arXiv:2601.10360v1 [math.CA] 15 Jan 2026

ON U多重三角系统的 C-乘子

GRIGORI A. KARAGULYAN

摘要。我们研究可作为多重三角系统所有重排的几乎处处收敛魏尔乘子的序列类 $w(n)$。我们证明，任何此类序列都必须满足界 $\log n \lesssim w(n) \lesssim \log^2 n$。我们的主要结果确立了一维与多维三角系统之间的一般等价原理，从而可以将一维情形中已知的某些估计推广到更高维度。

1. 引言

1.1. **魏尔乘子**。设

$$\Phi = \{\phi_n : n = 1, 2, \ldots\} \subset L^2(0, 1) \tag{1.1}$$

是一个正交归一系统。回顾一下，若正数序列 $w(n) \nearrow \infty$ 具有如下性质，则称其为Φ的几乎处处收敛魏尔乘子（或简称魏尔乘子）：每个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \tag{1.2}$$

其系数满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) < \infty \tag{1.3}$$

几乎处处收敛（见 [12] 或 [6]）。经典的门绍夫-拉德马赫定理（[14], [22]）断言，序列 $\log^2 n$ 对于每个正交归一系统都是韦伊乘子。门绍夫还在 $\log^2 n$ 中证明了该序列这一项的最优性， [14],在那里他构造了一个正交归一系统，使得任意序列 $w(n) = o(\log^2 n)$ 都不能成为韦伊乘子。以下概念是正交级数理论中的标准概念

2010 数学主题分类。 42C05, 42C10, 28D05。关键词与短语。 多重三角系统、不重叠多项式、韦伊乘子、孟绍夫–拉德马赫定理。本研究得到亚美尼亚共和国高等教育与科学委员会资助，属于研究项目 21AG-1A045 的研究工作。

定义 1.1。 正数序列 $w(n) \nearrow \infty$ 称为正交归一系统 $\Phi = \{\phi_n\}_{n\geq 1}$ 的重排几乎处处收敛韦伊乘子（*RC* 乘子），若它对于每个系统 $\{\phi_{n_k}\}$都是韦伊乘子，其中 $\{n_k\}$ 是一个由互不相同的自然数组成的序列（不必递增）。

定义 1.2. 若一列正数 $w(n) \nearrow \infty$ 是正交归一系统 $\Phi = \{\phi_n\}_{n\geq 1}$ 的几乎处处无条件收敛韦伊乘子（*UC*乘子），则称之为(1.3) 条件下，级数(1.2) 在对其项进行任意重排后几乎处处收敛。

根据 Menshov–Rademacher 定理，序列 $\log^2 n$ 是任意正交归一系统 Φ 的 RC 乘子，而门绍夫反例表明$\log^2 n$ 在此意义下是最优的。经典正交归一系统的 RC 乘子和 UC 乘子的研究，是正交级数理论中的一个长期课题。众所周知，常数序列 $w(n) \equiv 1$ 是三角系统、Walsh系统、哈尔系统和 Franklin系统的韦伊乘子，但它不是其中任何一个系统的 RC 乘子。Kolmogorov [13] 最先指出，序列 $w(n) \equiv 1$ 不是三角系统的 RC 乘子。然而，他从未发表过这一事实的证明。后来，Zahorski [33] ′ [26, 给出了这27]一断言的证明。此后，Ul yanov 在 Zahorski 的论证基础上进一步发展，证明了哈尔系统和 Walsh系统也具有这一性质。Olevskii [20] 利用哈尔函数技巧，成功证明了这一现象对任意完备正交归一系统都普遍成立。Ul′yanov [25, 29] 找到了哈尔系统 RC 乘子和 UC 乘子的最优增长率。此外，他的证明技巧也成为研究其他经典系统中类似问题的关键论证。

定理A (Ul′yanov, [29])。 序列$\log n$ 是*Haar*系统的 *RC* 乘子。

定理B (Ul′yanov, [29])。 非递减序列 $w(n)$ 是*Haar*系统的*UC*乘子，当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nw(n)} < \infty. \tag{1.4}$$

事实上，如果$\log n$ 是某个正交归一系统的 RC 乘子，那么满足（ $w(n)$ 条件（1.4）的任意非递减序列都是同一正交归一系统的UC乘子。这是由一项在后续论文中建立的一般性结果推出的 [21, 28]。

定理A 和B 的结果可推广到其他一些小波型正交归一系统。特别是，G. Gevorkyan 在 [4, 5] 中为小波型的富兰克林系和Ciesielski系建立了定理B 的类似结果。对于任意小波型系统，类似结果最近由作者在 [7]中证明。此外，论文 [7]提供了一种新方法，使人们能够针对一般小波型系统，获得关于不重叠多项式系统的定理A 和B的类似结果（下文将给出这些论文的一些细节）。

对于特征型正交系统，例如三角系统和 Walsh 系统，RC 乘子和 UC乘子的刻画问题尚未完全解决。

这些问题最早由 Ulýanov 在 1964年 的综述中提出 [30]，后来又在几篇论文中重新讨论（见 [29], 第 1041, [31], 页、第 80, [32], 页57）。孟绍夫–拉德马赫定理表明，$\log^2 n$ 是三角系统和 Walsh 系统的 RC 乘子，而对于任一系统，目前尚未发现满足 $w(n) = o(\log^2 n)$的序列是 RC 乘子。文献 [1, 18, 19, 24]研究了 Walsh 系统的 RC 乘子和 UC乘子的下界。Bochkarev 和 Nakata 分别独立证明了目前最好的结果 [1, 2] [18],：若递增序列 $w(n)$不满足 Ulýanov 条件（1.4），则它不是 Walsh 系统的 UC乘子。关于三角系统的 RC 乘子和 UC乘子的下界，文献 [3, 9, 10, 15–17, 23]进行了研究。作者最近在文献 [9] 中证明了三角系统对应的 Bochkarev-Nakata 定理 [1, 18]。我们还提及一篇近期论文 [11],，其中证明了对于二进正交三角多项式，序列$\sqrt{\log\ n}$是 RC 乘子。

对于一个固定的正交归一系统（1.1），可以考虑由不重叠多项式构成的正交归一系统

$$p_n(x) = \sum_{k \in G_k} a_k \phi_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.5}$$

即 G_k 是自然数集合中两两不相交的集合。

定义 1.3。正数序列 $w(n) \nearrow \infty$ 称为正交归一系统 (1.1) 的强 *RC* 乘子（*SRC* 乘子），如果它是任意不重叠多项式正交归一系统 (1.5)的韦伊乘子。

注意，若 $w(n)$ 是正交归一系统 Φ的 SRC 乘子，那么它也是 Φ的 RC 乘子，因为任意子序列 $\{\phi_{n_k}\}$ 都对应于 (1.5)，其中每个 $G_k = \{n_k\}$。近年来，寻找给定正交归一系统的最佳 SRC 乘子引起了人们的兴趣。文献 [8] 证明，对于一般的鞅差系统，最优 SRC 乘子是序列 $\log n$。文献 [7]证明了对于一般小波型系统也有类似结果。因此，对于哈尔、富兰克林以及所有其他小波型系统（定义见 [7]），我们有 $\log\ n$ 是任意不重叠多项式正交归一系统的韦伊乘子。对于能够作为三角系统或 Walsh 系统的 RC 或 SRS 乘子的序列 $w(n)$，其最优增长速度仍然未知。根据 Menshov–Rademacher 定理以及文献 [1, 11, 18], 的结果，只能推出任意此类序列都必须满足

$$\log n \lesssim w(n) \lesssim \log^2 n. \tag{1.6}$$

本文研究多重三角系统的 RC(SRS) 乘子问题。具体而言，我们证明该问题与相应的一维三角系统问题相同。

定理 1.1. 设 $w(n)$是满足 $w(n^2) \leq Cw(n)$的递增数列。那么， $w(n)$是该一维三角系统的 *RC(SRS)* 乘子，当且仅当它是该多重三角系统的 *RC(SRS)* 乘子。

注 1. 注意，界 $w(n^2) \le Cw(n)$ 是自然的，因为已知韦伊乘子的增长至多为对数级，并且任何具有对数行为的数列 $w(n)$ 都满足这一不等式。

注2. 注意，对于 Walsh 系统，定理 1.1 的结果是显然的，因为 Walsh 系统与其多重系统概率等价。事实上，这两个系统中的函数都是由所有可能的独立随机变量乘积生成的，这些随机变量取值为 ± 1 且具有相等的概率。这种等价关系在三角系统中并不成立。尽管如此，本文提出了一种技术，可在三角系统中有效地替代这一等价原理。

应用定理 1.1，可以将一维三角系统已知的界（1.6）推广到多维情形。

推论 1.1。 如果序列 $w(n)$ 是多重三角系统的 *RC* 乘子，那么 $\log n \lesssim w(n) \lesssim \log^2 n$。

2. 概率等价与保测映射

定义 2.1。 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 和 $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ 是概率空间。若可测函数序列 $f_k \colon X \to \mathbb{R}$ 和 $g_k \colon Y \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, 具有相同的联合累积分布函数，即满足

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(E_k)\right) = \nu\left(\bigcap_{k=1}^{n} g_k^{-1}(E_k)\right)$$

对于任意选取的博雷尔集 $E_k \subset \mathbb{B}$、 $k = 1$、2、.....、 n。

获得概率等价序列的一种自然方法是使用保测映射，如下文的引理2.2所示。

定义 2.2。 设 $(X$、 $\mathscr{A}$、 $\mu)$ 和 $(Y$、 $\mathscr{B}$、 $\nu)$ 是概率空间。若对任意可测集 E、$F \in \mathscr{A}$，都有函数Θ : $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 满足以下条件，则称其为保测映射（*MP* 映射）：

$$\begin{aligned} &1)\ \mu(E) = \nu(\Theta(E)), \\ &2)\ \mu(E \cup F) = \nu(\Theta(E) \cup \Theta(F)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

引理 2.1. 若 Θ 是从概率空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 到 $(Y, \mathscr{B}, \nu)$的 *MP* 映射，则对于任意可测集 E, $F \in \mathscr{A}$, $E_k \in \mathscr{A}$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\mu(E \setminus F) = \nu(\Theta(E) \setminus \Theta(F)), \tag{2.2}$$

$$\mu\left(\bigcup_k E_k\right) = \nu\left(\bigcup_k \Theta(E_k)\right), \tag{2.3}$$

$$\mu\left(\bigcap_k E_k\right) = \nu\left(\bigcap_k \Theta(E_k)\right). \tag{2.4}$$

证明. 根据 MP 映射的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\mu(F)+\mu(E\setminus F)&=\mu(F\cup E)=\nu(\Theta(F)\cup\Theta(E))\\&=\nu(\Theta(F))+\nu(\Theta(E)\setminus\Theta(F))\\&=\mu(F)+\nu(\Theta(E)\setminus\Theta(F)).\end{aligned}$$

因此，得出（2.2）。类似地，

$$\begin{aligned}\mu(E)+\mu(F)-\mu(E\cap F)&=\mu(E\cup F)=\nu(\Theta(E)\cup\Theta(F)))\\&=\nu(\Theta(E))+\nu(\Theta(F)))-\nu(\Theta(E)\cap\Theta(F)))\\&=\mu(E)+\mu(F)-\nu(\Theta(E)\cap\Theta(F))).\end{aligned}$$

这就推出了两个集合情形下的（2.4），进而对有限个可测集也成立。然后取极限，就得到任意可数集族情形下的（2.4）。类似地，（2.1）推出（2.3）。□

设 Θ 是从概率空间 $(X,\ \mathscr{A},\ \mu)$ 到 $(Y,\ \mathscr{B},\ \nu)$ 的 MP 映射。则 Θ 诱导出一个映射，将任意示性函数 $\mathbf{1}_E,\ E\in\mathscr{A}$ 映射为 $\mathbf{1}_{\Theta(E)}$。下面的引理给出了将 Θ 扩展到可测函数全空间 $L^0(X)$ 的适当方法。

引理 2.2。若 Θ 是从概率空间（$X,\ \mathscr{A},\ \mu$）到概率空间（$Y,\ \mathscr{B},\ \nu$）的 *MP* 映射，则它可以唯一地扩展为一个从 $L^0(X)$ 到 $L^0(Y)$ 的算子，使得任意序列 $\{f_k\}_{k\geq1}\subset L^0(X)$ 都与其像序列 $\{\Theta(f_k)\}_{k\geq1}$ 概率等价。

证明。令 $s(x)$为简单函数，即

$$s(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathbf{1}_{E_i}(x),$$

其中 $E_i\in\mathscr{A}$、$i=1$、2、.....、m 是两两不交的可测集，且 $\alpha_i\in\mathbb{B}$。然后我们定义

$$\Theta s(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathbf{1}_{\Theta(E_i)}(x).$$

对于任意的 $f\in L^0_{\mathbb{B}}(X)$，都可以找到一个简单函数序列 $s_n(x)$，使得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)\ \text{a.e.}. \tag{2.5}$$

利用引理 2.1 并结合一个标准论证，可以看出数列 $s_n(x)$ 和 $\Theta s_n(x)$ 概率等价。因此，$\Theta s_n(x)$ 几乎处处收敛，且其极限不依赖于所选的简单函数 s_n（见（2.5））。因此，我们将此极限定义为 $\Theta f(x)$。显然，任意数列 $\{f_k\}_{k\geq1}\subset L^0_{\mathbb{B}}(X)$ 都与其像数列 $\{\Theta(f_k)\}_{k\geq1}$概率等价。□

3. 离散三角系统的分解

对于整数 $l \geq 1$，我们记 $\mathbb{N}_l = \{0, 1, \dots, l-1\}$，并令

$$\mathbb{N}_{p_1,\dots,p_d} = \mathbb{N}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{N}_{p_d}$$

为集合 $\mathbb{N}_{p_k}$、$k = 1$、.....、d 的笛卡尔积。阶数为 l 的离散三角系统（DTS）是定义在 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的 l 个正交归一函数组成的集合，定义如下

$$\mathscr{D}^{(l)} = \left\{ t_n^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{l-1} \exp\left(2\pi i \frac{nk}{l}\right) \cdot \mathbf{1}_{\delta_k^{(l)}}(x) : \quad n \in \mathbb{N}_l \right\}, \tag{3.1}$$

其中 $\delta_k^{(l)} = [k/l,\ (k+1)\ /l)$。我们将它们视为定义在 $\mathbb{R}$ 上的 1-周期函数。对于整数 $p_k \geq 2$、$k = 1$、2、.....、d，考虑多重离散三角系统 $\mathscr{D}^{(p_1,\ \dots\dots,\ p_d)}$，它是由一维系统 $\mathscr{D}^{(p_k)}$ 的张量积构成的。该系统由以下函数组成

$$\begin{aligned} t_{\mathbf{n}}^{(p_1,\dots,p_d)}(\mathbf{x}) &= \prod_{k=1}^{d} t_{n_k}^{(p_k)}(x_k) \\ &= \sum_{u_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{u_d=1}^{p_d} \exp 2\pi i \left(\frac{n_1 u_1}{p_1} + \cdots + \frac{n_d u_d}{p_d} \right) \cdot \mathbf{1}_{\delta_{u_1}^{(p_1)} \times \cdots \times \delta_{u_d}^{(p_d)}}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d, &\quad \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}_{p_1,\dots,p_d}, \end{aligned}$$

其中 $\delta^{(p_1)}_{u_1} \times \cdots \times \delta^{(p_d)}_{u_d}$ 是区间 $\delta^{(p_k)u_k}$ 的笛卡尔积。下文中，记号 $\{a\}$ 表示数 a 的小数部分。对于正整数 n 和 p，令 $\langle n \rangle_p$ 表示 n 除以 p 所得的余数。

命题 3.1。若 $p_1, \dots, p_d$ 是两两互素的数，且 $p = p_1 \dots p_d$，则系统 $\mathscr{D}^{(p)}$ 和 $\mathscr{D}^{(p_1,\dots,p_d)}$ 概率等价。此外，这种等价由保测映射 $\Theta : \mathbb{T}^p \to \mathbb{T}$ 生成。

证明。根据中国剩余定理，对于任意整数 $n_j \in \mathbb{N}_{p_j}$，j =1，2，. . . ，d，存在唯一整数 $l \in \mathbb{N}_p$，使得

$$l = n_j \mod p_j, \quad j = 1, 2, \dots, d.$$

这定义了一一映射 $\tau : \mathbb{N}_{p_1,\dots,p_d} \to \mathbb{N}_p$，满足 $\tau(n_1,\ n_2,\ \dots,\ n_d) = l$。考虑由下式定义的映射 $\bar{\tau} : \sqcap_{j=1}^d \mathbb{N}_{p_j} \to \mathbb{N}_p$

$$\bar{\tau}(u_1, \dots, u_d) = \left\langle \tau(u_1, \dots, u_d) \sum_{j=1}^{d} \frac{p}{p_j} \right\rangle_p .$$

注意，这是一个一一映射。由于集合 $\sqcap_{j=1}^d \mathbb{N}_{p_j}$ 和 $\mathbb{N}_p$ 的基数均为 p，因此只需证明 $\bar{\tau}$ 是单射。对于 $(u_1, \dots, u_d) \neq (u_1', \dots, u_d')$，我们

have

$$\langle \bar{\tau}(u_1,\dots,u_d)-\bar{\tau}(u_1',\dots,u_d')\rangle_p = \left\langle (\tau(u_1,\dots,u_d)-\tau(u_1',\dots,u_d'))\sum_{j=1}^{d}\frac{p}{p_j}\right\rangle_p . \tag{3.2}$$

可以验证，$\tau(u_1,\dots,u_d)-\tau(u_1',\dots,u_d')$不被 p整除；此外，$\sum_{j=1}^{d}\frac{p}{p_j}$和 p是互质数。这意味着（3.2）不可能为 0，因此 $\bar{\tau}$是单射。利用 $\bar{\tau}$，我们定义一个 MP 映射 $\Theta:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}$ 方法是选择

$$\Theta(\delta_{u_1}^{(p_1)}\times\cdots\times\delta_{u_d}^{(p_d)})=\delta_u^{(p)} \text{ if } u=\bar{\tau}(u_1,\dots,u_d),$$

而在每个 $\delta_{u_1}^{(p_1)}\times\cdots\times\delta_{u_d}^{(p_d)}$内部，映射 Θ 可任意定义，但须保持保测性质。根据 τ 和 $\bar{\tau}$的定义，可得

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\tau(n_1,\dots,n_d)\bar{\tau}(u_1,\dots,u_d)}{p}\right\} &= \left\{\frac{\tau(n_1,\dots,n_d)\tau(u_1,\dots,u_d)\sum_{j=1}^{d}\frac{p}{p_j}}{p}\right\}\\ &= \left\{\sum_{j=1}^{d}\frac{\tau(n_1,\dots,n_d)\tau(u_1,\dots,u_d)}{p_j}\right\}=\left\{\sum_{j=1}^{d}\frac{n_ju_j}{p_j}\right\}.\end{aligned}$$

因此，对于 $n=\tau(n_1,\dots,n_d)$ 和 $u=\bar{\tau}(u_1,\dots,u_d)$，有

$$\begin{aligned}\exp\left(2\pi i\cdot\frac{nu}{p}\right)&=\exp\left(2\pi i\cdot\frac{\bar{\tau}(n_1,\dots,n_d)\tau(u_1,\dots,u_d)}{p}\right)\\ &=\prod_{j=1}^{d}\exp\left(2\pi i\cdot\frac{n_ju_j}{p_j}\right).\end{aligned}$$

这意味着

$$\Theta(t_{n_1,\dots,n_d}^{(p_1,\dots,p_d)})=t_n^{(p)},\ \text{whenever } n=\tau(n_1,\dots,n_d).$$

因此，系统 $\mathscr{D}_{(p)}$和 $\mathscr{D}^{(p_1,\dots,p_d)}$概率等价。 □

4. 辅助引理及定理 1.1 的证明

用 $\mathscr{T}_d$ 表示由以下函数组成的 d维三角系统

$$t_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})=\exp(2\pi i(n_1x_1+\cdots+n_dx_d)),\ \text{where}$$

$$\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{T}^d,\quad \mathbf{n}=(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{Z}^d.$$

一维三角系统（当 $d=1$时）将简记为 $\mathscr{T}$。

定义 4.1。 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$和$(Y, \mathscr{B}, \nu)$为概率空间。若存在序列 $\bar{g}_k\colon Y \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$，使其与 $\{f_k\}$ 概率等价，且 $\|\bar{g}_k - g_k\|_2 < \varepsilon$, $k = 1, 2, \dots, n$，则称可测函数序列 $f_k\colon X \to \mathbb{R}$ 和 $g_k\colon Y \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ 以误差 $\varepsilon > 0$ 概率等价。

引理 4.1. 设 $f_k \in \mathscr{T}_d$, $k = 1, 2, \dots, n$ 是任意选取的 d 维三角函数。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个整数 p 和一个离散一维三角函数序列 $g_k \in \mathscr{D}^{(p)}$, $k = 1, 2, \dots, n$，使得序列 $\{f_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 概率等价，误差为 ε。

证明。设

$$f_k(\mathsf{x}) = t_{n_1^k, \dots, n_d^k}(\mathsf{x}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{4.1}$$

我们将把 p 写成 $p = p_1 \cdots p_d$ 的形式，其中 p_k 是两两互素的整数。通过选取足够大的数 $p_j \geq \max_{1 \leq k \leq n} n_j^k$，可以使函数 (4.1) 得到良好的逼近，其对应的离散三角函数为

$$\left| t_{n_1^k, \dots, n_d^k}(\mathsf{x}) - t^{(p_1, \dots, p_d)}_{n_1^k, \dots, n_d^k}(\mathsf{x}) \right| < \varepsilon \text{ for all } k = 1, 2, \dots, n, \quad \mathsf{x} \in \mathbb{T}^d. \tag{4.2}$$

接着应用命题 3.1，可知序列 $t^{(p_1, \dots, p_d)}{}_{n_1^k, \dots, n_d^k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, 与离散一维三角函数序列 $g_k \in \mathscr{D}^{(p)}$ 概率等价。由此结合 (4.2) 可知，序列 $\{f_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 概率等价，误差为 $\varepsilon > 0$，引理得证。 □

设 $c_k(f)$、 $k \in \mathbb{Z}$ 是函数 $f \in L^2(\mathbb{T})$ 关于一维三角系统 $\mathscr{T}$ 的傅里叶系数，并将 f 的谱记为

$$\operatorname{spec}(f) = \{k \in \mathbb{Z} : c_k(f) \neq 0\}.$$

引理 4.2。 对于每个整数 $l \geq 1$，函数 $t_n^{(l)} \in \mathscr{D}^{(l)}$、 $n = 0$、1、.....、$l - 1$ 关于 $\mathscr{T}$ 的谱互不重叠。此外，存在互不重叠的一维三角多项式 g_k、 $k = 0$、 1、 ..... 、$l - 1$，每个都是由 l 三角函数线性组合而成，并且

$$\|g_n\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq 1, \quad \|t_n^{(l)} - g_n\|_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim 1/\sqrt{l}, \quad n = 0, 1, \dots, l - 1.$$

证明。 对于函数 $t_n^{(l)}$（见（3.1））的傅里叶系数，我们有

$$\begin{aligned} c_m(t_n^{(l)}) &= \int_0^1 t_n^{(l)}(x)\exp\left(-2\pi imx\right)dx \\ &= \sum_{k=0}^{l-1}\exp\left(2\pi i\frac{nk}{l}\right)\int_{k/l}^{(k+1)/l}\exp\left(-2\pi imx\right)dx \\ &= \exp\left(\frac{2\pi im}{l}\right)\sum_{k=0}^{l-1}\exp\left(2\pi i\frac{(n-m)k}{l}\right)\int_0^{1/l}\exp\left(2\pi imx\right)dx \\ &= \exp\left(\frac{2\pi im}{l}\right)\frac{\exp(2\pi im/l)-1}{2\pi im}\sum_{k=0}^{l-1}\exp\left(2\pi i\frac{(n-m)k}{l}\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

如果 $m \neq n$ 模 l （4.3）中的和为零，因此 c_m（$t_n^{(l)}$） $= 0$ 。于是我们得到$\mathrm{spec}(t_n^{(l)})$ $= \{n + lj\colon \ j \in \mathbb{Z}\}$， $n = 0$，1，…，$l - 1$彼此不重叠。另一方面，在（ $m = n + lj$ （4.3）中取后，我们得到

$$|c_{n+Nj}(t_n^{(l)})| \lesssim \frac{1}{|j|+1}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

因此，对于多项式

$$g_n(x) = \sum_{|j|<l/2} c_{n+lj}(t_n^{(l)})\exp\left(2\pi i(n+lj)x\right), \quad n = 0, 1, \ldots, l-1,$$

我们得到

$$\|t_n^{(l)} - g_n\|_2^2 \lesssim \sum_{|j|\geq l/2}\frac{1}{j^2} \lesssim \frac{1}{l}.$$

引理的证明至此完成。 □

引理 *4.3.* 设 $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 *(0, 1)* 上的正交归一系统，并假设 $w(n)$ 是一个递增序列，满足 $w(n) \geq c\log\, n$，其中 $c > 0$ 为常数。则 $w(n)$ 是 $\{\phi_n(x)\}$ 的韦伊乘子，当且仅当在条件 *(1.3)* 下，

$$\lim_{k\to\infty}\max_{2^k\leq m<2^{k+1}}\left|\sum_{n=2^k}^{m} a_n\phi_n(x)\right| = 0 \ \textit{a.e.}. \tag{4.4}$$

证明。 不失一般性，条件 $w(n) \geq c\log\, n$ 可以替换为

$$w(n) \geq \log n. \tag{4.5}$$

因此，我们可以假设 $w(n)$ 满足 (4.5)。已知，在条件 (4.5) 下，由 (1.3) 可得

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{2^k} a_n\phi_n(x) \text{ exists a.e..} \tag{4.6}$$

（见 [6], 引理 [5.3。2]）。由（4.4）和（4.6）可得到级数（1.2）的几乎处处收敛。因此， w（n）是系统 $\{\phi_n\}$的韦伊乘子。现在反过来，假设 w（n）满足（4.5），并且它是 $\{\phi_n\}$的韦伊乘子。那么在条件（1.3）下，级数（1.2）几乎处处收敛，这立即推出（4.4）。□

定理*1.1*的证明。设 $\{f_n\}_{n\geq 1}\subset\mathscr{T}_d$ 是 d维三角函数的任意选取。先应用引理4.1，再应用引理4.2，对于每个 k，我们得到一组互不重叠的一维三角多项式 $\{\bar f_n:\ 2^k<n\leq 2^{k+1}\}$使得每个 $\bar f_n$ 都是 4^k 三角函数的线性组合，

$$\|\bar f_n\|_2\leq 1,\quad n=1,2,\dots,$$

以及这些块

$$\{f_n:\ 2^k\leq n<2^{k+1}\} \text{ and } \{\bar f_n:\ 2^k\leq n<2^{k+1}\},\quad k=0,1,2,\dots \tag{4.7}$$

以误差 $\lesssim 2^{-k}$ 概率等价。注意，$\{f_n\}_{n\geq 1}$ 中的某些多项式可能具有重叠的谱，并且这种情况只有在这些多项式属于不同的块时才会发生。显然，存在整数 n_k，使得由下式定义的新多项式系统

$$g_n(x)=\bar f_n(x)\cdot e^{2\pi n_k x},\quad 2^k\leq n<2^{k+1}, \tag{4.8}$$

是不重叠的。因此，多项式 g_n 可以写成如下形式

$$g_n(x)=\sum_{s=s_n+1}^{s_{n+1}} b_s\exp(2\pi i m_s x),\qquad \sum_{s=s_n+1}^{s_{n+1}} b_s^2\leq 1. \tag{4.9}$$

其中 m_k、 $k=1$， 2，..... 是一个不同整数（不一定递增）组成的序列，使得

$$s_1=0,\quad s_{n+1}-s_n=4^k \text{ if } 2^k\leq n<2^{k+1}. \tag{4.10}$$

注意，由（4.10）可知

$$s_n\leq 1+8+8^2+\dots+8^k \text{ whenever } 2^k\leq n<2^{k+1}.$$

因此我们有

$$s_n\leq n^4. \tag{4.11}$$

现在令 $w(n)$ 为三角系统的 RC 乘子。因此，根据 [9] 的结果，我们可以假设

$$w(n)>c\log n. \tag{4.12}$$

下面证明 $w(n)$ 也是 $\{g_n\}_{n\geq 1}$ 的韦伊乘子。设序列 $\{a_n\}$ 满足（1.3）。根据（4.9），我们可以形式上写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=s_n+1}^{s_{n+1}} a_n b_s \exp(2\pi i m_s x), \tag{4.13}$$

其中，第二个求和可以看作是系数为.....的重排一维三角系统中的级数

$$c_s = a_n b_s \text{ if } s_n < s \leq s_{n+1}.$$

由（4.11）及条件 $w(n^2) \leq Cw(n)$ 可得 $w(s_{n+1}) \leq Cw(n)$。因此得到

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{\infty} c_s^2 w(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sum_{s=s_n+1}^{s_{n+1}} b_s^2 w(s) \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) \sum_{s=s_n+1}^{s_{n+1}} b_s^2 \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) < \infty\end{aligned}$$

因此，根据 $w(n)$ 是三角系统的 RC 乘子的假设，可知（4.13）中的两个级数几乎处处收敛。因此，我们得出 $w(n)$ 是 $\{g_n\}_{n\geq 1}$ 的韦伊乘子。考虑到（4.12），我们可以应用引理 4.3。再利用（4.8），得到

$$\lim_{k\to\infty} \max_{2^k\leq m<2^{k+1}} \left| \sum_{n=2^k}^{m} {}_{(x)}{}^{a_n f_n} \right| = \lim_{k\to\infty} \max_{2^k\leq m<2^{k+1}} \left| \sum_{n=2^k}^{m} a_n g_n \ (x) \right| {}_{=0 \text{ 几乎处处。}} \tag{4.14}$$

对于满足 a_n （1.3）的任意序列。由于（4.7）中的两个系统以误差¯概率等价于 $\lesssim 2^{-k}$，因此存在一个中间序列 $\{\bar{f}_n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\} \subset L^2(\mathbb{T})$，它与 $\{f_n$ 概率等价于： $2^k \leq n < 2^{k+1}\}$ 以及 $\|\bar{\bar{f}}_n - \bar{f}_n\|_2 \leq 2^{-k}$。这意味着

$$\begin{aligned}\max_{2^k\leq m<2^{k+1}} \left| \sum_{n=2^k}^{m} a_n f_n(x) \right| &= \max_{2^k\leq m<2^{k+1}} \left| \sum_{n=2^k}^{m} a_n \bar{\bar{f}}_n(x) \right| \\ &\leq \max_{2^k\leq m<2^{k+1}} \left| \sum_{n=2^k}^{m} a_n \bar{f}_n(x) \right| + \delta_k(x)\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中

$$\|\delta_k\|_2^2 \le \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n^2 \cdot \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \|\bar{f}_n - \bar{\bar{f}}_n\|_2^2 \le 2^{-k} \cdot \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n^2.$$

因此，显然 $\delta_k(x) \to 0$ 几乎处处成立。将此与 (4.14) 和 (4.15) 结合起来，得到

$$\lim_{k\to\infty} \max_{2^k \le m < 2^{k+1}} \left| \sum_{n=2^k}^{m} a_n f_n(x) \right| = 0.$$

再次应用引理 4.3 ，我们得出 $w(n)$是系统 $\{f_n\}_{n\ge1}$的韦伊乘子。

现在考虑定理中关于 SRC 乘子的部分。在这种情况下，我们采用前一部分论证的简化版本，并省略细节。设 $\{f_n\}_{n\ge1}$ 是一个由互不重叠的 d维三角多项式组成的任意正交归一系统。应用引理 4.1 和引理 4.2，对于每个 k ，我们可以找到一组互不重叠的一维三角多项式 $\{\bar{f}_n : \ 2^k \le n < 2^{k+1}\}$ ，使得 $\|\bar{f}_n\|_2 \le 1$、 $n = 1$、2、.....，且系统 (4.7) 以误差 $\lesssim 2^{-k}$概率等价。注意，在这种情况下，多项式 $\bar{f}_n$ 中的表示项数并不重要。随后，我们类似地定义序列 (4.8)。如果 $w(n)$是三角系统的 SRC 乘子，那么它就是多项式系统 $\{g_n\}_{n\ge1}$的韦伊乘子。因此，应用引理 4.3，我们可以立即写出 (4.14)。接着，完全按照 (4.14) 之后的相同步骤，我们得出 $w(n)$是我们任意选取的互不重叠多项式系统 $\{f_n\}_{n\ge1}$的韦伊乘子。定理得证。□

参考文献

[1] S. V. Bočkarev，沃尔什–傅里叶级数的重排，《苏联科学院通报：数学系列》43（1979），第 5, 1025 1041, 1197 552550 期，–（俄文）。MR 重排沃尔什系统部分和的控制函数，《苏联科[2]学院报告》 **239** 1978 3, 509 510 0487239 （），第–期（俄文）。MR S. Sh. Galstyan，傅里叶级数的[3]收敛与无条件收敛，《苏联科学院报告》323（1992），第2期，216–218（俄文）；英文译本，《俄罗斯科学院数学报告》45（1992），第 2, 286 289 1993 1191534 期，–（）。MR G. G. Gevorkyan，关于 Franklin 系统级数无条件收敛的韦尔[4]因子，《数学札记》 **41** 1987 6, 789 797, 889 904246 （），第–期（俄文）。MR 关于 Cicielskii[5]系统级数无条件收敛的韦尔因子，《数学札记》116（2024），第5期，707–713（俄文）。[6] S. Kačmaž 和 G. Štеıngauz，《正交级数理论》，国家物理数学文献出版社，莫斯科， 1958 0094635 （俄文）。MR Anna Kamont 和 Grigori A. Karagulyan，关于小波多项式[7]和魏尔乘子，《分析与数学》 **150** 2023 2, 529 545, 10 1007 11854 023 0281 4 4645048 （），第–期。DOI . /s - - - .[8]MR G. A. Karagulyan，关于互不重叠的哈尔多项式系统，《数学档案》58 1，121 2020 131，10 4310 2020 58 1 8 （），第–期。DOI . /arkiv. .v .n .a .

[9] ，关于重排三角系统的魏尔乘子，《数学文集》211（2020），第12期，1704-1736，DOI 10.1070/SM9422。[10] ，重排三角系统控制范数的精确估计，《俄罗斯数学评论》75（2020），第3期，569-571，DOI 10.1070/RM9946。[11] ，关于极大卡尔德隆–齐格蒙德算子和魏尔乘子，《数学文集》216（2025），第10期。[12] B. S. Kashin 和 A. A. Saakyan，《正交级数》，《数学专著译丛》第75卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1989年。Ralph P. Boas 由俄文译出；Ben Silver 负责译文编辑。MR 1007141 [13] A. Kolmogoroff 和 D. Menchoff，关于正交函数级数的收敛，《数学杂志》 **26** 1927 1, 432 441, 10 1007 01475463 1544864 （），第–期。DOI . /BF [14] **4** 1923（法文）。MR D. E. Menshov，论正交函数级数 I，《基础数学》（），82–105（俄文）。[15] Ferenc Móricz，关于任意排列项序下傅里叶级数的收敛，《塞格德数学科学学报》31（1970），33–41。MR271617[16] Saburô Nakata，关于平方可积函数重排傅里叶级数的发散，《塞格德数学科学学报》 **32** 1971 59 70 0435711 （），–。MR 关于重排三角级数的发散，《东北数学杂志》（第2辑）27（1975），第 2, 241 246, 10 2748 1178240990 407519 期。DOI . /t [17] mj/ . MR 关于沃尔什级数的无条件收敛，《分析数学》5（1979），第3期，201–205，DOI 10 1007 01908903 549237 . /BF（英文，附俄文摘要）。MR [18] 关于重排沃尔什级数的发散，《东北数学杂志》（第2辑）24（1972），275–280，DOI 10 2748 1178241538 340941 . /tmj/ . MR A. M. Olevskiı，《发散的傅里叶级数》，《苏联科学院通报：数学系列》27（1963），343–366（俄文）。MR[19] 0147834 [20] S. N. Poleščuk，关于正交级数的无条件收敛，《分析数学》7 4，265 1981 275，10 1007 01908218（），第–期。DOI . /BF（英文，附俄文摘要）。MR[21] 646491 [22] Hans Rademacher，关于一般正交函数级数的若干定理，《数学年刊》87（1922），第1-2期，112–138，DOI 10.1007/BF01458040（德文）。MR1512104[23] Károly Tandori，平方可积函数的傅里叶级数实例：其项按某种顺序排列时处处发散，《匈牙利科学院数学学报》15（1964），165–173，DOI 10 1007 01897034 161082 . /BF（德文）。MR 关于沃尔什级数的发散，《塞格德数学科学学报》27（1966），261–263（德文）。MR[24] 208265 [25] P. L. Ul yanov，无条件收敛的韦尔因子，《数学文集》（新系列）60（102）（1963），39–62（俄文）。MR[26] 0145265 [27] ，类 Lp（$p \geq 2$）的发散傅里叶级数，《苏联数学报告》2（1961），350–354。MR0119026[28] ，正交级数无条件收敛的魏尔乘子，《苏联科学院报告》 **235** 1977 5, 1038 1041 0450886 （），第–期（俄文）。MR 无条件收敛的精确韦尔因子，《苏联科学院报告》141（1961），1048–1049（俄文）。MR0132966[29] ，三角级数与正交级数理论中的已解与未解问题，《数学科学进展》 **19** 1964 1 115 3 69 0161085 （），第（），–（俄文）。MR A. N. Kolmogorov 与发散的傅里叶级数，《数学科学进展》38（1983），第4期（232），51–90（俄文）。MR710115 [30] [31]

[32] ———, *D. E. Menshov* 关于正交级数理论的研究′及其后续发展，《莫斯科大学学报·系列I：数学与力学》**4** (1992), 8–24, 101（俄文，附俄文摘要）；英文译本见《莫斯科大学数学通报》**47** (1992), 第4期，8–20页。MR1215456[33] 齐格蒙特·扎霍尔斯基，一个将某个 L^2 类函数的傅里叶级数重排后几乎处处发散，《巴黎科学院纪要》**251** (1960), 501–503（法文）。MR147833

亚美尼亚国家科学院数学研究所，亚美尼亚埃里温市马歇尔·巴格拉米扬大道24/5号，邮编0019电子邮箱：g.karagulyan@gmail.com