arXiv:2601.10346v1 [math.RT] 15 Jan 2026

特征无关的伽罗瓦环与广义魏尔代数

˜JOAO SCHWARZ

谨以此文献给 *Fl´avia* 和 *Lais*。

Abstract. 本文从零开始，建立任意域上的伽罗瓦环与伽罗瓦序理论。我们的方法与文献中的其他方法不同，因为不需要非模性假设。我们证明，当底域代数闭时，V. Futorny 和 S. Ovsienko 关于伽罗瓦序表示论的主定理有一个对应版本。随后，我们发展了无限秩广义魏尔代数理论；此前文献中从未明确引入过这一理论，并证明了它的基本性质。我们预计，它们的表示论将为未来的研究带来启发。最后，我们证明，在非常宽松的假设下，广义魏尔代数在非例外不可约复反射群作用下的不变量构成主伽罗瓦序；这一结果以初等方式大幅推广了此前针对魏尔代数得到的结果，

1. Introduction

一种统一经典 Harish-Chandra 模表示论的抽象框架 [Dix66，第 9] [Jan83，第 6]，Gelfand-Tsetlin 模，适用于 $\mathfrak{gl}_n$ [DOF91]，以及广义魏尔代数的广义权模 [Bav92] 中提出[DFO94]。该文提出了结合代数 A 相对于某个子代数 Γ的*Harish-Chandra* 子代数 的抽象 Harish-Chandra 模概念。关于后续进展，参见 [Fil24], [FH25], [Sch25b]。

这一理论的一个衍生分支，涉及以下情形： Γ 为交换的，且 A 经 $\Gamma^{\times}$局部化后嵌入某个适当的斜（幺半群）群环。这就是伽罗瓦环与伽罗瓦序理论，由 V. Futorny 和 S. Ovsienko 在论文 [FO10] 和 [FO14]中发展起来。对这一理论作出重要贡献的还有以下著作： [Har20], ， 该文引入了主伽罗瓦序和典范 Harish-Chandra 模的概念； [Web24], ， 该文引入了旗序的概念，揭示了这一理论与超对称量子场论之间的深刻联系；以及 [Har23], ， 该文将原有框架推广为

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：16G99 16W22 次要分类：16P40 16S85。
Key words and phrases. Harish-Chandra 模、伽罗瓦环与阶、广义魏尔代数、非交换不变量理论。

以与霍普夫代数的积压积取代斜群环，并允许任意基域。[1] 关于结构理论和表示论的进一步发展，可见 [EFOS17], [FS20b], [Har24], [Jau21], [Jau22], [MV21], [FGRZ20], [KWWY24],[FHJS25]。

在 [Har23] 中，明确展示了为定义在素特征域上的伽罗瓦环建立良好表示论的可能性。特别地，伽罗瓦序理论的主定理（参见 [FO14，主定理]）对**主**伽罗瓦序成立，这正是我们所谓的非模情形 [Har23，推论 5。7]本文的主要目的，是去除非模性假设，并将 [Har23] 中的结果推广到模情形以及原始意义下的伽罗瓦序 [FO14]。我们指出，从环的结构理论角度看，这类推广已在 [FHJS25]中完成。

在第 2 节进行一些预备工作后，第 3 节讨论在˜Har [的术语和记号23] 中所称的球面伽罗瓦序，其中 $\mathcal{H}$ 是一个幺半群环k$\mathcal{M}$。我们从头发展这一理论，遵循 [FO10] 和 [Har20], 的做法，但省略部分证明。我们的主要任务是证明， [Har23]中的结果在模情形下同样成立（参见定义3.3）。为明确说明我们可以在任意域上工作，我们简化了文献中的论述。本节的主要结果，是广义化 [Jau22] 中所证明的事实：在 [Har20], 的框架下，两个定义在零特征代数闭域上的主伽罗瓦序的张量积仍是主伽罗瓦序。我们的推广见定理3.19。

第 4 节致力于证明伽罗瓦序理论主定理，该定理适用于模的、未必是主的伽罗瓦序，是对 [Har23推论 5 的推广。7], 定理4.12。我们沿用 [FO10] [FO14]。

在第 5 节中，我们解决了伽罗瓦序理论中的一个重要开放问题（见 [Sch25b]），并给出了一个非主伽罗瓦序的简单例子。正如[FS20a] 和 [FSS21], 所指出的，$(L * \mathcal{M})^{W}$ 中的大多数伽罗瓦环都具有 L，且 K 是有理的，而 $\mathcal{M} \simeq \mathbb{Z}^n$。我们基于椭圆曲线理论给出一个例子，其中这些性质均不成立（命题5.5），并将 [Har20] 中的有理伽罗瓦序概念推广为所谓的线性代数伽罗瓦环概念（定义5.6）；当线性代数群是有限维向量空间时，我们便得到 Hartwig 的概念。我们证明， [FH14] 和 [FS19] 中研究的伽罗瓦环，在相应的线性代数群为环面时，都是这一新概念的例子。

在第6节中，我们发展了 [Sch25b], 中引入的无限次数广义魏尔代数的概念。不同之处在于，本文将序数而非基数作为广义魏尔代数的次数。我们的主要技术工具是定理6.8。借助这一工具，我们在定理6.9中得到了无限秩次数广义魏尔代数的单性判据，并在推论6.11中给出了它们成为 Ore 整环的条件。我们证明了一个嵌入到斜群环中的结果，这让人想起 [FS20b的命题 13], ，见定理6.13。然而，由于我们考虑的是无限次数广义魏尔代数和非交换基环，证明要困难得多（参见定理6.12）。本节最后给出一个双有理分类

[1] 在 [FO10] [FO14] 原始设定中，基域被假设为代数闭且为零特征。

关于单变量多项式环上的次数为 1 的广义魏尔代数（推论6.15）。

在第 7 节中，我们证明，在 Shephard-Todd 群 $G(n,\ p,\ m)$ 的作用下，基环为代数闭域上的零特征仿射整环时，广义魏尔代数的不变环是主伽罗瓦序；并由此为经典与量子广义魏尔代数得到非交换 Noether 问题 [AD06] 及其 q-变形 [FH14]的一个类比版本。本文的阐述改进了 [Sch25b]中的相关内容。我们还讨论了关于 Harish-Chandra 子代数的自由性结果。

2. Preliminaries

本节汇集了 [DFO94], 中关于 Harish-Chandra 子代数与模的抽象理论的基本事实，并证明了一些关于环的归纳极限的简单结果（这些结果可能广为人知），同时给出若干应用。

2.1. **DFO 框架回顾**。

本小节回顾 [DFO94], 中进一步研究的 [Fil24], [FH25], [Sch25b]中的基本定义。

设 U 为结合代数，Γ 为子代数。我们用 cfs Γ 表示其余有限谱：即满足 $\Gamma/\mathfrak{m}$ 为有限维的极大理想 $\mathfrak{m}$ 的集合。若 $\mathfrak{m}$ 是这样的理想，则根据 Wedderburn-Artin 理论，$\Gamma/\mathfrak{m}$ 是有限维除 k-代数上的矩阵环，因此有唯一的简单模 $S_{\mathfrak{m}}$。

在 [DFO94], 中，考察了 Γ 的两个重要性质：称其为拟中心和拟交换。

定义 2.1。 [DFO94] Γ 称为 U 中的拟中心代数，如果对每个 $u \in U$，Γ-双模$\Gamma u\Gamma$ 都是有限生成的左、右 Γ-模。

定义 2.2。 [DFO94] Γ 称为拟交换代数，如果对于不同的 $\mathfrak{m}$、$\mathfrak{n} \in \mathrm{cfs}(\Gamma)$，$\mathrm{Ext}^1(S_{\mathfrak{m}}, S_{\mathfrak{n}}) = 0$。

定义 2.3. [DFO94]若有一个代数 U 及一个子代数 Γ同时满足拟中心和拟交换性质，则 Γ 称为 *Harish-Chandra* 子代数。

Harish-Chandra 子代数对表示论至关重要 [DFO94] [Fil24] [FH25][FO14] [Har23], [Web24], [KWWY24], [Sch25b]。在伽罗瓦环的框架下，由于 Γ总是交换的，因此只需检验其是否拟中心。

为验证一个代数是否拟中心，我们有以下有用的一般性结果 .

定理 2.4. 设 $\Gamma \subset \Lambda$ 为两个结合代数，其中 Γ 是诺特的，且 Λ 是一个有限生成的左、右 Γ-模。设 A为一个结合代数，包含 Λ的一个局部化，记为 L；并且作为代数由 L 和 X生成，其中每个 $X \in X$ 都满足$X\Gamma(\Gamma X) \subset \Lambda X$ $(X\Lambda)$。最后，假设 $\Lambda\Gamma = \Gamma\Lambda$ 属于 A。那么 Γ 是 A的一个拟中心子代数。*</output>*

证明。 对任意 $a,\ b \in A$, $\Gamma(a+b)\Gamma = \Gamma a\Gamma + \Gamma b\Gamma$，以及 $\Gamma ab\Gamma \subset (\Gamma a\Gamma)(\Gamma b\Gamma)$。因此，由于 Γ 是诺特的，只需证明 $\Gamma a\Gamma$是有限生成的左、右 Γ 模

$a \in L \cup X$。若 $a \in L$，由于 $\Gamma\Lambda = \Lambda\Gamma$ 和 $L = \Lambda_{S^{-1}}(_{S^{-1}}\Lambda)$，$\Gamma a\Gamma = \Gamma a = a\Gamma$，故结论成立。若 $a = X \in X$，$\Gamma X\Gamma \subset \Lambda X$。由于 Γ 是诺特的，且 Λ 是有限生成的左 Γ-模，因此 ΛX也是如此，因为它是 Λ的一个同态像。同样，由于 Γ 是诺特的，且 $\Gamma X\Gamma$ 是 ΛX的一个子模，它也是有限生成的左 Γ-模。类似地可得，$\Gamma X\Gamma$是有限生成的右 Γ-模。因此，Γ是拟中心的。□

命题 2.5. 设 Γ 是代数 A 的子代数，并假设 A 由一族元素 $\{a_i\}_{i\in I}$ 生成，且对每个 a_i，都有 $\Gamma a_i = a_i\Gamma$。那么 Γ 是拟中心子代数。

证明. 设 $b_1b_2\dots b_k$ 是若干个 a_i 的乘积。那么 $\Gamma b_1b_2\dots b_k = b_1b_2\dots b_k\Gamma$。此外，若 x，$y \in A$ 满足 $\Gamma x = x\Gamma$ 和 $\Gamma y = y\Gamma$，则 $\Gamma(x+y) = (x+y)\Gamma$。因此得证。□

2.2. **环的归纳极限**。本小节汇集了一些关于环的归纳极限的结果。这些结果可能广为人知，但我们未能找到合适的参考文献加以引用。

回忆一下，（向上）有向集是一个偏序集 $\mathcal{I}$，它具有这样的性质：对每个 i，$j \in \mathcal{I}$，都存在一个 $k \in I$ 使得 $k \geq i$，j。以 $\mathcal{I}$ 为指标的环的直接系统，是由一族以 $i \in I$为指标的环R_i 以及连接态射 f_{ij}：$R_i \to R_j$（对 $j \geq i$）组成的，其中 $f_{ii} = \mathrm{Id}$，且对 $k \geq j \geq i$有 $f_{ik} = f_{jk}.\circ f_{ij}$。如果每个 f_{ij} 都是单射，我们就称该有向系统为单射的。

环 $R = \lim_{\longrightarrow i\in\mathcal{I}} R_i$ 可具体描述为 $\bigsqcup_{i\in\mathcal{I}} R_i/\sim$，其中 $a \in R_i$和 $b \in R_j$ 满足以下关系 $\sim$ 当且仅当存在一个 $k \geq i$，j 使得 $f_{ki}(a) = f_{kj}(b)$；加法和乘法按通常方式定义（参见 [Mat86，附录 A]）。我们将某个 $a \in R_i$ 的等价类记为 $[a]$。

对于每个 $i \in \mathcal{I}$ 和 $a \in R_i$，考虑环态射 ϕ_i：$R_i \to R$、$a \mapsto [a]$。于是 $\phi_i(r_i) = \phi_j(f_{ij}(r_i))$ i，$j \in \mathcal{I}$，$j \geq i$，$r_i \in R_i$。这些称为典范态射。

最后，我们有如下泛性质：若有一个环 B，并且对每个 $i \in \mathcal{I}$ 有态射 ψ_i：$R_i \to B$，其满足 $j \geq i$、$\psi_i = \psi_j \circ f_{ij}$，那么存在唯一的态射 ψ：$R \to B$，使得对每个 $i \in \mathcal{I}$ 都有 $\psi_i = \psi \circ \phi_i$。

命题 2.6。考虑一个环的单射有向系统 R_i 及其归纳极限 $R = \lim_{\longrightarrow i\in\mathcal{I}} R_i$。

(1) 如果每个 R_i 都是整环，那么 R 也是整环。*(2)* 如果每个 R_i 都是单环，那么 R 也是单环。*(3)* 如果每个 R_i 都是 *Ore* 整环，那么 R 也是 *Ore* 整环，并且 分式域 $R = \lim_{\longrightarrow i\in\mathcal{I}}$分式域 R_i

证明。对于每个 $i \in \mathcal{I}$ 和 $a \in R_i$，考虑典范态射 ϕ_i：$R_i \to R$, $a \mapsto [a]$。我们声称 ϕ_i 是单射。事实上，若有 $[a] = [0]$，其中某个 $j \geq i$，则有$f_{ij}(a) = 0$；但 f_{ij} 是单射，因此可推出 $a = 0$。将 R_i 与其在 R中经由ϕ_i 得到的像相认，我们可以写成 $R = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} R_i$[2]。现在假设每个 R_i 都是整环。令 a, b 属于 R。那么 $a \in R_i$和 $b \in R_j$，且存在 $k \geq i, j$，使得 $a, b \in R_k$。若 a，$b \neq 0$，则$ab \in R_k$ 也非零。因此 R 是整环。对于 (2)，假设每个 R_i 都是单环。若

[2]对于环的单射归纳极限，我们将经常采用这种记号约定：$R = \lim_{\longrightarrow i\in\mathcal{I}} R_i = \bigcup R_i$，通常不再加以说明。

$I \lhd R$ 非零，我们必须证明 $R = I$。由于 $R = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} R_i$，对某个 j，有 $I \cap R_j \neq (0)$。因为 R_j 是单环，所以 $I \cap R_j = R_j$。这意味着 $1 \in I$，因此 $I = R$。最后，假设每个R_i都是 Ore 整环。由 (1) 可知 R 是整环。令 $s \in R^\times$ 和 $r \in R$。我们必须找到 $r' \in R$ 和 $s' \in R^\times$，使得 $rs' = sr'$ ——左 Ore 条件同理。但存在一个 j，使得 $r,\ s \in R_j$，因此根据假设，我们可以在R_j中找到所需的 $r',\ s'$。为了证明 $\operatorname{Frac} R = \varinjlim_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{Frac} R_i$，我们首先指出，逆极限除环是除环，这可由与 (1) 的证明类似的论证得到。最后，显然每个 $rs^{-1} \in \operatorname{Frac} R$都已属于某个合适的 $j \in \mathcal{I}$对应的 $\operatorname{Frac} R_j$，因此得证。□

由此我们将得到一个适用于任意特征的非交换 Noether 问题的版本（参见[AD06],），针对无限对称群。 [Sch25a]。

定义 2.7。设 $W_n(\mathsf{k})$ 为秩为任意的魏尔代数。给定自然嵌入链 $W_1(\mathsf{k}) \hookrightarrow W_2(\mathsf{k}) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow W_n(\mathsf{k}) \hookrightarrow \ldots$，定义 $W_\omega(\mathsf{k}) = \varinjlim W_n(\mathsf{k})$。

当k 的特征为零时， $W_\omega(\mathsf{k})$ 的表示论已在[BBF04]和 [FGM14]中研究。

定理 2.8。设 $W_\omega(\mathsf{k}) = \mathsf{k}\langle x_1, x_1, \ldots, y_1, y_2, \ldots\rangle$，并设 S_ω 为 $\mathbb{N}^\times$ 上所有仅固定有限多个元素的置换构成的子群。那么 分式域$W_\omega(\mathsf{k})^{S_\omega}$ =分式域$W_\omega(\mathsf{k})$；若 k 的特征 $= 0$ 且域任意，或者若 k 的特征 $= p > 0$ 且 k 为代数闭域。

证明。 根据命题 2.6(3) 以及 [FS20a，定理 1。1] 适用于特征 0 的情形，而 [Sch25a，推论 1。4] 适用于素特征的情形。 □

2.3. **和非交换不变量理论**。 我们仅回顾非交换不变量理论中的一个重要结果。它是诺特关于仿射交换代数不变量的著名定理的非交换类比。

定理 2.9。 设 R 是一个有限生成的诺特 k-代数。若 G是 R 的有限自同构群，且 $|G|^{-1} \in \mathsf{k}$，则 R^G 是一个有限生成的 k-代数， R^G 是诺特的，并且 R 是一个有限生成的 R^G-模。

证明。 第一个断言的证明见 [MS81], 第二个断言的证明见 [Mon80，推论 1。12], 第三个断言的证明见 [Mon80，推论 5。9]。 □

3. Characteristic free Galois rings

˜本文的第一部分旨在简化以下情形下 [Har23] 的设定： $\mathcal{H}$ 是 k Aut Λ，且 $\mathcal{H}$ 是 k $\mathcal{M}$，其中 $\mathcal{M}$ 是 Aut 的子幺半群 Λ（并且 Λ 是诺特整环，且 k-代数）。我们的方法有一个主要区别：与 [Har23]，不同，我们不必假设伽罗瓦环是非模的（参见定义 3.3）。

定义 3.1。 [Har23] A旗环设定 由一个诺特 k-代数 Λ 构成，该代数是一个整环，并且 $\mathcal{M}$ 是 Aut $_{\mathsf{k}}\Lambda$的一个子幺半群。我们将这样的设定记为 $(\Lambda, \mathcal{M})$。一个 伽罗瓦环设定 是一个元组 $(\Lambda, \mathcal{M}, W)$，其中 $(\Lambda, \mathcal{M})$ 是一个旗环设定，且 W是一个

$\mathrm{Aut}_{\mathsf{k}}\,\Lambda$ 的有限子群，通过共轭作用于 $\mathcal{M}$，具有有限多个轨道，并且 $\mathcal{M}$ 是分离的，也就是说，$\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1}\cap W=\{e\}$。如果 $|W|^{-1}$ 属于 k，我们称该伽罗瓦环设定为非模的。

令 $L=\mathrm{Frac}\,\Lambda$ 和 $\mathcal{L}=L*\mathcal{M}$ 为斜幺半群环 $L\rtimes\mathsf{k}\mathcal{M}$。对于 $X\in\mathcal{L}$，$l\in L$，定义 $X(l):=\sum_{\mu\in\mathcal{M}}l_\mu\mu(l)$，若 $X=\sum_{\mu\in\mathcal{M}}l_\mu\mu$, $l_\mu\in L$ $\mu\in\mathcal{M}$。

定义 3.2。 [Web24] 给定一个旗环设定（Λ，$\mathcal{M}$），关于此设定的伽罗瓦旗环是一个子代数 F，它属于 $\mathcal{L}$ 并满足

(1) $\Lambda\subset F$ 和 (2) $LF=\mathcal{L}$。(3) 此外，若对任意 $X\in F$, $X(\Lambda)\subset\Lambda$，我们有一个主伽罗瓦旗序。

若（Λ，$\mathcal{M}$，W）是一个伽罗瓦环设定，则定义 $\mathcal{K}:=\mathcal{L}^W$, $\Gamma:=\Lambda^W$, $K=$分式域 $\Gamma=L^W$；因此扩张 L/K 是伽罗瓦扩张，且 $\mathrm{Gal}(L/K)=W$。

定义 3.3。 [FO10]

设 $(\Lambda,\ \mathcal{M},\ W)$ 为一个伽罗瓦环设定。相对于此设定的一个伽罗瓦环 是一个结合代数 U，满足（使用上述记号）：

(1) Λ 是一个诺特 Γ-模 (2) $\Gamma\subset U$；(3) $KU=\mathcal{K}$；(4) 如果进一步对于每个 $X\in U$，$X(\Gamma)\subset\Gamma$，则称其为一个主伽罗瓦序。

如果 $X\in U$ 等于 $X=\sum_{\mu\in\mathcal{M}}l_\mu\mu$，$l_\mu\in L$，则满足 $l_\mu\neq 0$ 的 μ 的集合称为 X 的支集，记作 $\mathrm{supp}\,X$。

推论 3.4。 使用上述定义中的记号，Γ 是一个诺特环 g.

证明。 这是 Eakin-Nagata 定理 [Mat86，定理 3.7(i)
] □的直接推论

本文不讨论伽罗瓦旗环，因为这方面已在 [Web24] [Har23], 中得到深入研究，因此我们将聚焦于伽罗瓦环。

对于非模伽罗瓦环情形，由定理 Λ 可知 Λ^W是一个诺特2.9-模，因此定义3.3 的第（1）项自动满足。若 Λ 是一个仿射k-代数，则无需要求 $|W|\in\mathsf{k}^\times$：由不变理论中的诺特定理可知，Λ 是一个有限 Λ^W-模，而 Λ^W 是一个仿射代数，因而是诺特代数（[Dol03，定理 3.1]）。

在 [Har23] 中，假设伽罗瓦环设定始终是非模的。我们将证明，许多重要结果——即 [FO10] 和 [Har20], 中的相应结果——在不作此假设的情况下仍然成立。许多论证借鉴了这些文献，因此我们努力使证明比原始文献中的表述更加清晰。

对于 $\mu\in\mathcal{M}$，记为 $W_\mu=\{w\in W|w.\mu=\mu\}$。若 $a\in L^{W_\mu}$，定义 $[a\mu]\in\mathcal{K}$ 为 $\sum_{w\in W/W_\mu}w(a)w.\mu$，其中该和显然不依赖于陪集代表元的选取。

命题 3.5。设 μ，ν 属于 $\mathcal{M}$。

(1) $K\mu(K) = L^{W_\mu}$；*(2)* $K\mu K = \{[a\mu]|a \in L^{W_\mu}\}$，且这是一个单 K-双模；*(3)* $\Gamma[\mu]K = K[\mu]\Gamma = K[\mu]K$，因此对任意子Γ-双模 $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}$，都有 $K\mathcal{V} = \mathcal{V}K$。*(4)* 我们将 $\mathcal{K}$ 分解为单 K-双模 $\mathcal{K} = \bigoplus_{\mu\mathcal{M}/W} K[\mu]K$的有限直和。

证明。 (1) 对于 $w \in W$， $w \in \mathrm{Gal}(L/K\mu(K))$当且仅当 w 同时固定 K 和 $\mu(K)$，这当且仅当 $w.(\mu)|_K = \mu|_k$，或者等价地，若$(w\mu w^{-1})\mu^{-1} \in W$。根据分离假设，这当且仅当 $w \in W_\mu$。

（2）对任意 $a \in L^{W_\mu}$, $K[a\mu]K = [K\mu(K)a\mu] = [L^{W_\mu}a\mu]$，由条目（1）可得。

（3） L 的每个元素在 K 上都是代数的，因此对每个 $\gamma \in \Gamma$， $\mu(\gamma)$ 在 K 上都是代数的。于是 $\mu(\gamma)^{-1} \in K[\mu(\gamma)]$, ，进而 $K\mu(\Gamma) = K\mu(K)$。结论现由（1）和（2）得出。

（4）任取 $y \in \mathcal{K}$， $y = \sum_{\mu\in\mathcal{M}} l_\mu\mu$。由于 y 被 W 固定，对群中的每个元素 w，$l_\mu = l_{w.\mu}$。将各项按 $\mathcal{M}$ 中的 W-轨道分组，即得结论。□

推论 3.6。若 U 是 $\mathcal{K}$中的一个 Γ-伽罗瓦环，且 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{L}$的任意 Γ-子双模，则$\Gamma\mathcal{V}K = K\mathcal{V}\Gamma = K\mathcal{V}K$。此外，我们还有 $UK = KU = \mathcal{K}$。

证明。 由命题 3.5(3)即可立即得到一切。 □

命题 3.7。设 $\mathfrak{X} \subset \mathcal{K}$，并令 U 为由 U 和 $\mathfrak{X}$ 生成的 $\mathcal{K}$ 的子环。那么，U 是一个伽罗瓦 Γ-环，当且仅当 $\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}$支集$x$ 生成 $\mathcal{M}$ 作为幺半群。

证明。必要性显然，因为若 x，则 $\mathrm{supp}(xy) \subset \mathrm{supp}(x)\mathrm{supp}(y)$。对于充分性，由命题 3.5(3)(4) 可知，只需证明若 $x \in \mathfrak{X}$ 且 $\mu \in \mathrm{supp}\, x$，则 $[\mu] \in KxK$。我们可以将 $x = \sum_{\mu\in\mathcal{M}/W}[a_\mu\mu]$ 写成某些 $a_\mu \in L^{W_\mu}$。根据命题 3.5(1)(2), $KxK \subset \sum_{\mu\in\mathcal{M}/W} K[\mu]K = \bigoplus_{\mu\in\mathcal{M}/W} K[\mu]K$。由于对任意 $\mu \in \mathrm{supp}\, x$，又因 $K[\mu]K$ 是一个单 K-双模，我们必有 $KxK \cap K[\mu]K = K[\mu]K$，由此证明完毕。□

定义 3.8。 [FO10] 假设对于每个有限维左或右 K-向量子空间 V 的 $\mathcal{K}$， $U \cap V$ 都是有限生成的左、右 Γ-模。则伽罗瓦Γ-环 U 称为一个伽罗瓦序。

下一个结果当然是术语保持一致所必需的：

定理 3.9。 如果 U 是 $\mathcal{K} = \mathcal{L}^W$中的一个主 Γ-序，那么 U 是一个伽罗瓦序 r.

证明。 LV 是 $\mathcal{L}$上的有限维左/右向量空间。如果 $LV \cap U$ 是一个有限生成的 Γ-模，由于 Γ 是诺特的， $V \cap U$也是诺特的。因此，只需证明对于 $\mathcal{L}$中的每个有限维 L 向量空间 V， $V \cap U$ 是一个有限生成的 Γ-模。由于对于 $\mu \in \mathcal{M}$, $L\mu = \mu L$，该条件具有左右对称性。由于 Γ 是诺特的，不妨设 $V = \oplus_{i=1}^n L\mu_i$， $\mu_i \in \mathcal{M}$。

定义一个 Γ-双模同态 ϕ: $U \cap V \to L^n$, $\sum_{i=1}^n l_i\mu_i \mapsto (l_1, \ldots, l_n)$，其中我们将 L^n 视为双模，其作用为 $\gamma_1(l_1, \ldots, l_n)\gamma_2 = (\gamma_1 l_1\mu_1(\gamma_2) \ldots, \gamma_1 l_n\mu_1(\gamma_2))$。如果 $(a_1, \ldots, a_n)$

属于 ϕ 的像，由于 U 是主伽罗瓦序，$\sum a_i\mu_i(\gamma) \in \Gamma, \forall\gamma \in \Gamma$。根据[Har20，引理 2.17(ii)] 以及定义 3.1 中的分离条件，存在 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$，定义一个 $n \times n$ 矩阵 $A = (\mu_i(\gamma_j))$，我们有 $d = \det A \neq 0$。因此，若令 $a = (a_1, \ldots, a_n)$，$A.a = \bar{\gamma}$，其中 $\bar{\gamma} \in \Gamma^n$。$A$ 的伴随矩阵 A^* 满足$A^*A = d\mathrm{Id}_n, d \neq 0$，故 $d.a = A^*\bar{\gamma}$，进而 $a \in (1/d)\Lambda^n$。也就是说，ϕ 的像包含于 $(1/d)\Lambda^n$，对于本证明中引入的双模结构，它是有限生成的左、右 Γ-模。由于 Γ 是诺特的，我们最终得到 $U \cap V$ 是有限生成的左、右 Γ-模。□

我们有如下伽罗瓦序的重要刻画：

定义 3.10。设 U 是一个伽罗瓦 Γ环。设 $M \subset U$ 是有限生成的左、右 Γ-模，并且 $D^r(M)$ 是满足存在 $\gamma \in \Gamma^\times$ 使得$\gamma u \in M$的所有 $u \in U$ 的集合，而 $D^l(M)$ 是满足对某个 $\delta \in \Gamma^\times$ $u\delta \in M$ 有 $u \in U$ 的所有元素的集合

命题 3.11。设 U 是一个伽罗瓦 Γ环。那么，U 是伽罗瓦 Γ序，当且仅当$D^r(U)$是有限生成的右 Γ-模，并且 $D^l(U)$是有限生成的 Γ-模。

证明。由对称性，我们只证明右侧的情形。关键在于证明，对于右 Γ-模 $M \subset U$，$D^r(M) = MK \cap U$。若 $u \in D^r(M)$，则对某个 $\gamma \in \Gamma^\times$，有$u\gamma = v, v \in M$。因此 $u = v\gamma^{-1} \in MK$，从而 $D^r(M) \subset MK \cap U$。若 $u \in U$ 属于MK，可设其形式为 $v\gamma^{-1}$，其中某个 $v \in M$，$\gamma \in \Gamma^\times$。但于是 $u\gamma \in M$，从而 $u \in D^r(M)$，因此 $D^r(M) = MK \cap U$。现在由伽罗瓦序的定义即可得出结论。□

推论 3.12. 若伽罗瓦 Γ-环 U 是投射的 Γ-模，则 U 是伽罗瓦序。

证明。若 U是投射的，则存在某个 Γ-模 V，使得 $V \oplus U \simeq \bigoplus_{\mathcal{I}} \Gamma$。令 M为 U的一个有限生成 Γ-子模。则存在某个有限子集 $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$，使得 $M \subset \bigoplus_{\mathcal{I}_0} \Gamma$。令 $\mathbb{D}^r$为满足存在 $\gamma \in \Gamma^\times$ 使得 $v\gamma \in M$的所有 $v \in \bigoplus_{\mathcal{I}_0} \Gamma$ 构成的集合；类似地，$\mathbb{D}^l$。$D^r(M) \subset \mathbb{D}^r \subset \bigoplus_{\mathcal{I}_0} \Gamma$。由于较大的模是有限生成的 Γ-模，因此 $D^r(U)$ 也是如此。类似地，$D^l(U)$ 是有限生成的。因此，由前一个命题可知，U 是伽罗瓦序。□

以下判据是新的。

推论 3.13. 若 U 是有限生成平坦的 Γ-模，U 是一个伽罗瓦序。

证明。由于 Γ 是诺特的，U 是有限表示模，且它也是平坦的，因此它是投射的([Row88，练习 2.11。8])。□

在 [Har23] 中已证明，对于非模的主伽罗瓦 Γ序，Γ是极大的（相对于包含映射而言）交换子代数。现在我们证明，该结论在不作非模性假设时仍然成立。

引理 3.14. 设 U 是一个主 *Galois* Γ-序。设 $U_- := \{X \in U | X(1_\Gamma) = 0\}$。则$U_-$ 是 U 和 $U = \Gamma \oplus U_-$的 Γ-子模。

证明。若 $X \in U$，记 Y为 $X - X(1_\Gamma)$。 $Y(1_\Gamma)$=0，因此每个 $X \in U$都可分解为$X(1_\Gamma)$ +$(X - X(1_\Gamma))$ $\in \Gamma + U_-$。又有 $\Gamma \cap U_- = 0$，因为 $0 \neq \gamma \in \Gamma$ 在 1_Γ上不是零算子，而 $X \in U_-$ 的作用为零。

□

命题 3.15. 设 U 是主伽罗瓦 Γ序。那么， Γ 是 U的极大交换子代数。

证明。 我们将使用上述引理。设 $X \in U$ 和 $Y = X - X(1_\Gamma)$。若对所有 $\gamma \in \Gamma$都有 $X\gamma = \gamma X$ ，则只需证明这蕴含 $Y = 0$。

$$Ya = X(a) - X(1_\Gamma)a = [Xa - aX](1_\Gamma) = 0.$$

□

在讨论广义魏尔代数的不变环时，我们将频繁用到下面的命题。

命题 3.16. 我们有：

(1) 设 U 是主伽罗瓦 Γ序，且 G 是 U的有限自同构群，使得 $G(\Gamma) \subset \Gamma$。若 U^G是 Γ^G上的伽罗瓦环，则 U^G是主伽罗瓦序。*(2)* 设 U 是结合代数， $\Gamma \subset U$ 是仿射交换子代数。设G 是 U 的有限自同构群，使得 $G(\Gamma) \subset \Gamma$。若 U 是投射的Γ-模，且 Γ 是投射的 Γ^G-模，则 U^G 是投射的 Γ^G-模。

证明。 (1)：由于 $U^G \subset U$且后者是主伽罗瓦序，因此 $U^G(\Gamma) \subset \Gamma$。另一方面，根据 [Har20，引理 2。19]， $U^G(K^G) \subset K^G$。因此结论成立。(2) 的证明与 [FS20b，引理 11] 相同。 □

命题 3.17。 如果 U 是一个主伽罗瓦 Γ-环，那么 Γ 是一个 *Harish-Chandra* 子代数。

证明。 首先注意到，正如 $\Gamma \subset U \subset \mathcal{L}$，如果 Γ 是 $\mathcal{L}$的 Harish-Chandra 子代数，那么它也是 U的 Harish-Chandra 子代数。为了证明 Γ 是 $\mathcal{L}$的 Harish-Chandra 子代数，应用定理 2.4，其中 $A = \mathcal{L}$ 且 $\mathsf{X} = \mathcal{M}$。 □

如果 U 不是主伽罗瓦序，下面的命题将说明 Γ 何时是 Harish-Chandra 子代数，以及这一概念与 U 为伽罗瓦序的关系。

命题 3.18. 设 U 是一个 *Galois* Γ-环，其中 Γ 是一个仿射 k-代数，且其分式域 Γ 上的整闭包为 $\bar{}$。那么，当且仅当$_-$ $_-\mu\Gamma = \Gamma$ 对任意 $\mu \in \mathcal{M}$成立时， Γ是一个 *Harish-Chandra* 子代数。特别地，若 U 是一个 *Galois* Γ-阶，则 Γ 是一个 *Harish-Chandra* 子代数。

证明。 在我们的情形下， [FO10，命题 5.1、推论 5.4] 中的证明同样成立。 □

下述定理改进了 [Jau22，推论 37]。

定理 3.19。设 U_i 是 $(L_i * \mathcal{M}_i)^{W_i}$ 中的一个伽罗瓦 Γ_i-环，其中 Λ_i 是代数闭域 k 上的仿射代数，$i = 1, 2$。则 $U := U_1 \otimes U_2$ 是 $(L * \mathcal{M})^W$ 中的伽罗瓦 $\Gamma := \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$-环，$L =$分式域 $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$，$W = W_1 \times W_2$，$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$。若 U_i 是伽罗瓦序$i = 1, 2$，则 $U_1 \otimes U_2$ 是伽罗瓦序。若 U_i 是主伽罗瓦序，则 $U_1 \otimes U_2$ 也是主伽罗瓦序。

证明。关键的观察是，在这些条件下，$\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ 是一个整环[3]，而且也是仿射的，因此是诺特的。于是，第一个断言由 [FO10，定理 42]，以相同的证明得到。对于第二个断言，设 V是 (K) 中的一个有限维$L*\mathcal{M}$-向量空间^W。若 $LV \cap U$ 是一个有限生成的 Γ-模，由于 Γ 是诺特的，其子模 $V \cap U$也是有限生成的 Γ-模。不失一般性，我们可以假设 $LV = \bigoplus_{i=1}^{s} L\mu_i\nu_i$ 对某个 $\mu_i \in \mathcal{M}_1$，$\nu_i \in \mathcal{M}_2$，且 $s \in \mathbb{N}$。我们有

$$U \hookrightarrow L_1 * \mathcal{M}_1 \otimes L_2 * \mathcal{M}_2 \simeq^f (L_1 \otimes L_2) * \mathcal{M} \hookrightarrow L * \mathcal{M}$$

因此 $LV \cap (L_1 * \mathcal{M}_1 \otimes L_2 * \mathcal{M}_2) \subset W_1 \otimes W_2$，其中 $W_1 = \bigoplus_{i=1}^{s} L_1\mu_i$, $W_2 = \bigoplus_{i=1}^{s} L_2\nu_i$。现在，$LV \cap U \subset (W_1 \cap U_1) \otimes (W_2 \cap U_2)$，并且由于每个 U_i都是一个 Γ_i-伽罗瓦序，每个 $W_i \cap U_i$ 都是有限生成的 Γ_i-模。因此 $W_1 \cap U_1 \otimes W_2 \cap U_2$ 是有限生成的 Γ-模；于是 $LV \cap U$也是如此，最终得到 $V \cap U$。

最后，若每个 U_i 都是主伽罗瓦 Γ_i-序，任取 $X \in U$。那么我们有$X = \sum Y_1^i \otimes Y_2^i$，其中每个 $Y_j^i \in U_j$, $j = 1, 2$。令 $\gamma_1 \otimes \gamma_2$ 为 $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ 的一个可分解张量。由于 $U \hookrightarrow L_1 * \mathcal{M}_1 \otimes L_2 * \mathcal{M}_2$，$X(\gamma_1 \otimes \gamma_2) = \sum Y_1^i(\gamma_1) \otimes Y_2^i(\gamma_2) \in \Gamma \otimes \Gamma \twoheadrightarrow {}^f\Gamma$。因此 $X(\Gamma) \subset \Gamma$，且 U 是一个主伽罗瓦序。□

4. Main theorem of Galois orders in prime characteristic

设 U 为一个结合代数，Γ 为一个交换 Harish-Chandra 子代数，m 为 Γ的余有限谱中的一个极大理想。一般而言，我们将在U 为伽罗瓦 Γ-序的情形下进行讨论。

定义 4.1. 对于这对 (U, Γ)，哈里什-钱德拉模是一个有限生成的 U-模，其中 Γ 局部有限作用；或者，等价地，我们有如下分解

$$M = \bigoplus_{\mathfrak{n} \in \operatorname{SpecMax}\Gamma} M^{\mathfrak{n}},$$

其中 $M_{\mathfrak{n}} = \{v \in M | \mathfrak{n}^{N_v} v = 0, N_v \gg 0\}$.

我们用 $\mathbb{HC}(U, \Gamma)$ 表示哈里什-钱德拉模范畴。给定一个 M 哈里什-钱德拉模，我们用 Supp M 表示 Γ 的极大理想 $\mathfrak{n}$ 的集合，使得 $M^{\mathfrak{n}} \neq 0$；若 dim $M^{\mathfrak{n}} < \infty$，则称此维数为 $\mathfrak{n}$ 的哈里什 - 钱德拉重数。

令不可约($\mathfrak{n}$) 表示不可约 Harish-钱德拉模 M 的$\mathfrak{n} \in$ 支集 M同构类集合。伽罗瓦序理论主定理[FO14主定理] 所要解决的主要问题是：(a) 对每个不可约($\mathfrak{n}$) 是否都非空？$\mathfrak{n} \in$ 极大谱 Γ中的？(b) 是否

[3]实际上，$\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ 是一个整环，只要其中一个 Λ_i 是可分的k-代数，且其中一个（可以是同一个）具有分式域 Λ_i 是k的纯扩张；根据 [Bou03，第五章，§ 17，命题 1]的推论，我们的定理在这个弱得多的假设下仍然成立。

|不可约(n)| 是有限的? (c) 若 $M \in$ 不可约(n)，它是否 M^n 有限维? Futorny 和 Ovsienko [FO14] 的主要结果表明，在一个较弱的技术假设下，这些关于伽罗瓦序的问题都有肯定解。

我们首先注意到，对于主伽罗瓦序，(a) 的答案是肯定的，这可以通过一个简单的论证得出。

定理 4.2. 设 U 是一个主 Γ伽罗瓦序。

(1) Γ 的每个极大理想 m 都包含在 U 的某个极大右理想 M 中。*(2)* 若 m $\in$ cfs Γ，则存在一个不可约 *Harish*-钱德拉 U°-模 M，使得 m 属于其支集。

证明。(1) 我们证明 mU 是 U 的一个真右理想，然后根据佐恩引理，可得极大右理想 M。我们有一个映射 $\phi: U \to \Gamma/\mathfrak{m}$，它是复合映射 $\theta \circ \psi$，由 $\psi: U \twoheadrightarrow \Gamma$ 给出，其中 $X \in U$ 映到 $X(1_\Gamma)$，而 $\theta: \Gamma \to \Gamma/\mathfrak{m}$ 是典范投影。映射 ϕ 是满射，且其核包含 mU。因此我们有一个满同态 $U/\mathfrak{m}U \to \Gamma/\mathfrak{m}$，故 m$U \neq U$。(2) $1+M \in$ M，其中 M $= U/M$，属于 M$^\mathfrak{m}$。由于 M 不可约且由一个广义权向量 $(1+M)$ 生成，[DFO94，命题 14] 蕴含 M 实际上是一个 Harish-钱德拉模。□

现在我们将在素特征下重新证明伽罗瓦序理论主定理。我们将紧密遵循 [FO10]，[FO14]中的论述，并力求对部分结果给出更清晰的阐述。

从现在起，假设 Λ 是仿射的，且k是代数闭域，并且 $\mathcal{M}$ 是一个群。另假设 Γ 是整闭的，这一假设在定理4.12的证明之前一直成立。

设 S 是 $\mathcal{M}$ 的一个 G-不变子集，且 $\mathcal{O}_i$，$i = 1$，……，k 是其轨道。我们引入 $U(S)$ $= \{u \in U |$支集 $u \subset S\}$，它是 U 的一个 Γ-双模。

引理 4.3。我们有 $D^r(U(S)) = U(S)$。对 D^l 也同样成立。

在下一个命题中，假设 Γ 是一个 Harish-Chandra 子代数。在此情形下，定义 f_S^r（f_S^l 也类似），它是 $\Gamma \otimes \Gamma$ 的一个元素，由下式给出

$$f_S^r = \prod_{s \in S} [f \otimes 1 - 1 \otimes s^{-1}(f)].$$

注意，f_S^r的系数必须属于 K。下一个命题讨论 f_S^r，但对于 f_S^l，我们也有一个显然的对称结果。

Pr命题 *4.4.* *(1)* 假设 $u \in U$。当且仅当对任意 $f \in \Gamma$，$u \in U(S)$ 当且仅当 $f_S^r u = 0$。*(2)* 若 $u \in U$ 且 $S^c =$支集 $u \setminus S$，则对每个 $f \in \Gamma$，$f_{S^c}^r u \in U(S)$。*(3)* 若 $f_S^r = \sum f_i \otimes g_i (f_i, g_i \in \Gamma)$ 且 $[a\mu] \in \mathcal{K}$，则 $f_S^r[a\mu] = [\sum (f_i \mu(g_i) a)\mu] = \prod_{s \in S} [($ $f - s^{-1}\mu(f))a\mu]$。*(4)* 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathcal{M}$ 中某个 μ 的 G-轨道，并设 $T \subset \mathcal{M}$ 是一个 G-不变子集。将 $U(T)$ 映为 $U(\mathcal{O})$ 的 Γ-双模同态 $P_\mathcal{O}^T(f)$，$u \mapsto f_{T \setminus \mathcal{O}}^r u$，要么为 *0*，要么其核为 $U(T \setminus \mathcal{O})$。

(5) 映射 $P_S(f) = (P^S_{\mathcal{O}_1}(f)\ldots, P^S_{\mathcal{O}_k}(f))$ 是一个从 $U(S)$ 到 $\bigoplus_{i=1}^k U(\mathcal{O}_i)$ 的 Γ-双模单态。

证明。FO10 中 [FO10，引理 5.2]的证明在此处无需修改即可使用。 □

定理 4.5。设 U 是一个伽罗瓦 Γ-环，其中 Γ 是一个 *Harish-Chandra* 子代数。则以下条件等价：*(a)* U 是一个伽罗瓦序；*(b)* 对每个 G-不变子集 $S \subset \mathcal{M}$，$U(S)$ 都是有限生成的左、右 Γ-模；*(c)* 对于 G 在 $\mathcal{M}$ 上作用的每个轨道 $\mathcal{O}_\mu$，$U(\mathcal{O}_\mu)$ 都是有限生成的左、右 Γ-双模。

证明。(a) 推出 (b)：设 $u_1, \ldots, u_s$ 是 $U(S)K$ 的一个 K-基。根据命题 3.11 的证明，$D^r(\sum u_i\Gamma) = (\sum u_i\Gamma)K \cap U$。由推论 3.6，这与 $U(S)K \cap U$ 相同；由于 U 是一个伽罗瓦序，它是有限生成的右 Γ-模。不过，根据命题 3.11 的证明，$U(S)K \cap U = D^r(U(S))$，而根据引理 4.3，这正是 $U(S)$。

(b) 蕴含 (c) 是显然的。

为证明 (c) 蕴含 (a)，我们将使用命题 3.11。假设 $M \subset U$ 是一个有限生成的右 Γ-子模，并令 $S = \bigcup_{u\in M}$支集 u。根据引理 4.3，$D^r(M) \subset D^r(U(S)) = U(S)$。由于 Γ 是诺特的，只需证明 $U(S)$ 是一个有限生成的右 Γ-模。但根据前一个命题的最后一项，对于某些轨道 $\mathcal{O}$，$U(S)$ 是 Γ-子模 $\bigoplus U(\mathcal{O}_i)$。再次利用 Γ 是诺特的这一事实，结论得证。□

令 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathfrak{m} \in \operatorname{SpecMax}\Gamma$ 到 $\operatorname{SpecMax}\Lambda$ 的提升。令 $\mathcal{M}_\mathfrak{m}$ 为 $\mathfrak{M}$ 的 $\mathfrak{m}$-稳定子，并假设其为有限的。$\mathcal{M}_\mathfrak{m}$ 的有限性不依赖于 $\mathfrak{M}$ 的选择，因为它在 W-共轭作用下唯一。类似地，我们将 $W_\mathfrak{m}$ 定义为 $\mathfrak{M}$ 的 W-稳定子。

由希尔伯特零点定理，对每个 $\mathfrak{m} \in \operatorname{SpecMax}\Gamma$，$\Gamma/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{k}$。若 $f \in \Gamma$，$f(\mathfrak{m})$ 是在上述典范同构中 f 的像，其中在 $\mathfrak{m}$ 处取值。若 $\mathfrak{M}$ 是从 $\mathfrak{m}$ 到 Λ 的一个提升，则定义 $f(\mathfrak{M}) := f(\mathfrak{m})$。这显然是良定义的。

设 $\mathfrak{m}$，$\mathfrak{n} \in \operatorname{SpecMax}\Gamma$ 且 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 是它们到 Λ 的极大谱中的提升。我们定义

$$S(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) = \{\mu \in \mathcal{M} | (\exists w_1, w_2 \in W)(w_2\mathfrak{N} = \mu w_1\mathfrak{M})\}.$$

这个集合显然不依赖于 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 的选取。

引理 4.6。设 $\mathfrak{m} \in$极大谱 Γ，并假设 $\mathcal{M}_\mathfrak{m}$ 是有限的。那么 $|S(\mathfrak{m},\mathfrak{m})| \le \frac{|W|^2}{|W_\mathfrak{m}|^2}|\mathcal{M}_\mathfrak{m}|$。

证明。设 $\mathfrak{M}_1$，$\mathfrak{M}_2$ 是 $\mathfrak{m}$ 到 Λ 的两个极大理想提升。至多有 $|\mathcal{M}_\mathfrak{m}|$ 个元素 $\mu \in \mathcal{M}$ 满足 $\mu\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$，且至多有 $\frac{|W|}{|W_\mathfrak{m}|}$ 个元素 $w \in W$ 满足 $w\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$。引理得证。□

引理 4.7。设 U 是一个 *Galois* Γ-环，且 Γ 带有一个 *Harish-Chandra* 子代数，取$\mathfrak{m} \in$极大谱 Γ 使得 $\mathcal{M}_\mathfrak{m}$ 是有限的。置 $T = S(\mathfrak{m},\mathfrak{m})$。若 $U = U\mathfrak{m}$，则对于每个$k \ge 0$，存在 $\gamma_k \in \Gamma \setminus \mathfrak{m}$、$u_j \in U$、$\chi_j \in \mathfrak{m}^k$、$j = 1$、……、$N$，使得 $\gamma_k = \sum_j u_j\chi_j$，且支集 $u_j \subset T$

证明。条件 $U = U\mathfrak{m}$ 的意思只是 $1 \in U\mathfrak{m}$，因此

$$(\dagger)\ 1=\sum_i w_i\zeta_i, w_i\in U, \zeta_i\in \mathsf{m}.$$

我们将以 (†) 为基础进行归纳论证，在暂不假设 supp $u_j \subset T$ 的情况下证明引理的陈述。因此，假设 $k>1$，并假设存在 $u_j\in U$,$\chi_j\in \mathsf{m}^k$, $j=1,\dots,N$，使得 $1=\sum_j u_j\chi_j$。那么

$$(\ddagger)\ 1=\sum_j u_j\chi_j=\sum_j u_j(\sum_i w_i\zeta_i)\chi_j=\sum_j\sum_i u_j w_i(\chi_j\zeta_i),$$

并且由于 $\chi_j\zeta_i\in \mathsf{m}^{k+1}$，证明的前半部分已经完成。

现在，令 $Z=\bigcup \text{supp } u_j\setminus T$。由于 $T\cap Z=\emptyset$，对于 m 在 $\mathfrak{M}$ in SpecMax Λ 中的任意提升，我们有 $z(\mathfrak{M})\neq\mathfrak{M}$，对所有 $z\in Z$ 均成立。于是存在 $f\in\Gamma$，使得对所有 $z\in Z$，都有 $f(\mathfrak{M})\neq f(z(\mathfrak{M}))$。由命题 4.4(3)，引入 f_Z^r 后，我们不妨设$\prod_{z\in Z}[f(\mathfrak{M})-f(t(\mathfrak{M}))]=1$。特别地，$f_Z^r\in 1+\Gamma\otimes\mathsf{m}+\mathsf{m}\otimes\Gamma$。因此 $\gamma_k=f_Z^r(1)\in 1+\mathsf{m}$。将 u_j 替换为 $f_Z^r(u_j)$，由命题 4.4(2) 可知 $u_j\in U(T)$。若 $u\in U$, $\gamma\in\Gamma$,$f_Z^r(u\gamma)=f_Z^r(u)\gamma$，由于 Γ 是交换的，且 $f_Z^r\in 1+\Gamma\otimes\mathsf{m}+\mathsf{m}\otimes\Gamma$。因此，将$f_Z^r$ 应用于 (‡) 即得所需结果。□

下一个定理是对定理 4.2的一个相关改进

定理 4.8. 设 U 是一个 *Galois* Γ-序。则对于每个满足 $\mathcal{M}_{\mathsf{m}}$ 有限的 Γ 的极大理想 m，存在一个 U-模 M $\in$ 不可约(n)。此外，对于每个 $v\in\mathsf{M}$，$\mathsf{m}v=0$。

证明。由命题 3.18，Γ 是一个 Harish-Chandra 子代数。由引理 4.6，$T=S(\mathsf{m},\mathsf{m})$ 是有限的。因此由定理 4.5(2)，$U(S)$ 是一个有限生成的左、右 Γ-模。根据 Artin-Rees 引理（参见 [Mat86，定理 8.5]），存在一个 $n_0\in\mathbb{N}$，使得对于每个 $n\geq n_0$，$U(S)\mathsf{m}^n\cap\Gamma=(U(S)\mathsf{m}^{n_0}\cap\Gamma)\mathsf{m}^{n-n_0}$。

我们来证明 $U=U\mathsf{m}$ 不可能。否则，由引理 4.7，对于每个 $n>n_0$都存在 $\gamma_n\notin\mathsf{m}$ 属于 $U(S)\mathsf{m}^n\cap\Gamma$。但是我们不可能有 γ_n 属于 $(U(S)\mathsf{m}^{n_0}\cap\Gamma)\mathsf{m}^{n-n_0}$，这就是同一个集合。因此，$U\neq U\mathsf{m}$。

这样，模 $U/U\mathsf{m}$ 有一个简单商模 M $\in$ 不可约(m)，正如定理 4.2的证明中一样。按照该定理证明中的记号，模由 $1+M$生成。因此 $\mathsf{m}\mathsf{M}=0$。□

下一个引理的证明与 [FO10，引理 4。6]相同:

引理 4.9。设 m、n 是 Γ 和 $T=S$(m、n)的极大理想。对于每个 m、$n\geq 0$、$U=U(T)+\mathsf{n}^mU+U\mathsf{m}^n$。此外，对于每个 $u\in U$和 $k\geq 0$，存在 $u_k\in U(T)$ 使得 $u\in u_k+\mathsf{m}^k u\Gamma+\Gamma u\mathsf{m}^k$。

现在我们为主定理的证明做准备。我们回顾 [DFO94]中的一些事实。设 U 是一个结合代数，Γ一个交换 Harish-Chandra 子代数。

定义 4.10。设 m $\in$极大谱 Γ。设 Γ_{m} 为 Γ 在 m 处的 m-进完备化，并设 $\mathcal{A}$(m, m) 为 Γ_{m}-双模 $\lim\limits_{\longleftarrow m,\ n} U/(\mathsf{m}^mU+U\mathsf{m}^n)$

以下内容摘自 [DFO94，推论 19]

定理 4.11。设 U 为一个结合代数，Γ 为一个交换的 *Harish-Chandra* 子代数。设 $\mathfrak{m} \in \operatorname{cfs} \Gamma$。若 $\mathcal{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{m})$ 是一个有限生成的左、右 $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ 模，则不可约$(\mathfrak{m})$ 是有限集，并且对每个 $\mathsf{M} \in$ 不可约$(\mathfrak{m})$，维数$\mathsf{M}^{\mathfrak{m}} < \infty$。

我们 准备证明素特征下伽罗瓦序理论的主要结果 .

定理 4.12。设 U 是一个伽罗瓦 Γ-序，且 $\mathfrak{m}$ 是 Γ 的一个极大理想，使得 $\mathcal{M}_{\mathfrak{m}}$ 是有限的。那么 不可约$(\mathfrak{m})$ 是有限的，并且对于每个 $\mathsf{M} \in$ 不可约$(\mathfrak{m})$，维数$\mathsf{M}^{\mathfrak{m}} < \infty$。

证明。我们的策略是使用前面的定理。首先假设 Γ 整闭。根据引理 4.9，$\mathcal{A}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \subset \lim_{\longleftarrow m}, {}_n{}^U(S)/(\mathfrak{m}^m U + U\mathfrak{m}^n) \cap U(S)$。根据定理 4.5，$U(S)$ 是一个有限生成的左、右 Γ- 模，因此每个 $U(S)/(\mathfrak{m}^m U + U\mathfrak{m}^n)$ 也都是如此，并且 $U(S)$ 作为左模或右模的生成元也生成 $U(S)/(\mathfrak{m}^m U + U\mathfrak{m}^n)$。由于 $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ 是诺特的（[AM69，定理 10.26]），且 $\lim_{\longleftarrow m}, {}_n{}^U(S)/(\mathfrak{m}^m U + U\mathfrak{m}^n) \cap U(S)$ 是一个有限生成的左、右 $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-模（[Mat86，定理 8.7]），所以 $\mathcal{A}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ 是一个有限生成的左、右 $\Gamma_{\mathfrak{m}}$-模。由此根据定理 4.11 即得证。若 Γ 不是整闭，则其在 K 中的整闭包 Γ 是一个有限 Γ-模，因此 Γ 的每个极大理想都会在 Γ 中提升为有限个极大理想。因此，不失一般性，可以假设 Γ 整闭。□

5. Examples and counter-examples

本节篇幅很短，专门介绍两个反例。实际上，几乎所有已知的伽罗瓦环实际上都是主伽罗瓦序（参见 [Har20], [Web24], [Sch25b]）。

首批并非伽罗瓦序的非伽罗瓦伽罗瓦环的自然例子，是 $U(\mathfrak{gl}_n)$ 的交错类似物，即代数 $\mathfrak{A}(\mathfrak{gl}_n)$，其中 $n > 2$，由 [Jau21] 引入。

本节中的第一个反例是一个并非伽罗瓦序的伽罗瓦环；与 [Jau21] 中的例子相比，它十分初等。令 $U = \mathsf{k}[x^{\pm 1}]$、$\Gamma = \mathsf{k}[x]$，其中$\mathcal{M}$ 且 W 平凡，并令 $K = \mathcal{K} = \mathcal{L} = \mathsf{k}(x)$。$U$ 显然是 Γ- 环中的一个伽罗瓦 K。它不是伽罗瓦序，因为若 V 是 K- 向量空间中的任意 K，则 $K \cap U = U$不是有限生成的左或右 Γ-模。

现在我们将展示一类简单的非主伽罗瓦序示例。

命题 5.1. *(*[FO10, 命题 2.1]*)* 若 A 是一个仿射代数和一个整环，并且 A 表示其在 分式域 A中的整闭包。那么 A 是一个有限 A-模。

证明。 这可由诺特正规化引理立即得出。 □

引理 5.2. 设 $B \subset A$ 是两个环，其中 A 是一个交换整环，且是一个有限 B-模。那么 分式域 $A = A(B^{\times})^{-1}$，其中 $B^{\times} = B \setminus \{0\}$。

证明。 显然，$A(B^{\times})^{-1}$ 是一个有限维的 Frac B-向量空间。为了证明它等于 Frac A，只需证明任意 $0 \neq a \in A$ 在 $A(B^{\times})^{-1}$中已经可逆。左乘 A 是 $A(B^{\times})^{-1}$上的 Frac B -线性自同态，由于 A是一个整环，该映射是单射。由于维数有限，该映射也是满射。因此存在 $a'b^{-1}$，使得 $a \neq 0 \in A$，$b \neq 0 \in B$ 是 a的逆元。□

在下一组例子中， $\mathcal{M}$ 和 W 同样是平凡的。

定理 5.3。 设 A 是一个非整闭的仿射交换整环， A^{-} 是其整闭包，且 $K =$ 分式域 $A =$ 分式域 A。则 A 是一个非主伽罗瓦 A-序。

证明。 由前面的引理可知， A 是 A中的一个伽罗瓦 K-序。 K 是唯一的 A^{-} 中的 $\mathcal{K} = \mathcal{L} = K$-向量空间。 $\mathcal{K} \cap A = A$，根据命题 5.1 是一个有限生成的A-模。 □

我们将以两个例子结束本节，它们展示了斜幺半群环 $\mathcal{L}$ 及其不变环 $\mathcal{K}$可以有多大的多样性。这两个例子对任意特征的代数闭域也都成立。

我们的第一个 例子来自椭圆曲线，我们将使用 [Sil09] 作为主要来源 e.

引理 5.4. 设 E 是一条椭圆曲线。那么它的自同构群（同时视为阿贝尔群和代数簇）是有限的。若将此群记为 G，则 $\mathsf{k}(E)^G \simeq \mathsf{k}(\mathbb{P}^1)$。

证明。 第一个断言见 [Sil09，定理 III.10。1]第二个断言则可由 Hurwitz 公式的一种特殊形式推出（例如， [Sil09，练习 3。13]）。 □

命题 *5.5.* 设 k 是任意有限特征的代数闭域， E 和椭圆曲线，并设 $\mathcal{M}$ 是 $Aut_{\mathsf{k}}k(E)$ 中由所有 m-挠点组成的子群，$m \in \mathbb{N}$。设 $G := Aut\ E$；它通过共轭作用于 $\mathcal{M}$ （$gPg^{-1} = g(P)$， $P \in \mathcal{M}$）。取 $\mathcal{M}$ 的生成元集合 $\mathfrak{X}$。那么，若 U 是由 $k[\mathbb{A}^1]$ 和 $\mathfrak{X}$ 生成的 $(k(E) * \mathcal{M})^G$ 的子环，则 U 是 $(k(E) * \mathcal{M})^G$ 中的一个 *Galois* $k[\mathbb{A}^1]$-环。

证明。 该结果由前一个引理和命题3.7推出。 □

作为第二个例子，设 G 是一个连通线性代数群。我们构造 $\mathcal{L} = \mathsf{k}(G) * G$，并将 $x \in \mathsf{k}G$ 与 λ_x, $\lambda_x f(y) = f(x^{-1}y)$ 视为相同。设 W 是 G的一个有限自同构群，它既作用于该簇，也作用于该群。注意，若 $f \in \mathsf{k}(G)$, $x \in G$, $w \in W$，则 $w\lambda_x w^{-1} f(y) = \lambda_{w(x)} f(y)$，因此 W 确实通过共轭作用正规化 G。下一个定义推广了 [Har20，定义 4.3]中的有理伽罗瓦序概念。

定义 5.6。 线性代数伽罗瓦环是一个嵌入某个 $(\mathsf{k}(G) * G)^W$ 中的伽罗瓦 $\mathsf{k}[G]^W$-环。

例 5.7. [FH14] 在 $U_q(\mathfrak{gl}_n)$的伽罗瓦环实现中， q 不是单位根，斜群环为 $(\mathbb{C}(x_1, x_2, \ldots, x_{n(n-1)/2}; z_1, \ldots, z_n) * \mathbb{Z}^{n(n-1)/2})^{D_n}$，其中 D_n 是二面体群 $\{(a_1\sigma_1, \ldots, a_n\sigma_n) \in \mathbb{Z}_2^N \rtimes S_n | \sum a_i = 0\}$。 $\mathbb{Z}^{n(n-1)/2}$ 有一个基 ε_{ij}。 $i \in [1, n-1]$, $j \in [1, i]$，使其固定 z，并通过 $\varepsilon_{ij}(x_{kl}) = q^{-\delta_{ik}\delta_{jl}} x_{kl}$ 作用。它是一个线性代数伽罗瓦 $\mathbb{C}[\mathbb{T}^{n^2}]^{D_n}$-环，其中 $G = \mathbb{T}^{n^2} = \mathbb{C}^{\times n^2}$。

同样，来自 [FS19] 的所有伽罗瓦序都是广义有理伽罗瓦环，且$G = \mathbb{C}^{\times n}$。

R注5.8。如果 G 是连通线性代数群，那么它总是有理的 l.

证明。设 G 是一个幂零根为 R_u的群。设 B 是一个 Borel子群，其幂零根为 U（因此 $R_u < U$）。在 G/B 中存在一个稠密的 B-轨道 V，它是一个有理簇。由于 U 和 R_u 是分裂幂零群，根据 [Spr98, 14.2.5]，存在一个截面 $s: U/R_u \to U$，对应于投影 $\pi: U \to U/R_u$。利用 s，可以找到投影 $\Pi: G \to G/B$的一个局部截面。这表明，在扎里斯基拓扑下，f 是一个局部平凡的 B-丛；特别地，$f^{-1}(V)$是 G 的一个开子簇，同构于有理簇 $V \times B$。□

6. 广义魏尔代数及其无限秩类比

魏尔代数的概念有许多种扩展方式。让我们回顾一下由 V. Bavula 提出的广义魏尔代数（以下简称 GWA）的定义 [Bav92]。本节中的环是k-代数，其中基域 k任意。

定义 6.1。设 D 为一个环，$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ 是一组 n 个彼此可交换的自同构：$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$、$i, j = 1, \dots, n$。设 $a = (a_1, \dots, a_n)$ 是 n 个非零元素组成的序列，这些元素属于 D 的中心，且满足 $\sigma_i(a_j) = a_j, j \neq i$。次数为 n、基环为 D 的广义魏尔代数$D(a, \sigma)$ 由 X_i^+, X_i^-, $i = 1, \dots, n$ 在 D 上生成，并满足以下关系

$$X_i^+(d) = \sigma_i(d)X_i^+, \qquad X_i^- d = \sigma_i^{-1}(d)X_i^-, \quad \forall d \in D, \tag{1a}$$

$$[X_i^+, X_j^+] = [X_i^-, X_j^-] = [X_i^+, X_j^-] = 0, \ \forall i \neq j, \tag{1b}$$

$$X_i^- X_i^+ = a_i, \qquad X_i^+ X_i^- = \sigma_i(a_i). \tag{1c}$$

定义 6.2。设 α 是一个序数。用 $\mathbb{Z}^{\oplus\alpha}$ 表示 $\prod_{\beta<\alpha} \mathbb{Z}_\beta$ 的有限支集序列子群，其中每个 $\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}$。

命题 6.3。若 D 是整环，则 $D(a, \sigma)$ 是整环。若 D 是诺特环，则 $D(a, \sigma)$ 是诺特环。

证明。 [Bav92，命题 1。3]。□

现在我们引入无限秩广义魏尔代数的概念，其特例已在 [BBF04] 和 [FGM14]）中讨论过。它曾在预印本中顺带提及 [Sch25b]。本文将发展其理论基础。一个主要区别在于，我们的理论将序数作为无限秩广义魏尔代数的次数，而不像[Sch25b]那样使用基数。

定义 6.4. 设 D 为一个环，α 为一个序数，$\sigma = \langle\sigma_\beta\rangle_{\beta<\alpha}$ 为一个由 α 个可交换自同构组成的序列：$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$、$i, j < \alpha$。设 $a = \langle a_\beta\rangle_{\beta<\alpha}$ 为一个长度为 α 的序列，其中各项都是属于 D 中心的非零元素，并且满足$\sigma_i(a_j) = a_j$, $j \neq i$。次数为 α、基环为 D的广义魏尔代数 $D(a, \sigma)$

由 X_β^+， X_β^-、 $\beta<\alpha$ 在 D 上生成，并满足以下关系

$$X_\beta^+(d)=\sigma_\beta(d)X_i^+,\qquad X_\beta^- d=\sigma_\beta^{-1}(d)X_\beta^-,\quad \forall d\in D, \tag{2a}$$

$$[X_\beta^+,X_\gamma^+]=[X_\beta^-,X_\gamma^-]=[X_\beta^+,X_\gamma^-]=0,\ \forall\beta\neq\gamma, \tag{2b}$$

$$X_\beta^-X_\beta^+=a_\beta,\qquad X_\beta^+X_\beta^-=\sigma_\beta(a_\beta). \tag{2c}$$

约定：我们将广义魏尔代数及其无限秩推广统称为广义魏尔代数。对于一个次数为 α 的广义魏尔代数，若 $a=\langle a_\beta\rangle_{\beta<\alpha}$ 中的所有元素在基环 D 中都是正则的，则称该广义魏尔代数为正则的。

定义 6.5。设 $D(a,\ \sigma)$ 是一个次数为 α 、基环为 D 的广义魏尔代数。设 Σ 是由 $\langle\sigma_\beta\rangle_{\beta<\alpha}$ 生成的 Aut D 的子群。存在一个自然同态 $\xi:\ \mathbb{Z}^{\oplus\alpha}\to\Sigma$，显然它是满射。将 $z\in\mathbb{Z}^{\oplus\alpha}$ 的像记为 σ_z。若 ξ 是同构，则称该广义魏尔代数为满射型。

命题 6.6。若 $D(a,\sigma)$ 是一个基环为 D、次数有限或无限的广义魏尔代数，则 D 是一个拟中心子代数。因此，若 D 是交换的，则它是一个 *Harish-Chandra* 子代数。

证明。 命题 2.5的直接推论。 □

令 X_i^n表示 X_i^{+n}，若 $n\geq 0$；否则表示 $X_i^{-(-n)}$ 。。若 $z\in\mathbb{Z}^{\oplus\alpha}$ 等于 $m_{\beta_1}+m_{\beta_2}+\cdots+m_{\beta_s}$，其中每个 $m_{\beta_i}\in\mathbb{Z}$，定义 $X^z:=X_{\beta_1}^{m_{\beta_1}}X_{\beta_2}^{m_{\beta_2}}\cdots X_{\beta_s}^{m_{\beta_s}}$。于是显然， $D(a,\ \sigma)$ 是一个 $\mathbb{Z}^{\oplus\alpha}$- 分次代数；对于 $z\in\mathbb{Z}^{\oplus\alpha}$ ，次数为 z 的齐次分量为 DX^z；此外， $D(a,\ \sigma)$ 是一个自由的左、右 D-模，其基为 $X^z,\ z\in\mathbb{Z}^{\oplus\alpha}$。

定义 6.7。 设 $\mathcal{I}$ 是一个有向集。对每个 $i\in\mathcal{I}$，令 $D_i(a^i,\ \sigma^i)$ 为一个次数有限的广义魏尔代数，次数为 n_i，基环为 D_i。假设对于 $i,\ j\in\mathcal{I},\ j\geq i$，存在连接态射$f_{ij}$: $D_i(a^i,\ \sigma^i)\to D_j(a^j,\ \sigma^j)$，满足 $f_{ij}(D_i)\subset D_j$, $n_j>n_i$, 并且对于 $1\leq\ell\leq n_i$, $\sigma_\ell^j|_{D_i}=\sigma_\ell^i$,$a_\ell^i\in Z(D_j)$。这些数据称为广义魏尔代数的直接系统。

定理*6.8*。 (*a*) 设 $D(a,\sigma)$是一个次数为无限次数 α 、基环为 D的广义魏尔代数。设 $\mathcal{I}$ 是 α的有限子集族，并按包含映射排序。对每个 $F\in\mathcal{I}$，若 $|F|=n$，则它继承自 α的全序为: $\langle f_1,f_2,\ldots,f_n\rangle$。考虑基环为 D、由 $D_F(a^F,\sigma^F):=D(\langle a_{f_1},\ldots a_{f_n}\rangle,\langle\sigma_{f_1},\ldots,\sigma_{f_n}\rangle)$给出的次数为 n 的广义魏尔代数。对 $F\subsetneq F'$，存在自然态射$f_{F,F'}$: $D_F(a,\sigma)\ \hookrightarrow\ D_{F'}(a,\sigma)$, 从而得到一个广义魏尔代数的直接系统。于是 $D(a,\sigma)=\lim_{\longrightarrow F\in\mathcal{I}}D_F(a^F,\sigma^F)$。

反过来,

(b) 设 $\mathcal{I}=\omega$ 是一个无限有向集，对于每个 i ，设 $D_i(a^i,\ \sigma^i)$ 是一个有限秩广义 *Weyl* 代数，其连接态射为 f_{ij} （ $j\geq i\in\mathcal{I}$ ），给出广义 *Weyl* 代数的一个直接系统的数据。那么，$\lim_{\longrightarrow i\in\omega}D_i(a^i,\ \sigma^i)$ 是一个次数为 ω、基环为 $D_\omega=\lim_{\longrightarrow i\in\omega}D_i$ 的广义 *Weyl* 代数。

证明. (a) 对于每个 $F\in\mathcal{I}$，我们都有一个包含映射 ι_F: $D_F(a^F,\sigma^F)\ \hookrightarrow\ D(a,\sigma)$。这些包含映射满足条件 $\iota_F=\iota_{F'}f_{F,F'}$，因此根据归纳极限的泛性质，我们得到一个态射 $\Theta:\lim_{\longrightarrow F\in\mathcal{I}}D_F(a^F,\sigma^F)\ \to\ D(a,\sigma)$。这个映射显然是满射，因为它的像包含 D 以及每个 $X_\beta^\pm$, $\beta<\alpha$。它也是单射：如果

$a \in \varinjlim_{F\in\mathcal{I}} D_F(a^F,\sigma^F)$，按照命题 2.6 证明中的记号，对于某个 $F\in\mathcal{I}$，我们有 $a=\phi_F(a_F)$，且对于某个 $a_F\in D_F(a^F,\sigma^F)$。因此 $\Theta(a)=\Theta\phi_F(a_F)=\iota_F(a_F)$。由于 ι_F 是单态射，$\Theta(a)=0$ 将推出 $a_F=0$，进而推出 $a=0$。因此我们得到了所需的同构。

(b) $D_\omega=\bigcup_{i\in\omega}D_i$，并设 $a=\langle a_i\rangle_{i<\omega}$。固定一个 $\ell\geq 1$，并考虑所有 σ^i_ℓ。如果我们有 σ^j_ℓ 和 σ^k_ℓ，且满足 $k>j$，那么 $D_j\subset D_k$，而 σ^k_ℓ 在 D_j 上的限制就是 σ^j_ℓ。据此，我们如下定义 D 的一个自同构 σ^*_ℓ：任取满足 $n_i\geq\ell$ 的 i。若 $j\leq i$，则 $D_j\subset D_i$，并将 $\sigma^*_\ell(d)$ 对于 $d\in D_j$ 定义为 $\sigma^i_\ell(d)$。若 $j>i$，则将 $d\in D_j$ $\sigma^*_\ell(d)$ 定义为 $=\sigma^j_\ell(d)$。根据广义魏尔代数有向系统的相容条件，σ^*_ℓ 给出了 D_ω 的一个良定义自同构。现在令 $\sigma=\langle\sigma^*_\ell\rangle_{\ell\in\omega}$，最终由归纳系统的泛性质得到 $\varinjlim_{i\in\omega}D_i(a^i,\ \sigma^i)=D_\omega(a,\ \sigma)$。□

定理 6.9。设 $D(a,\sigma)$ 是一个次数为 α 的广义魏尔代数，其中 α 是一个无限序数。假设 D 没有任何 σ-稳定理想，商群 $\operatorname{Aut}D/\operatorname{Inn}D$ 中由 σ_i 生成的子群同构于 $\mathbb{Z}^{\oplus\alpha}$，并且对每个 $i\in\alpha$，都有 $m\geq 1$,$Da_i+D\sigma_i^m(a_i)=1$。那么 $D(a,\sigma)$ 是一个单环。

证明。沿用定理 6.8(a) 的记号，每个 $D_F(a^F,\sigma^F)$ 都是单环，这是由有限秩广义魏尔代数的单性判据得出的，[Bav96，定理 4。5]。由于 $D(a,\sigma)$ 是这些 $D_F(a^F,\sigma^F)$ 的单射直极限（定理 6.8(a)），根据命题 2.6(2)，$D(a,\sigma)$ 是一个单环。□

例 6.10。[Bav96，推论 4。8]单广义魏尔代数最重要的例子如下（特征 $\operatorname{char}\mathsf{k}=0$）。

(a) 若 $A=\mathsf{k}[h](a,\sigma)$，$\sigma(h)=h-1$，则称秩为 1 的广义魏尔代数 A 为经典型。如果不存在不可约多项式 $p[h]$，使得对于任意 $i\geq 0$，$p,\sigma^i p$ 均为 a 的倍数，则经典型广义魏尔代数是单的。

(b) 若 $A=\mathsf{k}[h^{\pm1}](a,\sigma)$，$\sigma(h)=\lambda h$, $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 1$,λ 不是单位根，则称秩为 1 的广义魏尔代数 A 为量子型。如果不存在不可约多项式 $p[h]$，使得 $p,\sigma^i(p)$ 都是 a 的倍数，则量子型广义魏尔代数是单的。

(c) 如果广义魏尔代数 A 是张量积 $\bigotimes_{i=1}^n A_i$，其中每个 A_i 都是经典型或量子型的单广义魏尔代数，那么 A 也是单代数。

推论 6.11. 设 $D(a,\sigma)$ 是无限次数的广义魏尔代数 α。它不是诺特的。若 D 是整环，则 $D(a,\sigma)$ 是整环。若 D 是诺特整环，则 $D(a,\sigma)$ 是 *Ore* 整环。

证明。设 $\omega=\mathbb{N}$ 是 α 的一个初始段。那么理想链 $(X_1^+)\subset(X_1^++X_2^+)\subset\ldots$ 显然是递增的，且不会稳定。由定理 6.8a)，$D(a,\sigma)$ 是有限秩广义魏尔代数的单射直极限。由于 D 是诺特整环，这些代数都是诺特整环（由命题 6.3），因此由命题 2.6(1)，$D(a,\sigma)$ 是整环。若 D 是诺特整环，则 $D(a,\sigma)$ 是有限秩广义魏尔代数的单射直极限，这些代数都是诺特整环（参见命题 6.3），因而是 Ore 整环，所以由命题 2.6(3)，$D(a,\sigma)$ 是 Ore 整环。□

定理 6.12. 设 $\mathcal{A}=D(a,\sigma)$ 是一个次数为 α 的广义魏尔代数，其基环为 D。设 S 是 $Z(D)$ 的乘法封闭子集，由 D 的正则元组成，并且

满足 σ-稳定性：即 $\sigma_\beta^j(S) \subset S, \forall \beta < \alpha, j \in \mathbb{Z}$。设 $\mathfrak{A} = D_S(a,\sigma)$，其中每个$\sigma_\beta$ 都以自然方式延拓为 D_S 的自同构。则 S 是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}_S \simeq \mathfrak{A}$中的左、右分母集。

证明。设 $A \in \mathcal{A}$ 非零，并假设存在某个 $s \in S$, $sA = 0$。不失一般性，我们可以假设 A 是齐次的。设 $A = \lambda \prod_{i=1}^k X_i^{m_i}$, $0 \neq \lambda \in D, m_i \in \mathbb{N}$。令 $B = \prod_{i=1}^k X_{k-i}^{-m_{k-i}}$。 $AB \in D$是 λ与某个 $\sigma_i^j(a_i)$ 的乘积，其中某个 $j \in \mathbb{Z}$，且它们每一个都是正则的。因此，若 $sA = 0$, $sAB = 0$，则 $\lambda = 0$，这显然荒谬。所以 s 在 $D(a,\sigma)$ 中是正则的。此外，由于 S 是交换的、 σ-稳定的，并且对每个 $d \in D$，都有 $X_i^{\pm} d = \sigma^{\pm 1}(d) X_i$，显然 S 是 $D(a,\sigma)$ 中的左、右奥雷集。我们有一个自然映射 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}$。由于 S 的每个元素在 $\mathfrak{A}_S$中都变为可逆元，根据局部化的泛性质，我们得到一个映射 $\theta : \mathcal{A}_S \hookrightarrow \mathfrak{A}$。它是满射的，因为其像包含所有生成元 $X_i^{\pm}$。因此， θ 是一个同构，证毕。□

定理 6.13. 设 $\mathcal{A} = D(a,\sigma)$ 是一个次数为 α 、正则且为满射型的广义魏尔代数（*GWA*）。令 S 为由 D 中的 $\sigma_j^m(a_i)$ $i,j < \alpha, m \in \mathbb{Z}$.. 生成的乘法封闭子集。 S 是 σ-稳定的。我们有 $\mathcal{A}_S \simeq D_S * \mathbb{Z}^{\oplus \alpha}$。

证明。 考虑映射 $\mathcal{A} \hookrightarrow D_S * \mathbb{Z}^{\oplus\alpha}$ 定义为 $X_\beta^+ \mapsto \sigma_\beta$, $X_\beta^- \mapsto a_\beta \sigma_\beta^{-1}$ 。这是所需的同构（参见 [FS20b，命题 13]）。□

推论 6.14. 经典商环 $\operatorname{Quot}\mathcal{A}$ 存在，当且仅当$\operatorname{Quot}\ D_S * \mathbb{Z}^{\oplus\alpha}$存在；此时二者相等

这个最后的推论有一个简单而优美的应用。

推论 6.15. 设k 是零特征的代数闭域，且 $\mathcal{A}$ 是任意一个次数为1 、基环为$\mathsf{k}[h]$的广义魏尔代数（*GWA*）。那么分式域 A 要么是第一 *Weyl* 代数的分式域，要么是量子平面的分式域，要么是$\mathsf{k}(x,y)$

证明。必有 $\sigma(h) = \lambda h + \beta$，对于 $\lambda \in \mathsf{k}^\times, \beta \in \mathsf{k}$。$\operatorname{Frac}\ A = \operatorname{Frac}\ \mathsf{k}(h)[y;\sigma]$。若 $\lambda \neq 1$, 则其斜分式域是量子平面的斜分式域。若 $\lambda = 1$ 且 $\beta \neq 0$，则我们得到第一 Weyl 代数的分式域。若 $\lambda = 1$ 且 $\beta = 0$，则有 $\mathsf{k}(x,y)$。参见[Dum06，第 30] 页。□

7. Fixed rings of generalized Weyl algebras

本节将证明，广义魏尔代数在某些有限群作用下的不动环是伽罗瓦序。

命题 7.1. 设 $D(a,\sigma)$ 是一个有限秩 n 广义魏尔代数，且 G 是 D 的有限自同构群，并且其在 $\{a_1,\ldots,a_n\}$ 上的限制会置换 a_i。给定 $g \in G$，我们将对应的 S_n 置换记为 g_a。假设 $g \circ \sigma_i \circ g^{-1} = \sigma_{g_a(i)}$。那么 G 可扩张为 $D(a,\sigma)$的有限自同构群： $g \in G$ 将 $d \in D$ 映为 $g(d)$，并将 $X_i^{\pm}$映为 $X_{g_a(i)}^{\pm}$。

设 $g \in G$。设 $D\langle X, Y\rangle := D\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle$ 为自由结合 D-代数，并考虑态射 $\phi\colon D\langle X, Y\rangle \to D(a, \sigma)$ 定义为 $x_i \mapsto X_{g_a(i)}^+$ $y_i \mapsto X_{g_a(i)}^- d \mapsto$

$g(d)$。下面证明，ϕ 的核中包含 $D(a,\sigma)$的关系理想（参见定义 6.1），因此 ϕ 诱导出 $D(a,\sigma)$所需的自同构。例如，$\phi(X_i^+ d - \sigma_i(d)X_i^+) = X_{g_a}^+(i)g(d) - g(\sigma_i(d))X_{g_a}^+(i)$，它等于 $X_{g_a}^+(i)g(d) - g(\sigma_i(g^{-1}(g(d))))X_{g_a}^+(i) = X_{g_a}^+(i)g(d) - \sigma_{g_a}(i)(g(d))X_{g_a}^+(i) = 0$。同理，$D(a,\sigma)$ 的所有其他定义关系也都属于 $\ker\phi$。证毕。

首先回顾一个基本命题。

命题 7.2. 设 $D(a,\sigma)$ 是一个一阶广义魏尔代数。那么 $D(a,\sigma)^{\otimes n}$ 是一个次数为 n 的广义魏尔代数，记作 $D^n(a^n,\sigma^n)$，其中：

$D^n = D^{\otimes n}.a^n - (a_1,\dots,a_n)$；$a_i = 1\otimes\ldots\otimes 1\otimes a\otimes 1\otimes\ldots$，其中 a 位于第 i 个位置。

$\sigma^n = (\sigma_1,\dots,\sigma_n)$；$\sigma_i = id\otimes\ldots\otimes id\otimes\sigma\otimes id\otimes\ldots$，其中 σ 位于第 i 个位置。

证明。 [Bav92]。 □

从现在起，假设 k 是零特征的代数闭域，且 D 是一个仿射 k-代数和交换整环。这样一来，$D\otimes D$ 仍是一个整环且是仿射的，因此是一个诺特交换代数。

定义 7.3. 秩为 n 的广义魏尔代数 $D^n(a^n,\sigma^n)$ 称为张量型，若它是 n 个相同的一阶广义魏尔代数 $D(a,\sigma)$ 的张量积，其中 σ 是无限阶自同构。我们还定义 $D^\omega(a^\omega,\sigma^\omega) =$的极限$_{\longrightarrow n\in\mathbb{N}} D^n(a^n,\sigma^n)$（参见定理 6.8(b)）。

推论 7.4. 若 $D(a,\sigma)$ 是例 *6.10(a)* 或 *(b)* 中的一阶广义魏尔代数，则 $D^\omega(a^\omega,\sigma^\omega)$ 是单代数。

证明。 由例 6.10(c) 和命题2.6(2) 可得。 □

沿着 $D^\omega(a^\omega,\sigma^\omega)$ 研究代数 [BBF04] 和 [FGM14] 的表示论，似乎是一项有趣的工作。

命题 7.5. 设 $D^n(a^n,\sigma^n)$ 是一个 n 阶张量型广义魏尔代数。那么对称群 S_n 在该代数上有一个自然作用，该作用由 S_n 在 D^n上的作用诱导，后者由 $\pi(d_1\otimes\ldots\otimes d_n) = (d_{\pi(1)}\otimes\ldots\otimes d_{\pi(n)})$，$\pi\in S_n$给出。在对 $D^n(a^n,\sigma^n)$的这一自然作用下，${}^\pi X_i^\pm = X_{\pi(i)}^\pm$。

证明。 由命题可立即得出7.1。 □

令 F^n 为分式域 D^n。

命题 7.6。 $D^n(a^n,\sigma^n)$ 是 $F^n * \mathbb{Z}^n$ 中的一个主伽罗瓦序，其中典范基 $\varepsilon_1\ldots,\varepsilon_n$ 满足：ε_i 在 F^n 上的作用为 σ_i。

证明。 与定理 6.13的证明类似，$D^n(a^n,\sigma^n)$ 嵌入于 $F^n * \mathbb{Z}^n$。根据嵌入的形式，我们有 $D^n(a^n,\sigma^n)$ 是一个伽罗瓦 D^n- 环，由命题 3.7 可知。显然，如果 $X\in D^n(a^n,\sigma^n)$，$X(D^n)\subset D^n$。因此，我们实际上得到了一个主伽罗瓦序。 □

嵌入 $D^n(a^n,\ \sigma^n)\hookrightarrow F^n * \mathbb{Z}^n$ 是 S_n-等变的（参见命题 7.5），且 S_n通过共轭作用于 $\mathbb{Z}^n$。因此我们有映射 $[D^n(a^n,\ \sigma^n)]^{S_n}\hookrightarrow (F^n * \mathbb{Z}^n)^{S_n}$。我们用 D^* 表示 $(D^n)^{S_n}$，并用 F^* 表示其分式域。

P命题 7.7。 $[D^n(a^n,\sigma^n)]^{S_n}$ 是 中的主伽罗瓦 D^*-阶$(F^n*\mathbb{Z}^n)^{S_n}$

证明。 由定理 2。9 $[D^n(a^n,\ \sigma^n)]^{S_n}$ 是一个仿射 k-代数。它包含 $\sum X_i^+$和 $\sum X_i^-$。这些元素的支集生成幺半群 $\mathbb{Z}^n$。因此，由命题 3.7 可知我们得到一个伽罗瓦环；由前一个命题和命题 3.16，可知我们得到一个主伽罗瓦序。 □

在继续之前，我们先回顾 [JW96第 2 节中的一个重要结果。7]。对于$m\geq 1$，设 $G_m\subset k^\times$ 为由 m 次单位根组成的循环群。设 $D(a,\ \sigma)$ 是一个一阶广义魏尔代数。 G_m 通过固定 D 并且，若 $\zeta\in G_m$， $\zeta.X^+=\zeta X^+$，且ζ， $X^-=\zeta^{-1}X^-$。

定理 7.8。 $D(a,\sigma)^{G_m}$在上述作用下仍是一个广义魏尔代数，即 $D(a_m,\sigma_m)$，其中 $a_m=\prod_{i=0}^{m-1}\sigma^{-1}(a)$，且 $\sigma_m=\sigma^m$。

我们还可以令 $G_m^{\otimes n}$ 在 $D^n(a^n,\ \sigma^n)$ 上作对角作用。推广前面的结果，很容易看出，在这个有限群的作用下，不变环为 $D^n(a_m^n,\ \sigma_m^n)$。

现在回顾群 $G(m,\ p.n)$、 $p|m$ 的定义。定义 $A(m,\ p,\ n)$ 为 $G_m^{\otimes n}$ 的子群，由满足 $(\prod\zeta_i)^{m/p}=1$ 的 $(\zeta_1,\ ..,\ \zeta_n)$ 组成。于是， $G(m,\ p.n)$ 是半直积 $A(m,\ p,\ n)\rtimes S_n$，其中 S_n 对 $A(m,\ p,\ n)$ 的各项进行置换。

我们首先考虑 $p=1$ 的情形，即 $G(m,\ 1,\ n)=G_m^{\otimes n}\rtimes S_n$。给定任意环 R、 G R 的一个自同构群以及 N 一个正规子群，我们有 $R^G=(R^N)^{G/N}$。

因此， $D^n(a^n.\sigma^n)^{G(m,1,n)}$ 是 $D^n(a_m^n,\ \sigma_m^n)^{S_n}$。结合命题 7.6 和 7.7 ，立即可得：

定理 7.9。 $D^n(a^n.\sigma^n)^{G(m,1,n)}$ 是一个主伽罗瓦 D^*-环，位于 $(F^*\mathbb{Z}^n)^{S_n}$ 中。

在下一个引理中，假设 char k $=0$。I 本身也有一定的研究价值。

引理 7.10。 若 U 是一个结合仿射诺特代数，且 G 是 U 的一个有限自同构群，使得 U^G 是 $\mathcal{K}$ 中的一个伽罗瓦 Γ-环，并且 H 是 G 的一个子群，那么 U^H 也是 $\mathcal{K}$ 中的一个伽罗瓦 Γ-环。

证明。 U^G是有限生成的 Γ代数。若 u_1、.....、 u_k是 U^G中生成U^G的元素，根据命题 3.7，我们可以假设 $\bigcup$支集 u_i作为幺半群生成 $\mathcal{M}$。现在，$U^G\subset U^H$。根据定理 2.9， U^H仍然是有限生成的，并且包含元素u_1、.....、 u_k。因此，它具有一个有限生成元集合，其支集作为幺半群生成 $\mathcal{M}$。于是，再次应用命题 3.7，我们得出 U^H 是 $\mathcal{K}$中的 Galois Γ-环。 □

下一个引理的证明与 [FS20b， 命题 30]相同：

引理 7.11。 $D^n(a^n,\ \sigma^n)^{G(m,p,n)}=\bigoplus_{k=0}^{p-1}(X_1^+X_2^+\dots X_n^+)^{mp/k}D^n(a^n,\ \sigma^n)^{G(m,1,n)}$。

以下是本节的主定理，它推广了[FS20b]关于所有 p 以及所有广义魏尔代数的主要结果：

定理 7.12。 $D^n(a^n,\sigma^n)^{G(m,p,n)}$ 是一个主伽罗瓦 D^*-序，其中 $F^n*\mathbb{Z}^n$ 的基中的每个元素 $\mathbb{Z}^n$, ε_i均按如下方式作用： σ_i^m

证明。 由定理 7.8、定理 7.9 和引理 7.10，伽罗瓦环实现显然成立。$D^n(a^n,\sigma^n)^{G(m,p,n)}(D^*)$ $=\bigoplus_{k=0}^{p-1}(X_1^+X_2^+\dots X_n^+)^{mp/k}D^n(a^n,\sigma^n)^{G(m,1,n)}(D^*)\subset D^*$。因此它也是一个主伽罗瓦序。□

现在我们讨论盖尔范德–基里洛夫猜想

定理 7.13。 若 $D(a,\sigma)$ 是一个秩为 I 的经典型广义魏尔代数（参见例 *6.10*），则 分式域 $(D^{(a,\sigma^n)})^{G(m,p,n)}\simeq$ 分式域$W_n(\mathsf{k})$。若它是一个秩为 I 的量子型广义魏尔代数，则分式域 $(D^n(a,\sigma^n)^{G(m,p,n)}\simeq$ 分式域$(\mathsf{k}_{q^{m/p}}[x,y]\otimes\mathsf{k}_q[x,y]^{\otimes n-1})$，其中 $\mathsf{k}_q[x,y]$ 是量子平面

证明。 在第一种情况下，我们得到 $(\mathsf{k}(t_1,\dots,t_n)*\mathbb{Z}^n)^{S_n}$ 的斜分式域，众所周知它是分式域 $A_n(\mathsf{k})$（参见 [FMO10], [FS20a]）。在第二种情况下，结论由 [Har17，定理 1 得出。1] □

我们通过证明以下事实来结束本节：如果 D 是多项式代数或 Laurent 多项式环（关于一个不定元），那么 $D^n(a^n,\ \sigma^n)^{G(m,p,n)}$ 在其 Harish-Chandra 子代数 $\mathsf{k}[h_1,\dots,h_n]^{S_n}$（或 $\mathsf{k}[h_1^{\pm1},\dots,h_n^{\pm1}]^{S_n}$）上是自由的。

为此，我们需要 H. Bass 的以下重要结果：

命题 7.14。 设 A 是一个没有非平凡幂等元的交换诺特环。如果 P 是一个非有限生成的 A-模，那么 P 实际上是自由的。

证明。 [Bas63，推论 4。5]。 □

众所周知，$\mathsf{k}[h_1,\dots,h_n]$ 是一个秩为 $n!$ 的自由 $\mathsf{k}[h_1,\dots,h_n]^{S_n}$-模；根据 Chevalley-Shephard-Todd 定理，对任意伪反射群也有类似结果，这一点同样众所周知。

引理 7.15。 $\mathsf{k}[h_1^{\pm1},\dots,h_n^{\pm1}]$ 是一个秩为 $n!$ 的自由 $\mathsf{k}[h_1^{\pm1},\dots,h_n^{\pm1}]^{S_n}$-模。

证明。 设 $e=\prod h_i$，且令由 e 生成的乘法封闭集为 E。$\mathsf{k}[h_1^{\pm1},\dots,h_n^{\pm1}]\simeq\mathsf{k}[h_1,\dots,h_n]_E$，由于 e 是 S_n-不变的，$\mathsf{k}[h_1^{\pm1},\dots,h_n^{\pm1}]^{S_n}=\mathsf{k}[h_1,\dots,h_n]_E^{S_n}$。由于局部化是正合函子，且 $\mathsf{k}[h_1,\dots,h_n]$ 是 E-无挠的，由同构 $\mathsf{k}[h_1,\dots,h_n]\simeq\oplus_{n!}\mathsf{k}[h_1,\dots,h_n]^{S_n}$ 可得 $\mathsf{k}[h_1^{\pm1},\dots,h_n^{\pm1}]\simeq\oplus_{n!}\mathsf{k}[h_1^{\pm1},\dots,h_n^{\pm1}]^{S_n}$。证明完毕。□

定理 7.16。 若 $D=\mathsf{k}[h]$ 或 $\mathsf{k}[h^{\pm1}]$，则 $D^n(a^n,\sigma^n)^{G(m,p,n)}$ 是其 *Harish-Chandra* 子代数 D^* 上的自由模。

证明。 根据 Chevalley-Shephard-Todd 定理或前面的引理，D^n 是一个自由 D^*-模，其秩为 $n!$；我们已经看到 $D^n(a^n,\sigma^n)$ 是一个自由 D^n-模，但不是有限生成的。于是根据 Bass 结果、命题 7.14 和命题 3.16(2)，$D^n(a^n,\sigma^n)^{G(m,p,n)}$是一个自由 D^*-模。□

推论 7.17。 在上述定理的条件下，设 $\mathsf{m}\in$ 极大谱 D^*，并假设 $|\mathcal{M}_\mathsf{m}|$ 有限。若 $\mathsf{M}\in$ 不可约(m)，则 维数$\mathsf{M}^\mathsf{m}\le n!|\mathcal{M}_\mathsf{m}|$。

证明。 这是引理 4.6 与 [FO14，引理 4.12(c)]。 □

对于魏尔代数的情形，这个上界可以改进为 $n!$。我们猜测实际上上界是 1。

Acknowledgments

我谨此承认，咖啡对撰写这篇手稿作出了不可或缺的贡献。手稿大部分是在凌晨 2 点至 6 点之间完成的。我也感谢我的妻子 Pan，感谢她给予我永无止境的爱。

References

[AD06] J. Alev, and F. Dumas, *Opérateurs différentiels invariants et problème de Noether*. 载于：Bern- stein, J., Hinich, V., Melnikov, A.（编）《李理论研究》。数学进展，第243卷，Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，2006年，第21–50页。[AM69] M. F. Atiyah, I. G. Macdonal, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co.，雷丁，马萨诸塞州-伦敦-唐米尔斯，安大略省，1969。

[63] H. Bass *Big projective modules are free* Bas , ,《伊利诺伊数学杂志》7（1963年）24–31。[Bav 92] V. Bavula, *Generalized Weyl algebras and their representations*, 《代数与分析》4（1992年）75–97。英文译本：《圣彼得堡数学杂志》4（1993年）71–92。[Bav96] V. Bavula, *Filter dimension of algebras and modules a simplicity criterion for generalized Weyl* , , 《代数通讯》*algebras* **24** 6 1996 1971 1992 () ()–。[BV00] V. Bavula and F. van Oystaeyen, *Simple holonomic modules over the second Weyl algebra A_2*, 《数学进展》150(1)（2000年）80–116。[BBF04] V. Bekkert, G. Benkart, and V. Futorny, 《魏尔代数、Kac-Moody李代数及相关主题的权模》，《当代数学》，第343卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004年，第17–42页。[Bou03] N. Bourbaki, *Algebra II*, 《数学基础》第4–7章（柏林），Springer-Verlag，柏林，2003年。[Dix66] J. Dixmier, *Enveloping algebras*, 《数学研究生丛书》，第11卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996年。[Dol03] I. Dolgachev, *Lectures on Invariant Theory*, 剑桥大学出版社；2003年。[DOF91] Yu. A. Drozd, S. A. Ovsienko, and V. M. Futorny, *On Gel'fand-Zetlin modules*, 《几何与物理冬季学校论文集》（Srn´ı，1990年），《巴勒莫数学研讨会报告》（2）增刊26（1991年）143–147。[DFO94] Yu, A Drozd *Harish-Chandra Subalgebras and* , , *Gel'fand-Zetlin Modules* 1992 V. M. Futorny, and S. A. Ovsienko, 。载于：《有限维代数及相关主题》（渥太华，安大略省，），79–93。《北约高级科学研究所丛书C辑：数学与物理科学》，第424卷，Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特，1994年。[Dum06] F. Dumas, *An introduction to noncommutative polynomial invariants*。为“同调方法与非交换代数表示”会议准备的讲义，阿根廷马德普拉塔，2006年3月6日至17日。https://lmbp.uca.fr/∼fdumas/recherche.html[EFOS17] F. Eshmatov, V. Futorny, S. Ovsienko, and J. Schwarz, *Noncommutative Noether's problem for complex reflection groups* **145** 12 2017 5043 5052 , 《美国数学会会刊》() ()–。[Fil24] D. Fillmore, *On the Category of Harish-Chandra Block Modules*, 《代数杂志》658（2024年）888–924。[FH25] D. Fillmore and J. T. Hartwig, *Subcategories of Module Categories via Restricted Yoneda Embeddings* 2507 12778[ ] , arXiv预印本，arXiv: . math.RT。[FGM14] V. Futorny, D. Grantcharov, V. Mazorchuk, *Weight modules over infinite dimensional Weyl algebras* **142**, 9, 3049 3057 2014 , 《美国数学会会刊》第-号 ()。[FGRZ20] V. Futorny, D. Grantcharov, L. E. Ramirez, P. Zadunaisky, *Gelfand-Tsetlin theory for rational Galois algebras* 2020 , 《以色列数学杂志》()。

[FH14] V. Futorny and J. T. Hartwig, *Solution of a q-difference Noether problem and the quantum Gelfand-Kirillov conjecture for $\mathfrak{gl}_N$*, **276** (1-2) (2014), 1-37, 《数学杂志》（第-号）（）-。[FHJS25] V. Futorny, J. T. Hartwig, E. C. Jauch, J. Schwarz, *Structure of Galois rings and the Gelfand-Kirillov Conjecture*, 2507.10782[ ], arXiv预印本，arXiv：. math.RA[ ]。[FMO10] V. Futorny, A. Molev and S. Ovsienko, *The Gelfand-Kirillov conjecture and Gelfand-Tsetlin modules for finite W-algebras*, **223** (3) (2010), 773-796, 《数学进展》（）（）–。[FO10] V. Futorny and S. Ovsienko, *Galois orders in skew monoid rings*, 《代数杂志》324（2010年）598–630。[FO14] V. Futorny and S. Ovsienko, *Fibers of characters in Gelfand-Tsetlin categories*, 《美国数学会汇刊》366(8)（2014年）4173–4208。[FS19] V. Futorny and J. Schwarz, *Quantum linear Galois orders*, 《代数通讯》47(12)（2019年）5361–5369。[FS20a] V. Futorny and J. Schwarz, *Noncommutative Noether's problem vs classic Noether's problem*, 《数学杂志》295(3–4)（2020年）1323–1335。[FS20b] V. Futorny and J. Schwarz, *Algebras of invariant differential operators*, 《代数杂志》542（2020年）215–229。[FSS21] V. Futorny, J. Schwarz, and I. Shestakov, *LD-stability for Goldie rings*, 《纯粹与应用代数杂志》225(11)（2021年），论文编号106741，共14页。[Har17] J. T. Hartwig, *The q-difference Noether problem for complex reflection groups and quantum OG2 algebras*, **45** (3) (2017), 1166-1176, 《代数通讯》（）（）–。[Har20] J. T. Hartwig, *Principal Galois orders and Gelfand-Zeitlin modules*, 《数学进展》359（2020年），106806，共23页。[Har23] J. T. Hartwig, *Harish-Chandra modules over Hopf Galois orders*, 《国际数学研究通知》IMRN 21（2023年）18273–18301。[Har24] J. T. Hartwig, *Galois order realization of noncommutative type D Kleinian singularities*, arXiv预印本。arXiv:2406.20012 [math.RT]。[Jan83] J. C. Jantzen, *Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren*, 《半单李代数的包络代数》，《数学与相关领域成果》，第3卷，Springer-Verlag，柏林，1983年。[Jau21] E. C. Jauch, *An extension of $U(\mathfrak{gl}_n)$ related to the alternating group and Galois orders*, 《代数杂志》569（2021年）568–594。[Jau22] E. C. Jauch, *Maps between standard and principal flag orders*, arXiv预印本。arXiv:2208.13117 [math.RT]。[JW96] D. A. Jordan and I. E. Wells, *Invariants for automorphisms of certain iterated skew polynomial rings*, **39** (3) (1996), 461-472, 《爱丁堡数学学会会刊》（）（）–。[KWWY24] J. Kamnitzer, B. Webster, A. Weekes, O. Yacobi, *Lie algebra actions on module categories for truncated shifted Yangians*, **12** (2024), 18, 69, 《数学论坛·西格玛》（），论文编号e，共页。[Mat86] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, 《剑桥高等数学研究丛书》，第8卷，剑桥大学出版社（1986年）。[MV21] V. Mazorchuk, E. Vishnyakova, *Harish-Chandra modules over invariant subalgebras in a skew-group ring*, 25 (2021), 3, 431-454, 《亚洲数学杂志》（），第–号。[Mon80] S. Montgomery, *Fixed rings of finite automorphism groups of associative rings*, 《数学讲义》，第818卷，Springer，柏林，1980年。[MS81] S. Montgomery, L. W. Small, *Fixed rings of noetherian rings*, 《伦敦数学学会通报》13(1)（1981年）33–38。[Sil09] J. H. Silvermann, *The arithmetic of elliptic curves*, 《数学研究生教材》，Springer纽约，2009年。T [Sch25a] J. Schwarz, *Generalizations of noncommutative Noether's problem*, 《纯粹与应用代数杂志》第229卷第2期，2025年2月，107896。

[Sch25b] J. Schwarz, *Harish-Chandra modules and Galois orders revisited*, arXiv 预印本。arXiv:2303.00593v5[math.RT]。[Row88] L. H. Rowen, *Ring theory. Vol. I.*《纯粹与应用数学》，第127卷，Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1988年。[Spr98] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, Modern Birkh¨auser Classics，Birkh¨auser Boston，马萨诸塞州，1998年。[Web24] B. Webster, *Gelfand-Tsetlin modules in the Coulomb context* 1, 3, ,《Ann.Represent.Theory》，第 – 期（ ）。 393 437 2024

Shenzhen International Center for Mathematics, Southern University of Science andTechnology, Shenzhen, China*Email address*: jfschwarz.0791@gmail.com