arXiv:2601.10415v1 [cond-mat.quant-gas] 15 Jan 2026

论文

飞行时间后相互作用的玻色–爱因斯坦凝聚体的云参数估计

R. M. F. Andersen[1 1], S. Frederiksen[1], L. Stokholm[1], I. Zebergs[1], M. Kristensen[1], C. A. Weidner[2], J. J. Arlt[1]

[1] 复杂量子系统中心，物理与天文学系，奥胡斯大学，Ny Munkegade 120，DK-8000 奥胡斯 C，丹麦。[2] 量子工程技术实验室，H. H. Wills 物理实验室以及电气、电子与机械工程学院，布里斯托大学，BS8 1FD，英国。

电子邮箱： rmfa@phys.au.dk

摘要

有限温度下的玻色-爱因斯坦凝聚体实验通常通过自由膨胀一段时间后的飞行时间图像，提取温度、原子数和凝聚分数等系统参数。本文系统地考察了部分凝聚云中凝聚原子与热原子之间的排斥相互作用对热云膨胀轮廓的影响。只有忽略玻色-爱因斯坦凝聚体与热原子之间的相互作用，才能得到膨胀的解析表达式，此时热组分呈现玻色增强分布。本文通过弹道近似模拟膨胀，研究相互作用导致的云团形变及其对参数估计的影响。通过用玻色增强分布拟合模拟膨胀轮廓，估算了采用这种拟合方法产生的误差，并从现象学角度解释了结果。模拟结果也被用作实验数据的拟合函数；与玻色增强拟合的结果相比，提取出的凝聚分数与半理想模型更加吻合。

1 引言

吸收成像一直是超冷原子物理中最重要的探测技术之一，并在玻色–爱因斯坦凝聚的观测与表征中发挥了核心作用 [1]。尽管应用广泛，准确确定系统参数仍是一项不小的挑战，其系统不确定性既源于实验方面，也源于理论方面的考量 [2, 3, 4]。多年来，人们开发了多种吸收成像变体，以缓解这些局限 [5, 4, 6, 7, 8, 9]。此外，人们还引入了部分转移吸收成像等部分破坏性但共振的技术，从而能够以较小的扰动对原子云进行重复测量 [10]。

一般而言，在吸收成像中，入射到原子云上的共振光会被吸收，形成阴影，随后可用相机对其成像。然而，对受困超冷原子云进行原位 吸收成像时，光学密度往往过高，几乎没有足够的光能够穿透云团。此外，原位云团的空间范围很小，因此需要特殊的成像光学系统才能获得足够的分辨率。因此，标准做法是在成像前释放云团，使其自由落体一段较短的飞行时间。这样会使云团膨胀，从而降低光学密度，实现更精确的测量。关于吸收成像分析和噪声估计的详细讨论，请参见文献 [2, 3, 4]。

为了从吸收成像中提取精确信息（例如原子数和温度），通常需要建立云团在飞行时间内膨胀的模型。对于从谐振子阱中释放出来的理想气体云团而言，这是一个相对简单的问题 [11, 12]，，可以通过解析方法求解。在许多冷原子实验中，这种模型都能提供良好的近似，因为云团的密度足够低，相互作用可以忽略。然而，当玻色气体接近简并并形成不可忽略的玻色-爱因斯坦凝聚体（BEC）组分时，大量

[1]通讯作者。

原子会占据基态，导致密度急剧增加。因此，理想气体假设不再成立，必须将原子间相互作用纳入考虑。

对于同时包含玻色凝聚原子与热原子的云团，可以将热组分近似为理想气体，通常也会忽略两个组分之间的相互作用，从而将玻色-爱因斯坦凝聚体与热原子解耦。然而，高密度凝聚原子不符合理想气体假设，会与所有原子（包括热原子）发生相互作用。这使系统变得更加复杂，甚至无法解析地获得自由膨胀的近似解。本文采用数值模型，估算这些相互作用对热云膨胀的影响，具体考察两个关键参数：温度（T）和热原子数（N_{th}） [13]。

本文结构如下。第 2 节回顾纯热云和纯玻色-爱因斯坦凝聚体的膨胀。接下来的第 3 节讨论部分凝聚云膨胀的模拟，其中包括凝聚原子与云团中其他原子相互作用时产生的阱内力。第 4 节讨论典型吸收成像中未考虑这些相互作用所产生的误差；第 5 节则说明该模型可用于拟合实验数据，并提取更准确的温度和原子数。第 6节总结全文。

2 自由膨胀的纯热云与玻色-爱因斯坦凝聚体

本节简要回顾纯热云和纯玻色-爱因斯坦凝聚体的自由膨胀，以及用于从云团图像中提取信息的拟合技术。本节旨在介绍对部分凝聚云进行建模所需的方法。

2.1 自由膨胀的纯热云

质量为 m 、温度为 T、化学势为 μ 的非相互作用玻色子遵循玻色-爱因斯坦分布 [14]

$$n_{th}(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \frac{1}{\mathrm{e}^{(\mathbf{p}^2/2m+V(\mathbf{r})-\mu)/k_BT}-1}, \tag{1}$$

其中， $n_{th}(\mathbf{r},\mathbf{p})$ 是囚禁势 $V(\mathbf{r})$ 中位置为 $\mathbf{r}$ 、动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子的平均相空间密度。下文假设 $V(\mathbf{r})$ 为具有囚禁频率ω_i的谐势。

空间分布 n_{th} 可通过对动量空间进行积分得到，体积元为 $\mathrm{d}^3\mathbf{p}/(2\pi\hbar)^3$。这里忽略原子之间的相互作用；原子从囚禁势中释放后，膨胀过程是弹道式的。为求得原子密度 $n_{th}(\mathbf{r}\ t)$，必须将飞行时间 t 后原子从阱内云各处到达 $\mathbf{r}$ 的概率求和。具体做法是对所有动量进行积分，并计算具有给定动量 $\mathbf{p}$ 、最终到达 $\mathbf{r}$ 的原子的初始位置，即 $\mathbf{r}-\mathbf{p}t/m$，从而得到

$$\begin{aligned} n_{th}(\mathbf{r},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{(\mathbf{p}^2/2m+V(\mathbf{r}-\mathbf{p}/m\cdot t)-\mu)/k_BT}-1} \\ &= \left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} g_{\frac{3}{2}}\left(\tilde{z}\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{3} x_i^2/2w_i^2}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

其中，$g_{\frac{3}{2}}$ 是定义如下的多对数函数

$$g_\gamma(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^\gamma}, \tag{3}$$

而 $w_i(t) = \sigma_i\sqrt{1+\omega_i^2t^2}$是飞行时间后的宽度，囚禁势中的宽度为 $\sigma_i = \sqrt{\frac{k_BT}{m\omega_i^2}}$，逸度为 $\tilde{z} = \exp($ $\mu/k_BT)$。

方程 (2)描述了一种玻色增强高斯分布，其特点是在低温下具有尖锐中心峰。在高温下，多对数函数展开中只有一阶项有贡献，分布趋近于标准高斯分布。

2.2 自由膨胀的纯玻色-爱因斯坦凝聚体

云团的凝聚部分通常可以用 Gross-Pitaevskii方程 [15, 16, 17]很好地描述。Thomas-Fermi近似忽略了 Gross-Pitaevskii方程中的动能，能够很好地近似描述玻色–爱因斯坦凝聚体的密度分布

在囚禁势中。近似失效的区域与凝聚原子密度最低的区域相吻合（例如 T_c 附近以及云团边缘）。

在此近似下，含有 N_0 个原子的凝聚云的玻色–爱因斯坦凝聚密度 n_0 为 [15]

$$n_0(\mathbf{r}) = \frac{15}{8\pi}\frac{N_0}{R_1R_2R_3}\cdot\Theta\left(1-\sum_{i=1}^{3}\frac{\mathbf{r}_i^2}{R_i^2}\right), \tag{4}$$

其中， Θ 是 Heaviside阶跃函数， $R_i = \sqrt{2\mu/m\omega_i^2}$ 是托马斯-费米半径，而 μ 是化学势，在 Thomas-Fermi近似下由 $\mu = \frac{1}{2}\left(15N_0a/a_{\mathrm{ho}}\right)^{2/5}\hbar\bar{\omega}$ 给出，其中 a 是 s 波散射长度， $a_{\mathrm{ho}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}}$ 是特征谐振子长度，而 $\bar{\omega} = (\omega_1\omega_2\omega_3)^{\frac{1}{3}}$ 是囚禁频率的几何平均值。

在飞行时间内，这种玻色–爱因斯坦凝聚云保持相同的轮廓，但其半径随时间变化，为 [18, 19] $R_i(t) = \lambda_i(t)\cdot R_{i0}$。相对于初始半径的缩放参数 $\lambda_i(t)$ 可通过求解耦合微分方程得到

$$\ddot{\lambda}_i = \frac{\omega_i^2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdot\lambda_i}. \tag{5}$$

这给出了纯玻色-爱因斯坦凝聚体的膨胀过程，通过数值计算即可轻松求得。该方程预言玻色-爱因斯坦凝聚体的纵横比会发生反转，因为沿某一特定轴的膨胀速率与其沿该轴的尺寸成反比 [1]。

2.3 部分凝聚云的解析计算

吸收成像只能获得云团的二维柱密度 $\tilde{n}(x_1,\ x_2,\ t) = \int n(\mathbf{r}\ t)\mathrm{d}x_3$，而无法获得完整的三维分布。对于玻色-爱因斯坦凝聚体，将方程（4）沿 x_3 积分得到的柱密度为

$$\tilde{n}_0 = \frac{5}{2\pi}\frac{N_0}{R_1R_2}\cdot\Theta\left(1-\sum_{i=1}^{2}\frac{x_i^2}{R_i^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{6}$$

其中省略了 R_i 的显式时间依赖性。

必须假设 $\tilde{z}=1$ 在 $T<T_c$时成立，其中 T_c 是囚禁理想气体的临界温度 [20], ，才能得到热分布的解析近似，因为 μ取正值时（如下面的托马斯-费米表达式所预测的） T_c，多对数函数会发散。因此， μ 只有采用半理想模型才能纳入考量，详见下一节；该模型的飞行时间膨胀没有已知的解析表达式。将方程（2）沿 x_3 积分，并将表达式归一化至热原子数 N_{th}，即可得到热云柱密度的近似表达式：

$$\tilde{n}_{th} = \frac{N_{th}}{2\pi w_1w_2}\frac{1}{g_3(1)}\cdot g_2\left(\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{2}x_i^2/2w_i^2}\right). \tag{7}$$

这些方程假设云团的热组分和凝聚组分之间没有相互作用，可用于拟合飞行时间后双峰云的实验图像。

在我们的实验中，拟合按如下方式进行。在以云团为中心、位于半径为 $1.2R_i$ 的椭圆之外且位于半径为 $3w_i$的另一椭圆之内的区域中，对云团的热组分进行拟合，然后从总密度分布中减去该组分；接着使用方程（6）拟合半径为 $1.2R_i$的椭圆内剩余的原子。拟合进行两次：第一次用于估计各区域的大小，第二次用于提取 N_{th}、 T和 N_0。根据各个方向上的拟合宽度提取温度，得到两个数值 T_1 和 T_2 ，对二者取平均以获得 $T = \frac{1}{2}(T_1+T_2)$。

3 部分凝聚云团膨胀的模拟

由于密度较高，玻色-爱因斯坦凝聚原子会影响热原子的分布。这可以通过原子间 s-波散射的平均场近似来建模，从而在势能 [21, 22, 23] 中引入额外项

$$V_0 = V + 2U_0n_{th}, \tag{8}$$
$$V_{th} = V + 2U_0(n_{th}+n_0), \tag{9}$$

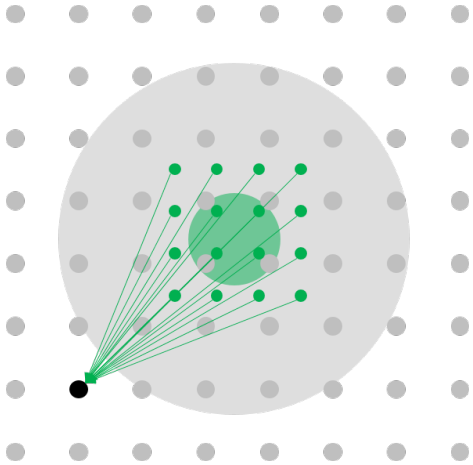

图 1：飞行时间后热云分布计算方法示意图。初始云团和初始网格以绿色（小）表示。最终云团和膨胀网格以灰色（大）表示。膨胀网格中的一个黑点被突出标示。为计算该点处的原子密度，对于每个初始网格点，计算粒子从该点出发并以恰当的动量到达黑点的概率，然后将这些概率相加。对所有膨胀网格点重复这一过程，即可得到热原子分布。此处所示网格和云团仅用于说明该方法。这里并未假设云团为球形，计算是在三维空间中进行的。

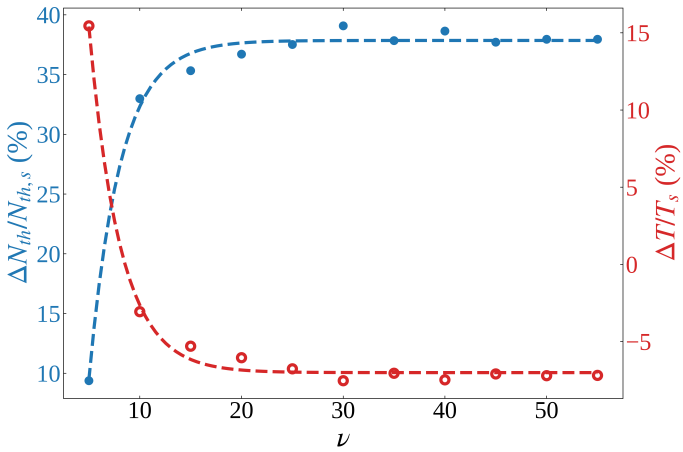

图 2：热原子数（•）和温度（）的相对误差随网格尺寸 ν 变化的关系，其中 ξ 60 保持不变，云参数采用正文中指定的数值。指数拟合仅用于引导观察。

其中， V_0 是玻色-爱因斯坦凝聚原子所感受到的势， V_{th} 是热原子所感受到的势。玻色-爱因斯坦凝聚原子对凝聚体自身产生的力已纳入托马斯–费米模型。这里， $U_0 = 4\pi\hbar^2 a/m$ 是相互作用能。由于热原子密度较低，可以从两个有效势中忽略项 $2U_0 n_{th}$ 。结果是玻色–爱因斯坦凝聚云不受影响，而热云则被凝聚体排斥，远离陷阱中心。

下文将在忽略囚禁势关闭后相互作用的情况下，求解释放后的热云膨胀，从而得到弹道膨胀。实际上，两个组分之间的相互作用会随着它们膨胀而迅速减弱，而不会突然消失。

随时间变化的热云分布仍由对动量空间积分得到

$$
\begin{aligned}
n_{th}(\mathbf{r},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{(p^2/2m + V_{\mathrm{eff}}(\mathbf{r},\mathbf{p},t))/k_B T} - 1}, \\
V_{\mathrm{eff}}(\mathbf{r},\mathbf{p},t) &= V(\mathbf{r} - \mathbf{p}/m \cdot t) + 2U_0 n_0(\mathbf{r} - \mathbf{p}/m \cdot t) - \mu \\
&= |\mu - V(\mathbf{r} - \mathbf{p}/m \cdot t)|,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

但是，与方程（2）不同，这个积分无法解析求解。

用于模拟膨胀的云参数以下标 s表示。我们按如下方式数值计算飞行时间后的分布。首先，选定物理参数 N_s、 T_s和飞行时间 t ，其中$N_s = N_{0,\ s} + N_{th,\ s}$ 为原子总数，囚禁势的频率为 ω_{i}。然后，定义一个用于计算飞行时间后云分布的 $\nu \times \nu \times \nu$ 膨胀网格

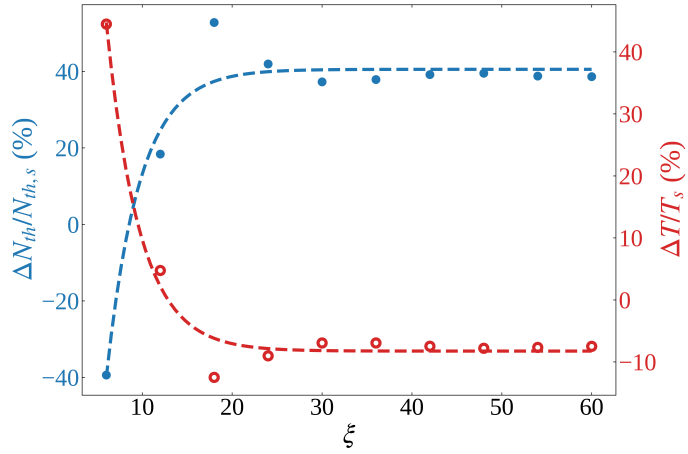

图 3：热原子数（•）和温度（）相对于网格尺寸 ξ 的相对误差，其中 $\nu = 40$ 保持不变，云参数如正文所述。指数拟合作为视觉参考。

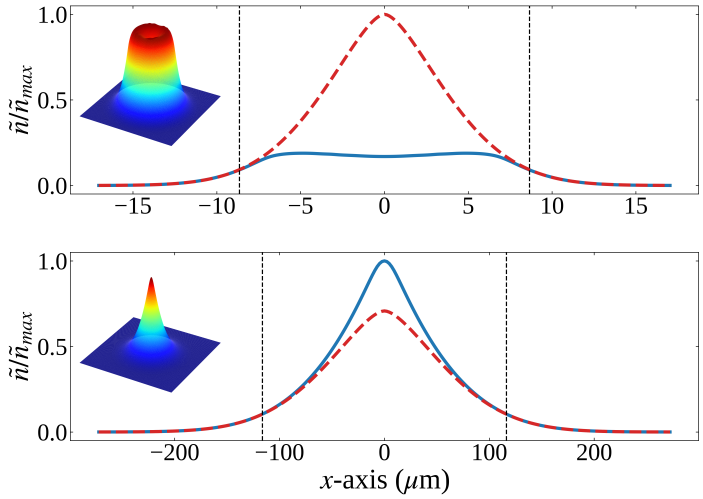

图 4：球形囚禁构型下的热柱密度，其中 $N_s = 200\,\mathrm{k}$、$T_s/T_{c,\,s} = 0.2$、$\omega_i = 2\pi \cdot 100\,\mathrm{Hz}$ 和 $N_{0,\,s}/N_s = 0.97$，对应两种不同的飞行时间，并以最高柱密度归一化。两幅图中的 x 轴经过重新缩放。图中未绘出玻色-爱因斯坦凝聚分布及其拟合。上图的飞行时间为 $t = 1\,\mathrm{ms}$，下图为 $t = 30\,\mathrm{ms}$。模拟柱密度中心处的切片以蓝色实线表示；对模拟数据进行玻色增强拟合后所得的拟合曲线中心处切片（拟合时排除了由竖直虚线标示的玻色-爱因斯坦凝聚区域）以红色虚线表示。两幅图中的插图显示了模拟柱密度。

其中 ν 为正整数。网格范围定义为非相互作用模型计算得到的热云飞行时间后的宽度的四倍。此外，在 $t = 0$ 时刻围绕阱内云定义一个 $\xi \times \xi \times \xi$ 网格，称为初始网格，其中 ξ 也为正整数，网格范围为云在囚禁势中的宽度的四倍。

原子从初始网格中的某一点移动到**动量** p 在式（10）**中，原子在飞行时间** $_0$,内从初始网格中的一点 r t 移动到膨胀网格中的一点 r，其动量p 由（r /tr）给出。对膨胀网格中的每个点，将初始网格上的值求和，以数值计算该积分。图 1展示了这种方法。最后，对沿 的网格点求和，以计算柱密度 。

通过对设置了最高数值计算需求的云团采用不同网格大小进行计算，可以确定所需的网格大小 ν 和 ξ 。该云团对应的参数为 $N_s = 10^6$、$T_s = 0.3\ T_{c,\,s}$、$t = 3$毫秒、$\omega_x = 2\pi \cdot 10$ 赫兹以及 $\omega_{y,\,z} = 2\pi \cdot 100$ 赫兹。将模拟得到的热分布与飞行时间后的理论玻色-爱因斯坦凝聚分布相加，得到总分布。使用第 2.3 节所述的算法对该分布进行拟合，并将提取出的热原子数 N_{th} 和温度 T 与模拟的输入值进行比较，得到误差 $\Delta N_{th} = N_{th} - N_{th,\,s}$ 和 $\Delta T = T - T_s$，其中下标 s表示模拟值。相对误差随网格尺寸 ν 的变化如图所示

见图 2 ，其中 $\xi = 60$ 保持不变。类似地，图 3 显示了相对误差随初始网格大小的变化，其中 $\nu = 40$ 保持不变。需要特别指出的是，使用第 2.3节中针对非相互作用云的函数拟合模拟结果时，原子数和温度均出现了显著误差。这一点将在以下各节中详细讨论。不过，两幅图都清楚地表明，当网格大小足够大时，估计误差会收敛；因此，在本文的其余部分采用 $\nu = 40$ 和 $\xi = 60$ 。如果以速度为优化目标，这两个选择都可以适当放宽。计算复杂度按 $\mathcal{O}(\nu^3 \cdot \xi^3)$ 缩放。因此，计算在 GeForce GTX 1050 Mobile 显卡上并行执行。

为降低模拟的复杂度，假设系统具有圆柱对称性，因为三个囚禁频率中至少有两个通常相等。这意味着可以在二维空间中计算飞行时间后的云的空间分布，并利用旋转对称性获得三维分布。这里采用了这一假设，而且它通常适用于玻色-爱因斯坦凝聚体的实验实现。在这一假设下，云团形状分为三类：如果两个相等的频率大于剩余频率，则为雪茄形云 [24, 25, 26, 27, 28, 29] ；如果两个相等的频率小于剩余频率，则为煎饼形云 [30, 31, 32],；如果所有频率都相同，则为球形云。利用绕两个轴的旋转对称性，可以更加高效地模拟球形云。在所有这些情况下，只需计算正象限（$x_i \geq 0$、$i = 1$，2、3）中的分布。

此类模拟的结果如图 4 所示。图中展示了模拟热云柱密度中心处的剖面，未显示玻色-爱因斯坦凝聚密度。在较短的飞行时间（上图）下，玻色-爱因斯坦凝聚体对热云的排斥效应最为明显，此时热云柱密度中心出现凹陷。此外，还展示了根据第 2.3 节所述算法拟合得到的玻色增强柱密度。虽然这些拟合在翼部与数据吻合良好，但在中心处差异显著。飞行时间为 1ms 时，由于玻色-爱因斯坦凝聚体的排斥作用造成翼部变宽，拟合得到的温度偏高，相对误差为 7.2%。同样，原子数也被高估了 64.5%，因为热云拟合未考虑中心处的密度凹陷。经过 30ms 飞行时间后，部分热原子填充了中间的空洞，此时云团的峰值柱密度略高于玻色增强分布。在这种情况下，温度拟合的相对误差为 -1.3%，原子数拟合的相对误差为 -16.9%。请注意，此时误差符号反转，这是因为模拟分布现在比玻色增强分布更加尖锐。

4 原子数和温度误差

上述分析为本节中广泛参数范围的误差估计提供了依据。如上所述，飞行时间后的分布是针对特定的$N_s = N_{0、s} + N_{\mathrm{th}、s}$和 T_s 以及拟合的，并根据第2.3 节进行拟合，以提取 N_{th} 和 T。误差再次由$\Delta N_{th} = N_{th} - N_{th、s}$和 $\Delta T = T - T_s$给出。

图 5 展示了不同云团和陷阱参数下热原子数测定的误差。对于三种不同的阱几何形状（雪茄形陷阱，$\omega_x = 10\mathrm{Hz}$、$\omega_{y、z} = 100\,\mathrm{Hz}$；球形阱，$\omega_{x、y、z} = 100\,\mathrm{Hz}$；煎饼形陷阱，$\omega_x = 1000\mathrm{Hz}$、$\omega_{y、z} = 100\,\mathrm{Hz}$）和两种不同的飞行时间（$t = 3\,\mathrm{ms}$；$t = 30\,\mathrm{ms}$），相对误差$\Delta N_{th}/N_{th}$，$_s$ 表示为总原子数和约化温度$T_s/T_{c、s}$的函数。误差为正表示玻色增强拟合函数（公式（7））高估了结果。

图5 中的两列展示了短（左）飞行时间与长（右）飞行时间的差异。较长的飞行时间通常会减小误差幅度，但误差不会趋近于零。从短飞行时间到长飞行时间，误差的符号会反转，因为与玻色增强分布相比，热云会从更扁平逐渐转变为更尖峰的形状，如图4所示。

热原子数的误差对原子数的依赖较弱，因为热分布的宽度与原子数无关，而随着原子数增加，玻色-爱因斯坦凝聚体的尺寸仅缓慢增大，这是因为托马斯-费米半径与 $N_0^{1/5}$ 成正比。相反，温度与玻色-爱因斯坦凝聚体的尺寸关系更直接，因此影响要大得多。此外，温度降低会使热云宽度减小，同时增加两个组分之间的重叠。在 $T_s = T_{c,\ s}$ 时，由于没有凝聚原子，误差始终为零，且玻色增强拟合能够完美地拟合模拟结果。

拟合热分布时，会排除 BEC 周围的区域。因此，BEC 区域越大，对热分布中原子数的估计就越不准确。在较长的飞行时间下，BEC 的大小与其在囚禁势中的大小成反比。对于非对称囚禁势，囚禁频率最小的方向通常

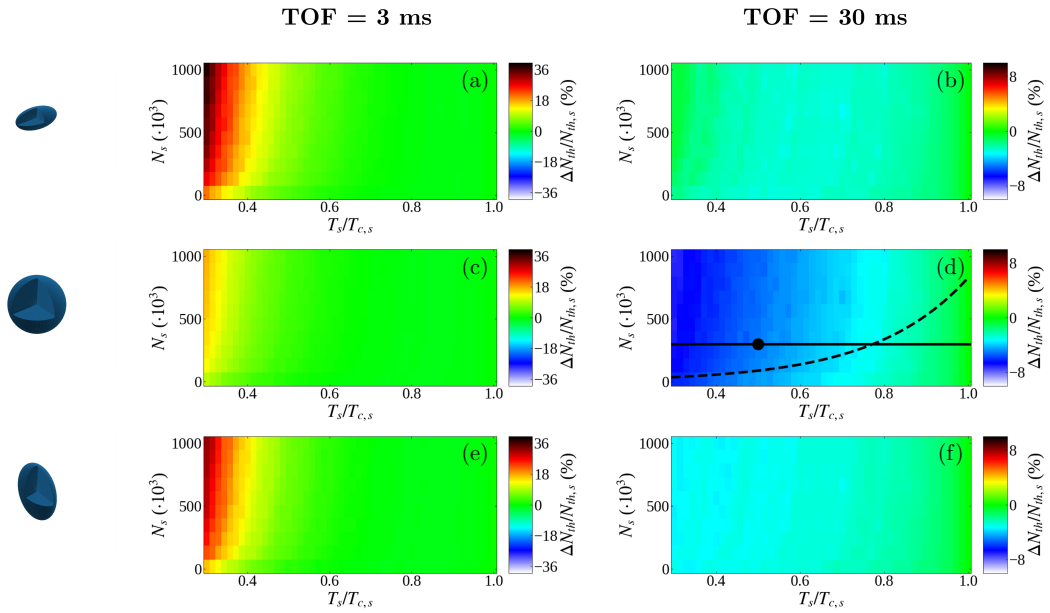

图 5：不同囚禁构型和飞行时间下，热原子数估算误差随约化温度 $T_s/T_{c,\,s}$ 及总原子数的变化。（a）雪茄形：$\omega_x = 2\pi \cdot 10$ Hz、$\omega_{y,\,z} = 2\pi \cdot 100$ Hz 和 $t = 3$ms。（b）雪茄形：$t = 30$ms。（c）球形：$\omega_{x,\,y,\,z} = 2\pi \cdot 100$ Hz 和 $t = 3$ms。（d）球形：$t = 30$ms。（e）煎饼形：$\omega_x = 2\pi \cdot 1000$ Hz、$\omega_{y,\,z} = 2\pi \cdot 100$Hz 和 $t = 3$ ms。（f）煎饼形：$t = 30$ ms。实线、虚线和实心圆分别表示在图 7、图 8 和图 9 中进一步研究的区域。

膨胀很小，因此有利于准确测定原子数。然而，对于处于球形阱中的云团，在经过一定的飞行时间后成像时，通常存在一个温度（相当于化学势），使得 BEC 的大小接近热云的大小。这可以解释图中所示的规律。5 在较长的飞行时间下，球形云中热原子数的误差大于两种非对称云团中的误差。

图 6 显示了在与图 5相同的参数下，温度估算误差的情况。对于此处模拟的所有参数，相对温度误差均在 ±10% 以内。与原子数误差类似，温度误差对原子数的依赖较弱，而对温度的依赖则稍显显著。一个特别有趣的情况是球形短飞行时间示例，它显示出低温下误差符号发生反转。原因与图 4中所示的符号反转相同。飞行时间为$t = 3$毫秒 时，足以使中等低温下的误差符号反转；但对于最冷的云团，则需要更长的飞行时间才会发生反转。有趣的是，这意味着存在误差为零的区域。在球形长飞行时间图中也能看到同样的效应：对于最冷的云团，$t = 30$毫秒 还不足以使误差完全反转。

总体而言，不同阱几何形状下温度误差的变化规律，大致与热原子数误差的规律相反。可以通过以下论证来理解这一点。玻色-爱因斯坦凝聚体膨胀后的尺寸越小，热云拟合函数就越能覆盖云团中央变形最明显的区域。虽然这能更准确地估算拟合曲线下方的面积，从而降低热原子数误差，但也要求本质上不正确的玻色增强拟合函数去适应云团中央区域的形状。因此，在忽略玻色-爱因斯坦凝聚体排斥力时，球形云团最适合用于估算云团温度，却最不适合用于估算原子数。

针对选定范围内的参数，进一步探讨了原子数和温度的误差。图5(d)和6(d)中的虚线表示典型的蒸发冷却轨迹，该轨迹会同时降低原子数和温度。作为比较，图中还展示了一条假设的原子数恒定为 $3 \cdot 10^5$ （实线）的轨迹。图7 展示了这两种情况下原子数和温度的相对误差随温度的变化。对于这两条轨迹，热原子数的低估程度都会随着温度降低而增大，最高达到 $\approx 7\%$。类似地，随着温度降低，温度也会被低估；不过，当温度为$T_s/T_{c,\,s} = 0.8$ 时，低估程度达到最大值 $\approx 6\%$，随后在所研究的最低温度下回落至约 $\approx 3\%$的中等低估程度。请注意，这两条轨迹不会导致显著差异。

飞行时间对相对误差的影响将在图中进一步详细探讨。8

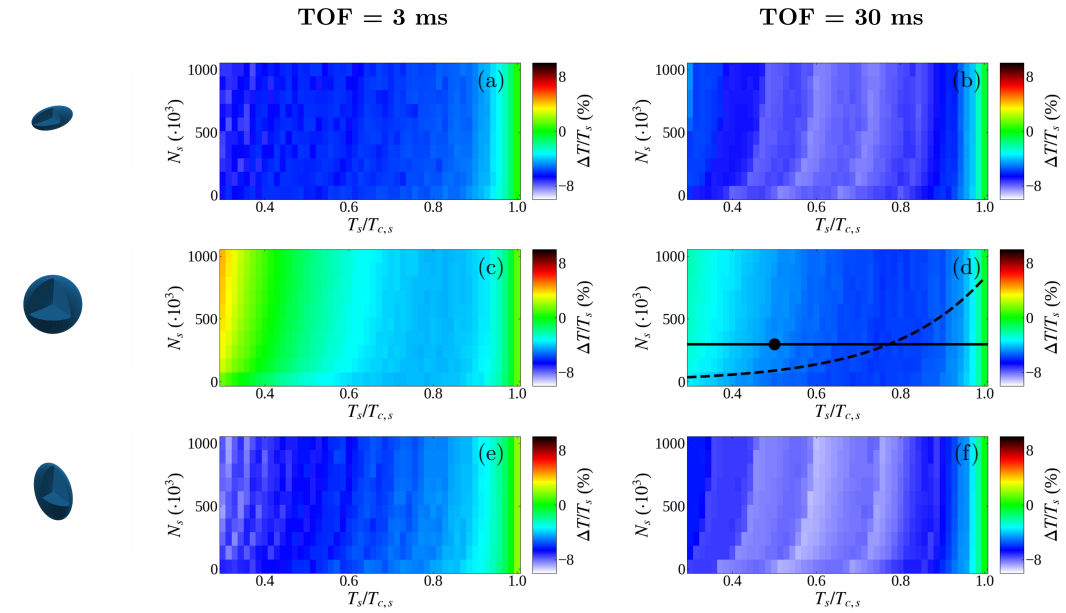

图 6：不同囚禁构型和飞行时间下，温度估算误差随约化温度 $T_s/T_{c,s}$ 和总原子数的变化。参数与图 5 中相同，具体如下：(a) 雪茄形：$\omega_x = 2\pi \cdot 10\,\mathrm{Hz}$、$\omega_{y,z} = 2\pi \cdot 100\,\mathrm{Hz}$ 和 $t = 3\,\mathrm{ms}$。(b) 雪茄形：$t = 30\,\mathrm{ms}$。(c) 球形：$\omega_{x,y,z} = 2\pi \cdot 100\,\mathrm{Hz}$ 和 $t = 3\,\mathrm{ms}$。(d) 球形：$t = 30\,\mathrm{ms}$。(e) 煎饼形：$\omega_x = 2\pi \cdot 1000\,\mathrm{Hz}$、$\omega_{y,z} = 2\pi \cdot 100\,\mathrm{Hz}$ 和 $t = 3\,\mathrm{ms}$。(f) 煎饼形：$t = 30\,\mathrm{ms}$。实线、虚线和实心圆分别标示在图 7、8 和 9 中进一步探究的区域。清晰可见、近乎垂直的条纹是数值不确定性造成的伪影，参数估计误差在小于 1% 的范围内振荡。

对于图中实心圆所示的参数5(d) 和6(d)，相对原子数误差随膨胀时间迅速减小，并收敛至 $\approx -5\%$。相反，相对温度误差先增大，随后在稍慢的时间尺度上收敛至 $\approx -4.5\%$ 。这与图6(d) 中观察到的行为一致：低温下温度误差的符号会反转；而在图5(d) 中，原子数误差的符号在 $t = 30\mathrm{ms}$时已经反转。重要的是，膨胀时间很长时，误差并不会收敛至零，因为玻色-爱因斯坦凝聚体会改变热原子所占据的能级，进而改变动量分布。这会影响云团在所有飞行时间下的膨胀，导致膨胀速度减慢，因而低估温度。

最后，通过改变纵横比，在其他参数保持不变的情况下，研究囚禁几何形状的影响，如图9所示。热原子数的误差在两个极端情况下都较小，在中间最大，此时云团呈球形；而温度误差则呈现相反的趋势。这再次表明，球形云最适合进行温度估算，但不适合测定热原子数。

5 部分凝聚云的双模拟合

膨胀模拟也可用于拟合程序，以便从实验数据中更准确地获得热原子数和温度。拟合方法遵循第2.3节所述的相同步骤，不同之处在于热分布由模拟提供。下文将此类拟合的表现与根据公式（7）使用玻色增强函数进行的拟合进行比较。由于玻色-爱因斯坦凝聚体和热组分是独立拟合的，在云团膨胀模拟中使用半理想模型，并不能保证玻色-爱因斯坦凝聚体分数会随温度呈现理论预期的变化 [21]。

用于制备部分凝聚玻色-爱因斯坦凝聚体的实验装置此前已有详细描述 [33]。简而言之，^{87}Rb原子首先在Ioffe-Pritchard型磁阱中通过射频（RF）蒸发进行冷却。为稳定超冷云的制备过程，冷却过程在温度为 $\sim 14\ \mu$K时中断，并使用微破坏性的法拉第成像对原子云进行探测 [34, 35]。根据探测结果，通过移除多余原子来校正原子数。随后，对磁阱进行解压缩，使径向和轴向囚禁频率分别达到 $\omega_\rho = 2\pi \times 93.4$Hz和 $\omega_z = 2\pi \times 17.7$Hz。最后，通过施加射频扫描制备玻色-爱因斯坦凝聚体，从而获得所需的平均玻色-爱因斯坦凝聚体占据数。

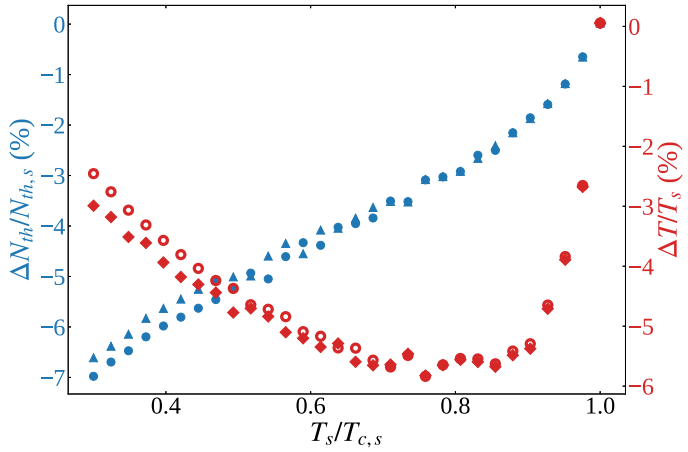

图 7：不同温度下热原子数相对误差和温度误差。模拟展示了球形阱在 $N_s = 3 \cdot 10^5$ 和 $t = 30$毫秒时的结果。●- 和 ▲-标记分别表示沿恒定原子数轨迹和实验蒸发轨迹的热原子数误差，而 - 和 ◆-标记分别表示沿恒定原子数轨迹和实验蒸发轨迹的温度误差。两条轨迹均见图 6（d）。

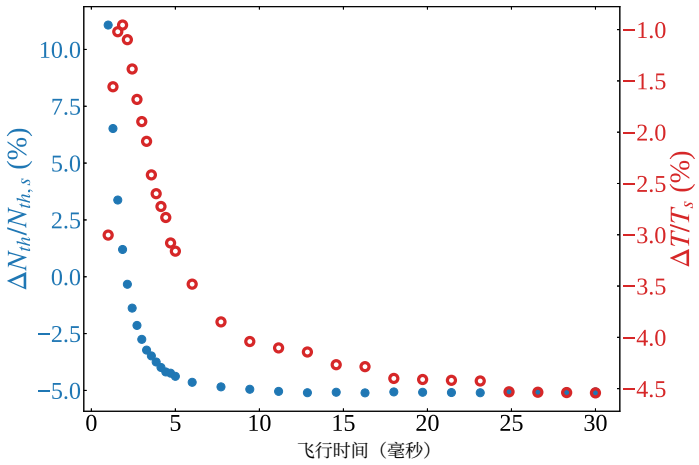

图 8：来自球形阱的热原子数相对误差（●）和温度误差（ ），对应不同的飞行时间。模拟在 $N_s = 3 \cdot 10^5$ 和 $T_s/T_{c,\ s} = 0.5$下进行。

部分凝聚云在经过27.5ms 的飞行时间后，使用吸收成像进行探测。为准确探测高密度云团的密度分布，成像系统按照文献 [2, 4] 进行了校准，并采用了 $I = 2.3\ I_{\text{sat}}$ 的强度。

使用飞行时间后的模拟分布进行一次拟合约需十分钟，因此拟合是在一个较小的数据集上进行的，该数据集包含五个不同最终射频频率下的六至八张图像。为便于比较，也使用玻色增强函数拟合了相同的图像。图 10 展示了两种拟合技术的结果：将提取出的 BEC 分数作为约化温度的函数绘出，并与半理想模型 [21]进行比较。模拟云团的拟合结果与半理想模型高度吻合，表明该技术能够带来显著改进。相比之下，完全忽略 BEC 排斥力的玻色增强拟合函数显著低估了温度，同时略微高估了 BEC 分数。不过需要注意的是，即使模拟也忽略了飞行时间期间的相互作用，这或许可以解释剩余的微小差异。

6 结论

部分凝聚的玻色-爱因斯坦凝聚体中，凝聚原子与热原子之间的排斥相互作用会重塑热分布，并改变云团在飞行时间过程中的膨胀轮廓。若不考虑这一点，温度和原子数的估算就会出现误差。由于无法通过解析方法计算部分凝聚云的膨胀，因此需要对这一膨胀过程进行数值模拟。在本文所述的模拟中，考虑了囚禁势中的相互作用，同时假设在

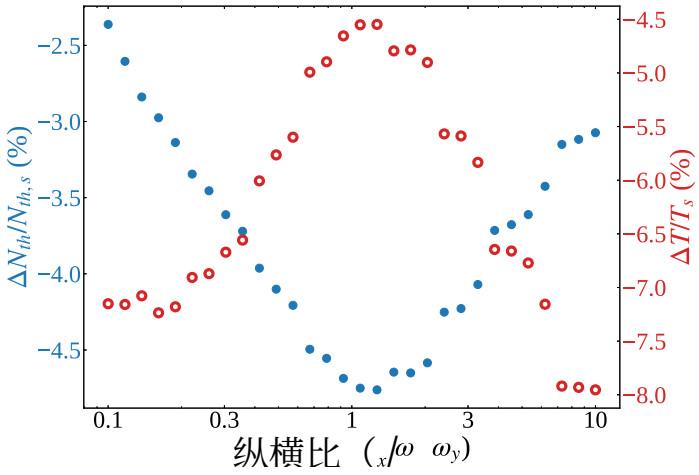

图 9：不同囚禁势纵横比下相对热原子数（•）和温度（）的误差，其中纵横比的几何平均值保持不变。模拟在 $N_s = 3 \cdot 10^5$, T_s/T_c、$_s = 0.5$ 和 $t = 30$ 毫秒时进行。

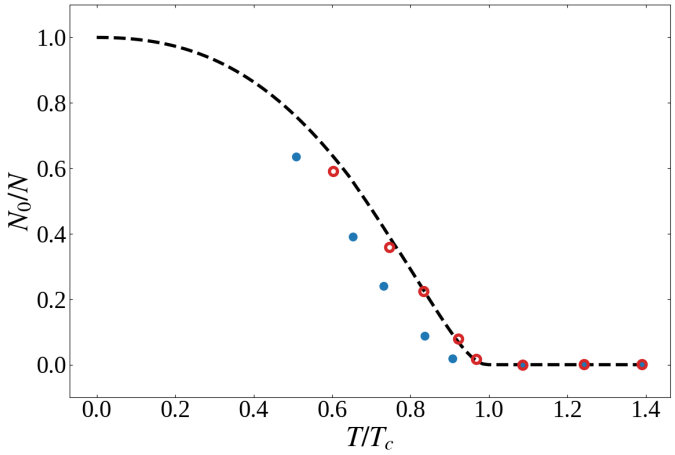

图 10：BEC 分数随约化温度 T/T_c 的变化。将采用公式（7）中的玻色增强分布进行解析拟合的结果（•）以及采用模拟分布进行拟合的结果（）与半理想模型 [21] 进行比较。每个数据点是 6 至 8 次拟合的平均值。平均值的不确定度过小，无法在图中看出。

飞行时间过程中发生弹道膨胀。为了模拟实验情形，随后使用玻色增强函数对这些模拟结果进行拟合，以获得原子数和温度。模拟输入值与提取参数之间的差异，可用于估算实验实现中通常产生的误差。

我们的模拟表明，即使飞行时间较长，这些误差仍然显著；总体而言，它们取决于云团温度、囚禁几何形状，而对云团中原子总数的依赖较弱。我们对误差中观察到的规律给出了一种唯象解释。膨胀后 BEC 的大小决定了可用于拟合热云的区域。使用玻色增强拟合函数估算热原子数通常会受益于较大的拟合区域，而能够选取靠近云团中心的拟合区域，则可能导致显著的温度误差。因此，这两个参数的估算存在权衡，具体取决于飞行时间和囚禁构型。我们的方法可用于为采用玻色增强拟合函数的实验提供系统误差估计

此外，我们的模拟还可用作实验数据的拟合模型。将这种拟合应用于玻色-爱因斯坦凝聚转变附近超冷云的实验图像后，结果表明，提取出的参数与半理想模型的符合程度显著优于玻色增强拟合 [21] 。使用模拟对每个云团进行拟合，在单张显卡上约需十分钟。因此，它比玻色增强拟合慢得多，但借助适当的硬件，可以实时分析实验数据。重要的是，该模型因此可用于在部分凝聚云实验中获得精度更高的云参数。

模拟未考虑飞行时间内的相互作用。这些效应将在未来的工作中研究，但这需要采用根本不同的方法，因为弹道膨胀模型已不再适用。

致谢
作者感谢 Adam Simon Chatterley 提供的宝贵讨论。我们感谢丹麦国家研究基金会通过卓越中心“CCQ”（DNRF152）提供的支持，以及诺和诺德基金会 NERD资助（资助编号 NNF22OC0075986）提供的支持。C.W. 感谢英国工程与自然科学研究委员会（资助编号 EP/Y004728/1）的支持。

参考文献

[1] Ketterle W, Durfee D S and Stamper-Kurn D 1999 制备、探测和理解玻色-爱因斯坦凝聚体（IOS Press）第 67–176 页

[2] Reinaudi G, Lahaye T, Wang Z and Guéry-Odelin D 2007《光学快报》**32** 3143–31 45

[3] Veyron R, Mancois V, Gerent J B, Baclet G, Bouyer P and Bernon S 2022 《物理评论研究》4033033

[4] Vibel T, Christensen M B, Kristensen M A, Thuesen J J, Stokholm L N, Weidner C A 等人 d Arlt J J 2024《物理学杂志*B*：原子、分子与光学物理》

[5] Hueck K, Luick N, Sobirey L, Siegl J, Lompe T, Moritz H, Clark L W 和 Chin C 2017 《光学快报》**258**670–8679

[6] Szczepkowski J, GartmanR, Witkowski M, Tracewski L, Zawada M 和 GawlikW 2009 《科学仪器评论》 **80**

[7] Muessel W, Strobel H, Joos M, Nicklas E,Stroescu I, TomkovičJ, Hume DB 和 Oberthaler M K 2013 《应用物理*B*》 **113**69–73

[8] Genkina D、Aycock L、Stuhl B、Lu H I、Williams R 和 Spielman I，2015年新期刊 *o f* 物理学 **18**013001

[9] Putra A, Campbell D L, Price R M, De S 和 Spielman I 2014《科学仪器评论》**85**

[10] Ramanathan A, Muniz S R, Wright K C,Anderson R P, Phillips W D, Helmerson K 和 Campbell G K 2012 《科学仪器评论》**83** 083119 网址 https://pubs.aip.org/aip/rsi/article/83/8/083119/358919/Partial-transfer-absorption-imaging-A-versatile

[11] Arora P, Purnapatra S B,Acharya A, Kumar R 和 Sen Gupta A 2012 *MAPAN* **2**731–3 9 ISSN 0974-9853 网址 https://doi.org/10.1007/s12647-012-0003-3

[12] Vibel T, Christensen M B, Andersen R M F, Stokholm L N, Pawłowski K, Rzążewski K, Kristensen M A 和 Arlt J J 2024 《物理学杂志*B*：原子、分子与光学物理》**57**195301 网址 https://dx.doi.org/10.1088/1361-6455/ad7458

[13] AndersenM 2025光谱探测超冷玻色云 博士论文 奥胡斯大学 URL LINK-LINK-LINK-LINK-LINK-LINK-LINK-LINK

[14] Schroeder D V 2014《热物理学导论》 第1版（培生）

[15] Pethick C J 和 Smith H 2008稀薄气体中的玻色-爱因斯坦凝聚 第2版（剑桥）

[16] Gross E P 1961 《新物理学》 **20** 454–477

[17] Pitaevskii L P 1961《苏联物理学—实验与理论物理学杂志》 **13** 451–454

[18] Castin Y 和 Dum R 1996 物理评论快报 **77**5315

[19] Kagan Y, Surkov E L 和 Shlyapnikov G V 1996物理评论 *A***54**(3) R1753–R1756 网址 https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.54.R1753

[20] Bagnato V, Pritchard D E and Kleppner D1987 物理评论 *A* **35**(10) 4354–4358 URLhttps://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.35.4354

[21] Naraschewski M and Stamper-Kurn D M 1998 物理评论 A 58 2423[22] Giorgini S, Pitaevskii L P and Stringari S 1997 物理评论快报 78 3987[23] Griffin A 1996 物理评论 B 53 9341[24] Görlitz A, Vogels J M, Leanhardt A E, Raman C, Gustavson T L, Abo-Shaeer J R, Chikkatur A P, Gupta S, Inouye S, Rosenband T and Ketterle W 2001 物理评论快报 87(13) 130402 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.130402[25] Schweikhard V, Coddington I, Engels P, Mogendorff V P and Cornell E A 2004 物理评论快报 92(4) 040404 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.040404[26] Burger S, Cataliotti F S, Fort C, Maddaloni P, Minardi F and Inguscio M 2002 欧洲物理学快报 57 1 URL https://doi.org/10.1209/epl/i2002-00532-1[27] Hadzibabic Z, Stock S, Battelier B, Bretin V and Dalibard J 2004 物理评论快报 93(18) 180403 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.180403[28] Andrews M R, Kurn D M, Miesner H J, Durfee D S, Townsend C G, Inouye S and Ketterle W 1997 物理评论快报 79(4) 553–556 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.553[29] Ferioli G, Pancaldi S, Glicenstein A, Clément D, Browaeys A and Ferrier-Barbut I 2024 物理评论快报 132(13) 133601 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.132.133601[30] Rychtarik D, Engeser B, Nägerl H C and Grimm R 2004 物理评论快报 92(17) 173003 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.173003[31] Hammes M, Rychtarik D, Nägerl H C and Grimm R 2002 物理评论 A 66(5) 051401 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.66.051401[32] Smith N L, Heathcote W H, Hechenblaikner G, Nugent E and Foot C J 2005 《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》 38 223 URL https://doi.org/10.1088/0953-4075/38/3/007[33] Christensen M B 2020 相互作用玻色-爱因斯坦凝聚体中的微正则涨落 Ph.D. thesis 奥胡斯大学[34] Gajdacz M, Pedersen P L, Mørch T, Hilliard A J, Arlt J and Sherson J F 2013 《科学仪器评论》 84 083105 ISSN 0034-6748 (Preprint https://pubs.aip.org/aip/ rsi/article-pdf/doi/10.1063/1.4818913/14781030/083105_1_online.pdf) URL https://doi.org/10.1063/1.4818913[35] Kristensen M A, Gajdacz M, Pedersen P L, Klempt C, Sherson J F, Arlt J J and Hilliard A J 2017 《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》 50 034004 URL https://dx.doi.org/10.1088/1361-6455/50/3/034004