arXiv:2601.10419v1 [math.RA] 15 Jan 2026

关于规范 构造单李超代数 S

J. DHAMOTHIRAN 和 SAUDAMINI NAYAK

Abstract. V. Serganova 定义并分类了根系推广的公理（不可约情形），这些公理与基本经典李超代数的根系精确对应。本文介绍一种统一的方法，从抽象根系构造单李超代数，并选择各向同性根数目最少的基。

1. 引言 Introduction

给定一个复半单李代数 $\mathfrak{g}$，固定一个嘉当子代数即可得到根空间分解。在此过程中，对每个 $\mathfrak{g}$，都可以关联一个称为根系的对象，该对象由其对应的嘉当矩阵和 Dynkin 图分类。因此，复半单李代数可由其 Dynkin 图分类；这些成果是 E. Cartan 和 W. Killing 在 1890 至 1900 年间取得的。此后，根系因其丰富的代数结构和组合结构而受到广泛且独立的研究。

与此同时，从一个根系出发，自然会想到如何找回相应的半单李代数。1966年，J. Tits 通过在 Chevalley整基中巧妙地选择符号，实现了这一点；J. P. Serre 则通过对自由李代数取适当的商来定义它。1967年，V. G. Kac 和 R. V. Moody 提出了另一种从广义嘉当矩阵构造单李代数的方法。相应的代数称为 Kac-Moody代数，并且这一方法可推广到任意矩阵。相应地，也可以得到反变李代数。

随后，反变李超代数作为反变李代数的一种推广被引入。1977年，V. G. Kac 对有限维单反变李超代数进行了分类 [5, 6]。一般而言，这些代数接近于单代数，但不一定是有限维的。

本文受 M. Geck [2], 在李代数背景下取得类似结果的工作启发，提出了一种构造单李超代数的统一方法。具体而言，我们将单李超代数构造为一般线性李超代数的一个子代数；一般线性李超代数由复向量超空间 M 上的所有线性映射组成，并具有由根系诱导的齐次 Chevalley 型基。为此，我们从 V. Serganova [9]引入的广义根系（简称 GRS）这一概念出发。在该文中，作者对含有各向同性根的不可约广义根系进行了分类；这些根系与 Kac 列表中的基本经典李超代数的根系一致（但不包括 $A(1,1)$ 和 $B(0,n)$），而这些李超代数属于反变型。

继 Serganova 的工作之后，人们引入了各种根系。例如，M. Yousofzadeh 引入了扩张仿射根超系、 [10], 局部有限根超系， [11]。另一种组合对象——广义反射根系——由 M. Gorelik [3]引入。这些根系通常不是有限的，而不可约有限根系恰好就是不可约 GRS；这一对应关系使得研究 GRS 时有了更大的灵活性。

第2 节介绍了广义根系中根串的一些预备结果 R。在第3 节，我们在一个有限维向量超空间上定义了特定的齐次线性映射 e_i、 f_i 和 h_i 。这些

2020 *Mathematics Subject Classification.* 17B10, 17B22, 17B65.

Key words and phrases. 广义根系，李超代数。

映射满足预期的关系，即单李超代数的 Chevalley生成元应满足的关系。在第4节，我们证明 e_i、f_i 确实生成一个单李超代数 $\mathfrak{g}$，其根系同构于 R。最后，在第5节，我们概述所有不可约广义根系正系的箭图，以强调若干结果。

2. Preliminaries

本节首先回顾广义根系的基本事实； [9]。设 V 是一个带有非退化双线性内积 $(\cdot,\ \cdot)$ 的有限维复向量空间。若有限集 $R \subset V\backslash\{0\}$ 满足以下条件，则称其为广义根系。

(1) R 张成 V 和 $R=-R$; (2) 若 α、$\beta \in R$ 以及 $(\alpha,\ \alpha)\ \neq 0$，则 $(\beta,\ \alpha^\vee) := \frac{2}{(\alpha,\ \alpha)}(\alpha,\ \alpha) \in \mathbb{Z}$ 且 $r_\alpha(\beta) = \beta - (\beta,\ \alpha^\vee)\ \alpha \in R$; (3) 若 $\alpha \in R$ 且 $(\alpha,\ \alpha)\ = 0$，则存在可逆映射 $r_\alpha :\ R \to R$，使得当 $(\beta,\ \alpha)\ = 0$ 时，$r_\alpha(\beta)\ = \beta$，否则 $r_\alpha(\beta) \in \{\beta+\alpha, \beta-\alpha\}$。

设 $R^{im} = \{\alpha \in R : (\alpha,\alpha)\ = 0\}$ 各向同性根 $R^{re} = \{\alpha \in R : (\alpha,\alpha)\ \neq 0\}$, $\alpha^\vee := \alpha$ 对于 $\alpha \in R^{im}$ 和 $\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ 对于 $\alpha \in R^{re}$。由此可知，若 $\alpha \in R^{re}$，则 $(\alpha,\alpha^\vee) = 2$；若 $\alpha \in R^{im}$，则 $(\alpha,\ \alpha^\vee)\ = 0$。

引理 2.1. 若 $\alpha \in R^{im}$，且 $k\alpha \in R$，则 $k = \pm 1$。

证明。对于 $\beta \in R^{re}$，我们有 $(c\alpha, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}$，这意味着 $c \in \mathbb{Z}$。假设 $2\alpha \in R$ 且 $2\alpha - \alpha \in R$，由 (3) 可得 $(2\alpha,\alpha)\ \neq 0$。这与 $\alpha \in R^{im}$ 矛盾。通过归纳法可以证明，没有其他整数倍属于 R。□

引理 2.2. 如果 $\alpha \in R^{re}$ 和 $k\alpha \in R$，那么 $k \in \{\pm 1/2, \pm 1, \pm 2\}$。

证明。由于 $k\alpha \in R^{re}$，则 $(k\alpha,\ \alpha^\vee)\ = \frac{2}{(k\alpha,\ \alpha)}(\alpha,\ \alpha) = 2k \in \mathbb{Z}$ 意味着 k 是 1/2 的整数倍，并且 $(\alpha,\ (k\alpha)^\vee)\ = \frac{2}{(\alpha,\ k\alpha)}(k\alpha,\ k\alpha) = 2/k \in \mathbb{Z}$. 综上，这意味着 $k \in \{\pm 1/2, \pm 1, \pm 2\}$。

□

注记 2.3. 根据该引理，如果 α 是一个根，那么 2α 也可以是一个根。定义 $R_{\bar{1}} = R^{im} \cup \{\alpha \in R^{re} :\ 2\alpha \in R\}$ 和 $R_{\bar{0}} = R\backslash R_{\bar{1}}$. 显然，$\alpha \in R_{\bar{0}}$ 意味着 $\alpha \in R^{re}$ 具有如下性质：$2\alpha \notin R$. 我们有 $R = R_{\bar{0}} \cup R_{\bar{1}}$. 每当 $\alpha \in R_{\bar{j}}$ 时，我们定义 $j \in \mathbb{Z}_2$. 的次数 $\alpha = j$ 对于 $\alpha \in R_{\bar{0}}$ ($\alpha \in R_{\bar{1}}$)，我们称它们为偶根（分别为奇根）。我们还考虑 $\alpha \pm \beta :\ = \alpha + \beta$ 当 $\alpha,\ \beta,\ \alpha \pm \beta \in R$ 时。

广义根系的一个基是 R 的子集 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$，使得任意 $\alpha \in R$ 都能唯一表示为线性组合 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$，其中要么所有 $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，要么所有 $k_i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$；相应地，我们有一个划分 $R = R^+ \cup R^-$，其中 $R^+ = R \cap \mathbb{Z}_{\geq 0} - span\ \Pi$ 是正根集，$R^- = -R^+$ 是负根集。由此，我们在 V 上定义偏序 $\preceq$：若 $\mu - \lambda \in R^+$，则令 $\lambda \preceq \mu$。

如果一个广义根系 R 可以表示为两个非空广义根系 R_1 和 R_2 的直正交和 $V = V_1 \oplus V_2$、$R_i \subseteq V_i$ 和 $R = R_1 \cup R_2$，则称其为可约的。否则，称该系统为不可约。根据不可约广义根系的分类，我们得到了不可约广义根系的完整列表（[9], 定理 5.10）。在本文中，我们设 R 为一个含有各向同性根的不可约广义根系，并设这些根系的一个特选基 Π 如 [1, 4, 5]所示。

$_n$令 $I=\{1,2,\ldots,n\}$ 为 Π的指标集，对于 $i\in I$，我们记 $\bar{i}=\alpha_i$. 对于 $\alpha=\sum k_i\alpha_i\in R^+$或 R，定义高度 $ht(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}k_i$。此外，对于 $\alpha\in R$，我们定义 $sgn(\alpha)=\begin{cases}1, & \text{如果 } \alpha\in R^+\\ -1, & \text{如果 } \alpha\in R^-\end{cases}$，并假设 $(\alpha,\ \alpha_i)\neq 0$ 对于 $\alpha\in R$ 和 $\alpha_i\in\Pi\cap R^{im}$，我们令 $(\alpha,\ \alpha_i):=sgn(\alpha)$。

2.1. 根串。 设 $\alpha,\beta\in R$，我们可以由以下条件唯一确定两个整数 $r,q\geq 0$

$$\beta-r\alpha,\ldots,\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha,\ldots,\beta+q\alpha\in R$$

以及 $\beta-(r+1)\alpha\notin R,\ \beta+(q+1)\alpha\notin R$。上述根序列称为穿过 β 的 α-串，记作 $m_\alpha^+(\beta)=q+1$ 和 $m_\alpha^-(\beta)=r+1$。我们也写作 $m_i^\pm(\beta):=m_{\alpha_i}^\pm(\beta)$，其中 $i\in I$。若 $\alpha\in R^{re}$ 且 $\beta\in R$，则根串性质（$\beta,\alpha^\vee)=m_\alpha^-(\beta)-m_\alpha^+(\beta)$成立（[11], 引理 3.12）。

现在我们汇集一些后文将用到的结果。

引理 2.4 ([9], 引理 1.8)。 设 $\alpha\in R^{im},\beta\in R^{re}$ 使得 $(\beta,\alpha)\neq 0$。

(a) 若 $r_\alpha(\beta)=\beta\pm\alpha\in R^{im}$，则 $(\alpha,\beta^\vee)=\mp 1$;

(b) 若 $r_\alpha(\beta)=\beta\pm\alpha\in R^{re}$，则 $(\alpha,\beta^\vee)=\mp 2$。

证明。 对于 (a)，利用事实 $(\beta\pm\alpha,\beta\pm\alpha)=0$，由此可得 $(\beta,\beta)\pm 2(\beta,\alpha)=0$，因此 $(\alpha,\beta^\vee)=\mp 1$。

对于 (b)，我们知道 $(\alpha,(\alpha+\beta)^\vee)=\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}+2\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}=(\alpha,\beta^\vee)+(\alpha,\beta^\vee)\in\mathbb{Z}$ 当且仅当 $(\alpha,\beta^\vee)=-2$。类似地，若 $\beta-\alpha\in R^{re}$，则可推出 $(\alpha,\beta^\vee)=2$。□

由引理可知，对于经过 α 的 a β-字符串，有以下直接界。

推论 2.5。 对于 $\alpha\in R^{im},\beta\in R^{re}$ 满足 $(\beta,\alpha)\neq 0$的情形，我们有

(a) 若 $\beta+\alpha\in R^{im}$，则 $m_\beta^+(\alpha)=2$;

(b) 若 $\beta+\alpha\in R^{re}$，则 $m_\beta^+(\alpha)=3$。

类似地，若 $\beta-\alpha\in R^{im}$，则有 $m_\beta^-(\alpha)=2$；若 $\beta-\alpha\in R^{re}$，则有 $m_\beta^-(\alpha)=3$。

证明。 (a) 若 $\alpha+\beta\in R^{im}$，则由 $\beta-\alpha\notin R$，我们有 $m_\beta^-(\alpha)=1$；并由上面的引理，得到 $(\alpha,\beta^\vee)=-1$。因此，根据根串性质，我们有 $-1=(\alpha,\beta^\vee)=m_\beta^-(\alpha)-m_\beta^+(\alpha)=1-m_\beta^+(\alpha)$，从而 $m_\beta^+(\alpha)=2$。于是，$\{\alpha,\alpha+\beta\}$ 是经过 α 的 β 的根串。

(b) 如果 $\alpha+\beta\in R^{re}$，那么根据上述引理 $(\alpha,\ \beta^\vee)=-2$。因此，根据根串性质，我们有$-2=(\alpha,\ \beta^\vee)=m_\beta^-(\alpha)-m_\beta^+(\alpha)=1-m_\beta^+(\alpha)$，从而 $m_\beta^+(\alpha)=3$。因此，经过 α 的 β-串为 $\{\alpha,\alpha+\beta,\alpha+2\beta\}$。□

注 2.6。 根据上述推论，设 $\beta+\alpha\in R^{re}$，则 $r_\beta(\alpha)=\alpha-(\alpha,\ \beta^\vee)\beta=\alpha-(m_\beta^-(\alpha)-m_\beta^+(\alpha))\beta=\alpha-(1-3)\beta=\alpha+2\beta\in R^{im}$，因为 r_β 保持双线性内积不变。同样地，如果 $\alpha-\beta\in R^{re}$，则 $\alpha-2\beta\in R^{im}$。此外，如果 $\beta\in R_{\bar{0}}$，则 $\beta\pm\alpha\in R_{\bar{1}}^{re}$，因此 $2(\beta\pm\alpha)\in R_{\bar{0}}$。

引理 2.7 ([9], 引理 1.9)。 设 $\alpha\in R^{im},\beta\in R$ 和 $(\beta,\alpha)\neq 0$，则 $(r_\alpha(\beta)\ \alpha)\neq 0$。此外，若$\beta\in R^{im}$，则 $(r_\alpha(\beta)\ r_\alpha(\beta))\neq 0$ 且 $(r_\alpha(\beta)\ \beta)\neq 0$。

证明。 由于 $r_\alpha(\beta)=\beta\pm\alpha$，$(r_\alpha(\beta)\ \alpha)=(\beta,\ \alpha)\pm(\alpha,\ \alpha)\neq 0$。对于 $\beta\in R^{im}$，有 $(\beta\pm\alpha,\ \beta\pm\alpha)=\pm 2(\alpha,\ \beta)\neq 0$ 且 $(r_\alpha(\beta)\ \beta)=(\beta,\ \beta)\pm(\alpha,\ \beta)\neq 0$。□

引理 2.8 ([9], 引理 1.10)。 设 $\alpha,\beta\in R^{im}$ 和 $(\alpha,\beta)\neq 0$，则 $\beta+k\alpha\in R$（其中 $k\neq 0$）当且仅当 $k=\pm 1$。

证明。 由于 $(\beta 1+ k\alpha, \beta + k\alpha) = 2k(\alpha, \beta) \neq 0$，因此 $\beta + k\alpha \in R^{re}$。于是 $(\alpha,(\beta + k\alpha)^\vee) = 2(\alpha, \beta) 2k(\alpha, \beta) \underset{-}{=} k \in \mathbb{Z}$ 当且仅当 $k = \pm 1$。□

注 2.9。 根据引理 2.8 我们有 $m_\beta^{\pm}(\alpha) = m_\alpha^{\pm}(\beta) \leq 2$，当 α，$\beta \in R^{im}$ 其中 $(\alpha, \beta) \neq 0$。此外，$\beta \pm \alpha = r_\alpha(\beta)$ 中只有一个是根。

In 在以下引理中，我们计算出了通过 β 的 α-串的界 .

引理 2.10。 设 $\alpha \in R^{im}$，$\beta \in R^{re}$ 和 $(\alpha, \beta) \neq 0$。

(a) 若 $r_\alpha(\beta) \in R^{im}$，则 $m_\alpha^{\pm}(\beta) \leq 2$。

(b) 若 $r_\alpha(\beta) \in R^{re}$，则 $m_\alpha^{\pm}(\beta) \leq 2$。

证明。(a) 根据引理 2.7，我们有 $(r_\alpha(\beta)\ \alpha) \neq 0$。如果 $r_\alpha(\beta) \in R^{im}$，则根据引理 2.8，只有当 $k = \pm 1$ 时，我们才有 $r_\alpha(\beta) + k\alpha \in R$。但是，根据 $r_\alpha^2 = id$([9],引理 1.11)，我们有 $r_\alpha(\beta) \pm \alpha = r_\alpha(r_\alpha(\beta)) = \beta$。因此 $\beta \pm 2\alpha \notin R$，所以 $m_\alpha^{\pm}(\beta) \leq 2$。

(b) 假设 $\beta + 2\alpha \in R$，并且对于 $\beta + \alpha \in R$，我们有两种情况。

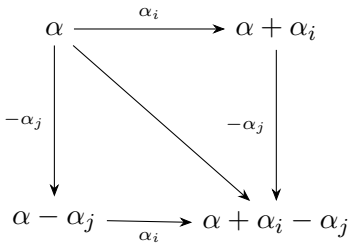
情形 (i)：若 $\beta + \alpha \in R_{\bar{1}}$，则 $2(\beta + \alpha) \in R$，并令 $\gamma = \beta + 2\alpha$。考虑经过 γ 的 β-串 $\{\gamma - r\beta, \ldots, \gamma, \ldots, \gamma + q\beta\}$，由于 $\beta \in R^{re}$ 具有根串性质，我们有 $r - q = (\gamma, \beta^\vee)$，其中 $q \geq 1$。由于 $\gamma - \beta = 2\alpha \notin R$（由引理 2.1）蕴含 $r = 0$，因此 $q = -(\gamma, \beta^\vee) = -(\beta, \beta^\vee) - 2(\alpha, \beta^\vee) = 2$，因为 $(\alpha, \beta^\vee) = -2$。故 $\gamma + 2\beta = 2\alpha + 3\beta \in R$。

现在，$(\beta,\ \alpha) \neq 0$ 且 $3(\alpha + \beta) \notin R$ 意味着 $(2\alpha + 3\beta) - \alpha = \alpha + 3\beta \in R$，考虑经过 α、$\{\alpha, \alpha+\beta, \alpha+2\beta, \alpha+3\beta, \ldots, \alpha+q\beta\}$ 和 $q = -(\alpha,\ \beta^\vee) \geq 3$的$\beta$-字符串。这与 $(\alpha,\ \beta^\vee) = -2$ 矛盾，因此 $\beta + \alpha \notin R_{\bar{1}}$。

情形(ii)：如果 $\beta+\alpha \in R_{\bar{0}}$，那么经过 $\beta+2\alpha$的 β-字符串就是 $\{\beta+2\alpha\}$，我们有 $(\beta+2\alpha,\ \beta^\vee) = 0$意味着 $(\beta + 2\alpha,\ \beta) = 0$，因此 $(\beta + \alpha,\ \beta + \alpha) = (\beta,\ \beta) + 2(\beta,\ \alpha) = 0$。这与 $\beta + \alpha \in R^{re}$ 矛盾。因此 $\beta + \alpha \notin R_{\bar{0}}$，从而 $\beta + 2\alpha \notin R$。□

引理 2.11. 设 $\alpha \in R$ 和 $i, j \in I, i \neq j$。假设 $\alpha \notin \{\pm\alpha_i, \pm\alpha_j\}$ 和 $\alpha + \alpha_i - \alpha_j \in R$。那么，$\alpha + \alpha_i \in R$ 当且仅当 $\alpha - \alpha_j \in R$。（注意，该假设蕴含 $\alpha + \alpha_i \neq \alpha_j$和 $\alpha - \alpha_j \neq -\alpha_i$。）

证明. 我们对每个广义根系使用箭图来证明此引理（参见第 5 节）。这里，我们仅用给定的特选基来表示正根系[1, 4, 5]。我们按照高度排列正根系中的各个根（负根也符合该图），并注意到箭图中的每个完整方形都给出了所需结果。



□

推论 2.12. 设 $\alpha \in R^{re}$ 和 α_i，$\alpha_j \in R^{re}$ 在（*2.11*）中，则 $\alpha + \alpha_i$ 和 $\alpha - \alpha_j$ 不可能同时属于R^{im}。

证明。 假设 $\alpha + \alpha_i$ 和$\alpha - \alpha_j$ 都属于 R^{im}，则 $\alpha + \alpha_i + \alpha_j \notin R$，因为 $\alpha + \alpha_i - \alpha_j \in R$。此外，由上述引理可知 $\alpha + \alpha_j \notin R$，否则，由于 $(\alpha + \alpha_j) + \alpha_i - \alpha_j \in R$ 且 $(\alpha + \alpha_j) - \alpha_j \in R$

推出 $(\alpha+\alpha_j)+\alpha_i \in R$，这与矛盾。现在，$\alpha-\alpha_j \in R^{im}$ 且 $(\alpha-\alpha_j)+\alpha_j \in R^{re}$，由（推论2.5）可得$m_j^+(\alpha-\alpha_j)=3$，这意味着 $\alpha+\alpha_j \in R$，从而产生矛盾。用类似的论证，我们得出与矛盾的结论。因此，和不可能同时属于。□

推论 2.13. 设 $\alpha \in R_{\bar{1}}$ 和 $\alpha_i,\ \alpha_j \in R^{re}$ 属于（2.11），则 $\alpha+\alpha_i$ 和 $\alpha-\alpha_j$ 不可能同时属于R^{re}。

证明。通过直接验证，具有非空 $R_{\bar{1}}^{re}$ 的不可约广义根系只有 $B(m,\ n)$ 和 $G(3)$。因此，在其他根系中结论显然成立。在 $G(3)$ 中，除去 W-等价的情形，单根系唯一，为 $\{\alpha_1=\delta+\epsilon_3,\alpha_2=\epsilon_1,\alpha_3=\epsilon_2-\epsilon_1\}$，且容易验证不存在满足 $\alpha\pm\alpha_2\mp\alpha_3\in R$ 的 $\alpha\in R_{\bar{1}}$。根据观察，结论对 $B(m,\ n)$ 的情形也成立。□

引理 2.14. 设 $\alpha \in R_{\bar{1}}$ 和 $\alpha_i,\ \alpha_j \in R^{re}$ 属于（2.11），则 $m_i^-(\alpha)m_j^+(\alpha+\alpha_i)=m_j^+(\alpha)m_i^-(\alpha-\alpha_j)$。

证明。若 $\alpha\in R^{im}$，则 $m_i^-(\alpha)=m_j^+(\alpha)=1$，因此只需证明 $m_i^-(\alpha-\alpha_j)=m_j^+(\alpha+\alpha_i)$。假设 $\alpha+\alpha_i$和$\alpha-\alpha_j$都属于 R^{im}，则 $m_i^-(\alpha-\alpha_j)=m_j^+(\alpha+\alpha_i)=1$，如 $\alpha-\alpha_j+\alpha_i\in R$所示。若 $\alpha+\alpha_i$或$\alpha-\alpha_j$之一（取 $\alpha+\alpha_i$）属于 R^{re}，则由（推论 2.5，注 2.6）可得 $\alpha+2\alpha_i\in R^{im}$，且 $m_i^-(\alpha-\alpha_j)=1$，如 $\alpha-\alpha_j\in R^{im}$所示。因此，我们必须证明 $m_j^+(\alpha+\alpha_i)=1$；否则，即$\alpha+\alpha_i+\alpha_j\in R$（取为 β）。那么由 $\beta+\alpha_i-\alpha_j=\alpha+2\alpha_i\in R$和 $\beta-\alpha_j=\alpha+\alpha_i\in R$可得 $\beta+\alpha_i=\alpha+\alpha_j+2\alpha_i\in R$。

注意到 $r_{\alpha_i}(\alpha-\alpha_j)=\alpha-\alpha_j+\alpha_i\in R^{im}$由于 r_{α_i}保持不变（，），令 $\gamma=\alpha+\alpha_i-\alpha_j\in R^{im}$和 $\gamma+\alpha_j=\alpha+\alpha_i\in R^{re}$，再次由（推论 2.5，注记 2.6）可得 $\gamma+2\alpha_j=\beta\in R^{im}$。我们已经具备进一步推导该方程所需的一切条件，

$$(r_{\alpha_i}(\alpha),\alpha_j^\vee)=(\alpha,\alpha_j^\vee)-(\alpha,\alpha_i^\vee)(\alpha_i,\alpha_j^\vee).$$

由于 $(\alpha,\ \alpha_j^\vee)=1$，$(\alpha,\ \alpha_i^\vee)=-2$，且 $(\alpha_i,\ \alpha_j^\vee)=1-m_j^+(\alpha_i)$。此外，$r_{\alpha_i}(\alpha)=\alpha+2\alpha_i$，因此 $(\alpha+2\alpha_i,\ \alpha_j^\vee)=m_j^-(\alpha+2\alpha_i)-m_j^+(\alpha+2\alpha_i)=-1$，因为 $\alpha+2\alpha_i\in R^{im}$。于是，根据方程$m_j^+(\alpha_i)=2$与 $\alpha_i+\alpha_j\notin R$矛盾，因此有 $m_j^+(\alpha+\alpha_i)=1$，且该关系成立。类似地，若我们选择 $\alpha-\alpha_j\in R^{re}$(和 $\alpha+\alpha_i\in R^{im}$)，沿用相同的论证即可得出该结果。

现在，如果 $\alpha\in R_{\bar{1}}^{re}$，那么 $\{\alpha+\alpha_i,\alpha-\alpha_j\}$ 中的一个在 R^{re} 中，另一个在 R^{im} 中。令 $\alpha+\alpha_i\in R^{im}$，则 $\alpha+\alpha_i+\alpha_j\notin R$，这意味着 $\alpha+\alpha_j\notin R$。因此，我们有 $m_j^+(\alpha)=1$，并且 $m_j^+(\alpha+\alpha_i)=1$。此外，$\alpha+\alpha_i\in R^{im}$ 和 $(\alpha+\alpha_i)-\alpha_i\in R^{re}$ 意味着 $m_i^-(\alpha+\alpha_i)=3$，所以 $m_i^-(\alpha)=2$（即 $\alpha-\alpha_i\in R$）。现在，$(\alpha-\alpha_i)+\alpha_i-\alpha_j\in R$ 和 $(\alpha-\alpha_i)+\alpha_i\in R$ 意味着 $(\alpha-\alpha_i)-\alpha_j\in R$（即 $m_i^-(\alpha-\alpha_j)\geq 2$）。由于 $(\alpha-\alpha_j)+\alpha_i\in R$、$\alpha-\alpha_j\in R^{re}$ 和 $(\alpha-\alpha_j)-\alpha_i\in R$，只需证明 $\alpha-\alpha_j+\alpha_i\in R^{im}$。假设结论不成立，由于 $\alpha+\alpha_i\in R^{im}$ 意味着 $\alpha+\alpha_i-2\alpha_j\in R$，因此 $\{\alpha-2\alpha_j,\alpha-2\alpha_j-\alpha_i\}\subset R$。由于$\alpha-\alpha_j\in R_{\bar{1}}^{re}$，且 $\alpha-\alpha_j+\alpha_i\in R^{re}$ 意味着$\alpha-2\alpha_j\in R^{im}$。但是我们有 $\{(\alpha-2\alpha_j)-\alpha_i,(\alpha-2\alpha_j)+\alpha_i\}\subset R$，这与之矛盾，因此$\alpha-\alpha_j+\alpha_i\in R^{im}$ 意味着 $m_i^-(\alpha-\alpha_j)=2$。因此，若选择 $\alpha-\alpha_j\in R^{im}$，用类似的论证即可得到该关系。□

引理 2.15. 设 $\alpha\in R^{re},\ \alpha_i\in R^{re}$和 $\alpha_j\in R^{im}$在（2.11）中，则 $m_i^-(\alpha-\alpha_j)=m_i^-(\alpha)$。

证明。设 $\alpha\in R_{\bar{0}}$且若 $\alpha-\alpha_j\in R^{im}$，则 $m_i^-(\alpha-\alpha_j)=1$因为 $\alpha-\alpha_j+\alpha_i\in R$，并且 $m_i^-(\alpha)=1$。否则，$(\alpha-\alpha_i)+\alpha_i\in R$且$(\alpha-\alpha_i)+\alpha_i-\alpha_j\in R$意味着 $\alpha-\alpha_i-\alpha_j\in R$，这与 $m_i^-(\alpha-\alpha_j)=1$矛盾。对于其余情况，我们可以从箭图中观察到$m_i^-(\alpha-\alpha_j)=m_i^-(\alpha)=2$。□

引理 2.16. 设 $\alpha\in R^{im},\ \alpha_i\in R^{re}$和 $\alpha_j\in R^{im}$在（2.11）中，则 $m_i^-(\alpha-\alpha_j)=1$。

证明。观察箭图即可得到该结果。□

3. Generators and Relations

沿用上一节的记号，本节将定义我们的主要构造。设 $R = R_{\bar{0}} \cup R_{\bar{1}} = R^{re} \cup R^{im}$ 是一个带有特选基 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ 的不可约广义根系。考虑具有齐次基 $\{u_i$ 的向量超空间 $M\colon\ i \in I\} \cup \{v_\alpha\colon\ \alpha \in R\}$，其奇偶性由 $u_i = \bar{0}$ 和 $v_\alpha = \alpha$ 给出，即$\bar{}$。对于 $i \in I$，在 M 上定义算子 e_i，f_i 和 h_i，其中，对于 $j \in I$，$\alpha \in R$,

$$e_i(u_j) = |(\alpha_i, \alpha_j^\vee)| v_{\alpha_i}, \qquad e_i(v_\alpha) = \begin{cases} 0 & ; \text{如果 } \alpha + \alpha_i \notin R \\ (-1)^{\bar{i}} u_i & ; \text{如果 } \alpha = -\alpha_i \\ ((1-\bar{i})(sgn\ \alpha) m_i^-(\alpha) + \bar{i}\ m_i^-(\alpha)) v_{\alpha+\alpha_i} & ; \text{如果 } \alpha \in R^{re} \\ ((1-\bar{i})\ m_i^-(\alpha) + \bar{i}\ (\alpha, \alpha_i^\vee))(sgn\ \alpha) v_{\alpha+\alpha_i} & ; \text{若 } \alpha \in R^{im} \end{cases}$$

$$f_i(u_j) = |(\alpha_i, \alpha_j^\vee)| v_{-\alpha_i}, \qquad f_i(v_\alpha) = \begin{cases} 0 & ; \text{若 } \alpha - \alpha_i \notin R \\ u_i & ; \text{若 } \alpha = \alpha_i \\ (sgn\ \alpha) m_i^+(\alpha) v_{\alpha-\alpha_i} & ; \text{若 } \alpha \in R^{re} \\ ((1-\bar{i})(sgn\ \alpha) m_i^+(\alpha) + \bar{i}\ (\alpha, \alpha_i^\vee)) v_{\alpha-\alpha_i} & ; \text{若 } \alpha \in R^{im} \end{cases}$$

$h_i(u_j) = 0$ 和 $h_i(v_\alpha) = (\alpha, \alpha_i^\vee) v_\alpha$.

引理 3.1。以下结果适用于上述定义的算子，我们将gf 简写为映射 $g \circ f$的复合。

(a) e_i, f_i是次数为 $e_i = f_i = i$ 的齐次线性映射，而 h_i是次数为 $h_i = 0$.的齐次线性映射 *(b)* $h_i h_j - h_j h_i = 0$. *(c)* $h_i e_j - e_j h_i = (\alpha_j, \alpha_i^\vee) e_j$. *(d)* $h_i f_j - f_j h_i = -(\alpha_j, \alpha_i^\vee) f_j$. *(e)* $e_i f_i - (-1)^{\bar{i}} f_i e_i = h_i$. *(f)* 对于 $i \neq j$, $e_i f_j - (-1)^{\bar{i}\bar{j}} f_j e_i = 0$.

证明。(a) 由于 $\alpha \pm \beta = \alpha$,一根据$e_i$的定义，我们有 $u_j \mapsto v_{\alpha_i}$，$v_\alpha \mapsto v_{\alpha+\alpha_i}$和$v_{-\alpha_i} \mapsto u_i$。同样，根据 f_i 的定义，我们有 $u_j \mapsto v_{-\alpha_i}$，$v_\alpha \mapsto v_{\alpha-\alpha_i}$ 和 $v_{\alpha_i} \mapsto u_i$。因此，e_i'和 f_i'的次数均为 i。此外，h_i 映射 $u_i \mapsto 0$ 和 $v_\alpha \mapsto v_\alpha$。因此，$h_i$的次数为 0。

(b) 由于，$h_j h_i(u_k) = 0 = h_i h_j(u_k)$ 和 $h_j h_i(v_\alpha) = (\alpha, \alpha_i^\vee)(\alpha, \alpha_j^\vee) v_\alpha = h_i h_j(v_\alpha)$.

(c) $(h_i e_j - e_j h_i)(u_i) = h_i(|(\alpha_j,\ \alpha_i^\vee)| v_{\alpha_j}) = |(\alpha_j,\ \alpha_i^\vee)|(\alpha_j,\ \alpha_i^\vee) v_{\alpha_j} = (\alpha_j,\ \alpha_i^\vee) e_j(u_i)$ 和

$$h_i(e_j(v_\alpha)) = h_i \left(\begin{cases} 0 & ; \text{if } \alpha + \alpha_j \notin R \\ (-1)^{\bar{j}} u_j & ; \text{if } \alpha = -\alpha_j \\ ((1-\bar{j})(sgn\ \alpha) m_j^-(\alpha) + \bar{j}\ m_j^-(\alpha)) v_{\alpha+\alpha_j} & ; \text{if } \alpha \in R^{re} \\ ((1-\bar{j}) m_j^-(\alpha) + \bar{j}(\alpha, \alpha_j^\vee))(sgn\ \alpha) v_{\alpha+\alpha_j} & ; \text{if } \alpha \in R^{im} \end{cases} \right)$$

$$= \begin{cases} 0 & ; \alpha + \alpha_j \notin R \\ 0 & ; \alpha = -\alpha_j \\ ((1-\bar{j})(sgn\ \alpha) m_j^-(\alpha) + \bar{j}\ m_j^-(\alpha))(\alpha + \alpha_j, \alpha_i^\vee) v_{\alpha+\alpha_j} & ; \alpha \in R^{re} \\ ((1-\bar{j}) m_j^-(\alpha) + \bar{j}(\alpha, \alpha_j^\vee))(sgn\ \alpha)(\alpha + \alpha_j, \alpha_i^\vee) v_{\alpha+\alpha_j} & ; \alpha \in R^{im} \end{cases}$$

$$e_j(h_i(v_\alpha)) = e_j((\alpha, \alpha_i^\vee) v_\alpha) = (\alpha, \alpha_i^\vee) \begin{cases} 0 & ; \text{if } \alpha + \alpha_j \notin R \\ (-1)^{\bar{j}} u_j & ; \text{if } \alpha = -\alpha_j \\ ((1-\bar{j})(sgn\ \alpha) m_j^-(\alpha) + \bar{j}\ m_j^-(\alpha)) v_{\alpha+\alpha_j} & ; \text{if } \alpha \in R^{re} \\ ((1-\bar{j}) m_j^-(\alpha) + \bar{j}(\alpha, \alpha_j^\vee))(sgn\ \alpha) v_{\alpha+\alpha_j} & ; \text{if } \alpha \in R^{im} \end{cases} .$$

$$(h_ie_j - e_jh_i)(v_\alpha) = \begin{cases} 0 & ;\alpha+\alpha_j \notin R \\ -(-1)^{\bar{j}}(\alpha,\alpha_i^\vee)u_j & ;\alpha = -\alpha_j \\ (\alpha_j,\alpha_i^\vee)((1-\bar{j})(sgn\ \alpha)m_j^-(\alpha)+\bar{j}m_j^-(\alpha))v_{\alpha+\alpha_j} & ;\alpha\in R^{re} \\ (\alpha_j,\alpha_i^\vee)((1-\bar{j})m_j^-(\alpha)+\bar{j}(\alpha,\alpha_j^\vee))(sgn\ \alpha)v_{\alpha+\alpha_j} & ;\alpha\in R^{im} \end{cases}$$
$$= (\alpha_j,\alpha_i^\vee)e_j(v_\alpha).$$

(d) 与 (c) 的证明类似。

(e) 由于， $e_if_i(u_k) = (-1)^{\bar{i}}|(\alpha_i,\alpha_k^\vee)|u_i$ 且 $f_ie_i(u_k) = |(\alpha_i,\alpha_k^\vee)|u_i$。因此 $(e_if_i - (-1)^{\bar{i}}f_ie_i)(u_k) = 0$。现在，在 v_α 处，值可以通过所有可能的情形来确定。

情形（i）：对于 $\alpha = \alpha_i$， $e_if_i(v_{\alpha_i}) = |(\alpha_i,\alpha_i^\vee)|v_{\alpha_i}$。由于 $2\alpha_i \notin R$ 如 $\alpha_i \in \Pi$，因此 $e_i(v_{\alpha_i}) = 0$意味着 $f_ie_i(v_{\alpha_i}) = 0$。如果 $\alpha_i \in R^{re}$ $(\bar{i}=0)$， $e_if_i(v_{\alpha_i}) = 2v_{\alpha_i}$ 且 $h_i(v_{\alpha_i}) = (\alpha_i,\alpha_i^\vee)v_{\alpha_i} = 2v_{\alpha_i}$。如果$\alpha_i \in R^{im}$， $e_if_i(v_{\alpha_i}) = 0$ 且 $h_i(v_{\alpha_i}) = 0$，因此该关系成立。

情形（ii）：对于 $\alpha = -\alpha_i$, $e_i(v_{-\alpha_i}) = (-1)^{\bar{i}}u_i$ 意味着 $f_ie_i(v_{-\alpha_i}) = (-1)^{\bar{i}}|(\alpha_i, \alpha_i^\vee)|v_{-\alpha_i}$。同样，$-2\alpha_i \notin R$ 如 $\alpha_i \in \Pi$，因此 $f_i(v_{-\alpha_i}) = 0$ 意味着 $e_if_i(v_{-\alpha_i}) = 0$。如果 $\alpha_i \in R^{re}$ $(i=0)$，则关系成立，因为 $h_i(v_{-\alpha_i}) = -(\alpha_i, \alpha_i^\vee)v_{-\alpha_i}$；如果 $\alpha_i \in R^{im}$，那么 $f_ie_i(v_{-\alpha_i}) = 0$ 也 $h_i(v_{-\alpha_i}) = 0$，关系成立。

情形（iii）：对于 $\alpha \neq \pm\alpha_i$，假设 $\alpha+\alpha_i \notin R$ 且 $\alpha-\alpha_i \notin R$，则 $e_i(v_\alpha) = f_i(v_\alpha) = 0$ 且 $h_i(v_\alpha) = (\alpha, \alpha_i^\vee)v_\alpha = 0$，因为 $\alpha_i \in R^{re}$ 具有根串性质，且 $m_i^\pm(\alpha) = 1$；如果$\alpha_i \in R^{im}$，由于 $\alpha \pm \alpha_i \notin R$ 意味着 $(\alpha, \alpha_i) = 0$。

¯若 $\alpha+\alpha_i \in R$，但 $\alpha-\alpha_i \notin R$，则 $e_if_i(v_\alpha) = 0$ 且 $m_i^-(\alpha) = 1$。对于 $i=0$，$(\alpha_i \in R^{re})$，

$$e_i(v_\alpha) = (sgn\ \alpha)m_i^-(\alpha)v_{\alpha+\alpha_i}$$

$$f_ie_i(v_\alpha) = (sgn\ \alpha)m_i^-(\alpha)(sgn\ \alpha+\alpha_i)m_i^+(\alpha+\alpha_i)v_\alpha.$$

由于， $sgn\,\alpha = sgn(\alpha+\alpha_i)$ 且 $m_i^+(\alpha+\alpha_i) = m_i^+(\alpha)-1$，因此 $-(-1)^{\bar{i}}f_ie_i(v_\alpha) = -(m_i^+(\alpha)-1)v_\alpha$且 $h_i(v_\alpha) = (\alpha, \alpha_i^\vee)v_\alpha = (m_i^-(\alpha) - m_i^+(\alpha))v_\alpha = (1-m_i^+(\alpha))v_\alpha$。故等式成立。

对于 $\bar{i}=1$，$(\alpha_i \in R^{im})$，我们有

$$e_i(v_\alpha) = \begin{cases} m_i^-(\alpha)v_{\alpha+\alpha_i} & ;\text{if } \alpha\in R^{re} \\ (sgn\ \alpha)(\alpha,\alpha_i^\vee)v_{\alpha+\alpha_i} & ;\text{if } \alpha\in R^{im} \end{cases}$$

$$f_ie_i(v_\alpha) = \begin{cases} m_i^-(\alpha)(sgn\ \alpha+\alpha_i)m_i^+(\alpha+\alpha_i)v_\alpha & ;\text{if } \alpha,\alpha+\alpha_i\in R^{re} \\ m_i^-(\alpha)(\alpha+\alpha_i,\alpha_i^\vee)v_\alpha & ;\text{if } \alpha\in R^{re} \text{ and } \alpha+\alpha_i\in R^{im} \\ (sgn\ \alpha)(\alpha,\alpha_i^\vee)(sgn\ \alpha+\alpha_i)m_i^+(\alpha+\alpha_i)v_\alpha & ;\text{if } \alpha\in R^{im}. \end{cases}$$

若 $\alpha, \alpha+\alpha_i \in R^{re}$，由引理（2.10，（b））$m_i^+(\alpha) = 2$，则 $-(-1)^{\bar{i}}f_ie_i(v_\alpha) = (sgn\ \alpha+\alpha_i)(m_i^+(\alpha) - 1)v_\alpha = (sgn\ \alpha+\alpha_i)v_\alpha = h_i(v_\alpha)$，因为 $(\alpha,\alpha_i^\vee) = (sgn\ \alpha) = sgn(\alpha+\alpha_i)$。

在第二种情形下， $f_ie_i\ (v_\alpha) = (^{\alpha+\alpha_i,}\ _{\alpha_i})v_\alpha = h_i(v_\alpha)$.

在最后一种情况下 α 且 $\alpha_i \in R^{im}$ 意味着 $\alpha+\alpha_i \in R^{re}$（根据引理 2.7），$sgn\ (\alpha) = sgn\ (\alpha+\alpha_i)$ 且$m_i^+(\alpha+\alpha_i) = 1$（根据引理 2.8）意味着 $f_ie_i\ (v_\alpha) = (\alpha,\ \alpha_i)\ v_\alpha = h_i\ (v_\alpha)$。

如果 $\alpha-\alpha_i \in R$ 但 $\alpha+\alpha_i \notin R$，那么 $f_ie_i\ (v_\alpha) = 0$ 且 $m_i^+\ (\alpha) = 1$。对于 $\bar{i}=0$，$(\alpha_i \in R^{re})$，

$$f_i(v_\alpha) = (sgn\ \alpha)m_i^+(\alpha)v_{\alpha-\alpha_i}$$

$$e_if_i(v_\alpha) = (sgn\ \alpha)m_i^+(\alpha)(sgn\ \alpha-\alpha_i)m_i^-(\alpha-\alpha_i)v_\alpha$$

因为， $sgn(\alpha) = sgn(\alpha-\alpha_i)$ 和 $m_i^-(\alpha-\alpha_i) = m_i^-(\alpha) - 1$，因此 $e_if_i(v_\alpha) = (m_i^-(\alpha) - m_i^+(\alpha))v_\alpha = (\alpha,\ \alpha_i^\vee)v_\alpha = h_i(v_\alpha)$。

对于 $\bar{i}=1$, $(\alpha_i \in R^{im})$，我们有

$$f_i(v_\alpha)=\begin{cases}(sgn\ \alpha)m_i^+(\alpha)v_{\alpha-\alpha_i} & ;\text{ if } \alpha\in R^{re}\\ (\alpha,\alpha_i)v_{\alpha-\alpha_i} & ;\text{ if } \alpha\in R^{im}\end{cases}$$

$$e_if_i(v_\alpha)=\begin{cases}(sgn\ \alpha)m_i^+(\alpha)m_i^-(\alpha-\alpha_i)v_\alpha & ;\text{ if } \alpha,\alpha-\alpha_i\in R^{re}\\ (sgn\ \alpha)m_i^+(\alpha)(sgn\ \alpha-\alpha_i)(\alpha-\alpha_i,\alpha_i)v_\alpha & ;\text{ if } \alpha\in R^{re} \text{ and } \alpha-\alpha_i\in R^{im}\\ (\alpha,\alpha_i)m_i^-(\alpha-\alpha_i)v_\alpha & ;\text{ if } \alpha\in R^{im}.\end{cases}$$

若 $\alpha,\alpha-\alpha_i\in R^{re}$，则由引理（2.10, （b））可知，$m_i^-(\alpha)=2$ 意味着 $e_if_i(v_\alpha)=(sgn\ \alpha)(m_i^-(\alpha)-1)v_\alpha=(sgn\ \alpha)v_\alpha=h_i(v_\alpha)$，因为 $(\alpha,\alpha_i)=(sgn\ \alpha)$。

在第二种情形下，$sgn(\alpha)=sgn(\alpha-\alpha_i)$，因此 $e_if_i(v_\alpha)=(\alpha-\alpha_i,\alpha_i)v_\alpha=(\alpha,\alpha_i)v_\alpha=h_i(v_\alpha)$。在最后一种情况下，$\alpha,\alpha_i\in R^{im}\Rightarrow\alpha-\alpha_i\in R^{re}$（由引理 2.7）且 $m_i^-(\alpha-\alpha_i)=1$（由引理 2.8）意味着该等式成立。

若两者都 $\alpha\pm\alpha_i\in R\Rightarrow\alpha_i\notin R^{im}$，且由于 $\Pi\cap R_{\bar{1}}^{re}=\emptyset\Rightarrow\bar{\alpha_i}=0$。那么

$$e_if_i(v_\alpha)=m_i^+(\alpha)m_i^-(\alpha-\alpha_i)v_\alpha,$$

$$f_ie_i(v_\alpha)=m_i^-(\alpha)m_i^+(\alpha+\alpha_i)v_\alpha.$$

因此，$(m_i^+(\alpha)m_i^-(\alpha-\alpha_i)-(-1)^{\bar{i}}m_i^-(\alpha)m_i^+(\alpha+\alpha_i))v_\alpha=(m_i^-(\alpha)-m_i^+(\alpha))=(\alpha,\alpha_i^\vee)v_\alpha$. (f) 对于 $i\neq j$, $e_if_j(u_k)=|(\alpha_j,\alpha_k^\vee)|m_i^-(-\alpha_j)v_{-\alpha_j+\alpha_i}=0$ 且 $f_je_i(u_k)=|(\alpha_i,\alpha_k^\vee)|m_j^+(\alpha_i)v_{\alpha_i-\alpha_j}=0$，由于 $\alpha_i-\alpha_j\notin R$。现在，在 v_α 处，可以通过所有可能的情形确定各值。

情形（i）：对于 $\alpha=\alpha_i$，由于 $\alpha_i-\alpha_j\notin R$, $f_j(v_{\alpha_i})=0$ 意味着 $e_i(f_j(v_{\alpha_i}))=0$ 且 $e_i(v_{\alpha_i})=0$，因为 $2\alpha_i\notin R$ 意味着 $f_j(e_i(v_{\alpha_i}))=0$。

情形（ii）：对于 $\alpha=-\alpha_j$，由于 $\alpha_i-\alpha_j\notin R$, $e_i(v_{-\alpha_j})=0$ 意味着 $f_j(e_i(v_{-\alpha_j}))=0$ 以及 $f_j(v_{-\alpha_j})=0$，因为 $2\alpha_j\notin R$ 意味着 $e_i(f_j(v_{-\alpha_j}))=0$。

情形（ii i）：对于 $\alpha=\alpha_j$, $f_j(v_{\alpha_j})=u_j$ 以及 $e_i(f_j(v_{\alpha_j}))=|(\alpha_i,\ \alpha_j^\vee)|v_{\alpha_i}$。对于 $\dot{i}=0$ $(\alpha_i\in R^re)$

$$e_i(v_{\alpha_j})=\begin{cases}0 & ;\text{ if } \alpha_j+\alpha_i\notin R\\ (sgn\ \alpha_j)m_i^-(\alpha_j)v_{\alpha_j+\alpha_i} & ;\text{ otherwise}\end{cases}$$

$$f_je_i(v_{\alpha_j})=\begin{cases}0 & ;\text{ if } \alpha_j+\alpha_i\notin R\\ (sgn\ \alpha_j)m_i^-(\alpha_j)(sgn\ \alpha_j+\alpha_i)m_j^+(\alpha_j+\alpha_i)v_{\alpha_i} & ;\text{ if } \alpha_j\in R^{re}\\ (sgn\ \alpha_j)m_i^-(\alpha_j)(sgn\ \alpha_j+\alpha_i)m_j^+(\alpha_j+\alpha_i)v_{\alpha_i} & ;\text{ if } \alpha_j\in R^{im} \text{ and } \alpha_j+\alpha_i\in R^{re}\\ (sgn\ \alpha_j)m_i^-(\alpha_j)(\alpha_i+\alpha_j,\alpha_j^\vee)v_{\alpha_i} & ;\text{ if } \alpha_j,\alpha_j+\alpha_i\in R^{im}.\end{cases}$$

在第一种情形下，如果 $\alpha_j\in R^{re}$，则 $(\alpha_i,\ \alpha_j^\vee)=0$，因为 $m_j^\pm(\alpha_i)=1$；并且如果 $\alpha_j\in R^{im}$ 与 $\alpha_i\pm\alpha_j\notin R$意味着 $(\alpha_j,\ \alpha_i)=0$。因此该关系成立。

在第二种情形 $(\alpha_j\in R^{re},\ \bar{j}=0)$ 下，$sgn(\alpha_j)=sgn(\alpha_j+\alpha_i)$, $m_i^-(\alpha_j)=1$ 以及 $m_j^+(\alpha_i+\alpha_j)=m_j^+(\alpha_i)-1=m_j^+(\alpha_i)-m_j^-(\alpha_i)=-(\alpha_i,\alpha_j^\vee)$。于是 $f_je_i(v_{\alpha_j})=-(\alpha_i,\alpha_j^\vee)v_{\alpha_i}$。由于 $\alpha_i-\alpha_j\notin R$意味着 $(\alpha_i,\alpha_j^\vee)=r-q=-q<0$，因此 $e_if_j(v_{\alpha_j})=-(\alpha_i,\alpha_j^\vee)v_{\alpha_i}$，且该关系成立。

在第三种情形（$\alpha_i+\alpha_j\in R^{re},\alpha_j\in R^{im},\ \bar{j}=1$）中，$m_i^-(\alpha_j)=1$, $f_je_i(v_{\alpha_j})=(m_j^+(\alpha_i)-1)v_{\alpha_i}=v_{\alpha_i}$如同 $m_j^+(\alpha_i)=2$。由于 $\alpha_i\in R^+$，因此 $(\alpha_i,\alpha_j)=sgn(\alpha_i)=1$，所以 $e_if_j(v_{\alpha_j})=v_{\alpha_i}$，故关系成立。

在最后一种情况下，$m_i^-(\alpha_j)=1$ 和 $(\alpha_j+\alpha_i,\ \alpha_j)=(\alpha_i,\ \alpha_j)=sgn(\alpha_i)=1$ 作为 $\alpha_i\in R^+$。因此$f_je_i(v_{\alpha_j})=v_{\alpha_i}=e_if_j(v_{\alpha_j})$。

现在说到 $\bar{i}=1$ $(\alpha_i \in R^{im})$,

$$e_i(v_{\alpha_j}) = \begin{cases} 0 & ; \text{if } \alpha_j+\alpha_i \notin R \\ m_i^-(\alpha_j)v_{\alpha_j+\alpha_i} & ; \text{if } \alpha_j \in R^{re} \\ (sgn\ \alpha_j)(\alpha_j,\alpha_i^\vee)v_{\alpha_j+\alpha_i} & \text{if } \alpha_j \in R^{im} \end{cases}$$

$$f_je_i(v_{\alpha_j}) = \begin{cases} 0 & ; \text{if } \alpha_j+\alpha_i \notin R \\ m_i^-(\alpha_j)(sgn\ \alpha_j+\alpha_i)m_j^+(\alpha_j+\alpha_i)v_{\alpha_i} & ; \text{if } \alpha_j \in R^{re} \\ (sgn\ \alpha_j)(\alpha_j,\alpha_i)(sgn\ \alpha_j+\alpha_i)m_j^+(\alpha_j+\alpha_i)v_{\alpha_i} & ; \text{if } \alpha_j \in R^{im} \end{cases}$$

在第一种情形下，若 $\alpha_j \in R^{re}$，则 $(\alpha_i,\alpha_j^\vee)=0$ 如 $m_j^\pm(\alpha_i)=1$，且由于 $\alpha_j \notin R^{im}$ 如 $j \neq i$，故该关系成立。

在第二种情形下 $(\alpha_j \in R^{re},\ \bar{j}=0)$，$m_i^-(\alpha_j)=1$ 且 $m_j^+(\alpha_i+\alpha_j)=m_j^+(\alpha_i)-1=m_j^+(\alpha_i)-m_j^-(\alpha_i)$ $=-(\alpha_i,\alpha_j^\vee)$。于是 $f_je_i(v_{\alpha_j})=-(\alpha_i,\alpha_j^\vee)v_{\alpha_i}$。由于 $\alpha_i-\alpha_j \notin R$ 意味着 $(\alpha_i,\alpha_j^\vee)=r-q=-q<0$，故 $e_if_j(v_{\alpha_j})=-(\alpha_i,\alpha_j^\vee)v_{\alpha_i}$。

最后一种情况并非我们所拥有的情形，即 $j \neq i$ 和 $\alpha_j \in R^{im}$。

情形（iv）：对于 $\alpha=-\alpha_i$, $e_i(v_{-\alpha_i})=(-1)^{\bar{i}}u_i$ 和 $f_j(e_i(v_{-\alpha_i}))=(-1)^{\bar{i}}|(\alpha_j,\ \alpha_i^\vee)$ $|v_{-\alpha_j}$。如果 $j=0$ $(\alpha_j \in R^{re})$，我们有

$$f_j(v_{-\alpha_i}) = \begin{cases} 0 & ; \text{if } \alpha_i+\alpha_j \notin R \\ (sgn-\alpha_i)m_j^+(-\alpha_i)v_{-\alpha_i-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha_j+\alpha_i \in R \end{cases}$$

$$e_if_j(v_{-\alpha_i}) = \begin{cases} 0 & ; \text{if } \alpha_i+\alpha_j \notin R \\ (sgn-\alpha_i)m_j^+(-\alpha_i)(sgn-\alpha_i-\alpha_j)m_i^-(-\alpha_i-\alpha_j)v_{-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha_i \in R^{re} \\ (sgn-\alpha_i)m_j^+(-\alpha_i)m_i^-(-\alpha_i-\alpha_j)v_{-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha_i \in R^{im} \text{ and } \alpha_i+\alpha_j \in R^{re} \\ (sgn-\alpha_i)m_j^+(-\alpha_i)(sgn-\alpha_i-\alpha_j)(-\alpha_i-\alpha_j,\alpha_i^\vee)v_{-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha_i,\alpha_i+\alpha_j \in R^{im}. \end{cases}$$

在第一种情形中，若 $\alpha_i \in R^{re}$，则 $(\alpha_j,\ \alpha_i^\vee)=0$ 如同 $m_i^\pm(\alpha_j)=1$，并且若 $\alpha_i \in R^{im}$ 与 $\alpha_j \pm \alpha_i \notin R$ 蕴含 $(\alpha_j,\ \alpha_i)=0$。

在第二种情形（$\alpha_i \in R^{re},\ \bar{i}=0$）中，$sgn(-\alpha_i)=sgn(-\alpha_i-\alpha_j)$，$m_j^+(-\alpha_i)=1$ 和 $m_i^-(-\alpha_j-\alpha_i)$ $=m_i^-(-\alpha_j)-1=m_i^-(-\alpha_j)-m_i^+(-\alpha_j)=-(\alpha_j,\alpha_i^\vee)$。然后 $e_if_j(v_{-\alpha_j})=-(\alpha_j,\alpha_i^\vee)v_{-\alpha_j}$，并且由于 $\alpha_j-\alpha_i \notin R$ 蕴含 $(\alpha_j,\alpha_i^\vee)=r-q=-q<0$。因此 $f_je_i(v_{-\alpha_j})=-(\alpha_j,\alpha_i^\vee)v_{-\alpha_j}$，且关系成立。

在第二种情形 $(\alpha_i \in R^{im},\ \bar{i}=1)$，$sgn(\alpha_j)=1$ 和 $m_j^+(-\alpha_i)=1$。因此，$e_if_j(v_{-\alpha_j})=-(m_i^-(-\alpha_j)-1)v_{-\alpha_j}=-v_{-\alpha_j}$ 因为 $m_i^-(-\alpha_j)=2$ 和 $f_je_i(v_{-\alpha_i})=-v_{-\alpha_j}$ 作为 $(\alpha_j,\ \alpha_i^\vee)=sgn(\alpha_j)=1$，因为 $\alpha_j \in R^+$。

在最后一种情况下 $(\alpha_j-\alpha_i,\ \alpha_i^\vee)=-(\alpha_j,\ \alpha_i^\vee)=-sgn(\alpha_j)=-1$ 因为 $\alpha_j \in R^+$。因此 $e_if_j(v_{-\alpha_i})$ $=-v_{-\alpha_j}$ 和 $f_je_i(v_{-\alpha_i})=-v_{-\alpha_j}$，所以该关系成立。

如果 $\bar{j}=1$ $(\alpha_j \in R^{im})$，那么

$$f_j(v_{-\alpha_i}) = \begin{cases} 0 & ; \text{if } \alpha_i+\alpha_j \notin R \\ (sgn-\alpha_i)m_j^+(-\alpha_i)v_{-\alpha_i-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha_i \in R^{re} \\ (-\alpha_i,\alpha_j^\vee)v_{-\alpha_i-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha_i \in R^{im} \end{cases}$$

$$e_if_j(v_{-\alpha_i}) = \begin{cases} 0 & ; \text{if } \alpha_i+\alpha_j \notin R \\ (sgn-\alpha_i)m_j^+(-\alpha_i)(sgn-\alpha_i-\alpha_j)m_i^-(-\alpha_i-\alpha_j)v_{-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha_i \in R^{re} \\ (-\alpha_i,\alpha_j^\vee)m_i^-(-\alpha_i-\alpha_j)v_{-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha_i \in R^{im} \end{cases}$$

在第一种情形中既然，如果 $\alpha_i \in R^{re}$，那么 $(\alpha_j,\ \alpha_i^\vee) = 0$ 作为 $m_i^{\pm}(\alpha_j) = 1$ 并且由于 $\alpha_i \notin R^{im}$ 作为 $i \neq j$。

在第二种情形（$\alpha_i \in R^{re}$，$\bar{i} = \bar{0}$）中，$sgn(-\alpha_i - \alpha_j) = (sgn - \alpha_i - \alpha_j)$，$m_j^+(-\alpha_i) = 1$和 $m_i^-(-\alpha_j - \alpha_i) = m_i^-(-\alpha_j) - 1 = m_i^-(-\alpha_j) - m_i^+(-\alpha_j) = -(\alpha_j, \alpha_i^\vee)$。然后，$e_i f_j(v_{-\alpha_j}) = -(\alpha_j, \alpha_i^\vee) v_{-\alpha_j}$ 并且由于 $\alpha_j - \alpha_i \notin R$意味着 $(\alpha_j, \alpha_i^\vee) = r - q = -q < 0$。因此，$f_j e_i(v_{-\alpha_j}) = -(\alpha_j, \alpha_i^\vee) v_{-\alpha_j}$。

最后一种情况并非我们遇到的情形，因此该关系成立。

情形（v）：考虑 $\alpha \notin \{\pm\alpha_i, \pm\alpha_j\}$。如果 $\alpha+\alpha_i \notin R$ 和 $\alpha-\alpha_j \notin R$，那么 $e_i(v_\alpha) = f_j(v_\alpha) = 0$。此外，如果 $\alpha + \alpha_i - \alpha_j \notin R$，则关系成立。由引理 2.11 只需考虑以下情形：$\alpha + \alpha_i \in R$，$\alpha - \alpha_j \in R$ 且 $\alpha + \alpha_i - \alpha_j \in R$，并且所有可能情形下的关系均已验证。

1. 如果 $\alpha_i,\ \alpha_j \in R^{re}$，那么

$$e_i f_j(v_\alpha) = (sgn\ \alpha) m_j^+(\alpha)(sgn\ \alpha - \alpha_j) m_i^-(\alpha - \alpha_j)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j}$$

$$f_j e_i(v_\alpha) = (sgn\ \alpha) m_i^-(\alpha)(sgn\ \alpha + \alpha_i) m_j^+(\alpha + \alpha_i)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j}.$$

如果 $\alpha \in R_{\bar{0}}$，那么根据（[2], 引理 2.6）可得 $m_i^-(\alpha) m_j^+(\alpha + \alpha_i) = m_j^+(\alpha) m_i^-(\alpha - \alpha_j)$，因此关系成立。由引理 2.14 可得，在 $\alpha \in R_{\bar{1}}$的情形下关系成立。

2. 若 $\alpha_i \in R^{re}, \alpha_j \in R^{im}$ 和 $\alpha \in R^{re}$，则

$$e_i f_j(v_\alpha) = (sgn\ \alpha) m_j^+(\alpha)(sgn\ \alpha - \alpha_j) m_i^-(\alpha - \alpha_j)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j}$$

$$f_j e_i(v_\alpha) = (sgn\ \alpha) m_i^-(\alpha) \begin{cases} (sgn\ \alpha + \alpha_i) m_j^+(\alpha + \alpha_i)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha + \alpha_i \in R^{re} \\ (\alpha + \alpha_i, \alpha_j)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha + \alpha_i \in R^{im}. \end{cases}$$

由于 $m_j^+(\alpha) = m_j^+(\alpha + \alpha_i) = 1$ 因为 $\alpha + \alpha_j$ 和 $\alpha + \alpha_i + \alpha_j$ 不属于 R，所以 $(\alpha + \alpha_i, \alpha_j) = sgn(\alpha + \alpha_i)$。因此，根据引理 2.15，我们得到该关系。

3. 若 $\alpha_i \in R^{im}, \alpha_j \in R^{re}$ 和 $\alpha \in R^{re}$，则

$$e_i f_j(v_\alpha) = (sgn\ \alpha) m_j^+(\alpha) \begin{cases} m_i^-(\alpha - \alpha_j)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha - \alpha_j \in R^{re} \\ (sgn\ \alpha - \alpha_j)(\alpha - \alpha_j, \alpha_i)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha - \alpha_j \in R^{im} \end{cases}$$

$$f_j e_i(v_\alpha) = m_i^-(\alpha)(sgn\ \alpha + \alpha_i) m_j^+(\alpha + \alpha_i)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j}.$$

由于 $m_i^-(\alpha - \alpha_j) = m_i^-(\alpha) = 1$ 因为 $\alpha - \alpha_i$ 和 $\alpha - \alpha_j - \alpha_i$ 不属于 R，所以 $(\alpha - \alpha_j, \alpha_i) = sgn(\alpha - \alpha_j)$。现在，将 (2) 应用于 $-\alpha + \alpha_j - \alpha_i$，并交换 α_i 和 α_j 的角色。因此，我们得到 $m_j^-(-\alpha - \alpha_i) = m_j^-(-\alpha)$。还需利用这一事实：对于所有 $\beta, \gamma \in R$，$m_\beta^{\pm}(\gamma) = m_\beta^{\mp}(-\gamma)$，因此关系 $m_j^+(\alpha) = m_j^+(\alpha + \alpha_i)$ 成立。

4. 若 $\alpha_i \in R^{re}, \alpha_j \in R^{im}$ 和 $\alpha \in R^{im}$，则

$$e_i f_j(v_\alpha) = (\alpha, \alpha_j)(sgn\ \alpha - \alpha_j) m_i^-(\alpha - \alpha_j)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j}$$

$$f_j e_i(v_\alpha) = (sgn\ \alpha) m_i^-(\alpha) \begin{cases} (sgn\ \alpha + \alpha_i) m_j^+(\alpha + \alpha_i)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha + \alpha_i \in R^{re} \\ (\alpha + \alpha_i, \alpha_j)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha + \alpha_i \in R^{im}. \end{cases}$$

由于 $m_i^-(\alpha) = m_j^+(\alpha + \alpha_i) = 1$ 作为 $\alpha - \alpha_i$ 和 $\alpha + \alpha_i + \alpha_j$ 不属于 R，因此 $(\alpha, \alpha_j) = (\alpha + \alpha_i, \alpha_j) = sgn(\alpha)$。因此，根据引理 2.16 我们得到该关系。

5. 若 $\alpha_i \in R^{im}, \alpha_j \in R^{re}$ 且 $\alpha \in R^{im}$，则

$$e_i f_j(v_\alpha) = (sgn\ \alpha) m_j^+(\alpha) \begin{cases} m_i^-(\alpha - \alpha_j)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha - \alpha_j \in R^{re} \\ (sgn\ \alpha - \alpha_j)(\alpha - \alpha_j, \alpha_i)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j} & ; \text{if } \alpha - \alpha_j \in R^{im} \end{cases}$$

$$f_j e_i(v_\alpha) = (sgn\ \alpha)(\alpha, \alpha_i)(sgn\ \alpha + \alpha_i) m_j^+(\alpha + \alpha_i)\ v_{\alpha+\alpha_i-\alpha_j}.$$

由于 $\alpha+\alpha_j$ 和 $\alpha-\alpha_j-\alpha_i$ 不属于 R，这意味着 $m_j^+(\alpha)=m_i^-(\alpha-\alpha_j)=1$；此外，$(\alpha-\alpha_j,\alpha_i)=(\alpha,\alpha_i)=sgn(\alpha)$。现在，将 (4) 应用于 $-\alpha+\alpha_j-\alpha_i$，并交换 α_i和 α_j 的角色。因此，我们得到 $m_j^-(-\alpha-\alpha_i)=1=m_j^+(\alpha+\alpha_i)$，并得到该关系。

□

引理 3.2。齐次线性映射 ω 满足 $\omega(u_i)=u_i$ $\omega(v_\alpha)=-v_{-\alpha}$ $\omega(v_{-\alpha})=-v_\alpha$：$M\to M$ 由 (1)、(2) 和 $(-1)^{\bar\alpha}v_\alpha$定义，其中 $\alpha\in R^+$，满足关系 $\omega e_i\omega^{-1}=-f_i$、$\omega f_i\omega^{-1}=-(-1)^{\bar i}e_i$ 和$\omega h_i\omega^{-1}=-h_i$。

证明。由于 ω 可逆，且对于 $\alpha\in R^+$，有 $\omega^{-1}(u_i)=u_i$，$\omega^{-1}(v_\alpha)=-(-1)^{\bar\alpha}v_{-\alpha}$ 以及 $\omega^{-1}(v_{-\alpha})=-v_\alpha$，因此我们得到

$$\omega e_i\omega^{-1}(u_j)=\omega e_i(u_j)=|(\alpha_i,\alpha_j^\vee)|\omega(v_{\alpha_i})=-|(\alpha_i,\alpha_j^\vee)|v_{-\alpha_i}=-f_i(u_j)$$

and

$$\omega f_i\omega^{-1}(u_j)=\omega f_i(u_j)=|(\alpha_i,\alpha_j^\vee)|\omega(v_{-\alpha_i})=-(-1)^{\bar i}|(\alpha_i,\alpha_j^\vee)|v_{\alpha_i}=-(-1)^{\bar i}e_i(u_j).$$

Also

$$\omega e_i\omega^{-1}(v_{\alpha_i})=-(-1)^{\bar i}\omega e_i(v_{-\alpha_i})=-(-1)^{\bar i}\omega((-1)^{\bar i}u_i)=-u_i=-f_i(v_{\alpha_i})$$

and

$$\omega f_i\omega^{-1}(v_{-\alpha_i})=-\omega f_i(v_{\alpha_i})=-\omega(u_i)=-(-1)^{\bar i}((-1)^{\bar i}u_i)=-(-1)^{\bar i}e_i(v_{-\alpha_i}).$$

现在，我们逐一证明该关系。对于 $i=0$，$e_i(v_\alpha)=(sgn\ \alpha)m_i^-(\alpha)v_{\alpha+\alpha_i}$ 以及 $f_i(v_\alpha)=(sgn\ \alpha)m_i^+(\alpha)v_{\alpha-\alpha_i}$。若 $\alpha\in R^+$，则 $-\alpha+\alpha_i\in -R^+$，并且

$$\begin{aligned}\omega e_i\omega^{-1}(v_\alpha) &= -(-1)^{\bar\alpha}\omega e_i(v_{-\alpha})\\ &= -(-1)^{\bar\alpha}(sgn-\alpha)m_i^-(-\alpha)\omega(v_{-\alpha+\alpha_i})\\ &= -(-1)^{\bar\alpha}(sgn-\alpha)m_i^-(-\alpha)(-(-1)^{\bar\alpha+\bar\alpha_i}v_{\alpha-\alpha_i})\\ &= -(sgn\ \alpha)m_i^+(\alpha)v_{\alpha-\alpha_i}\\ &= -f_i(v_\alpha)\end{aligned}$$

如 $sgn(-\alpha)=-sgn(\alpha)$ 和 $m_i^-(-\alpha)=m_i^+(\alpha)$。若 $\alpha\in -R^+$，则 $-\alpha+\alpha_i\in R^+$ 且

$$\begin{aligned}\omega e_i\omega^{-1}(v_\alpha) &= -\omega e_i(v_{-\alpha})\\ &= -(sgn-\alpha)m_i^-(-\alpha)\omega(v_{-\alpha+\alpha_i})\\ &= -(sgn-\alpha)m_i^-(-\alpha)(-v_{\alpha-\alpha_i})\\ &= -(sgn\ \alpha)m_i^+(\alpha)v_{\alpha-\alpha_i}\\ &= -f_i(v_\alpha).\end{aligned}$$

如果 $\alpha\in R^+$，那么 $-\alpha-\alpha_i\in -R^+$ 和

$$\begin{aligned}\omega f_i\omega^{-1}(v_\alpha) &= -(-1)^{\bar\alpha}\omega f_i(v_{-\alpha})\\ &= -(-1)^{\bar\alpha}(sgn-\alpha)m_i^+(-\alpha)\omega(v_{-\alpha-\alpha_i})\\ &= -(-1)^{\bar\alpha}(sgn-\alpha)m_i^+(-\alpha)(-(-1)^{\bar\alpha+\bar\alpha_i}v_{\alpha+\alpha_i})\\ &= -(-1)^{\bar i}(sgn\ \alpha)m_i^-(\alpha)v_{\alpha-\alpha_i}\\ &= -(-1)^{\bar i}e_i(v_\alpha)\end{aligned}$$

作为 $sgn(-\alpha) = -sgn(\alpha)$ 和 $m_i^+(-\alpha) = m_i^-(\alpha)$。如果 $\alpha \in -R^+$，那么 $-\alpha - \alpha_i \in R^+$ 和

$$\begin{aligned}\omega f_i \omega^{-1}(v_\alpha) &= -\omega f_i(v_{-\alpha}) \\ &= -(sgn-\alpha)m_i^+(-\alpha)\omega(v_{-\alpha-\alpha_i}) \\ &= -(sgn-\alpha)m_i^+(-\alpha)(-v_{\alpha+\alpha_i}) \\ &= -(-1)^{\bar{i}}(sgn\ \alpha)m_i^-(\alpha)v_{\alpha+\alpha_i} \\ &= -(-1)^{\bar{i}}e_i(v_\alpha).\end{aligned}$$

对于 $\bar{i}=1$ 和 $\alpha \in R^{re}$，$e_i(v_\alpha) = m_i^-(\alpha)v_{\alpha+\alpha_i}$ 和 $f_i(v_\alpha) = (sgn\ \alpha)m_i^+(\alpha)v_{\alpha-\alpha_i}$。如果 $\alpha \in R^+$，那么 $-\alpha+\alpha_i \in -R^+$ 和

$$\begin{aligned}\omega e_i \omega^{-1}(v_\alpha) &= -(-1)^{\bar{\alpha}}\omega e_i(v_{-\alpha}) \\ &= -(-1)^{\bar{\alpha}}m_i^-(-\alpha)\omega(v_{-\alpha+\alpha_i}) \\ &= -(-1)^{\bar{\alpha}}m_i^-(-\alpha)(-(-1)^{\bar{\alpha}+\bar{\alpha_i}}v_{\alpha-\alpha_i}) \\ &= -m_i^+(\alpha)v_{\alpha-\alpha_i} \\ &= -(sgn\ \alpha)f_i(v_\alpha)\end{aligned}$$

作为 $sgn(\alpha) = 1$ 和 $m_i^-(-\alpha) = m_i^+(\alpha)$。如果 $\alpha \in -R^+$，那么 $-\alpha+\alpha_i \in R^+$ 和 $sgn(\alpha) = -1$,

$$\begin{aligned}\omega e_i \omega^{-1}(v_\alpha) &= -\omega e_i(v_{-\alpha}) \\ &= -m_i^-(-\alpha)\omega(v_{-\alpha+\alpha_i}) \\ &= -m_i^-(-\alpha)(-v_{\alpha-\alpha_i}) \\ &= m_i^+(\alpha)v_{\alpha-\alpha_i} \\ &= -(sgn\ \alpha)f_i(v_\alpha).\end{aligned}$$

如果 $\alpha \in R^+$，那么 $-\alpha-\alpha_i \in -R^+$ 和

$$\begin{aligned}\omega f_i \omega^{-1}(v_\alpha) &= -(-1)^{\bar{\alpha}}\omega f_i(v_{-\alpha}) \\ &= -(-1)^{\bar{\alpha}}(sgn-\alpha)m_i^+(-\alpha)\omega(v_{-\alpha-\alpha_i}) \\ &= -(-1)^{\bar{\alpha}}(sgn-\alpha)m_i^+(-\alpha)(-(-1)^{\bar{\alpha}+\bar{\alpha_i}}v_{\alpha+\alpha_i}) \\ &= -(-1)^{\bar{i}}m_i^-(\alpha)v_{\alpha+\alpha_i} \\ &= -(-1)^{\bar{i}}e_i(v_\alpha)\end{aligned}$$

作为 $sgn(-\alpha) = -1$ 和 $m_i^+(-\alpha) = m_i^-(\alpha)$。如果 $\alpha \in -R^+$，那么 $-\alpha-\alpha_i \in R^+$ 和 $sgn(-\alpha) = 1$,

$$\begin{aligned}\omega f_i \omega^{-1}(v_\alpha) &= -\omega f_i(v_{-\alpha}) \\ &= -(sgn-\alpha)m_i^+(-\alpha)\omega(v_{-\alpha-\alpha_i}) \\ &= -(sgn-\alpha)m_i^+(-\alpha)(-v_{\alpha+\alpha_i}) \\ &= -(-1)^{\bar{i}}m_i^-(\alpha)v_{\alpha+\alpha_i} \\ &= -(-1)^{\bar{i}}e_i(v_\alpha).\end{aligned}$$

对于 $\bar{i}=1$ 和 $\alpha\in R^{im}$, $e_i(v_\alpha)=(sgn\ \alpha)(\alpha,\alpha_i^\vee)v_{\alpha+\alpha_i}$ 和 $f_i(v_\alpha)=(\alpha,\alpha_i^\vee)v_{\alpha-\alpha_i}$。如果 $\alpha\in R^+$，那么 $-\alpha+\alpha_i\in -R^+$ 和

$$\begin{aligned}\omega e_i\omega^{-1}(v_\alpha) &= -(-1)^{\bar{\alpha}}\omega e_i(v_{-\alpha})\\ &= -(-1)^{\bar{\alpha}}(sgn-\alpha)(-\alpha,\alpha_i^\vee)\omega(v_{-\alpha+\alpha_i})\\ &= -(-1)^{\bar{\alpha}}(sgn-\alpha)(-\alpha,\alpha_i^\vee)(-(-1)^{\bar{\alpha}+\bar{\alpha}_i}v_{\alpha-\alpha_i})\\ &= -(\alpha,\alpha_i^\vee)v_{\alpha-\alpha_i}\\ &= -f_i(v_\alpha)\end{aligned}$$

如 $sgn(-\alpha)=-1$。若 $\alpha\in -R^+$，则 $-\alpha+\alpha_i\in R^+$ 和 $sgn(-\alpha)=1$,

$$\begin{aligned}\omega e_i\omega^{-1}(v_\alpha) &= -\omega e_i(v_{-\alpha})\\ &= -(sgn-\alpha)(-\alpha,\alpha_i^\vee)\omega(v_{-\alpha+\alpha_i})\\ &= -(sgn-\alpha)(-\alpha,\alpha_i^\vee)(-v_{\alpha-\alpha_i})\\ &= -(\alpha,\alpha_i^\vee)v_{\alpha-\alpha_i}\\ &= -f_i(v_\alpha).\end{aligned}$$

若 $\alpha\in R^+$，则 $-\alpha-\alpha_i\in -R^+$ 和

$$\begin{aligned}\omega f_i\omega^{-1}(v_\alpha) &= -(-1)^{\bar{\alpha}}\omega f_i(v_{-\alpha})\\ &= -(-1)^{\bar{\alpha}}(-\alpha,\alpha_i^\vee)\omega(v_{-\alpha-\alpha_i})\\ &= -(-1)^{\bar{\alpha}}(-\alpha,\alpha_i^\vee)(-(-1)^{\bar{\alpha}+\bar{\alpha}_i}v_{\alpha+\alpha_i})\\ &= -(-1)^{\bar{i}}(sgn\ \alpha)(\alpha,\alpha_i^\vee)v_{\alpha-\alpha_i}\\ &= -(-1)^{\bar{i}}e_i(v_\alpha)\end{aligned}$$

如 $sgn(\alpha)=1$。若 $\alpha\in -R^+$，则 $-\alpha-\alpha_i\in R^+$ 和 $sgn(\alpha)=-1$,

$$\begin{aligned}\omega f_i\omega^{-1}(v_\alpha) &= -\omega f_i(v_{-\alpha})\\ &= -(-\alpha,\alpha_i^\vee)\omega(v_{-\alpha-\alpha_i})\\ &= -(-\alpha,\alpha_i^\vee)(-v_{\alpha+\alpha_i})\\ &= -(-1)^{\bar{i}}(sgn\ \alpha)(\alpha,\alpha_i^\vee)v_{\alpha+\alpha_i}\\ &= -(-1)^{\bar{i}}e_i(v_\alpha).\end{aligned}$$

□

4. Lie superalgebra generated by e_i, f_i

考虑李超代数 $\mathfrak{gl}(M)$，它由所有 $\mathbb{C}$-线性映射构成，其超交换子为$[\phi,\psi]=\phi\psi-(-1)^{\phi\psi}\psi\phi$，其中映射为齐次线性映射。令 $\mathfrak{g}:=\langle e_i,\ f_i:\ i\in I\rangle\subseteq\mathfrak{gl}(M)$为由齐次线性算子生成的子李超代数，并满足引理 3.1中的关系。因此 $\mathfrak{g}$ 是所有层级为 $n\ (n\geq 1)$ 的李单项式及 $dim\ \mathfrak{g}<\infty$的线性张成。

显然，$h_i\in\mathfrak{g}$ 并令 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ 为由 h_i、$i\in I$张成的子空间，它是一个阿贝尔子代数，基为 $h_i\ (i\in I)$。令 $\mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{h}$ 的对偶，并对 $\alpha\in R$，定义 $\dot{\alpha}\in\mathfrak{h}^*$ 如下：$\dot{\alpha}(h_j):=(\alpha、\ \alpha_j^\vee)$对所有 $j\in I$均成立。令 $R=\{\dot{\alpha}:\ \alpha\in R\}$，并注意映射 $\alpha\mapsto\dot{\alpha}$ 关于 α是线性的。由于 $\alpha_i\ (i\in I)$张成 R，因此 $\dot{\alpha}_i$ 张成 R。对于 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$，我们定义

$$\mathfrak{g}^\lambda:=\{x\in\mathfrak{g}:[h,x]=\lambda(h)x\ \text{for all}\ h\in\mathfrak{h}\}.$$

由于对所有 $j\in I$ 都有 $[h_j,e_i]=(\alpha_i,\ \alpha_j^\vee)e_i=\dot{\alpha}_i(h_j)e_i$，因此 $e_i\in\mathfrak{g}^{\alpha_i}$；类似地，$f_i\in\mathfrak{g}^{-\dot{\alpha}_i}$ 和 $h_i\in\mathfrak{g}^0:=\{x\in\mathfrak{g}:$对所有 $h\in\mathfrak{h}\}$ 和所有 $i\in I$ 都成立。

现在，设 $\mathfrak{n}^+ := \langle e_i : i \in I\rangle_{Lie}$ 和 $\mathfrak{n}^- := \langle f_i : i \in I\rangle_{Lie}$ 是由 e_i 和 $f_i (i \in I)$ 分别自由生成的 $\mathfrak{g}$ 的子代数。令 $Q^+ := \left\{\sum_{i\in I} n_i\dot{\alpha}_i \in \mathfrak{h}^* : \text{对所有 } i \in I\right\} \setminus \{0\}$ 都有 $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，并且 $Q^- = -Q^+$。

引理 4.1. 我们有 $\mathfrak{n}^\pm \subseteq \sum_{\lambda\in Q^\pm} \mathfrak{g}^\lambda$。

证明。设 $x \in \mathfrak{n}^+$ 是 $\{e_i$ 中的一个李单项式：$i \in I\}$，其层级为 n。我们对 n 使用归纳法，证明 $x \in \mathfrak{g}^\lambda$ 对某个 $\lambda \in Q^+$ 成立。若 $n = 1$，则对某个 i 有 $x = e_i$，并且我们注意到 $e_i \in \mathfrak{g}^{\dot{\alpha}_i}$。若 $n \geq 2$ 且 $x = [y, z]$ 是一个层级为 n 的李单项式，其中 y，z 是层级低于 n 的李单项式，则由归纳法可得 $y \in \mathfrak{g}^\mu$ 和 $z \in \mathfrak{g}^\nu$，其中 μ，$\nu \in Q^+$。由分次雅可比恒等式，$[h_i, [y, z]] = [[h_i, y], z] + (-1)^{h_i y}[y, [h_i, z]] = \mu(h_i)[y, z] + \nu(h_i)[y, z]$ 对所有 $i \in I$ 均成立。因此$x \in \mathfrak{g}^\lambda$，其中 $\lambda := \mu + \nu \in Q^+$，而关于 $\mathfrak{n}^-$ 的论证完全类似。□

注 4.2. 由于对于任意 $g \in \mathfrak{g}$，我们在 M 上都有一个线性映射，因此 M 具有 $\mathfrak{g}$-模结构。若定义 $(\alpha, \alpha_i^\vee) := \alpha(h_i)$，则有 $h_i(u_j) = 0$ 且 $h_i(v_\alpha) = \alpha(h_i)v_\alpha$，因此齐次基 $\{u_i : i \in I\} \cup \{v_\alpha : \alpha \in R\}$ 是一组 $h_i (i \in I)$ 权向量，并且有权空间分解 $M = M^0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in R} M^\alpha$，其中 $M^0 =$张成$_{\mathbb{C}}\{u_i : i \in I\}$，而 $M^\alpha =$ 张成$_{\mathbb{C}}\{v_\alpha : \alpha \in R\}$.
我们可以观察到，e_k，$f_k (k \in I)$ 对这个齐次基的作用如下：若 $v \in M$ 是权为 $\lambda \in R \cup \{0\}$ 的权向量，则要么 $e_k(v) = 0$（同理，$f_k(v) = 0$），要么 $e_k(v)$ 和 $f_k(v)$ 仍是权向量，其权分别为 $\lambda + \alpha_k$ 和 $\lambda - \alpha_k$。

引理 4.3. 我们有一个直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$。

证明。按照（[2], 引理 4.5）中的论证，并结合引理 3.1 中的关系，显然有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}^+$。设 $g = n^- + h + n^+ = 0$，其中 $n^\pm \in \mathfrak{n}^\pm$ 且 $h \in \mathfrak{h}$。于是$0 = g(u_i) = n^-(u_i) + h(u_i) + n^+(u_i) = n^-(u_i) + n^+(u_i)$。于是 $n^-(u_i) \in M^{-\alpha}$ 且 $n^+(u_i) \in M^\beta$，其中某些 α、$\beta \in R^+$。因此，由 M 的分解可得，对于所有 $i \in I$ 及所有$h \in \mathfrak{h}$，都有 $n^\pm(u_i) = 0$。现在对于 $\alpha \in R^+$，$0 = g(v_\alpha) = n^-(v_\alpha) + h(v_\alpha) + n^+(v_\alpha) \in M^{\alpha'} \oplus M^\alpha \oplus M^{\alpha''}$，其中 $ht(\alpha') \preceq ht(\alpha) \preceq ht(\alpha'')$。再次利用分解 $n^\pm(v_\alpha) = 0$ 和 $h(v_\alpha) = 0$，同理可得 $\alpha \in R^-$ 的情形。因此，我们有 $n^\pm = 0$ 和 $h = 0$。□

引理 4.4。 由偶齐次可对角化算子 $\mathfrak{h}$ 张成的阿贝尔子代数 h_i是 $\mathfrak{g}$的嘉当子代数，并且我们有分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in R} \mathfrak{g}^\alpha$，其中 $dim\ \mathfrak{g}^\alpha = 1$ 对于 $\alpha \in R$成立。

证明。由于 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^0$ 和 $\mathfrak{n}^\pm \subseteq \bigoplus_{\lambda\in Q^\pm} \mathfrak{g}^\lambda$。由上述引理我们推得 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0$ 和 $\mathfrak{n}^\pm = \sum_{\lambda\in Q^\pm} \mathfrak{g}^\lambda$，这表明 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$的嘉当子代数。令 R' 为相对于 $\mathfrak{h}$的 $\mathfrak{g}$ 的根系，则 $R' \subseteq Q^\pm$。由于 $\dot{\alpha}_i \in R'$ 张成 R'，我们推得 $\dot{\Pi} := \{\dot{\alpha}_i : i \in I\}$ 是 R'的一组单根。由于 R 是有限局部有限根超系统，并且根据 [10] 我们可以从 Π恢复 R。此外，$\dot{\Pi} \cong \Pi$，因此从 Π 恢复的根系是 $R \cong R$，即 $\mathfrak{g}$ 的根系，因而我们得到该分解。□

现在，我们得到了相对于嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ 的 $\mathfrak{g}$的根空间分解，其根系与我们起始的不可约根系同构。我们将李超代数 $\mathfrak{g}$ 按 $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in R_{\bar{0}}}$ 和 $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \bigoplus_{\alpha\in R_{\bar{1}}}$ 分次。此外，作为 $\mathfrak{g}$-模，$\mathfrak{g}$（通过伴随表示）和 M 具有相同的权集 R。

注记 4.5。 由引理 3.2 可知存在一个自同构 $\widetilde{\omega} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 由 $g \mapsto \omega g \omega^{-1}$给出，它满足 $\widetilde{\omega}^2 \restriction \mathfrak{g}_{\bar{0}} = id_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}$ 且 $\widetilde{\omega}^2 \restriction \mathfrak{g}_{\bar{1}} = -id_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$，因此 $\widetilde{\omega}^4 = id_{\mathfrak{g}}$。

引理 4.6。 我们证明 $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 在伴随作用下是忠实的 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-模。

证明。 首先通过 $i_0 \in I$ 固定唯一单各向同性根的指标，因此 e_{i_o}， $f_{i_0} \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$。我们用逆否法证明此引理，为此需要证明：对于每个非零 $x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$，存在非零 $y \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$，使得 $[x,y] \neq 0$。首先对 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的生成元证明这一点。对于 $x = h_{i_0} \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$，取 $y = [e_{i_0}, e_i] \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$，使得 $i \in \{i_0 - 1, i_0 + 1\}$。于是

$$[h_{i_0}, [e_{i_0}, e_i]] = [[h_{i_0}, e_{i_0}], e_i] + [e_{i_0}, [h_{i_0}, e_i]] = (\alpha_i, \alpha_{i_0})[e_{i_0}, e_i]$$

and

$$[e_{i_0}, e_i](u_{i_0}) = |(\alpha_i, \alpha_{i_0})| e_{i_0}(v_{\alpha_i}) = |(\alpha_i, \alpha_{i_0})| m_{i_0}^{-}(\alpha_i) v_{\alpha_i + \alpha_{i_0}} \neq 0$$

由于 $(\alpha_i,\ \alpha_{i_0}) \neq 0$ 且 $\alpha_i + \alpha_{i_0} \in R$。

对于满足 $i \neq i_0$ 和 $i \in \{i_0 - 1, i_0 + 1\}$ 的 $x = h_i$，取 $y = e_{i_0}$，则有 $[h_i, e_{i_0}] = (\alpha_{i_0}, \alpha_i) e_{i_0}$。由于 $(\alpha_{i_0}, \alpha_i) \neq 0$ 且 $e_{i_0}(u_i) = |(\alpha_{i_0}, \alpha_i^\vee)| v_{\alpha_{i_0}} \neq 0$，因此 $[h_i, e_{i_0}] \neq 0$。若 $i \notin \{i_0 - 1, i_0 + 1\}$，我们依次找到 y。令 $j_i \in I \backslash \{i_0\}$ 满足 $(\alpha_{i_0}, \alpha_{j_1}) \neq 0$；若 $(\alpha_i, \alpha_{j_1}) \neq 0$，则取 $y = [e_{j_1}, e_{i_0}] \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$。由于 $y(u_{i_0}) \neq 0$，所以 $[h_i, [e_{j_1}, e_{i_0}]] = (\alpha_{j_1}, \alpha_i^\vee)[e_{j_1}, e_{i_0}] \neq 0$，因为 $(\alpha_{i_0}, \alpha_i) = 0$。假设 $(\alpha_i, \alpha_{j_1}) = 0$，令 $j_2 \in I \backslash \{i_0, j_1\}$ 满足 $(\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}) \neq 0$；若 $(\alpha_i, \alpha_{j_2}) \neq 0$，则取 $y = [e_{j_2}, [e_{j_1}, e_{i_0}]] \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$。同样，$y(u_{i_0}) \neq 0$，因此 $[x,y] \neq 0$，因为 $x(u_{i_0}) = 0$。否则，在如上选取 j_3、j_4、……、j_k 后，由于 I 是有限的，令 $j_{k+1} \in I \backslash \{i_0, j_1, \ldots, j_k\}$ 满足 $(\alpha_{j_k}, \alpha_{j_{k+1}}) \neq 0$。于是 $(\alpha_i, \alpha_{j_{k+1}}) \neq 0$，取 $y = [e_{j_{k+1}}, \cdots [e_{j_2}, [e_{j_1}, e_{i_0}]] \cdots] \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$，显然 $y(u_{i_0}) \neq 0$，且 $[x,y] \neq 0$，如上所述。

现在，对于带有 $i \in \{i_0 - 1, i_0 + 1\}$ 的 $x = e_i \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} (i \neq i_0)$，取 $y = e_{i_0} \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ then $[e_i, e_{i_0}](u_{i_0}) \neq 0$。若 $i \notin \{i_0 - 1, i_0 + 1\}$，则可像上文那样依次找到非零的 $y = [e_{j_k}, \cdots [e_{j_2}, [e_{j_1}, e_{i_0}]] \cdots] \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$，使得 $[x,y] \neq 0$。由于根据（注记 4.5），我们在 $\mathfrak{g}$ 上有一个自同构，使得 $\widetilde{\omega}(e_i) = -f_i, \widetilde{\omega}(f_i) = -(-1)^{\bar{i}} e_i$，且 $\widetilde{\omega}(h_i) = -h_i$，因此通过完全类似的论证，可以证明关于 $f_i \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}\ (i \neq i_0)$ 的结果。

现在通过归纳法，我们证明对于 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 中任意非零的层级为 $n > 1$ 的李单项式，结论都成立。设 $x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 是一个非零的、层级为 $n > 1$ 的李单项式，则 $x \in \mathfrak{g}^\alpha$ 对某个 $\alpha \in R_{\bar{0}}$ 成立。由于根据（[3],引理 2.2），存在一个 $\beta \in R^{im}$，使得 $(\alpha,\ \beta) \neq 0$，因此 $\alpha \pm \beta \in R$。于是存在一个非零的 $y \in \mathfrak{g}^\beta \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{1}}$，使得 $[x,y] \in \mathfrak{g}^{\alpha \pm \beta}$ 非零，结论得证。□

引理 4.7。 我们证明，$\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 作为 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-模，要么不可约，要么其任意非零子模 $\mathfrak{a}$ *of* $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 都满足 $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$。

注 4.8. 由上述引理，对于任意 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-子模 $\mathfrak{a}$，都有 $\mathfrak{g}_{\bar{1}}\ \mathfrak{g}_{\bar{0}} = [\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{a}] \subseteq [\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}}$，因此 $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$。

引理 4.9. 我们证明 $[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] = \mathfrak{g}_{\bar{1}}$。

证明. 由于 $[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 和 $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \bigoplus_{\alpha \in R_{\bar{1}}} \mathfrak{g}^\alpha$。此外，$[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^\alpha] = \mathfrak{g}^\alpha$，因此 $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \subseteq [\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}]$。 □

引理4.10. 李超代数 $\mathfrak{g}$ 是单的。

证明。 由（[7], 引理1.2.1）以及（[8], 第二章，§2.1），我们得到了 $\mathfrak{g}$ 简单性的充分条件。此外，在引理（4.6、4.7、4.9）中，我们确立了这一要求。□

5. Quiver diagram of Irreducible GRS

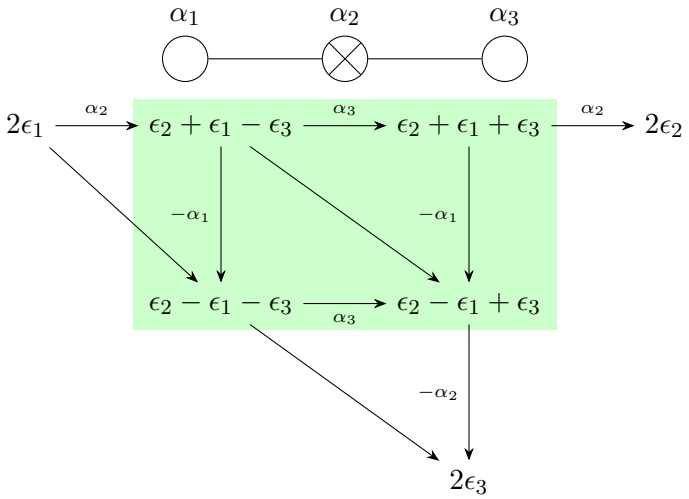
本节列出所有不可约广义根系，以及其正偶根与奇根集合、带有 Dynkin图的标记基和相应的箭图，使得这些根按顺序排列并满足引理 2.11。

1. $D(2,\ 1; a)$

$$R_{\bar{0}}^{+} = \{2\epsilon_1, 2\epsilon_2, 2\epsilon_3\}$$

$$R_{\bar{1}}^{+} = \{\epsilon_2 \pm \epsilon_1 \pm \epsilon_3\}$$

$$\Pi = \{2\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_3, 2\epsilon_3\}$$

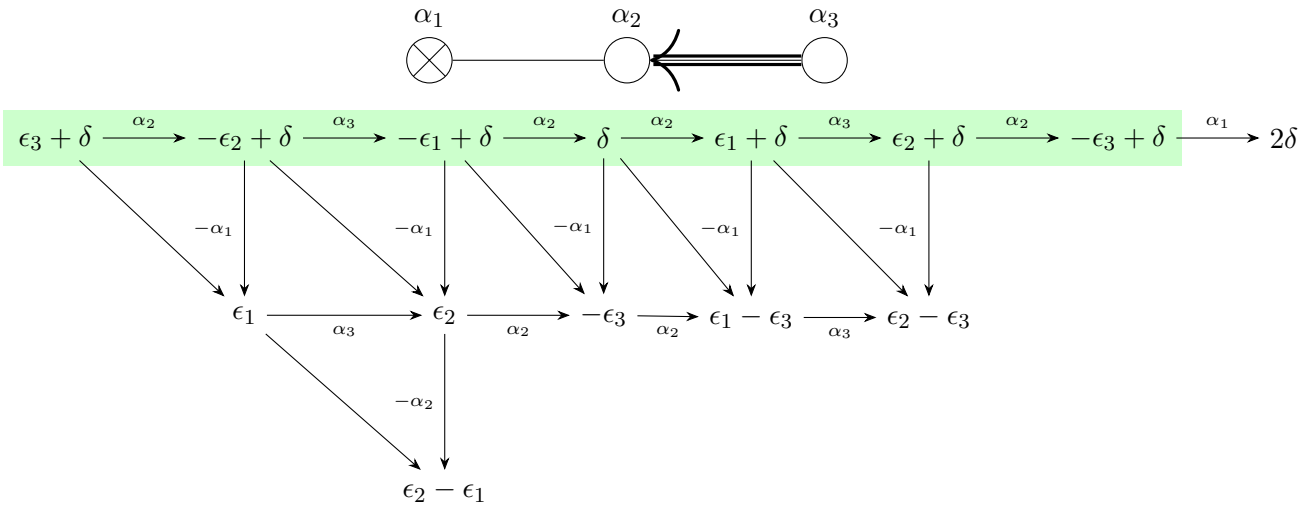


2. *G*(3)

$$R_{\bar{0}}^{+} = \{2\delta, \epsilon_1, \epsilon_2, -\epsilon_3, \epsilon_1 - \epsilon_3, \epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_2 - \epsilon_1\}$$

$$R_{\bar{1}}^{+} = \{\delta, \delta \pm \epsilon_i : 1 \leq i \leq 3\}$$

$$\Pi = \{\delta + \epsilon_3, \epsilon_2 - \epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1\}$$

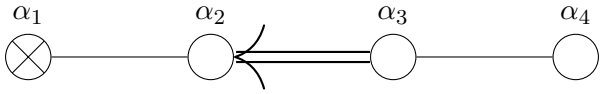


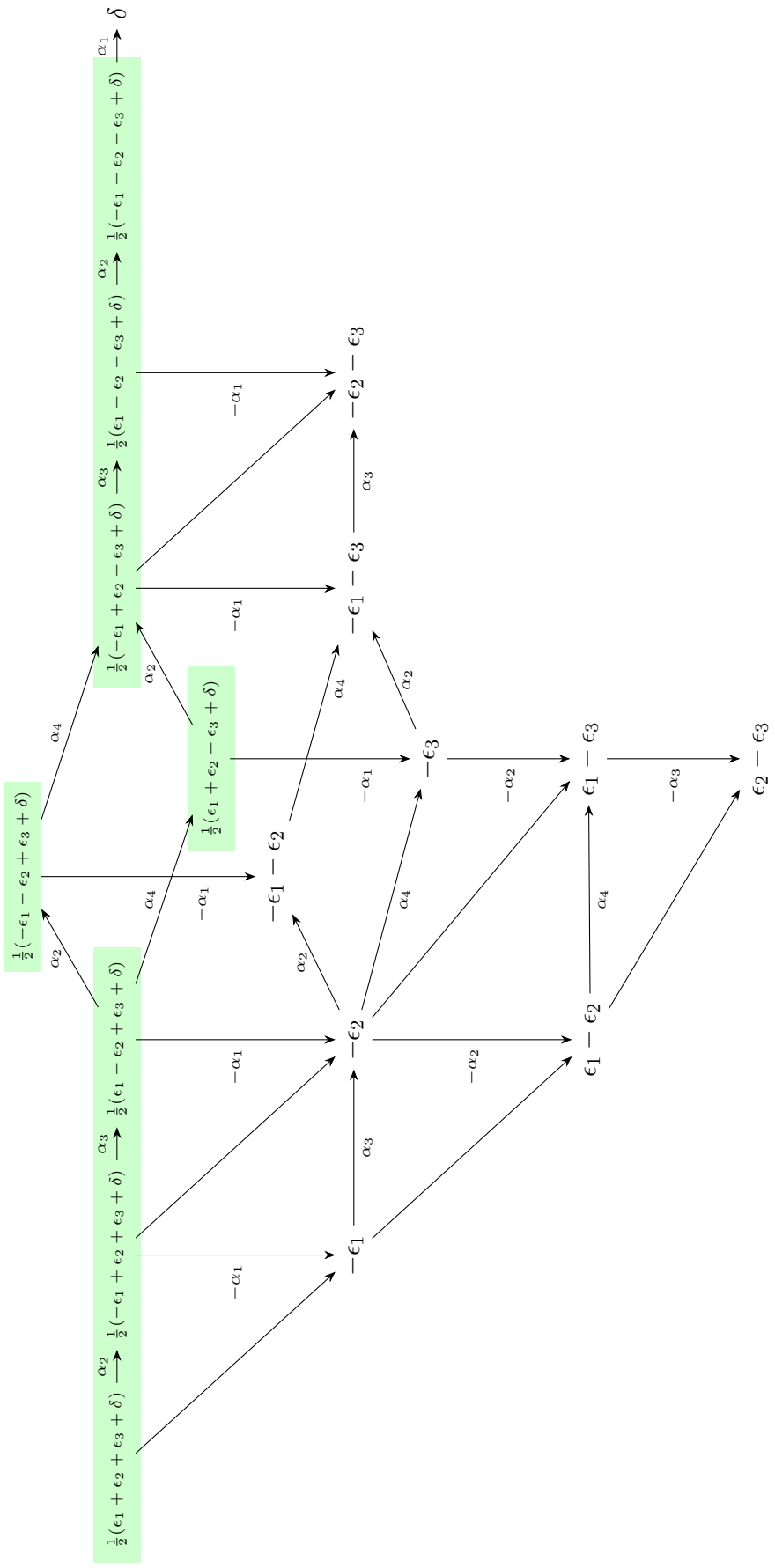
3. *F*(4)

$$R_{\bar{0}}^{+} = \{\delta, -\epsilon_i, -\epsilon_k \pm \epsilon_l : 1 \leq i \leq 3, 1 \leq k < l \leq 3\}$$

$$R_{\bar{1}}^{+} = \{1/2(\delta \pm \epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3)\}$$

$$\Pi = \{1/2(\delta + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3), -\epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3\}$$




δ
$\frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)$
$\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)$
$\frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)$
$\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)$
$\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)$
$\frac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)$
$\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)$
$\frac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)$
$-\epsilon_1$
$-\epsilon_2$
$-\epsilon_3$
$\epsilon_1-\epsilon_2$
$-\epsilon_1-\epsilon_2$
$\epsilon_1-\epsilon_3$
$-\epsilon_1-\epsilon_3$
$\epsilon_2-\epsilon_3$
$-\epsilon_2-\epsilon_3$
α_1
α_2
α_3
α_4
$-\alpha_1$
$-\alpha_2$
$-\alpha_3$

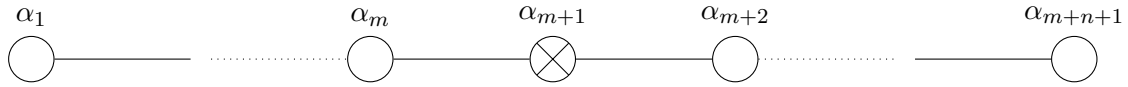
经典级数。

4. $A(m, \ n)$

$$R_{\bar{0}}^{+} = \{\epsilon_i - \epsilon_j, \delta_k - \delta_l : 1 \leq i < j \leq m+1, 1 \leq k < l \leq n+1\}$$

$$R_{\bar{1}}^{+} = \{\epsilon_i - \delta_j : 1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq n+1\}$$

$$\Pi = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \epsilon_m - \epsilon_{m+1}, \epsilon_{m+1} - \delta_1, \delta_1 - \delta_2, \ldots, \delta_n - \delta_{n+1}\}$$

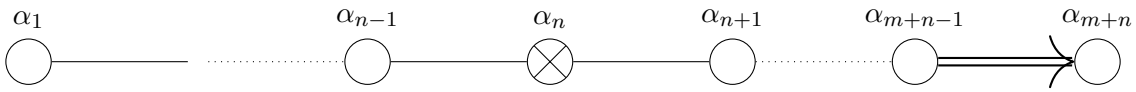


5. $B(m, \ n)$

$$R_{\bar{0}}^{+} = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j, \epsilon_{i'}, \delta_k \pm \delta_l, 2\delta_{k'} \colon \ 1 \leq i < j \leq m, 1 \leq k < l \leq n, 1 \leq i' \leq m, 1 \leq k' \leq n\}$$

$$R_{\bar{1}}^{+} = \{\delta_i, \delta_k \pm \epsilon_l \colon \ \ 1 \leq i, k \leq n, 1 \leq l \leq m\}$$

$$\Pi = \{\delta_1 - \delta_2, \ldots, \delta_{n-1} - \delta_n, \delta_n - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{m-1} - \epsilon_m, \epsilon_m\}$$



6. $C(n)$

$$R_{\bar{0}}^{+} = \{\delta_k \pm \delta_l, 2\delta_{k'} \colon, 1 \leq k < l \leq n-1, 1 \leq k' \leq n-1\}$$

$$R_{\bar{1}}^{+} = \{\epsilon_1 \pm \delta_i : 1 \leq i \leq n-1\}$$

$$\Pi = \{\epsilon_1 - \delta_1, \delta_1 - \delta_2, \ldots, \delta_{n-2} - \delta_{n-1}, 2\delta_{n-1}\}$$

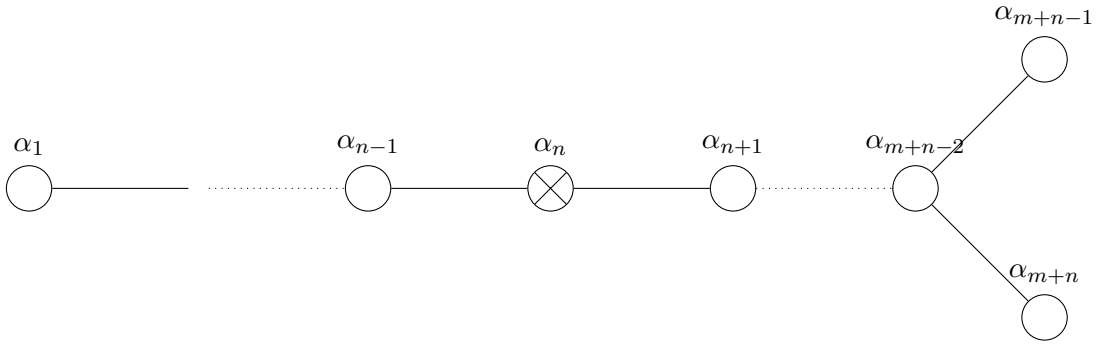


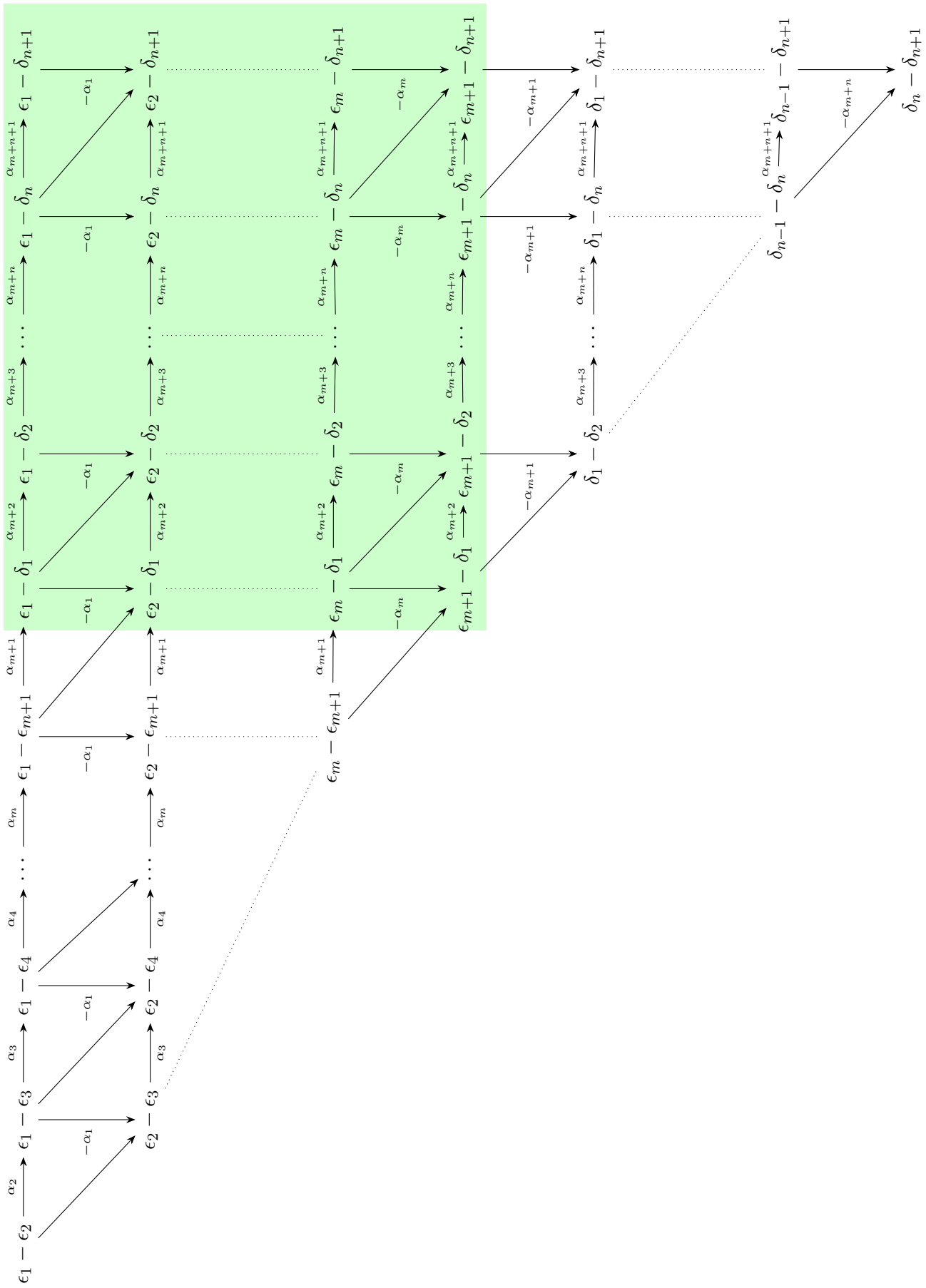
7. $D(m, n)$

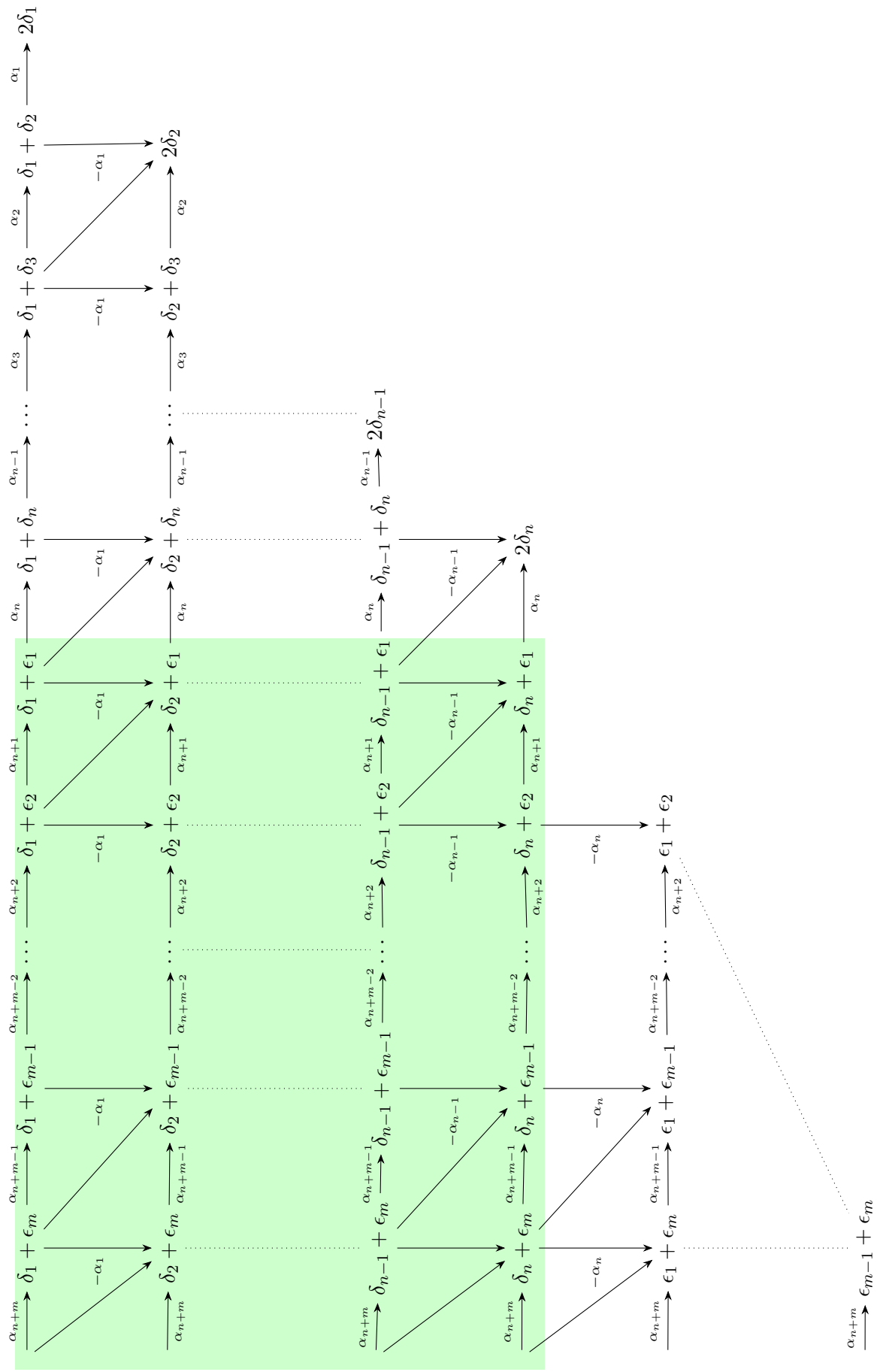
$$R_{\bar{0}}^{+} = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j, \delta_k \pm \delta_l, 2\delta_{k'} : 1 \leq i < j \leq m, 1 \leq k < l \leq n, 1 \leq k' \leq n\}$$

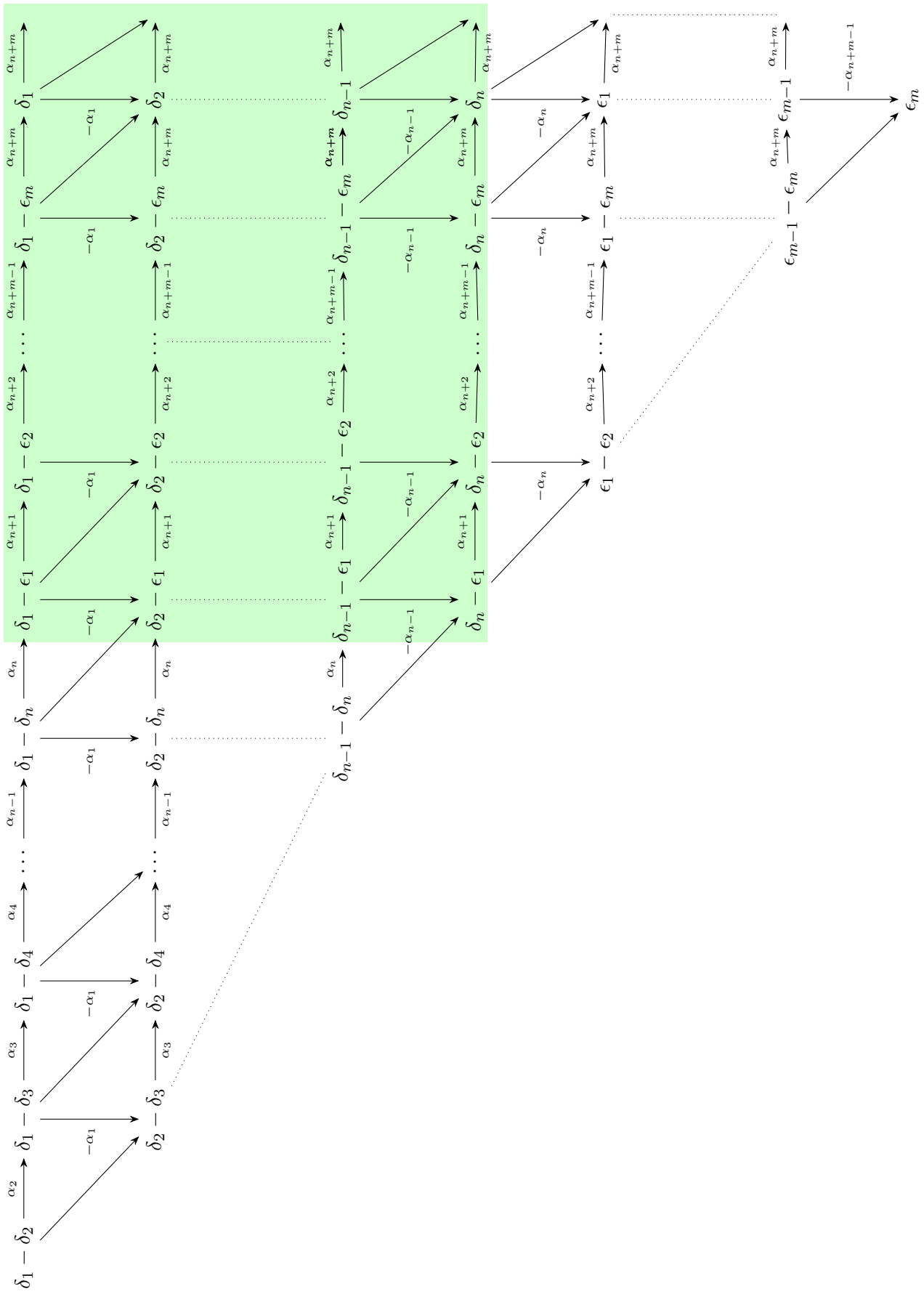
$$R_{\bar{1}}^{+} = \{\delta_k \pm \epsilon_l : 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m\}$$

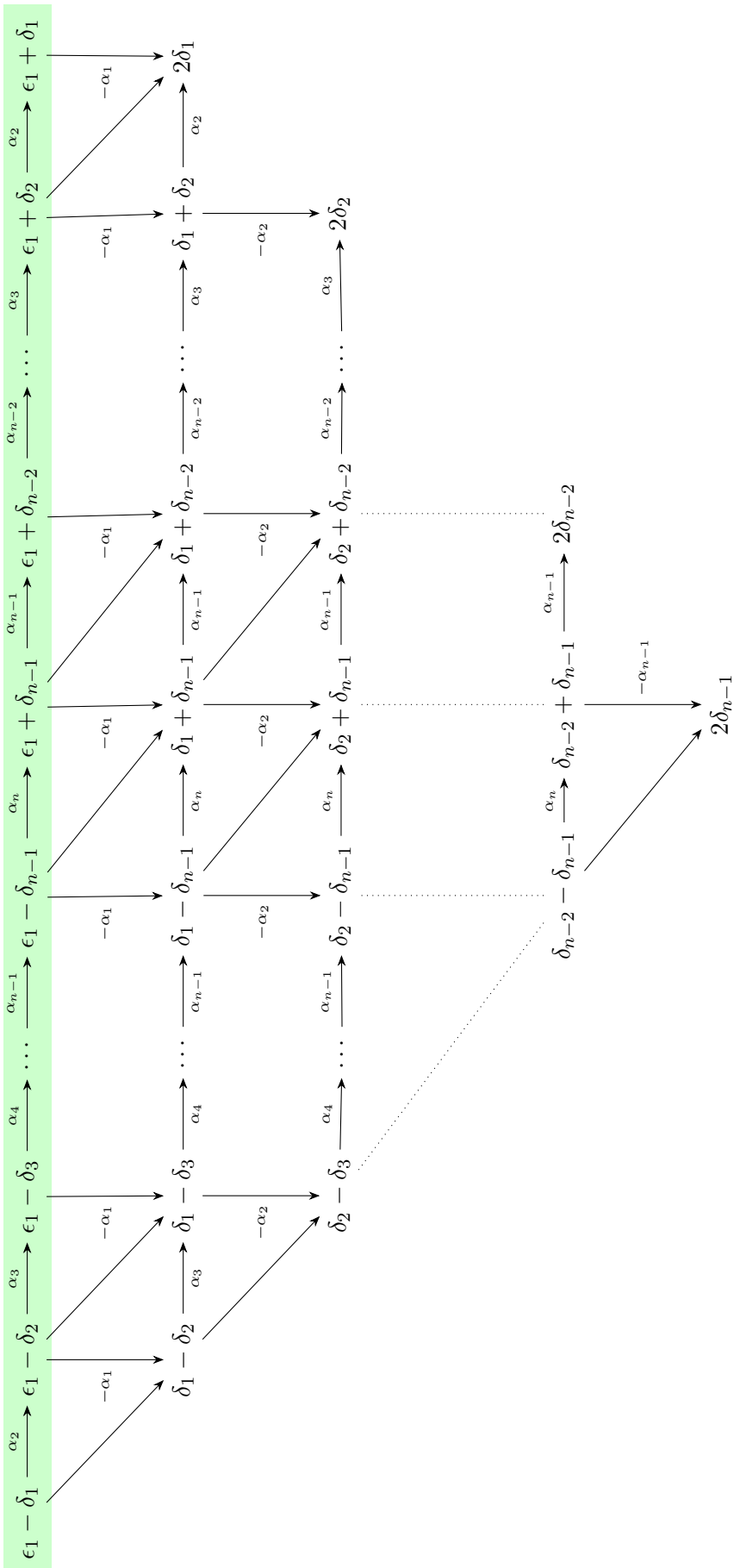
$$\Pi = \{\delta_1 - \delta_2, \ldots, \delta_{n-1} - \delta_n, \delta_n - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{m-1} - \epsilon_m, \epsilon_{m-1} + \epsilon_m\}$$

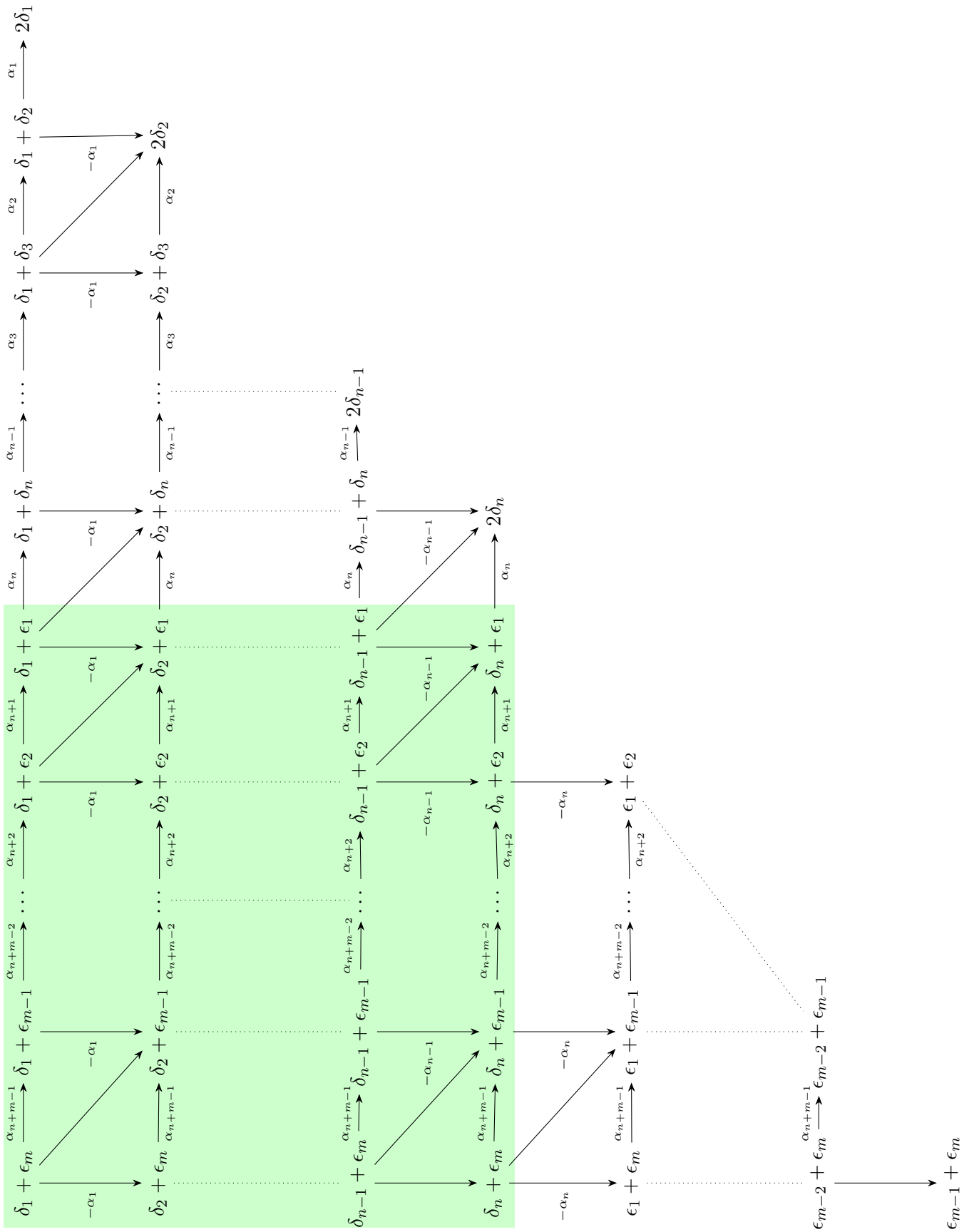


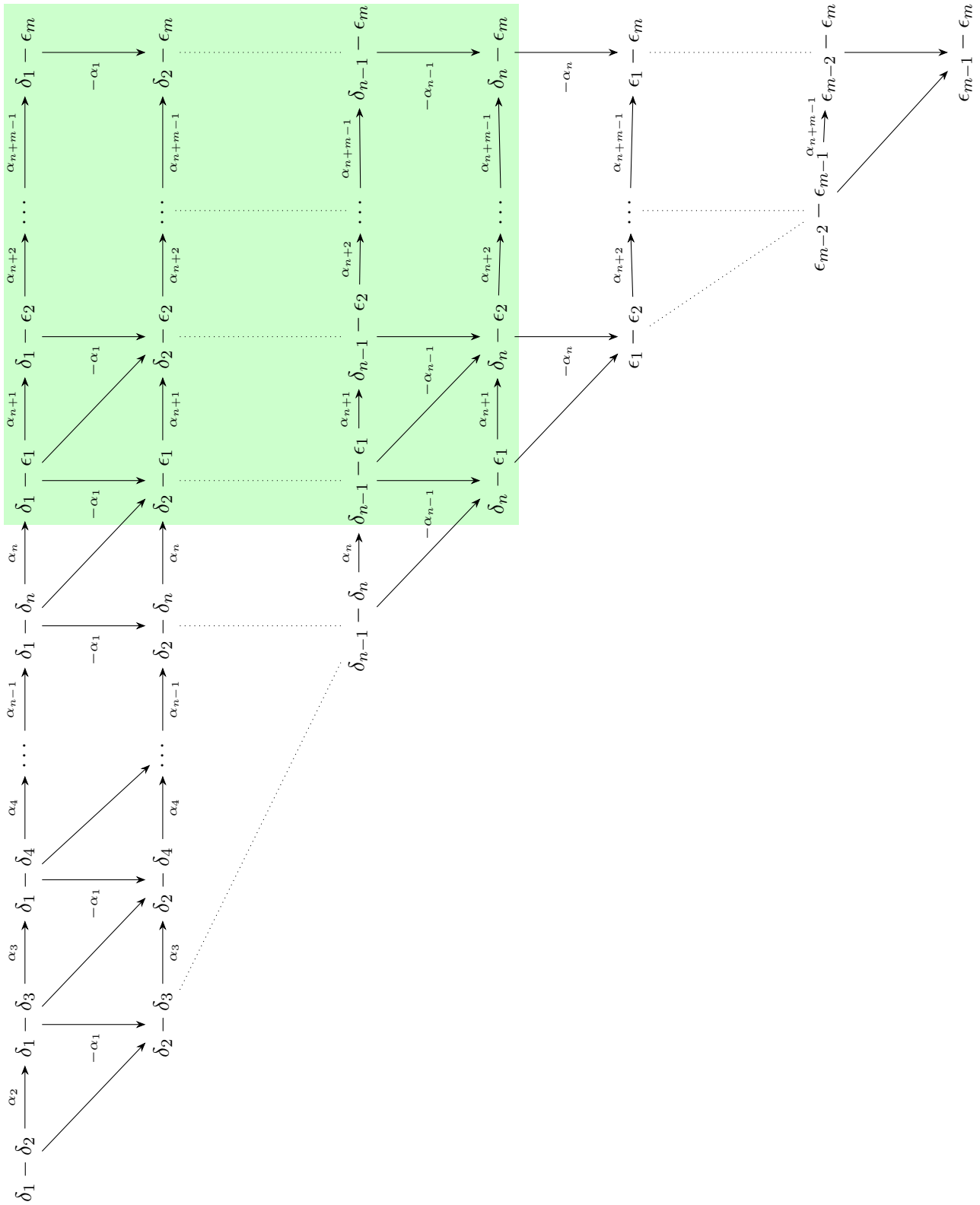

$\epsilon_1-\epsilon_2$
$\epsilon_1-\epsilon_3$
$\epsilon_2-\epsilon_3$
$\epsilon_1-\epsilon_4$
$\epsilon_2-\epsilon_4$
$\epsilon_1-\epsilon_{m+1}$
$\epsilon_2-\epsilon_{m+1}$
$\epsilon_m-\epsilon_{m+1}$
$\epsilon_1-\delta_1$
$\epsilon_2-\delta_1$
$\epsilon_m-\delta_1$
$\epsilon_{m+1}-\delta_1$
$\epsilon_1-\delta_2$
$\epsilon_2-\delta_2$
$\epsilon_m-\delta_2$
$\epsilon_{m+1}-\delta_2$
$\epsilon_1-\delta_n$
$\epsilon_2-\delta_n$
$\epsilon_m-\delta_n$
$\epsilon_{m+1}-\delta_n$
$\epsilon_1-\delta_{n+1}$
$\epsilon_2-\delta_{n+1}$
$\epsilon_m-\delta_{n+1}$
$\epsilon_{m+1}-\delta_{n+1}$
$\delta_1-\delta_2$
$\delta_1-\delta_n$
$\delta_1-\delta_{n+1}$
$\delta_{n-1}-\delta_n$
$\delta_{n-1}-\delta_{n+1}$
$\delta_n-\delta_{n+1}$
α_1
α_2
α_3
α_4
α_m
α_{m+1}
α_{m+2}
α_{m+3}
α_{m+n}
α_{m+n+1}
$-\alpha_1$
$-\alpha_m$
$-\alpha_{m+1}$
$-\alpha_{m+n}$






$\epsilon_1 - \delta_1$
$\epsilon_1 - \delta_2$
$\epsilon_1 - \delta_3$
$\epsilon_1 - \delta_{n-1}$
$\epsilon_1 + \delta_{n-1}$
$\epsilon_1 + \delta_{n-2}$
$\epsilon_1 + \delta_2$
$\epsilon_1 + \delta_1$
$\delta_1 - \delta_2$
$\delta_1 - \delta_3$
$\delta_1 - \delta_{n-1}$
$\delta_1 + \delta_{n-1}$
$\delta_1 + \delta_{n-2}$
$\delta_1 + \delta_2$
$2\delta_1$
$\delta_2 - \delta_3$
$\delta_2 - \delta_{n-1}$
$\delta_2 + \delta_{n-1}$
$\delta_2 + \delta_{n-2}$
$2\delta_2$
$\delta_{n-2} - \delta_{n-1}$
$\delta_{n-2} + \delta_{n-1}$
$2\delta_{n-2}$
$2\delta_{n-1}$
α_1
α_2
α_3
α_4
α_n
α_{n-1}
α_{n-2}
$-\alpha_1$
$-\alpha_2$
$-\alpha_{n-1}$


$\delta_1+\epsilon_m$
$\delta_1+\epsilon_{m-1}$
$\delta_1+\epsilon_2$
$\delta_1+\epsilon_1$
$\delta_1+\delta_n$
$\delta_1+\delta_3$
$\delta_1+\delta_2$
$2\delta_1$
$\delta_2+\epsilon_m$
$\delta_2+\epsilon_{m-1}$
$\delta_2+\epsilon_2$
$\delta_2+\epsilon_1$
$\delta_2+\delta_n$
$\delta_2+\delta_3$
$2\delta_2$
$\delta_{n-1}+\epsilon_m$
$\delta_{n-1}+\epsilon_{m-1}$
$\delta_{n-1}+\epsilon_2$
$\delta_{n-1}+\epsilon_1$
$\delta_{n-1}+\delta_n$
$2\delta_{n-1}$
$\delta_n+\epsilon_m$
$\delta_n+\epsilon_{m-1}$
$\delta_n+\epsilon_2$
$\delta_n+\epsilon_1$
$2\delta_n$
$\epsilon_1+\epsilon_m$
$\epsilon_1+\epsilon_{m-1}$
$\epsilon_1+\epsilon_2$
$\epsilon_{m-2}+\epsilon_m$
$\epsilon_{m-2}+\epsilon_{m-1}$
$\epsilon_{m-1}+\epsilon_m$
α_n
α_{n+1}
α_{n+2}
α_{n+m-2}
α_{n+m-1}
α_{n+m}
α_{n-1}
α_3
α_2
α_1
$-\alpha_1$
$-\alpha_{n-1}$
$-\alpha_n$


$\delta_1 - \delta_2$
$\delta_1 - \delta_3$
$\delta_1 - \delta_4$
$\delta_1 - \delta_n$
$\delta_1 - \epsilon_1$
$\delta_1 - \epsilon_2$
$\delta_1 - \epsilon_m$
$\delta_2 - \delta_3$
$\delta_2 - \delta_4$
$\delta_2 - \delta_n$
$\delta_2 - \epsilon_1$
$\delta_2 - \epsilon_2$
$\delta_2 - \epsilon_m$
$\delta_{n-1} - \delta_n$
$\delta_{n-1} - \epsilon_1$
$\delta_{n-1} - \epsilon_2$
$\delta_{n-1} - \epsilon_m$
$\delta_n - \epsilon_1$
$\delta_n - \epsilon_2$
$\delta_n - \epsilon_m$
$\epsilon_1 - \epsilon_2$
$\epsilon_1 - \epsilon_m$
$\epsilon_{m-2} - \epsilon_{m-1}$
$\epsilon_{m-2} - \epsilon_m$
$\epsilon_{m-1} - \epsilon_m$
α_1
α_2
α_3
α_4
α_n
α_{n+1}
α_{n+2}
α_{n+m-1}
$-\alpha_1$
$-\alpha_n$
$-\alpha_{n-1}$

致谢：我们感谢 Malihe Yousofzadeh 的富有成效的讨论。第二作者的工作得到了 SERB（ANRF）资助项目的支持（档案编号：SRG/2023/002255）。

References

[1] L Frappat、Antonino Sciarrino 和 Paul Sorba。《基本李超代数及其仿射扩张的结构》。*Communications in Mathematical Physics*, 121(3):457–500, 1989. [2] Meinolf Geck。《半单李代数和 Chevalley 群的构造》。*Proceedings of the American Mathematical Society* 145 8 3233 3247, 2017 , ( ): – . [3] Maria Gorelik 和 Ary Shaviv。《广义反射根系》。 *Journal of Algebra*, 491:490–516, 2017. [4] Kenji Iohara 和 Yoshiyuki Koga。《李超代数的中心扩张》。 *Commentarii Mathematici Helvetici*, 76 1 110 154, 2001 ( ): – . [5] Victor G Kac。《李超代数》。 *Advances in mathematics*, 26(1):8–96, 1977. [6] Victor G Kac。《李超代数理论概述》。 *Communications in Mathematical Physics*, 53(1):31–64, 1977. [7] Ian Malcolm Musson。 *Lie superalgebras and enveloping algebras*，第 131 卷。美国数学学会，2012 年。[8] Manfred Scheunert。 *The theory of Lie superalgebras: an introduction*，第 716 卷。施普林格，2006 年。[9] Vera Serganova。《根系的推广》。 *Communications in Algebra*, 24(13):4281–4299, 1996. [10] Malihe Yousofzadeh。《扩张仿射根超系》。 *Journal of Algebra*, 449:539–564, 2016. [11] Malihe Yousofzadeh。《局部有限根超系》。 *Communications in Algebra*, 45(10):4292–4320, 2017.

Department of Mathematics, National Institute of Technology Calicut, NIT Campus P.O., Kozhikode-673 601, India*Email address*: dhamumjt@gmail.com, dhamothiran p230063ma@nitc.ac.in

Department of Mathematics, National Institute of Technology Calicut, NIT Campus P.O., Kozhikode-673 601, India*Email address*: saudamini@nitc.ac.in