) = \frac{\sinh(z_1(s))}{\cosh(z_1(s))},$$

这意味着

$$\cosh(t) - \kappa(s)\sinh(t) = \frac{\cosh(t + z_1(s))}{\cosh(z_1(s))}.$$

若 $s \in U_3$，则存在 $z_2(s) > 0$ 使得

$$-\kappa(s) = \frac{\cosh(z_2(s))}{\sinh(z_2(s))},$$

由此得到

$$\cosh(t) - \kappa(s)\sinh(t) = \frac{\sinh(t + z_2(s))}{\sinh(z_2(s))}.$$

将式 (3.9) 中分子和分母的积分分别拆分为三项，并分别作变量代换 $w = t + z_1(s)$、$w = t + z_2(s)$，得到

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega}\int_0^\infty \left|\frac{\partial\eta}{\partial t}(s,t)\right|^2 J(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma(s) &= \int_{U_1}\int_{z_1(s)}^\infty \left|\frac{\partial\eta}{\partial t}(s, w - z_1(s))\right|^2 \cosh(w)\,\mathrm{d}w\,\frac{\mathrm{d}\sigma(s)}{\cosh(z_1(s))} \\
&\quad + \int_{U_2}\int_0^\infty \left|\frac{\partial\eta}{\partial t}(s,t)\right|^2 e^t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma(s) \\
&\quad + \int_{U_3}\int_{z_2(s)}^\infty \left|\frac{\partial\eta}{\partial t}(s, w - z_2(s))\right|^2 \sinh(w)\,\mathrm{d}w\,\frac{\mathrm{d}\sigma(s)}{\sinh(z_2(s))},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha\int_{\partial\Omega} |\eta(s,0)|^2\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{U_1} |\eta(s, z_1(s) - z_1(s))|^2\,\mathrm{d}\sigma + \int_{U_2} |\eta(s,0)|^2\,\mathrm{d}\sigma \\
&\quad + \int_{U_3} |\eta(s, z_2(s) - z_2(s))|^2\,\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega}\int_0^\infty |\eta(s,t)|^2 J(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma(s) &= \int_{U_1}\int_{z_1(s)}^\infty |\eta(s, w - z_1(s))|^2 \cosh(w)\,\mathrm{d}w\,\frac{\mathrm{d}\sigma(s)}{\cosh(z_1(s))} \\
&\quad + \int_{U_2}\int_0^\infty |\eta(s,t)|^2 e^t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma(s) \\
&\quad + \int_{U_3}\int_{z_2(s)}^\infty |\eta(s, w - z_2(s))|^2 \sinh(w)\,\mathrm{d}w\,\frac{\mathrm{d}\sigma(s)}{\sinh(z_2(s))}.
\end{aligned}$$

我们依次用 N_1、N_2、N_3、B_1、B_2、B_3、D_1、D_2、D_3 表示上面的九个积分项（按它们在文中出现的顺序）。给定 $s \in U_1$，令 $\varphi_1(w) = \eta(s, w - z_1(s))$。若 $\alpha \geq \alpha_1 := -2^{-1}\inf_{s\in U_1}\tanh(z_1(s))$，则根据引理 3.9，可得

$$\int_{z_1(s)}^\infty |\varphi_1'(w)|^2\cosh(w)\,\mathrm{d}w + \alpha\cosh(z_1(s))|\varphi_1(z_1(s))|^2 \geq \frac{1}{4}\int_{z_1(s)}^\infty |\varphi_1(w)|^2\cosh(w)\,\mathrm{d}w, \quad s \in U_1,$$

这意味着

$$N_1 + B_1 \geq \frac{1}{4}D_1.$$

若 Ω 关于测地线严格凸，则根据高斯公式（例如，见 [54, 定理 8。2]），Ω 的测地曲率 $\kappa(s)$ ∂ 严格为负。由于 $\partial\Omega$ 是 C^2-光滑的， $\kappa(s)$ 连续，因此其绝对值有一个正的下界。因此 $\inf_{s\in U_1} z_1(s) > 0$，这意味着 $\alpha_1 < 0$。当凸性不是严格凸时，可得 $\alpha_1 = 0$。

以类似方式推理，若分别假设 $\alpha \geq \alpha_2 := -2^{-1}$ 以及 $\alpha \geq \alpha_3 := 2^{-1}$ 上确界 $\sup_{s\in U_3}(z_2^{-1}(s) - \coth(z_2(s)))$，则引理 3.8 和 3.3 保证

$$N_2 + B_2 \geq \frac{1}{4} D_2, \qquad N_3 + B_3 \geq \frac{1}{4} D_3.$$

由于 Ω 的测地曲率 $\kappa(s)$ 有界，因此 $\inf_{s\in U_3} z_2(s) > 0$，由此得到 $\alpha_3 < 0$。令 $\alpha \geq \alpha_0 := \max_{1\leq i\leq 3} \alpha_i$。注意，当 Ω 严格凸时， $\alpha_0 < 0$；否则，$\alpha_0 = 0$。于是，对任意不恒为零的 $\psi \in C_c^2(\Omega^{\mathrm{ext}})$，利用前述分析可得

$$\frac{\int_{\Omega^{\mathrm{ext}}} |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}\mu + \alpha \int_{\partial\Omega} |\psi|^2 \,\mathrm{d}\sigma}{\int_{\Omega^{\mathrm{ext}}} |\psi|^2 \,\mathrm{d}\mu} \geq \frac{1}{4},$$

由此 根据 $C_c^2(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 在 $W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 中的稠密性（见引理 C.2 ）. □

注 3.11. 与定理 3.10相反，我们猜想，对于双曲平面中的某些非凸单连通区域，可以有 $\alpha_\star(\Omega^{\mathrm{ext}}) > 0$。支持这一猜想的例子可按如下方式构造。首先考虑一个以原点为中心、半径为 $R > r > 0$的测地环带的外部区域 $A_{r,R} \subset \mathbb{H}^2$，并在 $A_{r,R}^{\mathrm{ext}}$ 上定义罗宾拉普拉斯算子。该算子自然可分解为两个罗宾拉普拉斯算子的正交和，其中一个定义在测地圆盘 B_r 上，另一个定义在 B_R^{ext} 上。我们可以确保，当罗宾参数 $\alpha > 0$ 为充分小的正数时，该算子在 B_r 上的分量具有一个小于 $1/4$ 的特征值。只需取常数函数作为试探函数即可看出这一点。在 B_r 和 B_R^{ext} 之间挖出一条狭窄的小通道，就能构造出一个连通外部区域，使得相应的罗宾拉普拉斯算子在罗宾参数为充分小的正数时具有一个小于 $1/4$ 的特征值。通过证明当通道宽度趋于零时，算子广义范数预解式收敛到解耦情形，可以论证构造过程中的最后一步。这一分析超出了本文的研究范围。

4. 圆盘外部区域中的谱问题

本节中，我们将建立关于 $\lambda_1^\alpha(B_R^{\mathrm{ext}})$ 的一些性质，其中 α 为负值，而 B_R 是 $\mathbb{H}^2$ 中半径为 $R > 0$ 的测地圆盘。

4.1. 变量分离。 不失一般性，我们可以假设 B_R 的中心在 $\mathbb{H}^2$ 的双曲面模型中坐标为 (1，0，0)。通过采用测地极坐标，我们引入以下一组完备的两两正交投影

$$\Pi_n \colon L^2(B_R^{\mathrm{ext}}) \to L^2(B_R^{\mathrm{ext}}), \qquad (\Pi_n u)(r,\theta) := \frac{e^{\mathrm{i}n\theta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r,\theta') e^{-\mathrm{i}n\theta'} \,\mathrm{d}\theta', \quad n \in \mathbb{Z},$$

以及酉映射

$$\mathsf{U}_n \colon \operatorname{ran}\Pi_n \to L^2((R,\infty); \sinh r \,\mathrm{d}r), \qquad (\mathsf{U}_n u)(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(r,\theta') e^{-\mathrm{i}n\theta'} \,\mathrm{d}\theta', \quad n \in \mathbb{Z}.$$

因此，可以将 $L^2(B_R^{\mathrm{ext}})$ 写成正交和

$$L^2(B_R^{\mathrm{ext}}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{ran}\,\Pi_n \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L^2((R,\infty);\sinh r\,\mathrm{d}r).$$

借助 [61, 命题 1。15], 可以证明，上述正交和中的每个加项都是算子 $-\Delta_\alpha^{B_R^{\mathrm{ext}}}$ 的约化子空间。这导出了罗宾拉普拉斯算子的正交分解

$$-\Delta_\alpha^{B_R^{\mathrm{ext}}} \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (\mathsf{U}_n^{-1}\mathsf{H}_{\alpha,R,n}\mathsf{U}_n),$$

其中，自伴纤维算子 $\mathsf{H}_{\alpha,\,R,\,n}$ 在 $L^2((R,\ \infty);\sinh\ r\,\mathrm{d}r)$ 中与以下闭、对称、稠密定义且半有界的二次型相对应

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_{\alpha,R,n}[f] :&= \int_R^\infty \left(|f'(r)|^2 + \frac{n^2}{\sinh^2 r}|f(r)|^2 \right) \sinh r\,\mathrm{d}r + \alpha \sinh R\,|f(R)|^2,\\
\operatorname{dom}\mathfrak{h}_{\alpha,R,n} :&= \{f \in L^2((R,\infty);\sinh r\,\mathrm{d}r) :\ \mathsf{U}_n^{-1}f \in W^{1,2}(B_R^{\mathrm{ext}})\}\\
&= \{f :\ f, f' \in L^2((R,\infty);\sinh r\,\mathrm{d}r)\}.
\end{aligned}$$

与上述半双线性型相对应的纤维算子的作用及其区域可刻画为

$$\begin{aligned}
\mathsf{H}_{\alpha,R,n} &= -f''(r) - \coth(r) f'(r) + \frac{n^2}{\sinh^2(r)} f(r),\\
\operatorname{dom}\mathsf{H}_{\alpha,R,n} &= \left\{ f :\ f, f'' + \coth(r) f' \in L^2((R,\infty);\sinh r\,\mathrm{d}r), f'(R) = \alpha f(R) \right\}.
\end{aligned}$$

二次型 $\mathfrak{h}_{\alpha,\ R,\ 0}$ 在二次型序关系下最小。由极小极大原理可知，对于任意 $n \neq 0$，$\mathsf{H}_{\alpha,\ R,\ 0}$ 的最低谱点不大于 $\mathsf{H}_{\alpha,\ R,\ n}$ 的最低谱点。此外，如果 $\mathsf{H}_{\alpha,\ R,\ 0}$ 的最低谱点是离散特征值，那么由极小极大原理可知，对于任意 $n \neq 0$，它严格小于 $\mathsf{H}_{\alpha,\ R,\ n}$ 的最低谱点。根据构造，$-\Delta_\alpha^{B_R^{\mathrm{ext}}}$ 的最低谱点与纤维算子 $\mathsf{H}_{\alpha,\ R,\ 0}$ 的最低谱点相同；此外，若该最低谱点是离散特征值，则对应的特征函数为径向函数。

4.2. 第一个特征函数的显式表达式。 为了用特殊函数表示 $\mathsf{H}_{\alpha,R,0}$ 的特征函数，我们分析以下常微分方程

$$-y''(x) - \coth(x)\, y'(x) = k\, y(x), \qquad x \in [R,\infty), \quad k < \frac{1}{4}. \tag{4.1}$$

通过进行代换

$$t = \cosh(x),$$

我们得到一个关于 y 、以 t为变量的微分方程

$$-(t^2-1)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 2t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky.$$

这个二阶线性微分方程具有勒让德方程的形式。其通解为

$$y(t) = AP_\nu^0(t) + BQ_\nu^0(t),$$

其中，$P_\nu^0(t)$、$Q_\nu^0(t)$分别是第一类和第二类勒让德函数（见 [56,第 14]章），且 $\mu = 0$ 和 ν 满足

$$\nu(\nu+1) = -k,$$

由此可得

$$\nu^2+\nu+k=0\Rightarrow\nu=\frac{-1\pm\sqrt{1-4k}}{2}.$$

为了得到两个线性无关解 [56, 小节 14.2(iii)], 我们可以选择该值

$$\nu=\frac{-1+\sqrt{1-4k}}{2}>-\frac{1}{2}. \tag{4.2}$$

总之，原方程的通解为

$$y(x)=AP_\nu^0(\cosh(x))+BQ_\nu^0(\cosh(x)),\quad \text{with } \nu=\frac{-1+\sqrt{1-4k}}{2}.$$

此时，有必要分析解关于测度 $\sinh(x)\,\mathrm{d}x$ 在区间 $[R,\infty)$ 上的 L^2-可和性。为此，我们回顾一些渐近结果。显然

$$\cosh x\sim\frac{e^x}{2},\qquad \sinh x\sim\frac{e^x}{2},$$

当较大时 x。根据 [56, 公式 14.3.10、14.8.12、14.8.15], ，我们在极限 $z,\ x\to\infty$中得到

$$\begin{aligned}
P_\nu^0(z)&\sim\frac{\Gamma\left(\nu+\frac12\right)}{\pi^{\frac12}\Gamma(\nu+1)}(2z)^\nu &\Longrightarrow\qquad P_\nu^0(\cosh x)&\sim\frac{\Gamma\left(\nu+\frac12\right)}{\pi^{\frac12}\Gamma(\nu+1)}e^{\nu x},\\
Q_\nu^0(z)&\sim\frac{\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac32)(2z)^{\nu+1}} &\Longrightarrow\qquad Q_\nu^0(\cosh x)&\sim\frac{\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac32)}e^{-(\nu+1)x}.
\end{aligned}$$

结合这些渐近估计可知，在极限 $x\to\infty$中

$$\begin{aligned}
|P_\nu^0(\cosh x)|^2\sinh(x)&\sim\frac12\left(\frac{\Gamma\left(\nu+\frac12\right)}{\pi^{\frac12}\Gamma(\nu+1)}\right)^2e^{(2\nu+1)x},\\
|Q_\nu^0(\cosh x)|^2\sinh(x)&\sim\frac12\left(\frac{\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac32)}\right)^2e^{(-2\nu-1)x}.
\end{aligned}$$

由于我们要寻找平方可和特征函数， ν的选择要求 $A=0$。最后，原解的表达式可简化为

$$y(x)=BQ_\nu^0(\cosh(x)), \tag{4.3}$$

其中，非平凡解满足 $B\neq0$ 。

我们将利用第二类勒让德函数的以下性质。函数 Q_ν^0 具有积分表示 [56,公式 14.3.10、14.12.6]

$$Q_\nu^0(x)=\frac{\pi^{1/2}}{\Gamma\left(\frac12\right)}\int_0^\infty\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\cosh t\right)^{\nu+1}}\,\mathrm{d}t,\qquad \text{for}\quad x>1,\,\nu+1>0, \tag{4.4}$$

由此可见，它是一个正的、严格递减的光滑函数。此外，

$$\frac{Q_{\nu+1}^0(x)}{Q_\nu^0(x)}\le\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}},\qquad \text{for } x>1. \tag{4.5}$$

导数可利用递推关系计算 [56, 公式 14.10.4]

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q_\nu^0(x)=(\nu+1)xQ_\nu^0(x)-(\nu+1)Q_{\nu+1}^0(x). \tag{4.6}$$

4.3. **临界罗宾边界参数。** 接下来，我们将给出临界值 $\alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}})$ 的一个更精确的上界，改进了定理3.10 在测地圆盘情形下给出的上界。

引理 4.1。 对于每个 $R>0$，均有

$$\alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}}) \le \frac{1}{2}(e^{-R}-\coth(R)).$$

证明。 假设 $\alpha \le 0$ 满足算子 $-\Delta_\alpha^{B_R^{\mathrm{ext}}}$ 在其本质谱底部以下具有一个离散特征值。与其最低特征值相对应的特征函数是径向对称的，并且作为径向变量的函数，可以由恒等式（4.3）给出的函数来表示。从边界条件出发

$$-y'(R)+\alpha y(R)=0,$$

并分别应用关系式（4.6）、（4.2）和（4.5），我们得到

$$\begin{aligned}
\alpha &= -(\nu+1)\left[\frac{\cosh(R)Q_\nu^0(\cosh(R))-Q_{\nu+1}^0(\cosh(R))}{\sinh(R)Q_\nu^0(\cosh(R))}\right]\\
&= (\nu+1)\left[\frac{Q_{\nu+1}^0(\cosh(R))}{Q_\nu^0(\cosh(R))}-\coth(R)\right]\\
&\le (\nu+1)\left[e^{-R}-\coth(R)\right]\\
&\le \frac{1}{2}\left[e^{-R}-\coth(R)\right],
\end{aligned}$$

其中在最后一步中，我们利用了 $e^{-R}-\coth(R)<0$ 以及 $\nu>-\frac{1}{2}$。 □

注 4.2。 所给出的上界是一个负函数。此外，当$R\to 0$ 时，它发散至 $-\infty$；当 $R\to+\infty$. 时，它收敛至 $-\frac{1}{2}$。直接的推论是

$$\limsup_{R\to\infty}\alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}})\le -\frac{1}{2},\qquad \alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}})\xrightarrow{R\to 0}-\infty.$$

注 4.3。 我们注意到，如果 $\lambda_1^\alpha(B_R^{\mathrm{ext}})>0$，那么 $\frac{1}{2}<\nu+1<1$。这对参数 α施加了约束，从而可以推导出其下界

$$\alpha=(\nu+1)\left[\frac{Q_{\nu+1}^0(\cosh(R))}{Q_\nu^0(\cosh(R))}-\coth(R)\right]>-(\nu+1)\coth(R)>-\coth(R).$$

4.4. **最低特征值关于半径的单调性。** 在本小节中，我们证明，双曲平面中测地圆盘外部区域的罗宾拉普拉斯算子的最低特征值是半径的递减函数。在欧几里得平面中，罗宾拉普拉斯算子的情形此前也已发现这一性质 [49, 命题 5]。双曲平面的情形更为微妙，因为当罗宾参数为适度的负值时，最低特征值也可能为正。

命题 4.4 (单调性)。 假设 $0<R<R$ 且 $\alpha<\alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}})$。则

$$\lambda_1^\alpha(B_R^{\mathrm{ext}})>\lambda_1^\alpha(B_{\widetilde{R}}^{\mathrm{ext}}). \tag{4.7}$$

证明。步骤 *1*：最低谱点的变分刻画。根据本节前面几个小节的分析，我们得到如下关于

$-\Delta_\alpha^{B_R^{\mathrm{ext}}}$ 的最低特征值

$$\lambda_1^\alpha(B_R^{\mathrm{ext}}) = \inf_{\substack{\psi\in W^{1,2}([R,\infty),\sinh(t)\,\mathrm{d}t)\\ \psi\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_R^\infty |\psi'(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t + \alpha\sinh(R)|\psi(R)|^2}{\displaystyle\int_R^\infty |\psi(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$= \inf_{\substack{\psi\in W^{1,2}([0,\infty),\sinh(t)\,\mathrm{d}t)\\ \psi\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_0^\infty |\psi'(t)|^2\sinh(t+R)\,\mathrm{d}t + \alpha\,\sinh(R)|\psi(0)|^2}{\displaystyle\int_0^\infty |\psi(t)|^2\sinh(R+t)\,\mathrm{d}t}.$$

下确界由任何对应于最低特征值的特征函数取得。特别地，根据第 4.2 小节中的分析，我们可以将基态取为以下形式$\varphi(t) = Q_\nu^0(\cosh(t+R))$，其中 ν 与最低特征值之间满足恒等式（4.2），且$k = \lambda_1^\alpha(B_R^{\mathrm{ext}})$。

步骤 *2*： φ 的单调性与凸性。对积分表示（4.4）求导，得到

$$(Q_\nu^0)'(x) = -\frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\frac12)}\int_0^\infty \frac{(\nu+1)\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cosh(z)\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\cosh(z)\right)^{\nu+2}}\,\mathrm{d}z.$$

利用上述公式，我们计算得

$$\varphi'(t) = -\frac{\pi^{1/2}(\nu+1)}{\Gamma(\frac12)}\int_0^\infty \frac{(\sinh(t+R)+\cosh(t+R)\cosh(z))}{(\cosh(t+R)+\sinh(t+R)\cosh(z))^{\nu+2}}\,\mathrm{d}z < 0,$$

$$\varphi''(t) = \frac{\pi^{1/2}(\nu+1)}{\Gamma(\frac12)}\int_0^\infty \frac{\cosh^2(t+R)\left[(2+\nu)(\cosh(z)+\tanh(R+t))^2-(1+\cosh(z)\tanh(R+t))^2\right]}{(\cosh(t+R)+\sinh(t+R)\cosh(z))^{\nu+3}}\,\mathrm{d}z.$$

为了确定 φ''的符号，只需研究函数

$$f(t) := \sqrt{\nu+2}(\cosh(z)+\tanh(R+t)) - (1+\cosh(z)\tanh(R+t)).$$

由于 $\sqrt{\nu+2} > \sqrt{\frac{3}{2}} \geq 1$ 和 $0 \leq$ 双曲正切$(t+R) < 1$，我们得到

$$f(t) > \sqrt{\frac{3}{2}}\tanh(R+t) - 1 + \cosh(z)\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \tanh(R+t)\right).$$

令 $w :=$ 双曲正切$(R+t)$，线性函数

$$A(w) = \sqrt{\frac{3}{2}}w - 1 + \cosh(z)\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - w\right)$$

满足

$$A(0) = -1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\cosh(z) > 0, \qquad A(1) = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 + \cosh(z)\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) > 0,$$

因此 $f(t) > 0$，由此可得 $\varphi''(t) > 0$。

步骤 *3*：特征值单调性的充分条件。给定 $s \geq 1$，我们有

$$\lambda_1^\alpha(B_{sR}^{\mathrm{ext}}) \leq \frac{\displaystyle\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2\frac{\sinh(t+sR)}{\sinh(sR)}\,\mathrm{d}t + \alpha|\varphi(0)|^2}{\displaystyle\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\frac{\sinh(t+sR)}{\sinh(sR)}\,\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\coth(sR)\displaystyle\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty |\varphi'(t)|^2\cosh(t)\,\mathrm{d}t + \alpha|\varphi(0)|^2}{\coth(sR)\displaystyle\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty |\varphi(t)|^2\cosh(t)\,\mathrm{d}t}.$$

我们用 $g(s)$ 表示最后一个表达式，并定义以下量

$$
\begin{aligned}
a &:= \int_0^\infty |\varphi'(t)|^2 \sinh(t)\,\mathrm{d}t;\\
b &:= \int_0^\infty |\varphi'(t)|^2 \cosh(t)\,\mathrm{d}t + \alpha|\varphi(0)|^2;\\
c &:= \int_0^\infty |\varphi(t)|^2 \sinh(t)\,\mathrm{d}t;\\
d &:= \int_0^\infty |\varphi(t)|^2 \cosh(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Then

$$
g'(s) = R\frac{bc-ad}{\left(c\cosh(sR)+d\sinh(sR)\right)^2}.
$$

证明最后通过证明 $g'(s) < 0$ for $s \geq 1$，来结束，因为在这种情况下

$$
\lambda_1^\alpha(B_{sR}^{\mathrm{ext}}) \leq g(s) < g(1) = \lambda_1^\alpha(B_R^{\mathrm{ext}}), \quad \text{for } s > 1.
$$

我们有

$$
g'(s) < 0 \quad \textit{if, and only if,} \quad \frac{\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2\cosh(t)\,\mathrm{d}t + \alpha|\varphi(0)|^2}{\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\cosh(t)\,\mathrm{d}t} < \frac{\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t}.
$$

步骤4: 一个 单调性充分条件的验证。假设.....并不失一般性 e

$$
\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2\cosh(t)\,\mathrm{d}t + \alpha|\varphi(0)|^2 > 0,
$$

否则证明就已经完成。利用 φ 的严格单调性和严格凸性，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2\cosh(t)\,\mathrm{d}t + \alpha|\varphi(0)|^2}{\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\cosh(t)\,\mathrm{d}t} \leq \frac{\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2\cosh(t)\,\mathrm{d}t + \alpha|\varphi(0)|^2}{\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t}\\
&= \frac{\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty |\varphi'(t)|^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t + \alpha\,|\varphi(0)|^2}{\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t}\\
&< \frac{\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t + \varphi'(0)\int_0^\infty \varphi'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t + \alpha|\varphi(0)|^2}{\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t}\\
&< \frac{\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t + \varphi'(0)\int_0^\infty \varphi'(t)\,\mathrm{d}t + \alpha\,|\varphi(0)|^2}{\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t}\\
&= \frac{\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\sinh(t)\,\mathrm{d}t},
\end{aligned}
$$

其中最后一步用到了边界条件 $-\varphi'(0) + \alpha\varphi(0) = 0$. □

注4.5。由此可立即得出，若 $0 < R < R$，则 $\alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}}) \leq \alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}})$。显然，不等式（4.7）对于满足 α 的 $\alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}}) > \alpha \geq \alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}})$ 仍然成立，而当 $\alpha \geq \alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}})$ 时等号成立。

5. 主要结果

本节将陈述并证明本文的主要结果：比较双曲平面中测地凸有界开集的外部区域上的最低 Robin 特征值与测地圆盘外部区域上的最低 Robin 特征值。我们还指出，该定理推广了命题 4.4中的单调性。

定理 5.1. 设$\Omega \subset \mathbb{H}^2$ 为一个开、有界且测地凸的集合。设 $B_R \subset \mathbb{H}^2$ 为半径为 R 的测地圆盘，使得

$$\coth(R) \geq \frac{|\Omega| + 2\pi}{\mathcal{H}^1(\partial\Omega)},$$

那么，对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，均有

$$\lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}}) \leq \lambda_1^\alpha(B_R^{\mathrm{ext}}).$$

证明. 若 $\alpha \geq \alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}})$，则由以下事实可立即得到结论：

$$\lambda_1^\alpha(B_R^{\mathrm{ext}}) = \frac{1}{4}.$$

现在考虑 $\alpha < \alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}})$ 的情形。设 $\rho\colon \Omega^{\mathrm{ext}} \mapsto (0,\infty)$ 为 Ω 的边界到点的双曲距离函数。此外，我们定义辅助函数如下：

$$L\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \qquad L(r) := \mathcal{H}^1\left(\{x \in \Omega^{\mathrm{ext}} :\ \rho(x) = r\}\right).$$

注意，根据定理 B.5，对于每个 $r > 0$ ， $L(r)$ 可理解为外平行体 Ω_r 的周长。Steiner 公式保证，对于几乎所有 r，均有 $L(r) = \mathcal{H}^1(\partial\Omega_r)$。给定函数 $\psi \in C_0^\infty([0,\infty))$，我们定义函数 $u := \psi \circ \rho\colon \Omega^{\mathrm{ext}} \mapsto \mathbb{C}$。由于 ρ 是 Lipschitz连续函数，函数 u 也是 Lipschitz连续的，且在 Ω^{ext}中紧支撑。因此，我们有 $u \in W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}})$，并应用余面积公式可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})} &= \int_0^\infty |\psi'(t)|^2 L(t)\,\mathrm{d}t\,,\\
\|u\|^2_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})} &= \int_0^\infty |\psi(t)|^2 L(t)\,\mathrm{d}t\,,\\
\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega^{\mathrm{ext}})} &= \mathcal{H}^1(\partial\Omega)\,|\psi(0)|^2\,.
\end{aligned}$$

下文中，我们用 $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 表示 $-\Delta_\alpha^{B_R^{\mathrm{ext}}}$ 的基态，它是测地圆盘边界距离的函数。该函数的显式表示见命题 4.4 证明的第 1 步。将极小极大原理应用于子空间 $\{\psi \circ \rho\colon\ \psi \in C_0^\infty([0,\infty))\} \subset W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 上的二次型 $Q_\alpha^{\Omega^{\mathrm{ext}}}$，利用

定理 2.5中的恒等式

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}}) &\le \inf_{\substack{\psi\in C_0^\infty([0,\infty))\\ \psi\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_0^\infty |\psi'(t)|^2 L(t)\,\mathrm{d}t + \alpha\mathcal{H}^1(\partial\Omega)|\psi(0)|^2}{\displaystyle\int_0^\infty |\psi(t)|^2 L(t)\,\mathrm{d}t} \\
&= \inf_{\substack{\psi\in C_0^\infty([0,\infty))\\ \psi\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_0^\infty |\psi'(t)|^2 \left(\frac{2\pi+|\Omega|}{\mathcal{H}^1(\partial\Omega)}\sinh(t)+\cosh(t)\right)\mathrm{d}t + \alpha|\psi(0)|^2}{\displaystyle\int_0^\infty |\psi(t)|^2 \left(\frac{2\pi+|\Omega|}{\mathcal{H}^1(\partial\Omega)}\sinh(t)+\cosh(t)\right)\mathrm{d}t} \\
&\le \frac{\displaystyle\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2 \left(\frac{2\pi+|\Omega|}{\mathcal{H}^1(\partial\Omega)}\sinh(t)+\cosh(t)\right)\mathrm{d}t + \alpha|\varphi(0)|^2}{\displaystyle\int_0^\infty |\varphi(t)|^2 \left(\frac{2\pi+|\Omega|}{\mathcal{H}^1(\partial\Omega)}\sinh(t)+\cosh(t)\right)\mathrm{d}t} \\
&\le \frac{\displaystyle\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2 \left(\frac{2\pi+|B_R|}{\mathcal{H}^1(\partial B_R)}\sinh(t)+\cosh(t)\right)\mathrm{d}t + \alpha|\varphi(0)|^2}{\displaystyle\int_0^\infty |\varphi(t)|^2 \left(\frac{2\pi+|B_R|}{\mathcal{H}^1(\partial B_R)}\sinh(t)+\cosh(t)\right)\mathrm{d}t} \\
&= \inf_{\substack{\psi\in C_0^\infty([0,\infty))\\ \psi\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_0^\infty |\psi'(t)|^2 \left(\frac{2\pi+|B_R|}{\mathcal{H}^1(\partial B_R)}\sinh(t)+\cosh(t)\right)\mathrm{d}t + \alpha|\psi(0)|^2}{\displaystyle\int_0^\infty |\psi(t)|^2 \left(\frac{2\pi+|B_R|}{\mathcal{H}^1(\partial B_R)}\sinh(t)+\cosh(t)\right)\mathrm{d}t} \\
&= \inf_{\substack{\psi\in C_0^\infty([0,\infty))\\ \psi\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_0^\infty |\psi'(t)|^2 \mathcal{H}^1(\partial B_{R+t})\,\mathrm{d}t + \alpha\mathcal{H}^1(\partial B_R)|\psi(0)|^2}{\displaystyle\int_0^\infty |\psi(t)|^2 \mathcal{H}^1(\partial B_{R+t})\,\mathrm{d}t} \\
&= \lambda_1^\alpha(B_R^{\mathrm{ext}}),
\end{aligned}
$$

其中我们分别使用了恒等式

$$
\coth(R) = \frac{|B_R|+2\pi}{\mathcal{H}^1(\partial B_R)},
$$

变分刻画中下确界 $\lambda_1^\alpha(B_R^{\mathrm{ext}})$（见命题4.4步骤 1）在函数 φ处取到，以及函数的严格单调递增

$$
g(s) = \frac{\displaystyle\int_0^\infty |\varphi'(t)|^2 (s\sinh(t)+\cosh(t))\,\mathrm{d}t + \alpha|\varphi(0)|^2}{\displaystyle\int_0^\infty |\varphi(t)|^2 (s\sinh(t)+\cosh(t))\,\mathrm{d}t},
$$

对 $s\in(0,\infty$成立。后一个性质可通过计算 g 的一阶导数，并完全仿照命题4.4的步骤 3 和 4 进行论证得出。最后，我们利用了引理C.3的稠密性结果。□

推论 5.2。 设$\Omega\subset\mathbb{H}^2$ 是一个开、有界且测地凸集。如果

$$
\frac{|\Omega|+2\pi}{\mathcal{H}^1(\partial\Omega)} \le 1,
$$

那么，对于任意 $\alpha<\alpha_\star(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 和 $R>0$，均有

$$
\lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}}) < \lambda_1^\alpha(B_R^{\mathrm{ext}}).
$$

推论 5.3。给定 $\alpha\in\mathbb{R}$，则

$$
\inf_{R>0}\lambda_1^\alpha(B_R^{\mathrm{ext}}) > -\infty.
$$

在 Faber-Krahn 型不等式的研究中，通常会采用等测度圆盘或等周长圆盘作为极值集合进行比较。然而，我们的方法偏离了这一传统选择，采用了另一种比较方式，从而得到了更精确的估计。等周不等式和等体积谱不等式是我们这一更强结果的推论。

推论 5.4。设 $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ 是一个开、有界且测地凸的集合。设 $B \subset \mathbb{H}^2$ 为一个测地圆盘，使得满足以下条件之一：$H^1(\partial\Omega) = H^1(\partial B)$ 或 $|\Omega| = |B|$，则有

$$\lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}}) \le \lambda_1^\alpha(B^{\mathrm{ext}}), \qquad \textit{for all } \alpha \in \mathbb{R}.$$

证明。记 $B_{R^\star}$, $B_{R^\sharp}$ 分别为与 Ω 具有相同周长和面积的测地圆盘。几何等周不等式保证 $R^\sharp \le R^\star$。再次利用双曲平面中的等周不等式，可得

$$\frac{|\Omega| + 2\pi}{\mathcal{H}^1(\partial\Omega)} \le \frac{|B_{R^\star}| + 2\pi}{\mathcal{H}^1(\partial B_{R^\star})} = \coth(R^\star) \le \coth\Big(R^\sharp\Big).$$

因此，定理5.1 意味着

$$\lambda_1^\alpha(\Omega^{\mathrm{ext}}) \le \lambda_1^\alpha(B_{R^\star}^{\mathrm{ext}}) \le \lambda_1^\alpha(B_{R^\sharp}^{\mathrm{ext}}). \quad \square$$

关于临界耦合参数的另一个有趣优化结果可由定理5.1立即得出。

推论 5.5。设 $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ 是一个开、有界且测地凸的集合。记 $B_R \subset \mathbb{H}^2$ 为一个半径为 R 的测地圆盘，使得

$$\coth(R) \ge \frac{|\Omega| + 2\pi}{\mathcal{H}^1(\partial\Omega)},$$

则有

$$\alpha_\star(\Omega^{\mathrm{ext}}) \ge \alpha_\star(B_R^{\mathrm{ext}}).$$

致谢

A.C. 得到了 INdAM-GNAMPA 项目 2025 “椭圆型与抛物型方程的定性与正则化性质”的部分资助，项目编号为 CUP E5324001950001。D.K. 获得了捷克科学基金会第 26-21940S 号资助。

附录 A. 黎曼流形中集合的凸性

在本附录中，我们总结黎曼流形中的一些凸性一般概念，这些概念引入于 [21, 62], 另请参见 [2] 以了解更多细节，并介绍它们的一些性质。

定义 A.1. 设 M 为一个黎曼流形，且 $C \subset M$。我们称：

(a) 若对任意 p、$q \in C$，都存在一条连接 p 与 q 的极小测地线 $\gamma : [a,b] \to M$，使得 $\gamma([a,b]) \subseteq C$，则称 C 弱凸；(b) 若对任意 p、$q \in C$，都存在唯一一条位于 M 中、连接 p 与 q 的极小测地线 $\gamma : [a,b] \to M$，且 $\gamma([a,b]) \subseteq C$，则称 C 强凸；(c) 若对任意 $p \in C$，都存在 $\varepsilon > 0$，使得 $C \cap B_\varepsilon(p)$ 强凸，其中 $B_\varepsilon(p)$ 是以 p 为中心、半径为 ε 的度量球，则称 C 局部凸；(d) 进一步假设 C 是一个具有 C^2-光滑边界的区域。若在每个点 $p \in \partial C$ 处，∂C 的第二基本形式 II 相对于外单位法向量 ν 正定，则称 C 严格凸：

$$\mathrm{II}_p(\xi,\xi) = \langle \nabla_\xi \nu, \xi \rangle > 0, \quad \forall \xi \in T_p(\partial C) \setminus \{0\}.$$

我们还回顾一下支撑元素的概念（见 [21, 2]）。

定义 A.2。设 M 为黎曼流形，$C \subseteq M$ 为开集。对于任意点 $p \in \partial C$ 和切向量 $\nu \in T_pM$，考虑半空间

$$H_p = \{\, \xi \in T_pM : \langle \nu, \xi \rangle < 0 \,\}.$$

(i) 如果对于 p 中 C 的内部的每个 q 以及每条极小测地线，H_p 是 C 在 p 处的支撑元素

$$\gamma : [0,1] \to M$$

满足 $\gamma(0) = p$ 且 $\gamma(1) = q$，则有 $\gamma'(0) \in H_p$；

(ii) 如果存在 p 的一个邻域 U，使得 H_p 是 $U \cap C$ 在 p 处的支撑元素，则 H_p 是 C 在 p 处的局部支撑元素 。

我们有以下关于弱凸性的刻画，该刻画最初由 [2, 命题 2] 证明。我们回顾一下，对于每个点 $p \in M$，Cut(p) 表示 p 的割迹。

命题 A.3。设 $C \subset M$ 是黎曼流形 M 的连通开子集。那么，当且仅当对于每个点 $p \in \partial C$，在 p 处存在一个局部支撑元素，且集合 $C \setminus \mathrm{Cut}(p)$ 是连通的，C 是弱凸的。

我们还知道，对于开局部凸集，局部支撑元素总是存在的。事实上，Cheeger 和 Gromoll 在 [21, 定理 1.6、引理 1.7] 中证明了以下结果。

定理 A.4. 设 M 为一个维数为 n 的黎曼流形，且 $C \subseteq M$ 为一个非空开局部凸集。那么 ∂C 是 M 中的一个嵌入的（$n-1$）维拓扑子流形，并且它在每个点 $p \in \partial C$ 都有一个支撑元素。

在原始研究中，作者考虑的是闭集；然而，显然，如果 C 是局部凸的，那么它的闭包 $\overline{C}$ 也是局部凸的，而且边界满足 $\partial \overline{C} = \partial C$。此外，根据定义，$\overline{C}$ 的任何支撑元素也是 C的支撑元素。

我们提供 Bangert 在 [9, 推论 2.5、推论 2.6] 中证明的一个逼近结果。

定理 A.5. 设 M 为一个黎曼流形，$C \subset M$ 为一个具有非空内部的连通、紧、局部凸集。假设以下条件之一成立：

(a) C上的截面曲率为正；*(b)* C上的截面曲率为负；

那么存在一个由连通、紧、局部凸集组成的序列 $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，其边界为 C^∞，使得

$$\lim_{k\to\infty} \left(d^H(C_k, C) + d^H(\partial C_k, \partial C) \right) = 0.$$

我们还回顾黎曼流形中局部凸集的以下性质，该性质已在[64,定理 6.1]中证明。

定理 A.6. 设 M 为一个黎曼流形，$C \subset M$ 为一个闭的局部凸集。那么 C 具有强 *Lipschitz* 边界。

附录 B. Steiner 公式

给定黎曼流形 M，对于每个点 $p \in M$ 和 $r > 0$，我们用 $B_r(p)$ 表示以 p 为中心、半径为 r的度量球。当 r充分小时，该度量球与测地球 $\exp_p(\mathcal{B}_r(0))$ 重合，其中 $\mathcal{B}_r(0)$ 是切平面 T_pM中的度量球。按照 [45]，下面我们引入度量投影和可达半径的概念。

定义 B.1. 设 M 是一个黎曼流形，$\Omega \subset M$ 是一个非空集合。对于任意点 $p \in M$， p 在 Ω 上的度量投影 是指满足下述条件的点 $q \in \Omega$：

$$d(p,q) = \inf_{x\in\Omega} d(p,x).$$

当该点唯一时，我们将其记为 $\sigma_\Omega(p)$。

定义 B.2. 给定 $q \in \Omega$， q 相对于 Ω 的可达半径 定义为满足以下条件的半径 $r > 0$ 的上确界：球 $B_r(q)$内的每个点 p 都存在唯一的到 Ω 的度量投影：

$$\mathcal{R}(q) = \sup\{r > 0 : \ \forall p \in B_r(q), \ \ p \text{ 到 } \Omega \text{ 的度量投影唯一}\}。$$

接着，我们将集合 Ω 的可达半径 定义为

$$\mathcal{R}(\Omega) = \inf_{q\in\Omega} \mathcal{R}(q).$$

若$\mathcal{R}(\Omega) > 0$，则称集合 Ω 具有正可达半径 。

注 B.3. 具有正可达半径的集合 $\Omega \subset M$ 是闭集。反设存在 $x \in \partial\Omega \setminus\Omega$，且令 y为其到 Ω 的唯一度量投影。于是，以 x 为圆心、 $R < d(x, y)$ 为半径的任意圆盘都不与 Ω 相交，这将导致矛盾。

众所周知，在 $\mathbb{R}^n$中，任意凸集 C 的可达半径都是无穷大，即

$$\mathcal{R}(C) = +\infty.$$

对于单连通空间形式，连通紧致局部凸集也有相关但更微妙的结果。特别是，以下命题 [46, 引理 2。2], 给出了这一情形下可达半径的有用下界。

命题 B.4. 设 M 是一个常曲率为 κ的单连通空间形式，且$C \subseteq M$ 是一个连通紧致局部凸集。则：

(i) 若 $\kappa < 0$，则

$$\mathcal{R}(C) = +\infty;$$

(ii) 若 $\kappa > 0$，则

$$\mathcal{R}(C) \geq \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\kappa}}.$$

设 M 是一个常截面曲率为 κ的完备黎曼 n流形。我们引入函数

$$\mathrm{sn}_\kappa(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{-\kappa}}\sinh\left(\sqrt{-\kappa}t\right) & \text{if } \kappa < 0, \\ t & \text{if } \kappa = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\kappa}}\sin\left(\sqrt{\kappa}t\right) & \text{if } \kappa > 0, \end{cases}$$

以及 $\mathrm{cn}_\kappa = \mathrm{sn}'_\kappa$。对于 $1 \leq j \leq n$，我们定义

$$L_j(t) := \int_0^t \mathrm{cn}_\kappa^{n-j}(t)\,\mathrm{sn}_\kappa^{j-1}(t)\,dt,$$

and

$$L_0(t) = 1.$$

以下结果由 Kohlmann 在 [45, 定理 2.7] 中证明。

定理 B.5（单连通空间形式上的 Steiner 公式）。设 M 是一个维数为 n、曲率为 κ 的单连通空间形式，且 $\Omega \subset M$ 是一个具有正可达半径的集合。设 U 是 Ω 的一个合适开邻域，在该邻域内度量投影 σ_Ω 有定义。对于每个 $j = 0,\dots,n$，都存在系数 $\Phi_j(\Omega)$，使得以下结论成立：若$s > 0$ 满足 $\Omega_s \subset U$，则有

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_s) = \sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{cn}_\kappa^r(s)\,\mathrm{sn}_\kappa^{n-1-r}(s)\Phi_r(\Omega), \qquad and \qquad |\Omega_s| = \sum_{r=0}^{n} L_{n-r}(s)\Phi_r(\Omega).$$

特别地，

$$\Phi_n(\Omega) = |\Omega|.$$

此外，如果 $\partial\Omega$ 是 C^2-光滑的、紧的嵌入式 $(n-1)$-子流形，且属于 M，那么对于每个$r = 0$、……、$n-1$，我们有

$$\Phi_r(\Omega) = \binom{n-1}{r} \int_{\partial\Omega} H_{n-1-r}(p)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(p), \tag{B.1}$$

其中 H_j 表示 j阶主曲率的归一化齐次对称函数，其中主曲率取自 $\partial\Omega$。

对于具有 C^2<style id='4'}>-光滑边界的集合， Φ_r 中给出的曲率测度表述[45, 定理 2。7]等价于（B.1），如 [1, 注 2。44]所示。关于函数 H_j的显式定义，请参见 [45, 公式 2。13]。

注 B.6。注意，当 $\kappa = 0$时，我们得到 Steiner 多项式

$$|\Omega_s| = |\Omega| + \sum_{k=1}^{n} \frac{s^k}{k}\Phi_{n-k}(\Omega).$$

注 B.7。设 M 是一个单连通空间形式。如果 $\Omega \subset M$ 是一个具有正可达半径且边界为强 Lipschitz 边界的集合 $\partial\Omega$，那么有

$$\Phi_{n-1}(\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega).$$

在欧几里得情形 $M = \mathbb{R}^n$ 且采用标准度量时，这个等式是经典结果（例如参见 [4,定理 2.106]）。对于一般的单连通空间形式，通过引入法坐标并在局部应用欧几里得结果即可得到该等式（参见 [1, 注 2.45]）。此外，应用 Steiner 公式可得

$$\Phi_{n-1}(\Omega) = \lim_{s\to 0^+} \frac{|\Omega_s| - |\Omega|}{s}.$$

右侧是 Ω 的 $(n-1)$ 维 Minkowski 内容 [59, 定义 1.51]。若 Ω 的测度有限，则利用 [59, 定理 1.52], 可得

$$P(\Omega) = \lim_{s\to 0^+} \frac{|\Omega_s| - |\Omega|}{s} = \Phi_{n-1}(\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega),$$

其中，$P(\Omega)$ 表示 De Giorgi 意义下的周长 [59, 定义 1.37]。

曲率测度的连续性 Φ_j 已在 [46, 定理 2.4]中得到证明。

定理 B.8。设 M 是一个维数为 n 、曲率为 κ的单连通空间形式。设 $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ 是一个边界非空的紧集序列。假设存在$\delta > 0$ 以及一个紧集 $\Omega \subset M$，使得

$$\mathcal{R}(\Omega_k) \geq \delta \quad and \quad \lim_{k\to\infty} d^H(\Omega_k, \Omega) = 0.$$

那么，对于每个 $r = 0,\dots,n$,

$$\Phi_r(\Omega_k) \to \Phi_r(\Omega), \qquad as\ k \to \infty.$$

附录 C. Sobolev 空间的辅助性质

在本附录中，我们将介绍双曲平面外域上 $W^{1,2}$ 函数的一些精细性质。

引理 C.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ 是一个有界、连通的 *Lipschitz* 域。则对于任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 $C(\varepsilon) > 0$，使得不等式

$$\int_{\partial\Omega^{\mathrm{ext}}} |u|^2 \,\mathrm{d}\sigma \le \varepsilon \int_{\Omega^{\mathrm{ext}}} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu + C(\varepsilon) \int_{\Omega^{\mathrm{ext}}} |u|^2 \,\mathrm{d}\mu$$

对所有 $u \in W^{1,2}(\Omega^{\mathrm{ext}})$成立。

证明。 我们将证明分为三个步骤。

步骤 *1*：化归为零均值的 *Sobolev* 函数。 我们首先对一个有界、Lipschitz 且连通的集合 $U \subset \mathbb{H}^2$证明该不等式。在此框架下，按照 [22, 第 II 节第 §4], 节中的推理，我们不妨假设函数 $u \in W^{1,2}(U)$ 在 U 上具有零均值。事实上，设

$$\langle u \rangle_U = \frac{1}{|U|} \int_U u \,\mathrm{d}\mu, \qquad v = u - \langle u \rangle_U.$$

则 v 具有零均值，且 $\nabla v = \nabla u$。根据反三角不等式,

$$\|v\|^2_{L^2(\partial U)} \ge \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\partial U)} - \left|\langle u \rangle_U\right|^2 \mathcal{H}^1(\partial U).$$

将所需不等式应用于 v，得到

$$\|v\|^2_{L^2(\partial U)} \le \varepsilon \|\nabla v\|^2_{L^2(U)} + C(\varepsilon)\|v\|^2_{L^2(U)} = \varepsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(U)} + C(\varepsilon)\left\|u - \langle u \rangle_U\right\|^2_{L^2(U)}.$$

接下来我们估计均值项。根据柯西–施瓦茨不等式,

$$|\langle u \rangle_U|^2 = \frac{1}{|U|^2}\left|\int_U u \,\mathrm{d}\mu\right|^2 \le \frac{1}{|U|}\|u\|^2_{L^2(U)},$$

and

$$\|u - \langle u \rangle_U\|^2_{L^2(U)} \le 2\|u\|^2_{L^2(U)} + 2|\langle u \rangle_U|^2 \,|U| \le 4\|u\|^2_{L^2(U)}.$$

结合前面的估计可得

$$\|u\|^2_{L^2(\partial U)} \le 2\varepsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(U)} + \left(8C(\varepsilon) + \frac{2\mathcal{H}^1(\partial U)}{|U|}\right)\|u\|^2_{L^2(U)}.$$

最后，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $C'(\varepsilon) > 0$，其仅取决于 ε 和 U，使得 t

$$\|u\|^2_{L^2(\partial U)} \le \varepsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(U)} + C'(\varepsilon)\|u\|^2_{L^2(U)}. \tag{C.1}$$

对所有 $u \in W^{1,2}(U)$均成立。

步骤 *2*：证明有界连通 *Lipschitz* 集上的不等式。我们引入由具有零均值的 $W^{1,2}(U)$函数组成的子空间，记为

$$\tilde{W}^{1,2}(U) := \left\{u \in W^{1,2}(U) : \langle u \rangle_U = 0\right\}.$$

庞加莱不等式 推论 A.1。2] 保证，由 L^2-范数定义的梯度半范数是 $\tilde{W}^{1,2}(U)$上的范数，并且等价于标准的 $W^{1,2}$-范数。由于迹算子 $\mathrm{Tr} : W^{1,2}(U) \to L^2(\partial U)$是连续的 [13, 定理 7。5], 由 [55, 定理 2。1] 可知，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $C(\varepsilon) > 0$，使得对每个 $u \in \tilde{W}^{1,2}(U)$，不等式 (C.1) 成立。

步骤 *3*：证明有界、利普希茨且连通的集合的外部区域中的不等式。我们固定一个包含 U的开球 B，并定义 $V:=B\setminus U$。给定 $u\in W^{1,2}(U_{\text{外部区域}})$，则

$$\|u\|^2_{L^2(\partial U)}\le\|u\|^2_{L^2(\partial V)}\le\varepsilon\|\nabla u\|^2_{L^2(V)}+C(\varepsilon)\|u\|^2_{L^2(V)}\le\varepsilon\|\nabla u\|^2_{L^2(U^{\text{ext}})}+C(\varepsilon)\|u\|^2_{L^2(U^{\text{ext}})},$$

借此证明该引理。 □

我们还证明以下有用的逼近结果，它推广了 [8, 定理 2。9] 至双曲平面中的外部区域。

引理 C.2. 设 $k\in\mathbb{N}$ 并假设 $\Omega\subset\mathbb{H}^2$ 是一个具有 C^k-光滑边界的开有界集。那么 $C^k_c(\Omega^{\text{ext}})$ 在 $W^{1,2}(\Omega^{\text{ext}})$中稠密。

证明。 我们注意到，根据 [33, 定理 2.9], 子空间 $C^\infty(\Omega^{\text{ext}})\cap W^{1,2}(\Omega^{\text{ext}})$ 在 $W^{1,2}(\Omega^{\text{ext}})$ 中稠密。我们将证明分为两步。

步骤 *1*。 我们首先证明，在 $W^{1,2}(\Omega^{\text{ext}})$ 中，所有在包含 Ω 的某个测地圆盘之外为零的 $C^\infty(\Omega^{\text{ext}})\cap W^{1,2}(\Omega^{\text{ext}})$ 函数构成稠密集。显然，这类函数通常在 $\partial\Omega$ 上并非光滑。

设 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ 是一个递减函数，使得对于 $t\le 0$， $f(t)=1$，并且对于 $t\ge 1$， $f(t)=0$。对于固定的点 $y\in\Omega$，三角不等式保证距离函数$d_{\mathbb{H}^2}(x,y)$ 是 1-Lipschitz 的。此外，由（2.2）可得， $d_{\mathbb{H}^2}(\cdot\ y)\in C^\infty(\Omega^{\text{ext}})$。给定 $\varphi\in C^\infty(\Omega^{\text{ext}})\cap W^{1,2}(\Omega^{\text{ext}})$，我们断言函数序列

$$\varphi_j(x)=\varphi(x)f(d_{\mathbb{H}^2}(x,y)-j),\qquad j\in\mathbb{N},\tag{C.2}$$

在 $W^{1,2}(\Omega^{\text{ext}})$ 中收敛于 $\varphi(x)$。当对于所有 $x\in\Omega^{\text{ext}}$， $j\to\infty$， $\varphi_j(x)\to\varphi(x)$。此外，对于所有 $j\in\mathbb{N}$， $|\varphi|$ 属于 $L^2(\Omega^{\text{ext}})$。因此，根据勒贝格控制收敛定理，

$$\|\varphi_j-\varphi\|_{L^2(\Omega^{\text{ext}})}\to 0.$$

此外，当 $j\to\infty$, $|\nabla\varphi_j(x)|\to|\nabla\varphi(x)|$ 对所有 $x\in\Omega^{\text{ext}}$成立，且

$$|\nabla\varphi_j(x)|\le|\nabla\varphi(x)|+|\varphi(x)|\sup_{t\in[0,1]}|f'(t)|,\qquad\text{for all}\,j\in\mathbb{N}$$

其中右端属于 $L^2(\Omega^{\text{ext}})$。因此

$$\|\nabla(\varphi_j-\varphi)\|_{L^2(\Omega^{\text{ext}})}\to 0.$$

步骤 *2.* 为完成证明，只需说明：任意给定的函数 $\psi\in C^\infty(\Omega^{\text{ext}})\cap W^{1,\ 2}(\Omega^{\text{ext}})$，若其在包含 Ω 的某个测地圆盘之外为零，则可由 $C^k_c(\Omega^{\text{ext}})$ 中的函数在 $W^{1,\ 2}(\Omega^{\text{ext}})$ 中逼近。

设 B为一个测地圆盘，使得 $B\supset\Omega$, $B\supset\operatorname{supp}\psi$且 $d_{\mathbb{H}^2}(\partial B,\operatorname{supp}(\psi))>0$。由于$B\setminus\Omega$ 是一个具有 C^k-光滑边界的紧流形，因此它存在有限个 C^k图册 $\{(\Omega_i,\varphi_i)\}_{i=1}^r$，其中每个 Ω_i 或者同胚于 $\mathbb{R}^2$中的一个圆盘，或者在与边界相交时，同胚于 $\mathbb{R}^2$中的一个半圆盘。我们选择与 ∂B 相交的区域 Ωj ，使它们与 $\operatorname{supp}(\psi)$ 不相交。设 $\{\alpha_i\}$ 是覆盖 $B\setminus\Omega$ 的 C^∞ 单位分解，且从属于覆盖 $\{\Omega_i\}$。根据定义，$\operatorname{supp}(\alpha_i)\subset\Omega_i$。由于每个 Ω_i 在诱导拓扑下是开集，因此 $\operatorname{supp}(\alpha_i)\cap\partial\Omega_i\subseteq\partial\Omega_i\cap(\partial\Omega\cup\partial B)$。我们必须用 $C^k(B\setminus\Omega)$ 中在 ∂B上为零的函数，在索博列夫范数下逼近每个 $\alpha_i\psi$。

如果 Ω_i 与圆盘或半圆盘同胚，且 $\Omega_i\cap\partial B\neq\emptyset$，那么函数 $\alpha_i\psi$（在后一种情况下恒为零）无需进行逼近。注意，在这两种情况下， $\alpha_i\psi\in C^\infty_c(\Omega_i)$ 和 $\alpha_i\psi=0$ 都成立于 $\partial\Omega_i$ 上。

如果 Ω_i 与半圆盘同胚 D 且 $\Omega_i\cap\partial\Omega\neq\emptyset$，我们可以按照 [8, 定理 29]的证明进行。我们引入半空间 $E:=\{x\in\mathbb{R}^2:\quad x_1\le 0\}$ 并且不失

°一般性，设 $D = B_r(x) \cap E$ 且 $x \in \partial E$。函数序列 h_m，定义在$m \in \mathbb{N}$ 充分大的情况下，为限制在 D 上的

$$(\alpha_i \psi \circ \varphi_i^{-1})(x_1 - \tfrac{1}{m}, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathring{E},$$

收敛于 $\alpha_i \psi \circ \varphi_i^{-1}$中的 $W^{1,2}(D)$。显然， $h_m \circ \varphi_i \in C^k(\Omega_i)$。由于度量张量在 Ω_i上有界，通过坐标图 φ_i 在局部坐标中表示 $W^{1,2}(\Omega_i)$-范数，可知它与 $W^{1,2}(D)$中的范数等价。因此， $h_m \circ \varphi_i$在 $W^{1,2}(\Omega_i)$中收敛于 $\alpha_i \psi$。注意，在 $\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$ 上， $\alpha_i \psi = 0$。此外， φ_i 将 Ω_i 的内部点映射为D 的内部点，并将 $\partial\Omega_i \cap \Omega$ 中的点映射为 $D \cap \partial E$ 中的点（例如参见 [53, 定理 1.37]）。因此，$\operatorname{supp}(h_m) \cap (\partial D \setminus \partial E) = \emptyset$，从而 $\operatorname{supp}(h_m \circ \varphi_i) \cap (\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega) = \emptyset$。给定 $\varepsilon > 0$，若 $\Omega_i \cap \partial\Omega = \emptyset$，则令 $\eta_i := \alpha_i \psi$；否则，定义 $\eta_i := h_{m_i} \circ \varphi_i$，其中选取 m_i 使得$\|h_{m_i} \circ \varphi_i - \alpha_i \psi\|_{W^{1,2}(\Omega_i)} < \varepsilon$. 定义

$$\eta := \sum_{i=1}^{r} \eta_i,$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\|\eta - \psi\|_{W^{1,2}(B\setminus\Omega)} &= \left\| \sum_{i=1}^{r} \eta_i - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \psi \right\|_{W^{1,2}(B\setminus\Omega)} \\
&\le \sum_{i=1}^{r} \|\eta_i - \alpha_i \psi\|_{W^{1,2}(B\setminus\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \|\eta_i - \alpha_i \psi\|_{W^{1,2}(\Omega_i)} \\
&\le r\varepsilon.
\end{aligned}$$

根据构造可知， $\eta \in C^k(B \setminus \Omega)$ 且 $\eta = 0$ 在 ∂B 上。 □

引理 C.3. 对于任意 $R > 0$，空间 $C_0^\infty([0,\infty))$ 在 $W^{1,2}(\mathbb{R}_+; \sinh(R+t)\,\mathrm{d}t)$中稠密。

证明。 设 $\chi \in C^\infty([0,\infty))$ 满足：对于所有 $t \in [0,1]$， $\chi(t) = 1$；对于所有 $t \ge 2$， $\chi(t) = 0$；对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$，$0 \le \chi(t) \le 1$。令 $\psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+; \sinh(R+t)\,\mathrm{d}t)$ 为任意元素。显然，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\chi(\cdot/n)\psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+; \sinh(R+t)\,\mathrm{d}t)$。固定 $\varepsilon > 0$。注意，存在一个充分大的 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$\|\psi - \chi(\tfrac{\cdot}{n})\,\psi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}_+;\sinh(R+t)\,\mathrm{d}t)} < \varepsilon. \tag{C.3}$$

接下来，我们将利用范数 $W^{1,2}((0,2n))$ 和 $W^{1,2}((0,2n); \sinh(R+t)\,\mathrm{d}t)$ 等价这一事实，因为权函数及其倒数在区间 $[0,2n]$ 上均有界。因此，根据构造， $\chi(\cdot/n)\,\psi \in \{f \in W^{1,2}((0,2n)) : f(2n) = 0\}$。此外，根据区间上（非加权）Sobolev 空间的标准性质，存在一个函数 $\phi \in C_0^\infty([0,2n))$，使得

$$\|\chi(\tfrac{\cdot}{n})\,\psi - \phi\|_{W^{1,2}([0,2n];\sinh(R+t)\,\mathrm{d}t)} < \varepsilon, \tag{C.4}$$

结合（C.3）和（C.4），即可得到所需的稠密性结论。 □

参考文献

[1] P. Acampora、A. Celentano、E. Cristoforoni、C. Nitsch 和 C. Trombetti，负边界参数下 n 维球面上 Robin-Laplacian 的谱等周不等式，几何分析杂志 **35** (2025), 183. [2] S. Alexander，完备黎曼流形中的局部与整体凸性，太平洋数学杂志 **76** (1978), 283–289.[3] A. Alvino、C. Nitsch 和 C. Trombetti，带罗宾边界条件的椭圆问题解的 Talenti 比较结果，纯粹与应用数学通讯 **76** (2023), 585–603.

[4] L. Ambrosio、N. Fusco 和 D. Pallara，《有界变差函数与自由不连续问题》，牛津大学出版社，纽约，2000.[5] T. V. Anoop、V. Bobkov 和 P. Dr´abek，Robin-Neumann 边界条件下环形区域的反向 Faber-Krahn 型与 Szego-Weinberger 型不等式。《微分方程杂志》437 (2025), 113354. [6] T. V. Anoop、V. Bobkov 和 M. Ghosh，平面双连通区域的反向 Faber-Krahn 不等式， arXiv:2509.17480.[7] P. R. S. Antunes、P. Freitas 和 D. Krejˇciˇr´ık，负边界参数下 Robin 特征值的界与极值区域，《高级微积分与变分》10 (2017), 357–380. [8] T. Aubin，《流形上的非线性分析：Monge–Amp `ere 方程》，施普林格，纽约，1982. [9] V. Bangert， ¨局部凸集的逼近，Manuscripta Math. 25 (1978), 397–420. [10] R. Benedetti 和 C. Petronio，《双曲几何讲义》，施普林格出版社，柏林，1992. [11] D. Borthwick，《无限面积双曲曲面的谱理论》，Birkh¨auser，波士顿，2007. [12] M.-H. Bossel，弹性 ´连接的膜：Rayleigh-Faber-Krahn 定理与 Cheeger 不等式的´推广，C. R. Acad. Sci. Paris S´ér. I Math. 302 (1986), 47–50. ´K. Brewster 和 M. Mitrea，Lipschitz 流形上加权 Sobolev 空间中的边值问题，Mem. Diff. Equ. Math. Phys., 60 (2013), 15–55. ´V. B´ogelein、F. Duzaar 和 C. Scheven，双曲 ´空间中的尖锐定量等周不等式，Calc. Var. Part. Diff. Equ., 54 (2015), 3967–4017. [13] D. Bucur、V. Ferone、C. Nitsch 和 C. Trombetti，负边界参数下第一 Robin-Laplacian 特征值的尖锐估计，Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., IX. Ser., Rend. Lincei, Mat. Appl. 30 (2019), 665–676. [14] D. Bucur 和 A. Giacomini，Robin 特征值问题等周不等式的变分方法，Arch. Ration. Mech. Anal. 198 (2010), 927–961. ¨D. Bucur 和 A. Giacomini，Robin-Laplacian 的 Faber-Krahn 不等式：自由不连续 n方法，Arch. Ration. Mech. Anal. 218 (2015), 757–824. [15] L. Bundrock，外域中第一 Robin 特征值的优化：球的局部最大化性质，Ann. Mat. Pura Appl. (4) 204 (2025), 1095–1117. [16] L. Bundrock、A. Girouard、D. Grebenkov、M. Levitin 和 I. Polterovich，欧几里得区域的外部 Steklov 问题，[17] .[18] I. Chavel，《黎曼几何中的特征值》，含 Burton Randol 撰写的一章及 Jozef Dodziuk 撰写的附录，学术出版社，纽约，1984.[19] J. Cheeger 和 D. Gromoll，非负曲率完备流形的结构，Ann. of Math. (2) 96 (1972), 413–443. arXiv:2511.09490P. Cherrier，黎曼流形上的非线性 Neumann 问[20] 题，J. Func. Anal. 57 (1984), 154–206.[21] D. Chen、Q.-M. Cheng 和 H. Li，黎曼流形有界域上 Robin 拉普拉斯算子的 Faber-Krahn 不等式，《微分方程杂志》336 (2022), 374–386. [22] G. Dai、P. Sicbaldi 和 Y. Zhang，双曲空间非平凡外域中的超定椭圆问题，`.´D. Daners，任意空间维数下 Robin 问题的 Faber-Krahn 不等式，Math. Ann. 335 (2006), 767–785.´G. Faber，证明在所有面积相同、张力相同的均匀膜中，圆形膜产生的基音最低，Sitz. bayer. Akad. Wiss. (1923), 169-172. ´P. Freitas 和 D. Krejˇciˇr[23] ık，负边界参数下的第一 Robin 特征值，Adv. Math. 280 (2015), 322–339. [24] P. Freitas 和 R. Laugesen，通过 Robin 从 Steklov 推广到 Neumann 及更广范围：Szeg arXiv:2405.04348o 路径，Canadian J. Math. 72 (2020), 1024–1043. [25] P. Freitas 和 R. Laugesen，通过 Robin 从 Neumann 推广到 Steklov 及更广范围：Weinberger 路径，Amer. J. Math. 143 (2021), 969–994. [26] A. Gallego 和 G. Solanes，双曲平面中凸集的周长、直径与面积，J. Lond. Math. Soc. 64 (2001), 161–178. ¨R. V. Gamkrelidze 和 E. B. Vinberg，编者。《几何学 II：常曲率空间》。V. Minachin 从俄文译出，Encycl. Math. Sci. 29，施普林格出版社，柏林，1993.¨A. Girouard 和 R. Laugesen，Robin 谱：两个圆盘使第三特征值达到最大，Indiana Univ. Math. J. 70 (2021), 2711–2742. [27] D. Guidetti、B. G´uney[28] su 和 D. Pallara，任意流形上的 L″-椭圆正则性及整个 L[29] 尺度，Ann. Acad. Sci. Fenn., Math., 42 (2017), 497–521. [30] P. Hartman，整体测地平行坐标，Amer. J. Math. 86 (1964), 705–727. [31] S. Harman，Robin 特征值与 Dirichlet 特征值的缩放不等式及极限，J. Math. Anal. Appl. 544 (2025), 129082.

[36] A. Henrot, 《椭圆算子特征值的极值问题》, Birkh¨auser 出版社，巴塞尔，2006。[37] A. Henrot, 《形状优化与谱理论》, De Gruyter Open，华沙，2017。[38] J. Hersch, 《内平行线方法在多边形膜或多连通膜中的应用》, 《太平洋数学杂志》13 (1963)，1229–1238。[39] J. Jost, 《黎曼几何与几何分析》, 施普林格，柏林、海德堡，2017。[40] A. Kachmar 和 V. Lotoreichik, 《负边界参数下磁 Robin 拉普拉斯算子的等周不等式》, 《几何分析杂志》32 (2022)，182。[41] T. Kato, 《线性算子的扰动理论》, 施普林格出版社，柏林，1995。[42] J. Kennedy, 《带 Robin 边界条件的拉普拉斯算子第二特征值的等周不等式》, 《美国数学会会刊》137 (2009)，627–633。[43] M. Khalile 和 V. Lotoreichik, 《二维流形和无界锥上 Robin 拉普拉斯算子的谱等周不等式》, 《谱理论杂志》12 (2022)，683–706。[44] H. Kim 和 R. Laugesen, 《两个圆盘使第三 Robin 特征值达到最大值: 正参数》, 《数学年刊》49 (2025)，403–419。[45] P. Kohlmann, 《空间形式中的曲率测度与 Steiner 公式》, 《几何专论》40 (1991)。[46] P. Kohlmann, 《标准空间形式中紧凸体的 Minkowski 积分公式》, 《数学新报》166 (1994)，217–228。[47] E. Krahn, 《关于 Rayleigh 提出的圆的一个极小性质》, 《数学年刊》94 (1925)，97–100。[48] E. Krahn, ¨《关于三维及更高维球体的极小性质》, 《塔尔图大学学报》A 9 (1926)，1–44。[49] D. Krejˇciˇr´ık 和 V. Lotoreichik, 《紧集外域中最低 Robin 特征值的优化》, 《凸分析杂志》25 (2018)，319–337。[50] D. Krejˇciˇr´ık 和 V. Lotoreichik, 《紧集外域中最低 Robin 特征值的优化，II：非凸区域与高维情形》, 《势分析》52 (2020)，601–614。[51] D. Krejˇciˇr´ık 和 V. Lotoreichik, 《平面外部区域上第二 Robin 特征值的优化与单调性》, 《变分法与偏微分方程》63 (2024)，223。[52] J. Langford 和 R. Laugesen, 《使单连通曲面膜第二 Robin 特征值达到最大的情形》, 《计算方法与函数理论》25 (2025)，83–117。[53] J. M. Lee, 《光滑流形导论》, 纽约：施普林格，2012。[54] J. M. Lee, 《黎曼流形导论》, 施普林格，Cham，2018。[55] M. Okumura, 《Ehrling 不等式的推广及完全连续算子的普适刻画》, 《非线性与凸分析杂志》23 (2022)，1021–1033。[56] F. W. J. Olver、D. W. Lozier、R. F. Boisvert 和 C. W. Clark, 《NIST 数学函数手册》, 剑桥大学出版社，剑桥，2010。[57] L. E. Payne 和 H. F. Weinberger, 《关于膜频率与扭转刚度的一些等周不等式》, 《数学分析与应用杂志》2 (1961)，210–216。[58] M. Reed 和 B. Simon, 《现代数学物理方法》卷 IV：《算子分析》, 学术出版社，纽约，1982。[59] M. Ritor´e, 《黎曼流形中的等周不等式》, Birkh¨auser/施普林格，Cham，2023。[60] A. Savo, 《黎曼流形上 Robin 拉普拉斯算子的最优特征值估计》, 《微分方程杂志》268 (2020)，2280–2308。[61] K. Schm¨udgen, 《希尔伯特空间上的无界自伴算子》, 施普林格，Dordrecht，2012。[62] V. Schroeder 和 M. Strake, 《非负 Ricci 曲率与截面曲率流形中凸区域的刚性》, 《赫尔维蒂数学评论》64 (1989)，173–186。[63] G. Szeg˝o, 《关于给定面积膜的某些特征值的不等式》, 《有理力学分析杂志》3 (1954)，343–356。[64] R. Walter, 《测地凸集的一些解析性质》, 《汉堡大学数学研讨会论文集》45 (1976)，263–282。[65] H. F. Weinberger, 《关于 N维自由膜问题的一个等周不等式》, 《有理力学分析杂志》5 (1956)，633–636。

(A. Celentano) “R. Caccioppoli”数学与应用系，那不勒斯费德里科二世大学，琴蒂亚街，圣安杰洛山大学校园，80126 那不勒斯，意大利

电子邮件地址： antonio.celentano2@unina.it

（lKrejˇciˇr´ık）数学系，核科学与物理工程学院，布拉格捷克理工大学，特罗亚诺瓦街13号，120 00，布拉格，捷克共和国电子邮件地址： david.krejcirik@fjfi.cvut.cz

（V. Lotoreichik）捷克科学院理论物理系、核物理研究所，25068 ˇReˇz，捷克共和国电子邮件地址：lotoreichik@ujf.cas.cz