arXiv:2601.10443v1 [math.CA] 15 Jan 2026

影算子理论与形式幂级数代数

Roberto Ricci*[1]

[1]*ENEA*，核部门 *NUC-DTT*，弗拉斯卡蒂研究中心，*E. Fermi* 路 *45* 号，*00044* 弗拉斯卡蒂（罗马），意大利

摘要

S. Roman 和 G. C. Rota 提出的现代版本影算子理论，近年来由 G. Dattoli 及其合作者重新加以探讨，旨在特殊函数理论框架下设计一种实用的计算工具。影像和影真空等概念被引入，成为讨论的关键要素；尽管这些概念有效，却缺乏普适性。

本文旨在为这一形式体系赋予严谨的表述，将其置于复系数形式幂级数的语境中（$\mathbb{C}[\![t]\!], \partial$）。这一新表述以如下定义为基础：影算子 $\mathfrak{u}$ 是解析收敛形式级数 $\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$ 的“影幺半基态”子代数上的一个泛函。

我们详细考察若干特定类别的影算子基态 φ，并分析相应幂影恒等式解析收敛的条件。这些恒等式定义为算子 $f(\zeta \mathfrak{u}^{\mu})$ 作用于 φ 后得到的形式级数，其中 $f \in \mathbb{C}\{t\}$ 且 $\mu, \zeta \in \mathbb{C}$。对于这些影算子态，我们利用形式幂级数的 Gevrey 分类，建立其与 Borel-Laplace重求和理论的联系，从而能够对一大类影算子恒等式（包括发散的恒等式）作出严格解释。

作为所提出理论框架的一项应用，我们介绍并研究高斯三角函数的新影像的性质。这些影像突显了此类函数类似三角函数的特性，并使我们能够定义“高斯傅里叶变换”这一概念；它有望成为一种强大的应用工具。

*电子邮件：roberto.ricci@enea.it（Roberto Ricci）

引言

经典影子演算是一种用于操作多项式序列及其相关生成函数的符号技术，其操作方式类似于形式代换。

这一术语[1] 反映了这样一个事实：对于许多涉及带有幂a^n的多项式序列的恒等式，当多项式改为离散取值，且 a^n 改为下降阶乘符号 $(a)_n = a(a-1)\ldots(a-n+1)$ [13].

“哑元演算”目前主要用于指称对 Sheffer 序列[2], 的研究，包括二项型多项式序列和 Appell 序列，通常采用借鉴自有限差分演ff算的技巧。其起源可追溯至19世纪 [2], ，但第一个严谨的理论框架由 Gian-Carlo Rota 及其合作者于 20 世纪 70 年代引入 [26], ，随后由 Steven Roman 加以系统化并扩展 [25]。

在其开创性著作中，Rota 致力于为经典哑元符号计算方法奠定坚实的代数基础。Rota 理论的关键见解，是将序列和多项式的运算重新诠释为作用于多项式环 $\mathbb{C}[x]$, 上的线性泛函，从而将哑元演算与组合学联系起来。

Roman 沿着更具符号性和公理化的方向拓展了 Rota 的思想，并在《影子演算》中对此作了全面论述。 [25]具体而言，Roman 将作用于形式幂级数的影子算子这一概念形式化，并引入了基态的概念——特殊的形式级数，代表求值恒等算子。

Rota 的表述以代数为出发点，并与组合学紧密相连；Roman 版本的哑元演算则更加形式化、符号化，因而能够构造广义的哑元变换，尤其适用于特殊函数的分析。这两种框架都已广泛应用于：

- 组合学与计数恒等式；
- 运算演算与生成函数；
- 渐近展开与形式级数；
- 特殊函数理论（例如超几何函数、正交多项式）。

[1]该术语由 J. J. Sylvester 根据拉丁语单词“umbra”（意为“影子”）创造。[2]S. Roman 本人将哑元演算描述为对 Sheffer序列这一类序列的研究[25,第 2] 页。

哑元演算的另一种阐释近来由 G. Dattoli 及其合作者提出（参见 [17] 一篇全面的介绍，以及 [9] 一些最新成果），其具体目标是在特殊函数理论的框架下构建一种实用的计算工具。在他们的研究中，“影像”和“影真空”等概念被用作关键要素，尽管相应的数学对象通常只在非正式的层面上引入，缺乏严格的定义。

这种影算版本有时也称为“指标影算”，其设计目的是通过在某些高度超越函数及其影之间识别“幂影恒等式”，即识别由特设定义的“基态”上作用的一些较简单的算子函数，从而有效简化复数计算。典型的幂影恒等式形式如下

$$F(z) = f(z\,\mathfrak{u}^{\mu})\,\boldsymbol{\varphi}\,, \tag{1}$$

其中F 和f 是可展开为麦克劳林级数的函数，μ 是一个复参数，可解释为“影算子”$\mathfrak{u}$ 的幂指数，该算子最终作用于基态 $\boldsymbol{\varphi}$。

一旦建立了类似等式（1）的关系，任何涉及 $F(z)$ 的计算，都可以用 $f(z\,\mathfrak{u}^{\mu})$ 代替，并将 $\mathfrak{u}$ 视为普通数值参数来处理。随后将计算结果作用于 $\boldsymbol{\varphi}$，从而得到最终结果，其形式为一个（通常收敛的）级数展开。该方法的有效性通过事后将由此得到的结果与采用更传统的解析方法或数值方法所获得的结果进行对比来验证。

尽管缺乏一般性的论证，前述方法却非常有效，通常只需付出极少努力便能得到正确结果。尽管如此，在某些情况下，该方法无法给出收敛展开，且原因尚不明确。

本文提出一种新的通用方法，旨在阐明：1）指标影算子演算为何有效以及如何发挥作用；2）在什么条件下它似乎会失效；3）在这种情况下，可以采取什么措施来恢复有意义的结果。

所提出的方法在复系数形式幂级数的微分代数中奠定了坚实的基础（$\mathbb{C}[\![t]\!], \partial$） [20]。具体而言，影算子$\mathfrak{u}$ 被严格定义为解析收敛形式级数 $\mathbb{C}\{t\} \subset \mathbb{C}[\![t]\!]$ 的“影算子基态”子代数中的一个泛函。

在选取若干特定类别的幺半基态 $\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$之后——这些类别涵盖了该主题相关文献迄今所研究的大多数情形——我们考察如下形式的幂影恒等式：$F(\zeta) = f(\zeta\,\mathfrak{u}^{\mu})[\varphi]$。这些恒等式被定义为同构微分代数 $\mathbb{C}[\![\zeta]\!]$中的形式级数，它们由形如$f(\zeta\,\mathfrak{u}^{\mu})$的算子作用于 φ 而得到，其中$f \in \mathbb{C}\{t\}$ 且 μ，$\zeta \in \mathbb{C}$。

着眼于应用，我们关注 $F(\zeta)$ 是复变量 ζ 的完整函数的情形，并分析这些形式级数解析收敛的条件

。为此，我们借助成熟的理论，对嵌套子代数中形式级数的 Gevrey 分类进行研究；这些子代数的级别逐渐提高，也就是说，粗略地说，其“发散阶”逐渐增加。一旦确定某个发散形式级数 F 属于指标为 $k > 0$ 的某个 Gevrey 子代数，我们便运用成熟的 k-Borel-Laplace重求和理论，求出 F 的k-和，也就是在复平面某个开扇形内具有F 的 k-Gevrey 渐近性质的函数。

利用 Borel 变换为影算子方法奠定坚实基础，这一想法并不新鲜。特别是，G. Dattoli 及其合作者曾在一系列文章中探讨了 Borel 型积分变换所发挥的作用：它们在启发式影算子方法与分析技术之间架起桥梁 [8, 11, 10]。本研究方案与早期尝试的不同之处在于，我们建议在形式级数这一更广泛的背景下，系统地采用理论基础扎实的形式Borel 变换。

本文的结构安排如下。
在第1 节中，我们简要介绍单个不定元 $\mathbb{C}[[t]]$上的形式幂级数代数。特别是，我们将非正式地回顾 Gevrey 分类与渐近分析以及 Borel-Laplace重求和理论的主要结果，这些结果将在本文其余部分中用到。

在第2 节中，我们将在形式幂级数的背景下提出一种具有严格理论基础的指标影算子理论，并对影算子u及影算子恒等式给出严谨定义；这些恒等式将重新诠释为形式级数，它们是作用于 φ 上的以下形式的良定义算子$f(\zeta\, u^{\mu})$的作用结果。

在第3 节中，我们考察若干特定类别的幂影基态，并利用第1.1节概述的数学框架，分析依赖于此类基态的幂影恒等式的解析收敛条件。

在第4 节中，我们以高斯三角函数为案例研究，提出该框架的一种新幂影表述。这种新表述突显了这些函数类似三角函数的性质，并使得高斯傅里叶变换这一概念得以定义。

在第5 节中，我们总结了一些结论——包括对本文提出的框架与 Roman 经典影算术进行简要的批判性比较——并阐述了未来发展的构想。

我们使用以下标准记号： $\mathbb{N}$ 表示自然数集；$\mathbb{N}^0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$表示非负整数集； $\mathbb{Z}^-$ 表示负整数集； $\mathbb{R}^+$ 表示严格正实数集。

1 数学框架

这里简要介绍以下章节所使用的数学框架，主要采用非正式的表述。

1.1 代数 $\mathbb{C}[\![t]\!]$

考虑所有在不定元t上系数为复数的形式幂级数 [12, 20]:

$$\mathbb{C}[\![t]\!] := \left\{ \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\varphi)} t^n \,\middle|\, c_n^{(\varphi)} \in \mathbb{C} \right\}.$$

形式级数可以逐项相加并与复数相乘，因此构成一个复向量空间。

给定两个形式级数 φ和 χ，它们的乘积 $\xi = \varphi\chi$ 得到另一个形式级数，其系数为:

$$c_n^{(\xi)} := \sum_{k=0}^{n} c_k^{(\varphi)} c_{n-k}^{(\chi)},$$

这些系数是通过柯西离散卷积 [5]得到的。
这使得 $\mathbb{C}[\![t]\!]$ 成为一个代数。相应的微分代数（$\mathbb{C}[\![t]\!], \partial$）是在为 $\mathbb{C}[\![t]\!]$ 赋予由 $\partial := \mathrm{d}\,\mathrm{d}t$提供的附加结构后得到的——即关于不定元的自然导子，满足一通常的莱布尼茨法则。

我们将 φ 的赋值定义为与第一个非零系数对应的n的值，因此 $\mathrm{val}(0) = \infty$, 若 φ 的常数项非零，则 $\mathrm{val}(\varphi) = 0$；一般而言，若 $\varphi \in t^k\mathbb{C}[\![t]\!]$，则 $\mathrm{val}(\varphi) \geq k$，其中:

$$t^k\mathbb{C}[\![t]\!] := \left\{ \varphi(t) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n^{(\varphi)} t^n \,\middle|\, c_n^{(\varphi)} \in \mathbb{C} \right\}, \quad k \in \mathbb{N}^0.$$

利用赋值，可以定义如下量:

$$\mathrm{d}(\varphi,\chi) := 2^{-\mathrm{val}(\varphi-\chi)},$$

由于满足以下四条公理 [4]，很容易看出它是一个距离函数:

1. 非负性：$\mathrm{d}(\varphi,\chi) \geq 0$;
2. 不可分辨者同一性：$\mathrm{d}(\varphi,\chi) = 0 \iff \varphi = \chi$;

3. 对称性：$d(\varphi,\chi) = d(\chi,\varphi)$；4. 三角不等式：
$d(\varphi,\chi) \le d(\varphi,\xi) + d(\xi,\chi)$,

对于任意 φ、χ、$\xi \in \mathbb{C}[\![t]\!]$。

由 d 诱导的拓扑称为 Krull 拓扑 [20], ，它使代数 $\mathbb{C}[\![t]\!]$ 成为一个完备度量空间，并引入形式级数形式收敛的概念。特别地，形式级数序列 $\{\varphi_p\}_{p=0}^{\infty}$ 是一个柯西序列，并且形式收敛到 φ，当且仅当对于每个 $n \in \mathbb{N}^0$，n 次系数序列 $\{c_n^{(\varphi_p)}\}_{p=0}^{\infty}$ 是稳定的；也就是说，对于每个 n，都存在一个整数 $\mu(n)$，使得子序列 $\{c_n^{(\varphi_p)}\}_{p=\mu(n)}^{\infty}$ 为常数，且 $c_n^{(\varphi_p)} = c_n^{(\varphi)}$，当 $p \ge \mu(n)$ 时。于是显然：

$$\lim_{p\to\infty} \varphi_p(t) = \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\varphi)} t^n .$$

由于形式级数的级数被定义为其部分和构成的序列，而这些部分和本身也是形式级数，

$$\sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p(t) = \{\sigma_n(t)\}_{n=0}^{\infty}, \quad \sigma_n(t) := \sum_{p=0}^{n} \varphi_p(t) ,$$

我们得到形式级数之级数形式收敛的实用判据：每一项 φ_p 都必须属于 $t^{\nu_p}\mathbb{C}[\![t]\!]$，也就是说，对于 $n < \nu_p$，有 $c^{(\varphi_p)}{}_n = 0$，其中 ν_p 为某个整数，且 $\lim_{p\to\infty} \nu_p = \infty$。那么，其和收敛到形式级数 φ，其系数为

$$c_n^{(\varphi)} = \sum_{p\in M_n} c_n^{(\varphi)_p}, \quad M_n = \{p \mid \nu_p \le n\} .$$

必须强调，形式收敛与解析收敛是完全无关的概念。形式收敛涉及的是一些规则，这些规则确保对形式级数进行某些运算后，结果本身仍是定义良好的形式级数。从这个意义上说，任何形式级数按定义都是形式收敛的。不用说，对于一般形式级数将其视为关于 $\mathbb{C}$的普通幂级数时，标准的解析收敛并非总是成立。

1.2 Gevrey 分类与渐近分析

1.2.1 $\mathbb{C}[\![t]\!]$的元素的 Gevrey 分类

$\mathbb{C}[\![t]\!]$ [12, 24] 的 Gevrey 分类对于下文的讨论至关重要。

如果存在某些常数 C、$A>0$，使得.....则称形式级数 φ 为 $k>0$阶 Gevrey（简称 k-Gevrey）。

$$|c_r^{(\varphi)}|\leq CA^r(r!)^{\frac{1}{k}},\quad \text{for any } r\in\mathbb{N}^0. \tag{2}$$

根据定义，形式级数 $\sum^{\infty}{}_{r=0}c_r^{(\varphi)}t^r$ 是 k-Gevrey，当且仅当级数 $\tilde{\varphi}=\sum^{\infty}{}_{r=0}c_r^{(\varphi)}/(r!)^{\frac{1}{k}}t^r$ 在解析意义下收敛。

对于每个 k，我们用 $\mathbb{C}[\![t]\!]_{\frac{1}{k}}$ 表示由所有 k-Gevrey 形式级数构成的子代数。这些子代数是嵌套的，也就是说

$$\mathbb{C}\{t\}=\mathbb{C}[\![t]\!]_0\subset\mathbb{C}[\![t]\!]_{\frac{1}{k}}\subset\mathbb{C}[\![t]\!]_{\frac{1}{k'}}\subset\mathbb{C}[\![t]\!]_{\infty}=\mathbb{C}[\![t]\!], \tag{3}$$

对于满足 $\infty>k>k'>0$ 的任意 k,k' s,
因此，对于任意 $k'<k$，k-Gevrey 级数也是 k'-Gevrey 级数。形式级数恰好是 k-Gevrey，当且仅当 k 是满足 1.2.1 节条件的最大值。如果 k 的值为无穷大，即 $|c_r^{(\varphi)}|\leq CA^r$，相应的子代数 $\mathbb{C}[\![t]\!]_0$ 与解析收敛级数的子代数相同，记作 $\mathbb{C}\{t\}$。因此，0-盖夫雷级数 φ 在以原点为中心、半径 R_φ（可能为无穷大）的开圆盘 $D(R_\varphi)$ 内解析收敛。

1.2.2 Gevrey渐近性

我们用$S(d,\Theta,\rho)$表示复平面中的一个开扇形（如果 $\Theta>2\pi$，则表示复对数的黎曼曲面中的一个开扇形），其中心为原点，以半直线d为角平分线，张角为 Θ，半径为 $\rho>0$。我们用简化记号$S(d,\Theta)$表示半径无限的无限扇形，用$S(\Theta,\rho)$表示以正实轴 $\mathbb{R}^+$为角平分线的扇形。

设$V=S(d,\Theta,\rho)$是如前所述的一个开扇形，s是V上的一个全纯函数，$\varphi\in\mathbb{C}[\![t]\!]$是一个形式级数，且$k>0$。我们称 φ 为s在V 中的k-Gevrey 渐近（简称k-渐近）展开，并记作

$$\varphi\sim_{V}^{1/k}s$$

如果对于任意$n\in\mathbb{N}^0$ 以及V的任意紧子扇形$W\cup\{0\}$，都可以找到两个常数A、$C>0$，使得

$$\left|s(t)-\sum_{r=0}^{n-1}c^{(\varphi)}t^n\right|\leq CA^n(n!)^{\frac{1}{k}}|t^n|.$$

注意，若 φ 是某个在V中全纯的函数s的k-Gevrey 渐近展开，则 $\varphi\in\mathbb{C}[\![t]\!]_{\frac{1}{k}}$，也就是说它是$k$-Gevrey。因此，若$A_k(V)$

是由所有在V中全纯且在其中存在k-Gevrey渐近展开的函数构成的微分代数，则可以定义一个微分代数同态$\mathcal{I}_k : A_k(v) \to \mathbb{C}[\![t]\!]_{\frac{1}{k}}$，它将每个函数$s \in A_k(V)$映射到一个$\varphi \in \mathbb{C}[\![t]\!]_{\frac{1}{k}}$，使得$\varphi$是$s$在$V$中的$k$-渐近展开。即：

$$s \mapsto \mathcal{I}_k(s) = \varphi, \quad \varphi \sim_{\substack{1/k \\ V}} s .$$

自然会想到，这样的同态是否是单射（不同的函数具有不同的k-渐近展开）、满射（任意k-Gevrey形式级数都是某个函数的k-渐近展开），或者二者皆是。

可以证明，[12]如果$\varphi \in \mathbb{C}[\![t]\!]_{\frac{1}{k}}$且$V = S(d, \Theta, \rho)$是一个开扇形，满足$\Theta < \pi/k$，那么至少存在一个在$V$上全纯的函数$s$，使得$\varphi \sim_{1/kV} s$。换言之，当$V$是一个中心角“较小”的扇形时，该同态是满射，但它不是单射，即不同的函数可能具有相同的k-渐近展开。事实上，可以证明，$\mathcal{I}_k$的核由诸如$\mathrm{e}^{-a/t^{1/k}}$（其中$a > 0$）的函数生成。在大多数应用中，这是一种不理想的性质，例如当φ是某个常微分方程的形式解，而我们希望确定该方程的唯一函数解时。

反过来，另一条定理[27]证明，当$\Theta > \pi/k$时，如果存在一个函数s满足$\varphi \sim_{1/kV} s$，那么该函数是唯一的。换言之，在这些条件下，同态变为单射，但不再是满射，因此存在一些k-Gevrey形式级数，它们不是任何函数的k-渐近展开。

如果一个形式级数φ存在一个函数s，该函数在$V = S(d, \Theta, \rho)$上全纯，且满足$\Theta > \pi/k$并验证条件$\varphi \sim_{1/kV} s$，则称该形式级数为k-可求和的，并称函数s为其在方向d上的k-和。下一小节将分析如何通过Borel-Laplace重求和过程求出k-可求和形式级数的k-和。

1.3 Borel-Laplace重求和

我们先给出一些定义，后文将广泛使用这些定义。

1.3.1 形式 Borel 变换

给定一个形式级数$\varphi \in \mathbb{C}[\![t]\!]$，令$\tilde{\varphi} \in t\mathbb{C}[\![t]\!]$为将$\varphi$的系数移位后得到的不含常数项的级数：

$$\tilde{\varphi}(t) = t\,\varphi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r^{(\varphi)}\, t^{r+1} .$$

的$k > 0$ (k-Borel 变换，简称 k-Borel 变换）是关于不定元[3] ζ 定义的形式级数 $\tilde{\varphi}_{\mathrm{B}_k}$ [3, 16]:

$$\tilde{\varphi}_{\mathrm{B}_k}(\zeta) = \mathrm{B}_k[\tilde{\varphi}](\zeta) := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r^{(\varphi)}}{\Gamma(1 + r/k)} \zeta^r, \quad k > 0\,. \tag{4}$$

变换1.3.1 可视为线性算子 $\mathrm{B}_k : t\mathbb{C}[\![t]\!] \to \mathbb{C}[\![\zeta]\!]$的作用结果。

第 1.3.1 节可通过将伽马函数自变量中的 1 替换为参数 $\beta \in \mathbb{C}$ 来推广。此变化产生了阶数为 k 、平移量为 β 的广义形式 Borel 变换，即 [20, 18]:

$$\tilde{\varphi}_{\mathrm{B}_{k,\beta}}(\zeta) = \mathrm{B}_{k,\beta}[\tilde{\varphi}](\zeta) := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r^{(\varphi)}}{\Gamma(\beta + r/k)} \zeta^r\,, \tag{5}$$

对于任意满足条件$k > 0$和 $\beta \in \mathbb{C}$ [4] $r/k + \beta \notin \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$ （对所有 $r \in \mathbb{N}^0$ 均成立）的

1.3.2 拉普拉斯变换

在介绍用于 Borel-拉普拉斯重求和理论的广义拉普拉斯变换之前，我们需要明确这类变换可作用于哪些函数。

我们将这类函数记为 $L(V)$，通常由函数 P构成；这些函数在无界开扇形 $V = S(d, \Theta)$ 中至少是全纯的，并且在原点附近可积。此外，这些函数沿 V 的平分线 d 在无穷远处的增长至多为指数级。这意味着，对于任意这样的 $P \in L(V)$，都存在常数 C、$T > 0$，使得不等式

$$|P(\zeta)| \leq C\, \mathrm{e}^{|\zeta|/T} \tag{6}$$

当 $\zeta \in V$ 趋于极限 $|\zeta| \to \infty$时成立。

设 $P \in L(V)$。则沿k 方向d 对 P 的 k 阶拉普拉斯变换定义为积分 [12, 20, 18]:

$$\mathcal{L}_k[P](t) = \frac{k}{t^{k-1}} \int_d \mathrm{d}\zeta\, P(\zeta)\, \zeta^{k-1}\, \mathrm{e}^{-(\zeta/t)^k}\,. \tag{7}$$

只要 $|\zeta/t|^k > 1$ ，指数核 $\mathrm{e}^{-(\zeta/t)^k}$ 就会抑制$P(\zeta)$ 的指数增长，并且积分在所谓的“Borel 圆盘”内绝对收敛

[3]虽然并非严格必要，但建议将 Borel 变换视为代数 $\mathbb{C}[\![\zeta]\!]$ 中的一个元素，该代数与 $\mathbb{C}[\![t]\!]$同构。[4]这一条件的合理性在于，考虑到伽马函数的极点所对应的情形，即当 $r/k + \beta \in \{0, -1, -2, \dots\}$时， $\tilde{\varphi}_{\mathrm{B}_{k\beta}}$的系数未定义。

[12], 一个经过原点、由 d 平分且直径为 T 的开圆盘，其中T 是第 1.3.2 节中引入的正常数。

我们主要关注d 与正实轴重合 $\mathbb{R}^+$的情形。在这种情况下，第 1.3.2 节显然变为以下广义积分：

$$\mathcal{L}_k[P](t) = \frac{k}{t^{k-1}} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\zeta \, P(\zeta) \, \zeta^{k-1} \, \mathrm{e}^{-(\zeta/t)^k} . \tag{8}$$

注意，在积分变量替换为 $\zeta \mapsto s = \zeta/t$ 后， $\mathcal{L}_1[P](t)$ 与通常的拉普拉斯变换相同。

第 1.3.2 节的进一步推广，是阶数为 k、沿 β d 平移的拉普拉斯变换，定义如下 [12]:

$$\mathcal{L}_{k,\beta}[P](t) = \frac{k}{t^{\beta k-1}} \int_d \mathrm{d}\zeta \, P(\zeta) \, \zeta^{\beta k-1} \, \mathrm{e}^{-(\zeta/t)^k} , \tag{9}$$

如预期，这在 1.3.2 节中化简为 $\beta = 1$。
尽管存在平移量 β，积分的收敛域仍保持不变，因为无穷远处的渐近平衡仍由 $\mathrm{e}^{-(\zeta/t)^k}$ 带来的指数衰减与 $P(\zeta)$ 的指数增长共同决定。因此，若 $P \in L(V)$，则 $\mathcal{L}_{k,\beta}[P](t)$ 与 $\mathcal{L}_k[P](t)$ 在同一个 Borel 圆盘中收敛。额外的 ζ 次幂和 $1/t$ 会改变变换的函数形式和解析结构，但不会改变其收敛域。特别是，前因子 $1/t^{\beta k-1}$会影响输出函数的解析性质：当 $\beta k \notin \mathbb{Z}$时，它会在 $t = 0$ 处引入一个分支点。

1.3.3 k-Borel-Laplace 和：k-Gevrey 形式级数

Gevrey 阶的概念适用于任意形式级数，原则上与解析收敛的概念无关。二者之间的联系由k-Gevrey 形式级数理论中的一个定理给出。该定理保证，形式k-Borel 变换 $\mathrm{t}\mathbb{C}[\![t]\!]$ 当且仅当$\tilde{\varphi}$ 是k-Gevrey 时解析收敛。我们可以将该定理简洁地表述为 [12]:

$$\mathrm{B}_k\left(t\mathbb{C}[\![t]\!]_{\frac{1}{k}}\right) = \mathbb{C}\{\zeta\} . \tag{10}$$

注意，若 $\varphi(\mathrm{t}) \in \mathbb{C}[\![\mathrm{t}]\!]\mathrm{k}$，则显然有 $\tilde{\varphi}(\mathrm{t}) = \mathrm{t}\ \varphi(\mathrm{t}) \in \mathrm{t}\mathbb{C}[\![\mathrm{t}]\!]_{\frac{1}{k}}$。因此，定理1.3.3保证，对于任意 $\varphi(\mathrm{t}) \in \mathbb{C}[\![\mathrm{t}]\!]_{\frac{1}{k}}$， $\tilde{\varphi}(\mathrm{t}) = \mathrm{t}\ \varphi(\mathrm{t})$ 的形式 k-Borel 变换属于 $\mathbb{C}\{\zeta\}$，即 $\tilde{\varphi}_{\mathrm{B}_k}(\zeta)$ 解析收敛。

设 $\tilde{\varphi}_{\mathrm{B}_k}(\zeta)$ 可通过解析延拓扩展为一个函数（为简便起见，仍以相同符号表示），该函数在 $V = S(d, \delta)$ 中全纯；这是一个顶点位于原点、以 d 为中心线、张角为 δ 的无界开扇形。

进一步假设，扩展后的函数 $\tilde{\varphi}_{\mathrm{B}_k}(\zeta)$ 沿d趋于无穷时至多呈指数增长。

那么，根据 Borel-Laplace重求和理论，k-Gevrey 形式级数 φ 在k-可求和方向d上是可求和的。它的k-和是一个函数 $\mathrm{S}[\varphi](t)$，其定义基于k-拉普拉斯变换[5] ，对方向 $\tilde{\varphi}_{\mathrm{B}_k}(\zeta)$ 上的d 由以下公式给出[1, 19]:

$$\mathrm{S}[\varphi](t) := \frac{1}{t}\mathcal{L}_k[\tilde{\varphi}_{\mathrm{B}_k}](t)\,. \tag{11}$$

此外，总可以将 $\mathrm{S}[\varphi]$ 延拓到一个张角为 $\Theta > \pi/k$ 的开扇形 $V = S(d, \Theta)$，使得 $\varphi \sim_{1/k V} \mathrm{S}[\varphi]$。这意味着，$\mathrm{S}[\varphi]$是唯一一个在方向$d$上与 φ 具有k-渐近性的函数，其中k 是φ的精确Gevrey阶。

根据定义，k-Gevrey 形式级数若在几乎所有方向上都k-可求和（即在除至多一个零测集之外的所有方向上都可求和），则称其为k-可求和（此处按 Borel-Laplace 重求和的意义）。k-可求和形式级数构成的子代数记为 $\mathbb{C}\{t\}_{\frac{1}{k}}$，而对于不同的$k$,$\bar{}$ k' 满足以下 Tauber 性质:

$$\mathbb{C}\{t\}_{\frac{1}{k}} \cap \mathbb{C}\{t\}_{\frac{1}{k'}} = \mathbb{C}\{t\}\,.$$

2 $\mathbb{C}[\![t]\!]$中的影算子理论

在讨论如何在形式幂级数的背景下将影算子概念形式化之前，我们先简要回顾指标方法迄今的发展脉络（全面论述见 [17] ）。

“影算子”这一概念源于这样的观察：对于足够光滑的函数，$\mathrm{e}^{\mu\partial_z}$ 在形式上会使其自变量平移 μ。尤其是，恒等式

$$\mathrm{e}^{\mu\partial_z}\,\varphi(z)\big|_{z=0} = \varphi(\mu)$$

可重新诠释为一个非正式定义的“算子 $\mathfrak{u}$ 的 μ 次幂”作用于一个同样非正式定义的“基态” $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\mathfrak{u}^{\mu}\,\boldsymbol{\varphi} = \varphi(\mu)\,. \tag{12}$$

第 2 节随后被用于如下表达式:

$$F(w) = f(w\,\mathfrak{u}^{\mu})\,\boldsymbol{\varphi}\,,$$

其中假设F 和f 都存在麦克劳林展开。

[5]注意，若 $\tilde{\varphi} \in t\mathbb{C}\{t\}$，则 $\mathcal{L}_k[\mathrm{B}_k[\tilde{\varphi}]] = \tilde{\varphi}$，也就是说，$k$-拉普拉斯变换是收敛形式级数无常数项子代数中$k$-Borel 变换的逆变换。

换言之，在某个高度超越的函数 F 与一个较简单的函数 f[6], 之间建立了一种启发式恒等式；当后者的麦克劳林展开在 $w\mathfrak{u}^{\mu}$ 中被“求值”，并将所得算子作用于某个基态 φ所标识的特定。

2.1 影算子

在形式级数的语境中，任何可接受的影算子定义都必须能够严格地复现第2节的类比结果。

一个看似有前景的起点，是考虑以下形式级数的复合[7]：

$$\varphi \circ (\mathrm{id} + \chi) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \chi^n \partial^n \varphi, \quad \varphi, \chi \in \mathbb{C}[\![t]\!], \tag{13}$$

其中，当 $\chi = \mu \in \mathbb{C}$ 时，预期会得到平移 $\varphi(t) \mapsto \varphi(t + \mu)$。

遗憾的是，第 2.1 节只有在 $val(\mathrm{val}(\chi) \geq 1$ 时才有定义（即在 Krull 拓扑下形式收敛），这是因为 ∂ 会降低赋值。因此，当 $\chi = \mu \in \mathbb{C}$ 时，它并不形式收敛，所以一般无法在 ${}_{\alpha}\varphi(t) := \varphi(t + \mu)$ 作用于 $\mathbb{C}[\![t]\!]$ 上定义形式平移算子 (T。

另一方面，“在零点求值”算子，$\mathfrak{u}^0 : \mathbb{C}[\![t]\!] \to \mathbb{C} \subset \mathbb{C}[\![t]\!]$，可以严格定义为一个返回其参数常数项的泛函：

$$\varphi(t) \mapsto \mathfrak{u}^0[\varphi] \equiv \varphi(0) := c_0^{(\varphi)}.$$

利用 $\mathfrak{u}^0$,，我们可以将“在 μ 处求值”算子 $\mathfrak{u}^{\mu} : \mathbb{C}[\![t]\!] \to \mathbb{C} \subset \mathbb{C}[\![t]\!]$ 严格定义为如下泛函：

$$\varphi(t) \mapsto \mathfrak{u}^{\mu}[\varphi] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \mathfrak{u}^0[\partial^n \varphi] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} c_n^{(\varphi)} = \varphi(\mu). \tag{14}$$

该定义是良定义的条件是 $\varphi(\mu) \in \mathbb{C}$。换言之，形式级数 φ，将其解释为关于 $\mathbb{C}$的幂级数时，必须在μ中按通常的解析意义收敛，$\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$。假设 φ 在半径为R_{φ} 的开圆盘内收敛（如果 φ 是整函数，则半径可能为无穷），那么定义部分2.1 对任意满足μ[8] $|\mu| < R_{\varphi}$的[8] $|\mu| < R_{\varphi}$均是良定义的。

---

[6]函数 f 是F 在 $\mathfrak{u}$ 的作用下留下的“影子”，因此该方法由此得名。[7]注意，复合运算被定义为形式级数的级数。[8]如果 $|\mu| > R_{\varphi}$ 在复平面的更大区域内可以解析延拓——这通常确实如此——则可以将此定义扩展到该区域。当然，原则上 μ 的任意取值都可以接受，只要 φ 是整的。

我们将 $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}^1$ 称为影算子，并将 φ 称为幺半基态，同时要求参数 μ 的行为如同指数指标（因此该方法被称为“指标法”）。即：

$$(\mathfrak{u}^\mu \mathfrak{u}^\nu)[\varphi] = \mathfrak{u}^{\mu+\nu}[\varphi] = \varphi(\mu+\nu)\,,$$
$$((\mathfrak{u}^\mu)^\nu)[\varphi] = \mathfrak{u}^{\mu\nu}[\varphi] = \varphi(\mu\nu)\,,$$

前提是相应的数值级数收敛。

需要特别强调的是，在更广泛的形式幂级数背景下对指标幺半方法进行这种转换，只需要引入一个单一的影算子 $\mathfrak{u}$。让这个单一算子作用于不同的幺半基态 $\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$，便可以重现迄今为止该主题文献中讨论的所有案例研究；在这些研究中，人们定义并使用了大量特设的不同影算子。

2.2 幂影恒等式

为了为指标幺半方法奠定坚实基础并充分发挥其潜力，下一步是对以下类型的幂影恒等式作出严谨解释：

$$F(\zeta) = f(\zeta\,\mathfrak{u}^\mu)[\varphi]\,, \tag{15}$$

这些恒等式是该方法的核心，且经常出现在其应用中。

在给出第 2.2 节在形式幂级数背景下的严谨定义之前，我们先作一些初步假设：

1. $\mathfrak{u}:\ \mathbb{C}[\![t]\!] \to \mathbb{C} \subset \mathbb{C}[\![t]\!]$ 是第 2.1 节定义的影算子；
2. $\mu \geq 0$；
3. 基态 $\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$ 是在 $D(R_\varphi)$ 中解析收敛的形式级数，该开圆盘以（可能为无穷大的）半径 R_φ 为半径、以原点为中心；
4. $f \in \mathbb{C}\{t\}$ 也是解析收敛形式级数[9]，，可用麦克劳林展开式表示：

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r^{(f)} t^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(0)}{r!}\, t^r, \quad f^{(r)}(0) := (\partial_t^r f)(0)\,,$$

可以是

[9]这一假设并非绝对必要。此处引入它，是为了联系幺半框架的具体应用；在这些应用中，f 通常是一个函数。

（a）在圆盘 $|t|<R$ 内收敛；（b）对任意 $t\in\mathbb{C}$ 均收敛。在这种情况下，我们进一步假设 f 为指数型 A，即存在实常数 C、A，使得 $|f(t)|\le C\,\mathrm{e}^{A|t|}$ for $|t|\to\infty$。

在这些假设下，我们定义如下：

$$f(\zeta\,\mathfrak{u}^{\mu})[\varphi]:=\sum_{r=0}^{\infty}c_r^{(f)}\,\mathfrak{u}^{\mu r}[\varphi]\,\zeta^r=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(0)}{r!}\,\mathfrak{u}^{\mu r}[\varphi]\,\zeta^r=F(\zeta),\tag{16}$$

对于任意$\mu\ge 0$[10] 使数值级数$\mathfrak{u}^{\mu r}[\varphi]$ 收敛到 $\varphi(\mu r)\in\mathbb{C}$对每个$r\in\mathbb{N}^0$均成立。对于这样的$\mu$，$F=f(\zeta\,\mathfrak{u}^{\mu})[\varphi]\in\mathbb{C}[\![\zeta]\!]$ 是一个形式良好的形式级数，其中不定元为 ζ。

换句话说，$F(\zeta)$ 是将算子 $f(\zeta\,\mathfrak{u}^{\mu}):\mathbb{C}\{t\}\to\mathbb{C}[\![\zeta]\!]$ 作用于 φ 后得到的形式级数；该算子由泛函 $\mathfrak{u}^{\mu}:\mathbb{C}\{t\}\to\mathbb{C}$ 定义。

请注意，作为形式级数，第2.2节可以逐项进行运算，无需考虑解析收敛问题，前提是运算结果仍是形式良好的形式级数。

特别地，第2.2节可以关于 ζ逐项求导和积分。根据假设，f 收敛到一个函数，因此我们可以直接对该函数求导或积分，并将$\mathfrak{u}^{\mu}$ 视为参数，前提是我们将结果作形式解释，即视为一个新的形式级数。

这是影算子方法在应用中的一项关键性质。其依据是，所得形式级数与直接逐项作用于第2.2 节所得到的形式级数相同。该性质常用于简化涉及F的计算：只需将F 替换为通常简单得多的函数f。

例 1. 作为一个简单的例子，考虑形式级数

$$f(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{c^r}{r!}\,t^r\,,$$

收敛到整函数 e^{ct}。在这种情况下，第2.2节可写为：

$$f(\zeta\,\mathfrak{u}^{\mu})[\varphi]=\mathrm{e}^{c\,\zeta\,\mathfrak{u}^{\mu}}[\varphi]=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{c^r\,\mathfrak{u}^{\mu r}[\varphi]}{r!}\,\zeta^r\,.\tag{17}$$

例1逐项求导得：

$$\partial\sum_{r=0}^{\infty}\frac{c^r\,\mathfrak{u}^{\mu r}[\varphi]}{r!}\,\zeta^r=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{c^r\,\mathfrak{u}^{\mu r}[\varphi]}{r!}\,r\,\zeta^{r-1}=c\,\mathfrak{u}^{\mu}\,\mathrm{e}^{c\,\zeta\,\mathfrak{u}^{\mu}}[\varphi]\,,$$

[10]当 $\mu=0$ 时，显然有 $f(\zeta\,\mathfrak{u}^{0})[\varphi]=f(\zeta)\,\varphi(0)$。

这与直接对 $\mathrm{e}^{c\,\zeta_{\mathfrak{u}}{}^{\mu}}[\varphi]$ 求导所得的结果一致，其中 $\mathfrak{u}^{\mu}$ 被视为参数。

3 幂影基态

将幂影恒等式定义为形式级数，即使在理论上站得住脚，如果级数在解析意义上不收敛，实际用途也不大。因此，我们自然会进一步研究第2.2节的收敛条件。这些条件显然取决于系数的行为$f^{(r)}(0)\,\mathfrak{u}^{\mu r}[\varphi]/r!$ 的行为，也就是说，归根结底取决于 μ 的值以及基态的性质 φ。

出于显而易见的实际原因，并且为了建立前一节概述的幂影形式体系与形式级数的 Borel-Laplace重求和理论之间的联系（参见第1.3节），目前我们将分析范围限制在以下几类基态函数：

1. 整函数类：

$$\phi_{\alpha,\beta}(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha t+\beta)},\quad \alpha>0,\ \beta\in\mathbb{C};$$

2. 亚纯函数类：

$$\psi_{\alpha,\beta,\gamma}(t)=\frac{(\gamma)_t}{\Gamma(\alpha t+\beta)}\equiv\frac{\Gamma(\gamma+t)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha t+\beta)},\quad \alpha>0,\ \beta,\gamma\in\mathbb{C},$$

其中，$(\gamma)_t := \Gamma(\gamma+t)/\Gamma(\gamma)$ 是上升 Pochhammer 符号的一种广义形式。$\psi_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}(t)$ 在 $\gamma+t\in\{0\}\cup\mathbb{Z}^-$ 时具有简单极点。

或许值得指出，将分析限制在这类函数上并非严重的局限，因为迄今为止，相关文献中讨论的绝大多数基态都属于这一类型。

在接下来的小节中，我们将分析由这些类基态函数所确定的第 2.2 节的收敛条件。请注意，这两类函数的特征都是分母中含有伽马函数[11] $\Gamma(\alpha t+\beta)$，这是与 Borel-Laplace重求和理论建立联系的关键因素。

[11]例如参见 [6]，其中回顾了欧拉伽马函数在现代物理学诸多方面的发展中所发挥的关键作用。

3.1 基态 $\phi_{\alpha,\ \beta}(t)$

对于这个特定的基态，第 2.2节变为：

$$F(\zeta) = f(\zeta \mathfrak{w}^{\mu})[\phi_{\alpha,\beta}] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r^{(f)}}{\Gamma(\mu\alpha r + \beta)} \zeta^r, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{C}, \tag{18}$$

其中 $c^{(}{}_{f)r}$=$f_{(r)}$(0)/r!。注意，尽管伽马函数的倒数对任意自变量值都有定义，但我们排除满足 $\mu\alpha r + \beta \in \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$ 的参数组合，因为这些组合对应着F 的系数形式上无定义时的r 值。

3.1.1 $\alpha = \beta = 1$ 情形的渐近分析

我们首先考虑特殊情形 $\alpha = \beta = 1$，即采用典型基态函数，这种函数常见于应用中：

$$\phi(t) := \phi_{1,1}(t) = \frac{1}{\Gamma(1+t)}. \tag{19}$$

对所得形式级数的收敛条件进行渐近分析：

$$F(\zeta) = f(\zeta \mathfrak{w}^{\mu})[\phi] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r^{(f)}}{\Gamma(1+\mu r)} \zeta^r, \tag{20}$$

通过分别考察f 仅仅收敛或为指数型整函数的情形，对其进行详细分析。

1. 若f在圆盘 $|t| < R$内全纯，根据柯西估计，存在$C > 0$使得 $|c^{(}{}_{f)r}| \le C/R^r$。于是

$$|c_r^{(F)}| = \left| \frac{c_r^{(f)}}{\Gamma(1+\mu r)} \right| \le \frac{C}{R^r\,\Gamma(1+\mu r)}.$$

   由于 $\Gamma(1+\mu r) \to \infty$ 超指数级地增长，$c_r^{(F)} \to 0$ 对于$r \to \infty$。因此级数$F(\zeta)$ 对所有 $\zeta \in \mathbb{C}$ 都收敛——故它是 0-盖夫雷的。

2. 若f 是指数型为$A > 0$的整函数，则对任意r

$$|c_r^{(f)}| \le C A^r \frac{\mathrm{e}^r}{r^r} \Rightarrow |c_r^{(F)}| \le C\,\frac{A^r\,\mathrm{e}^r/r^r}{\Gamma(1+\mu r)}.$$

   利用斯特林公式：

$$\Gamma(1+\mu r) \sim \sqrt{2\pi\mu r}\cdot(\mu r)^{\mu r} e^{-\mu r}, \quad r \to \infty,$$

我们得到渐近估计

$$|c_r^{(F)}| \lesssim \left(\frac{K}{r^{1+\mu}}\right)^r \quad \text{for some constant } K > 0\,.$$

在这种情况下，对于所有 $\zeta \in \mathbb{C}$ 以及任意的 $\mu > 0$，级数都绝对收敛。总之，当 $\varphi = \phi$时，第 3.1.1节对任意 $F(\zeta)$ 都收敛到一个整函数$\mu > 0$。

3.1.2 $\alpha = \beta = 1$情形的Gevrey分析

值得注意的是，通过直接运用上一节中概略介绍的Gevrey 理论，也可以得出相同的结论。

事实上，通过与第1.3.1节直接比较，我们注意到，第3.1.1节中的F 是0-盖夫雷形式级数 $^1\mu$-Borel 变换 $\tilde{f}(t) = tf(t)$。由于1.2.1节的嵌套性质，$\tilde{f}$ 对于任意 μ 也属于 $^1\mu$-Gevrey 类——即 $\tilde{f} \in t\mathbb{C}[\![t]\!]_\mu$ ——。因此，定理 1.3.3 保证其 $^1\mu$-Borel 变换F 对于任意 $\mu > 0$都收敛。

F 事实上不仅仅是收敛的，而且还是整函数（这可由渐近分析直接推出），因为形式级数$f \in t\mathbb{C}[\![t]\!]_0$ 的 $^1\mu$-Borel$\tilde{}$变换的系数增长严格低于阶乘增长。

3.1.3 一般情形 $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{C}$

前面的观察使我们能够以最小的努力分析第 3.1 节中关于 $\mu > 0$以及参数的一般取值 $\alpha > 0$， $\beta \in \mathbb{C}$，其中 $\mu\alpha r + \beta \notin \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$。

事实上，通过与第 1.3.1 节直接比较，很容易看出，第 3.1 节是此前引入的$\tilde{}$0-盖夫雷形式级数$f \in t\mathbb{C}[\![t]\!]_0$ 的广义（$^{\frac{1}{\alpha}}\mu$，β）-Borel 变换。由于平移 β 的存在不会改变该变换的 Gevrey阶，因此根据之前使用的同一论证，F 对任意 $\mu > 0, \alpha > 0$ 以及 $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{-\alpha\mu r : r \in \mathbb{N}^0\}$ 都收敛为整函数。

例2. 设 $f(t)$ 为整函数 e^{-t}。利用这个 f 和基态ϕ，并令$\mu = 1$，第3.1.1 节内容如下：

$$F(\zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2}\,\zeta^r\,,$$

它与 $\tilde{f}(t) = te^{-t}$ 的 1-Borel变换一致。这个幂级数对任意 $\zeta \in \mathbb{C}$ to$C_0(\zeta)$ 均收敛，即 0 阶特里科米函数。

请注意，这个函数的普通 1-拉普拉斯变换如预期所示（参见脚注 5）：

$$\mathcal{L}_1[C_0](t) = t\,\mathrm{e}^{-t}, \quad \operatorname{Re} t > 0,$$

它可以延拓至整个复平面。因此，对任意 $\zeta \in \mathbb{C}$，以下影算恒等式成立：

$$C_0(\zeta) = \mathrm{e}^{-\zeta\,\mathfrak{u}}[\phi].$$

例3. 设 $f(t) = 1/(1-t^2)$，其麦克劳林幂级数展开在圆盘 $|t| < 1$内收敛。利用这个 f和基态 ϕ，第 3.1.1 节在 $\mu = 1$下为：

$$F(\zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{2r}}{(2r)!},$$

这与 $\tilde{f}(t) = t/(1-t^2)$ 的 1-Borel变换以及双曲余弦(ζ) 的麦克劳林展开相一致；后者是一个整函数。
在这种情况下，正如预期的那样：

$$\mathcal{L}_1[\cosh](t) = \frac{t}{1-t^2}, \quad 0 < \operatorname{Re} t < 1,\ \operatorname{Im} t = 0,$$

它可以延拓至 $|t| < 1$。因此，对任意$\zeta \in \mathbb{C}$，以下影算恒等式成立：

$$\cosh(\zeta) = \frac{1}{1-(\zeta\,\mathfrak{u})^2}[\phi].$$

例4. 设 $f(t)$ 是整函数 e^t。利用这个 f和一般基态 $\phi_{\alpha,\,\beta}$，第 3.1.1 节在 $\mu = 1$ 下为：

$$F(\zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!\,\Gamma(\alpha r+\beta)}, \quad \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{C},$$

它与 $\frac{1}{\alpha}$，β-Borel 变换 $\tilde{f}(t) = t\mathrm{e}^t$ 相一致。该幂级数对任意 $\zeta \in \mathbb{C}$ 都收敛，实际上这就是贝塞尔–赖特函数$W_{\alpha,\,\beta}(\zeta)$ [28], 的定义，它是关于 ζ 的整函数。

再一次，对该函数作 $(\frac{1}{\alpha}, \beta)$-拉普拉斯变换，得到预期结果：

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{\alpha},\beta}[W_{\alpha,\beta}](t) = t\,\mathrm{e}^t.$$

因此，以下影算恒等式对任意 $\zeta \in \mathbb{C}$ 均成立：

$$W_{\alpha,\beta}(\zeta) = \mathrm{e}^{\zeta\,\mathfrak{u}}[\phi_{\alpha,\beta}].$$

3.2 基态 $\psi_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}(t)$

接下来，我们继续分析基态类 $\psi_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}$，首先考虑特殊情形 $\gamma = 1$。

3.2.1 情形 $\gamma = 1$

由于 $(1)_t = \Gamma(1+t)$，选择 $\gamma = 1$ 对应于基态：

$$\psi_{\alpha,\beta}(t) := \psi_{\alpha,\beta,1}(t) = \frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(\alpha t+\beta)},$$

一个亚纯函数，当 $t = -n$、$n \in \mathbb{N}$ 时具有简单极点。

使用这个基态，第2.2 节变为：

$$F(\zeta) = f(\zeta\,\mathfrak{u}^{\mu})[\psi_{\alpha,\beta}] = \sum_{r=0}^{\infty} c_r^{(f)} \frac{\Gamma(\mu r+1)}{\Gamma(\alpha\mu r+\beta)}\,\zeta^r, \tag{21}$$

其中 $c^{(}{}_{f)r} = f_{(r)}(0)/r!$。

若附加条件 $\alpha\mu r + \beta \notin \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$ 对所有 $r \in \mathbb{N}^0$ 均成立，则第 3.2.1 节可视为形式级数 $\tilde{g}(t) = tg(t) \in t\mathbb{C}[\![t]\!]$ 的 $(\frac{1}{\alpha}\mu,\ \beta)$-Borel 变换，其中：

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r^{(g)} t^r := \sum_{r=0}^{\infty} c_r^{(f)}\,\Gamma(\mu r+1)\,t^r.$$

通过用斯特林公式近似伽马函数，对系数 $c_r^{(g)}$ 进行渐近分析，可得：

1. $g \in \mathbb{C}[\![t]\!]_0$，即 g 解析收敛，当 f 在有限半径的圆盘内解析收敛时；

2. $g \in \mathbb{C}[\![t]\!]_{\mu}$，即 g 是 Gevrey阶 $\frac{1}{\mu}$ 的发散级数，当 f 为整函数时。

根据性质1.2.1，在这两种情况下，$\tilde{g}$ 也必然是 *a fortiori* $\frac{1}{\alpha}\mu$-Gevrey，只要 $\alpha \geq 1$。于是，定理1.3.3 保证，其 $(\frac{1}{\alpha}\mu,\ \beta)$-Borel 变换——与 F 相同——总是收敛的，只要 $\alpha \geq 1$。

这一结果可通过对系数进行直接渐近分析得到证实：$c_r^{(F)}$，这表明当3.2.1 收敛到一个整函数时 $\alpha \geq 1$。项 $\Gamma(\alpha\mu r+\beta)$ 比系数 g 占主导地位；后者的模至多以 $(r!)^{\frac{1}{\mu}}$ 的速度发散，因此保证了指数收敛。

另一方面，当 $\alpha < 1$：

1. 若 $g \in \mathbb{C}[\![t]\!]_0$，则 F 收敛到一个整函数；

2. 若$g \in \mathbb{C}[\![t]\!]_\mu$，则$F$是一个 Gevrey阶为 $^1\!/_{\mu(1-\alpha)}$的发散形式级数~~，也~~就是说$F \in \mathbb{C}[\![\zeta]\!]_{\mu(1-\alpha)}$。

确实，如果 $g \in \mathbb{C}[\![t]\!]_\mu$ – 因而 $\tilde{g} \in t\mathbb{C}[\![t]\!]_\mu$ –，分母中的伽马函数并不能完全抑制 g[12] 的系数的阶乘增长。在这种情况下，假设所有附加条件都已满足，我们可以借助 Borel-Laplace重求和理论，并在其存在时，找到唯一一个在张角为 $\Theta > \pi/k$、由 d 平分的开扇形 $S(d, \Theta)$ 内与 F 具有 k-渐近关系的函数；d 通常为正实轴，且 $k = 1/\mu(1-\alpha)$。

总之：

1. 当 $\alpha \geq 1$ 时，F 是关于 ζ 的整函数，因此属于 0-盖夫雷；

2. 当 $\alpha < 1$ 时，F 要么收敛到一个整函数（若 $g \in \mathbb{C}[\![t]\!]_0$），要么是 Gevrey阶为 $^1\!/_{\mu(1-\alpha)}$ 的发散级数~~（若 $g \in \mathbb{C}[\![t]\!]_\mu$）~~。在后一种情况下，它可能是一个函数的 $^1\!/_{\mu(1-\alpha)}$~~渐近~~展开，而该函数可通过 Borel-Laplace重求和找到。

一些例子将有助于更好地理解整个过程。

例5。 设 $f(t)$ 是整函数 e^t。假设 $\mu = 1$ 并使用此 f和基态 $\psi_{\alpha,\beta}$，第 3.2.1 节变为：

$$F(\zeta) = e^{\zeta\, u}[\psi_{\alpha,\beta}] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{\Gamma(\alpha r + \beta)}, \quad \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{C}, \tag{22}$$

这与 $\tilde{g}(t) = t\,g(t) = t\sum_{r=0}^{\infty} t^r$ 的 $(\frac{1}{\alpha}, \beta)$-Borel 变换一致，并且当 $|t| < 1$ 时收敛到 $t/(1-t)$。

由于 $\tilde{g} \in t\mathbb{C}[\![t]\!]_0$，性质 1.2.1 和定理 1.3.3 保证 F 对于任意 $\zeta \in \mathbb{C}$以及任意 $\alpha > 0$ 都收敛。例 5实际上是两个参数的 Mittag-Leffler 函数 $E_{\alpha,\beta}(\zeta)$ 的麦克劳林展开，它是关于 ζ 的整函数（参见例如 [21] 传统的 umbral 方法）。

该函数的 $(\frac{1}{\alpha}, \beta)$-拉普拉斯变换如预期所示：

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{\alpha},\beta}[E_{\alpha,\beta}](t) = \frac{t}{1-t}, \quad |t| < 1\,.$$

总之，对于任意 $\zeta \in \mathbb{C}$，以下影算恒等式成立：

$$E_{\alpha,\beta}(\zeta) = e^{\zeta\, u}[\psi_{\alpha,\beta}]\,.$$

[12]直观地说，由于 $|c_r^{(\tilde{g})}| \lesssim (r!)^\mu$ 且 $\Gamma(1+\alpha\mu r) \lesssim (r!)^{\alpha\mu}$，因此 $|c_r^{(F)}| \lesssim (r!)^{\mu(1-\alpha)}$。

例6. 设$f(t)$为整函数 e^{it}。假设 $\mu = 1$，并使用此f和基态

$$\lambda := \psi_{\frac{1}{2},1} = \frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(1+t/2)},$$

小节 3.2.1 变为：

$$F(\zeta) = \mathrm{e}^{i\zeta u}[\lambda] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{i^r}{\Gamma(1+r/2)} \zeta^r . \tag{23}$$

这给出了第3.2.1节中带有 $\alpha = 1/2 < 1$的一个具体示例。形式级数F与 $\tilde{g}(t) = tg(t) = t\sum_{r=0}^{\infty}(it)^r$的2-Borel变换一致，并收敛到$t/(1-it)$，其中 $|t| < 1$。

由于 $\tilde{g} \in t\mathbb{C}[\![t]\!]_0$，性质 1.2.1 和定理 1.3.3 也确保在这种情况下 F 收敛到一个关于 ζ 的整函数。例6 实际上是 Faddeeva函数的麦克劳林展开 [15]

$$\mathrm{w}(\zeta) = E_{\frac{1}{2},1}(i\zeta) = \mathrm{e}^{-\zeta^2}(1 + i\,\mathrm{erfi}(\zeta)),$$

也称为高斯指数函数（见下文第 4 节）。

该函数的2-Laplace变换如预期所得：

$$\mathcal{L}_2[\mathrm{w}](t) = \frac{t}{1-it}, \quad |t| < 1 .$$

总之，对于任意 $\zeta \in \mathbb{C}$，以下影算恒等式成立：

$$\mathrm{w}(\zeta) = \mathrm{e}^{i\zeta u}[\lambda] . \tag{24}$$

例7. 我们来考察一个关于第 3.2.1节的另一个有启发性的例子$\alpha = 1/2 < 1$。

取 $f(t) = 1/$，其麦克劳林展开在 $|t| < 1$ 中收敛。假设 $\mu = 2$，并使用这个 f以及先前引入的基态 $\lambda := \psi_{\frac{1}{2},1}$，第 3.2.1 节变为：

$$F(\zeta) = \frac{1}{1+\zeta u^2}[\lambda] = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{\Gamma(2r+1)}{\Gamma(r+1)} \zeta^r = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{(2r)!}{r!} \zeta^r . \tag{25}$$

例7 是 $\tilde{g}(t) = t\,g(t) = t\sum_{r=0}^{\infty}(2r)!\,(-t)^r$ 的 1-Borel变换，这是一个发散级数，Gevrey阶为 $k = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$，也就是说 $\tilde{g} \in t[\![\mathbb{C}(t)]\!]_2$。

F 因此是 Gevrey阶 $\frac{1}{\mu(1-\alpha)} = 1$发散的，~~—我~~们可以尝试通过 Borel-Laplace重求和过程来理解它。首先，我们取

1-Borel变换[13] 对 $\tilde{F}(z) = zF(z)$，其中为了方便后续讨论，我们更改了不定元的符号。具体来说：

$$\hat{F}_1(z) := \mathrm{B}_1[\tilde{F}](z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (2r)!}{r!\,\Gamma(r+1)}\, z^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2}\, z^r = (1+4z)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

$\hat{F}_1$ 收敛到一个函数。该函数虽非整函数，但可以解析延拓，使其满足沿 $\mathbb{R}^+$ 存在 1 阶拉普拉斯积分变换所需的所有条件。应用此变换（博雷尔-拉普拉斯重求和过程的第二步），最终得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{S}[F](\zeta) &:= \frac{1}{\zeta}\,\mathcal{L}_1[\hat{F}_1](\zeta) = \frac{1}{\zeta}\int_0^{\infty} \mathrm{d}z\,(1+4z)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-z/\zeta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\zeta}}\,\mathrm{e}^{1/4\zeta}\,\mathrm{erfc}(1/2\zeta^{1/2}),\quad \zeta \in V = S(\Theta),\ \Theta = 2\pi\,.\end{aligned}$$

注意，$F \in [\![\mathbb{C}(t)]\!]_1$ 意味着对任意 $k \geq 1$，都有 $F \in [\![\mathbb{C}(t)]\!]_k$，因此原则上也可以通过计算 k 阶博雷尔变换和拉普拉斯变换来进行重求和，其中[1] $_k$，且$k \geq 1$。例如，当$k = 2$ 时，我们得到：

$$\hat{F}_{\frac{1}{2}}(z) := \mathrm{B}_{\frac{1}{2}}[\tilde{F}](z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (2r)!}{r!\,\Gamma(2r+1)}\, z^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!}\, z^r\,.$$

$\hat{F}_2^1$ 收敛到整函数 e^{-z}，它满足沿 $\mathbb{R}^+$ 收敛的[1] [2]-拉普拉斯变换所需的所有条件。应用此变换，最终得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{S}[F](\zeta) &:= \frac{1}{\zeta}\,\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}[\hat{F}](\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\zeta}}\int_0^{\infty} \mathrm{d}z\,\mathrm{e}^{-z}\,z^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-(z/\zeta)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\zeta}}\,\mathrm{e}^{1/4\zeta}\,\mathrm{erfc}(1/2\zeta^{1/2}),\quad \zeta \in V = S(\Theta),\ \Theta = 2\pi\,.\end{aligned}$$

这两种方法得到相同的结果，正如预期。由于F 恰为 1 阶 Gevrey，我们称$S[F](\zeta)$ 是在V[14]中与F 渐近的唯一 1 阶 Gevrey 函数。等价地，形式级数$F(\zeta) = 1/(1+\zeta\,\mathrm{u}^2)\,[\lambda]$ 表示当 $\zeta \in V$ 时$S[F](\zeta)$ 的唯一 1 阶渐近展开。

总之，对于 $\zeta \in V$，以下渐近 umbral 恒等式成立：

$$\mathrm{S}[F](\zeta) \sim_{\frac{1}{V}} \frac{1}{1+\zeta\,\mathrm{u}^2}\,[\lambda]\,.$$

[13]请回忆一下，Borel 变换仅对没有常数项的形式级数有定义。[14]注意，V 的张角满足条件 $\Theta = 2\pi > \pi/k = \pi$。

例8。 我们再来看一个例子，它具有相同的函数f、基态 λ和 $\alpha = 1/2$，与例7中使用的相同，但 μ的值不同，即μ = 1而不是μ = 2。

在这种情况下，第 3.2.1节变为：

$$F(\zeta) = \frac{1}{1+\zeta\,\mathfrak{u}}[\lambda] = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(1+r/2)}\zeta^r = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{r!}{\Gamma(1+r/2)}\zeta^r\,. \quad (26)$$

例8 是 $\tilde{}g(t) = t\,g(t) = t\sum^{\infty}{}_{r=0}\,r!\,(-t)^r$ 的 2-Borel变换，这是一个 Gevrey 阶为 $^1\,\mu = 1$ 的发散级数。

例8 中 Borel 变换的阶$k = 2$ 超出了定理1.3.3的适用范围；该定理仅在 $0 < k < 1$ 时才能保证收敛。事实上，F 是一个 Gevrey 阶为 $^1\,\mu(1-\alpha) = 2$ 的发散级数，这一点可通过彻底的渐近分析直接验证。

$\tilde{}F(\zeta) = \zeta\,F(\zeta)$ 的 2-Borel变换为：

$$\hat{F}(z) := \mathrm{B}_2[\tilde{F}](z) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r r!}{\Gamma(1+r/2)^2}\,z^r\,,$$

收敛到函数：

$$\hat{F}(z) = \frac{2\arccos(2z)}{\pi\sqrt{1-4z^2}}\,.$$

该函数在$z = \pm 1/2$ 处有分支点。对于$t > 0$，2阶Laplace积分：

$$\mathcal{L}_2[\hat{F}](t) = \frac{2}{t}\int_0^{\infty}\zeta\hat{F}_1(\zeta)e^{-(\zeta/t)^2}d\zeta$$

在实轴上定义不明确。必须选择一个避开$d\,z = 1/2$ 的不同方向，从而得到两个不同的扇区和S_{0^+}和S_{0^-}，它们相差一个指数微小因子：

$$\Delta S \sim \mathrm{e}^{-(1/2t)^2}\,.$$

这是 Stokes现象的体现 [20]。我们将在后续论文中研究这一现象及其他相关方面。

3.2.2 一般情形

对于参数 γ的一般取值，第2.2 节变为：

$$F(\zeta) = f(\zeta\,\mathfrak{u}^{\mu})[\psi_{\alpha,\beta,\gamma}] = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{c_r^{(f)}\,\Gamma(\mu r+\gamma)}{\Gamma(\mu\alpha r+\beta)}\,\zeta^r,\quad \alpha > 0,\ \beta,\gamma\in\mathbb{C}\,. \quad (27)$$

这是形式级数 $\tilde{h}(t) = t\,h(t)$ 的 $(\frac{1}{\alpha}\mu,\ \beta)$-Borel 变换，其中：

$$h(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r^{(h)}\, t^r := \sum_{r=0}^{\infty} c_r^{(f)}\, \Gamma(\mu r + \gamma)\, t^r\,. \tag{28}$$

平移项 γ 在第 3.2.2节中的出现，不影响其 Gevrey 阶；与前一小节分析的特殊情形一样，它仍为 0 或 $^1\,\mu$。

因此，我们可以毫不迟疑地得出结论，在第 3.2.2节的一般情形中，也有：

1. 当 $\alpha \geq 1$ 时，F 收敛为关于 ζ 的整函数，因此是 0-盖夫雷的；
2. 当 $\alpha < 1$时，F 要么在 $g \in \mathbb{C}[\![t]\!]_0$ 时收敛为整函数，要么在 $g \in \mathbb{C}[\![t]\!]_\mu$ 时发散，其 Gevrey 阶为 $\frac{1}{\mu(1-\alpha)}$。后一种情形下，它可能表示某个函数的 $^1\,\mu(1-\alpha)$-渐近展开，该函数可以通过 Borel-Laplace重求和求得。

当然，即使平移 γ 不改变F的收敛条件，它的存在确实会影响其和的解析结构（或者，如果F发散，则影响其 $^1\,\mu(1-\alpha)$-和）。

例9。 设 $f(t)$ 是整函数 e^t。假设 $\mu = 1$，并使用该 f和基态 $\psi_{\alpha,\,\beta,\,\gamma}$，第 3.2.1节变为：

$$F(\zeta) = \mathrm{e}^{\zeta\,\mathrm{u}}[\psi_{\alpha,\beta,\gamma}] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_r}{r!\,\Gamma(\alpha r + \beta)}\,\zeta^r,\quad \alpha > 0,\ \beta,\gamma \in \mathbb{C}\,, \tag{29}$$

这与 $(\frac{1}{\alpha},\,\beta)$-Borel 变换相吻合，其对象为

$$\tilde{h}(t) = t\,h(t) = t\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_r}{r!}\,t^r\,,$$

在以原点为中心的开圆盘内收敛到 $t/(1-t)^\gamma$。

由于 $h \in \mathbb{C}[\![t]\!]_0$，第 1.2.1 节和第 1.3.3节保证 F 对任意 $\zeta \in \mathbb{C}$ 以及任意 $\alpha > 0$都收敛。例 5 实际上是三参数 Mittag-Leffler 函数 $E_{\alpha,\,\beta,\,\gamma}(\zeta)$ 的麦克劳林展开，它是 ζ的整函数，也称为 Prabhakar函数 [23]。

该函数的 $(\frac{1}{\alpha},\ \beta)$-拉普拉斯变换如预期得到：

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{\alpha},\beta}[E_{\alpha,\beta,\gamma}](t) = \frac{t}{(1-t)^\gamma}\,.$$

总之，对于任意 $\zeta \in \mathbb{C}$，以下影算恒等式成立：

$$E_{\alpha,\beta,\gamma}(\zeta) = \mathrm{e}^{\zeta\,\mathrm{u}}[\psi_{\alpha,\beta,\gamma}]\,.$$

4 案例研究：高斯三角函数

作为前几节所概述的幺半框架的一项有趣应用，我们考察所谓高斯三角函数的一种新影算表述，即：

$$\exp_G(\zeta) \equiv \mathrm{w}(\zeta) := \mathrm{e}^{-\zeta^2}(1 + i\,\mathrm{erfi}(\zeta))\,, \tag{30a}$$
$$\cos_G(\zeta) := \mathrm{e}^{-\zeta^2}\,, \tag{30b}$$
$$\sin_G(\zeta) := \mathrm{e}^{-\zeta^2}\,\mathrm{erfi}(\zeta)\,. \tag{30c}$$

高斯指数函数（又称法德耶娃函数） [15], 是数学物理、应用数学和计算科学中的基本特殊函数。它在计算卷积积分、谱线形状、共振展宽以及等离子体动力学理论中发挥着核心作用，在这些领域通常称为等离子体色散函数。它的应用范围极为广泛，遍及各个学科。

在 [7], 下文中，我们用影子态函数 ϕ （参见第3.1.1节）给出了这些函数的以下幂影表述：

$$\exp_G(\zeta) = \frac{1}{1 - i\zeta\,\mathfrak{u}^{1/2}}\,[\phi] \tag{31a}$$
$$\cos_G(\zeta) = \frac{1}{1 + \zeta^2\,\mathfrak{u}}\,[\phi]\,, \tag{31b}$$
$$\sin_G(\zeta) = \frac{\zeta\,\mathfrak{u}^{1/2}}{1 + \zeta^2\,\mathfrak{u}}\,[\phi]\,, \tag{31c}$$

另一方面，我们注意到，利用以下恒等式：

$$\exp_G(\zeta) \equiv \mathrm{w}(\zeta) = E_{\frac{1}{2},1}(i\zeta)\,,$$

可以为高斯指数函数、正弦函数和余弦函数定义其他幂影表示，以突出它们类似三角函数的性质。具体而言，我们可以得到简单的幂影恒等式（参见例6:

$$\exp_G(\zeta) = \mathrm{e}^{i\zeta\,\mathfrak{u}}\,[\lambda]\,, \tag{32a}$$
$$\cos_G(\zeta) = \cos(\zeta\,\mathfrak{u})\,[\lambda]\,, \tag{32b}$$
$$\sin_G(\zeta) = \sin(\zeta\,\mathfrak{u})\,[\lambda]\,, \tag{32c}$$

其中， λ 是前面介绍过的基态函数

$$\lambda := \psi_{\frac{1}{2},1} = \frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(1+t/2)}\,. \tag{33}$$

因此，普通的指数函数、正弦函数和余弦函数分别是高斯指数函数、正弦函数和余弦函数的λ影像。

公式 (4) 可广泛应用于各种不同 应用情境。例如，利用第 4 节，我们可以推导出一个简单的 λ误差函数的影像：

$$\begin{aligned}\operatorname{erf}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{d}\zeta\, \cos_G(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{d}\zeta\, \cos(\zeta\,\mathfrak{u})\,[\lambda] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathfrak{u}^{-1}\sin(z\,\mathfrak{u})\,[\lambda] \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r z^{2r+1}}{(2n+1)n!}\,.\end{aligned}$$

So:

$$\operatorname{erf}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin(\zeta\,\mathfrak{u})}{\mathfrak{u}}\,[\lambda]\,.$$

作为另一个例子，公式

$$\mathrm{e}^{ixu} = -\frac{i}{\pi}\mathcal{P}\int_{\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\frac{\mathrm{e}^{i\xi u}}{\xi - x},\quad u > 0\,,$$

其中符号 $\mathcal{P}$表示该积分的柯西主值，可直接转化为影算恒等式

$$\exp_G(\zeta) = \mathrm{e}^{ix\,\mathfrak{u}}\,[\lambda] = -\frac{i}{\pi}\mathcal{P}\int_{\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\frac{\mathrm{e}^{i\xi\,\mathfrak{u}}}{\xi - x}\,[\lambda] = -\frac{i}{\pi}\mathcal{P}\int_{\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\frac{\exp_G(\xi)}{\xi - x}\,.$$

利用泛函恒等式 $\exp_G(\zeta) = \cos_G(\zeta) + i\sin_G(\zeta)$，最终可得到高斯正弦函数与高斯余弦函数之间的克拉默斯-克罗尼格关系：

$$\cos_G(z) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\frac{\sin(\xi\,\mathfrak{u})}{\xi - x}\,[\lambda] = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\frac{\sin_G(\xi)}{\xi - x}\,, \tag{34a}$$

$$\sin_G(z) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\frac{\cos(\xi\,\mathfrak{u})}{\xi - x}\,[\lambda] = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\frac{\cos_G(\xi)}{\xi - x}\,. \tag{34b}$$

高斯三角函数的n阶导数的脐版本可通过直接对式（4）求导得到：

$$\exp_g^{(n)}(x) = (i\,\mathfrak{u})^n\,\mathrm{e}^{ix\,\mathfrak{u}}\,[\lambda]\,, \tag{35a}$$

$$\begin{aligned}\cos_G^{(n)}(x) &= \mathfrak{u}^n\cos\left(x\,\mathfrak{u} + \frac{\pi n}{2}\right)[\lambda] \\ &= \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\mathfrak{u}^n\cos(x\,\mathfrak{u})\,[\lambda] - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\mathfrak{u}^n\sin(x\,\mathfrak{u})\,[\lambda]\,,\end{aligned} \tag{35b}$$

$$\begin{aligned}\sin_G^{(n)}(x) &= \mathfrak{u}^n\sin\left(x\,\mathfrak{u} + \frac{\pi n}{2}\right)[\lambda] \\ &= \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\mathfrak{u}^n\sin(x\,\mathfrak{u})\,[\lambda] + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\mathfrak{u}^n\cos(x\,\mathfrak{u})\,[\lambda]\,.\end{aligned} \tag{35c}$$

由第4 节可立即推导出将高斯指数函数（又称 Faddeeva函数）与其一阶导数联系起来的公式 [14,(7.10.2)], 即：

$$\mathrm{w}'(x) = i\,\mathfrak{u}\,\mathrm{e}^{ix\,\mathfrak{u}}\,[\lambda] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i)^{r+1}x^r}{r!}\,\frac{\Gamma(r+2)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{2}\right)} = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} - 2x\,\mathrm{w}(x)\,.$$

我们可以利用第4 节，将厄米特多项式的定义关系改写为

$$H_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = (-1)^n \partial_x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,,$$

简洁的影算形式：

$$H_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = (-1)^n\,\mathrm{cos}_G^{(n)}(x) = (-\mathfrak{u})^n \cos\left(x\,\mathfrak{u} + \frac{\pi n}{2}\right)[\lambda]\,.$$

利用经典的狄利克雷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\frac{\sin(ux)}{x} = \pi\,\mathrm{sgn}(u), \quad u \in \mathbb{R}\,, \tag{36}$$

我们立即得到关于这个非平凡积分[15]的简洁结果：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{erfi}(x)}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\frac{\sin_G(ux)}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\frac{\sin(x\,\mathfrak{u})}{x}\,[\lambda] = \pi\,[\lambda] = \pi\,. \tag{37}$$

4.1 与傅里叶变换的联系

高斯指数函数的特定 λ影像形式（见第4节）暗示了它与傅里叶变换理论之间有一种引人入胜的联系。事实上，形式上有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,f(x)\,\mathrm{exp}_G(-kx) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,f(x)\,\mathrm{e}^{-ixk\,\mathfrak{u}}\,[\lambda] = \mathcal{F}[f](k\,\mathfrak{u})\,[\lambda]\,, \tag{38}$$

其中， $\mathcal{F}[f]$ 表示f的傅里叶变换[16]。
如果我们将第一个积分解释为f 的“高斯傅里叶变换”，并引入如下具有启发性的记号：

$$\mathcal{F}_G[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,f(x)\,\mathrm{exp}_G(-kx)\,, \tag{39}$$

[15]我们注意到，对于任意常数c 和基态 φ， $c\,[\varphi] = c\mathfrak{u}^0\,[\varphi] = c\varphi(0)$。在当前情况下， $\lambda(0) = 1$。

[16]我们采用以下傅里叶变换及其逆变换约定：

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}[f](k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,f(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}, \qquad f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,f(x)\,\mathrm{e}^{ikx}\,.$$

章节 4.1 可改写为

$$\mathcal{F}_G[f](k) = \mathcal{F}[f](k\,\mathfrak{u})\,[\lambda]\,. \tag{40}$$

换言之，f 的高斯傅里叶变换，是其λ-影像为f的普通傅里叶变换的形式级数。

由于 f与 $\mathcal{F}[f]$ 的收敛条件可能有所不同，第 4.1 节可能得到收敛形式级数（即最终得到一个函数），也可能得到发散但可重求和的形式级数（即某个函数在复平面开扇形区域内的渐近展开）。有此限制，第 4.1 节通过利用已知的傅里叶变换，提供了一种简化复数计算的方法，例如计算涉及高斯指数函数的积分。举例来说，积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2} \exp_G(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-(a+1)x^2}(1 + \operatorname{erfi}(-x)) = \sqrt{\frac{\pi}{a+1}}, \quad \operatorname{Re} a > 0$$

可通过求 e^{-ax^2} 的高斯傅里叶变换在$k = 1$处的值来计算，即：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{e}^{-ix\,\mathfrak{u}}\,[\lambda] = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathfrak{u}^2}{4a}}\,[\lambda] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r\,(2r)!}{(4a)^r (r!\,)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a+1}}\,. \tag{41}$$

下面再举几个该方法的应用示例。

例 10。 考虑积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-|x|} \exp_G(-x) = \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}(1 - \operatorname{erf}(1/2))\,.$$

注意，I 对应于在$k = 1$处取值的 $\mathcal{F}_G[\mathrm{e}^{-|x|}](k)$。在此情形下，刚才概述的方法给出：

$$F(k) \equiv \mathcal{F}_G[\mathrm{e}^{-|x|}](k) = \mathcal{F}[\mathrm{e}^{-|x|}](k\,\mathfrak{u})\,[\lambda] = \frac{2}{1 + k\,\mathfrak{u}^2}\,[\lambda]\,.$$

我们已经在例子 7中遇到过这个影算恒等式，其中我们证明了所得形式级数是发散的 1 阶 Gevrey 级数，并且是 1-可求和的，其和为函数：

$$\mathrm{S}[F](k) = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\, \mathrm{e}^{1/4k} \operatorname{erfc}(1/2k^{1/2}), \quad k \in V = S(\Theta),\ \Theta = 2\pi\,.$$

最终我们得到：

$$I = \mathrm{S}[F](1) = \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}(1 - \operatorname{erf}(1/2))\,,$$

这与直接求解积分[17]得到的结果一致。

[17]注意，互补误差函数(ζ) := 1 − 误差函数(ζ)。

例11。

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp_G(-x)}{x}=\mathcal{F}[1/x](\mathfrak{u})[\lambda]=-i\pi[\lambda]=-i\pi\,.$$

例12. 考虑积分

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(x)\exp_G(-x)=\mathcal{F}_G[\mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(x)](1)\,,$$

其中 $H_n(x)$ 是 $n\in\mathbb{N}$ 阶厄米多项式。由高斯傅里叶变换可得以下简洁结果

$$\mathcal{F}_G[\mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(x)](k)=(-i)^n\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-k^2\mathfrak{u}^2/2}\;H_n(k\,\mathfrak{u})[\lambda]\,.\tag{42}$$

为了验证例12的收敛性，我们注意到，对于每个 n，它都可以写成若干项的线性组合，系数给定，fi每项的形式如下：

$$k^m\,\mathrm{e}^{-k^2\mathfrak{u}^2/2}\;\mathfrak{u}^m[\lambda],\quad m\le n\,,$$

因此，只需分析这一特例。我们有：

$$k^m\,\mathrm{e}^{-k^2\mathfrak{u}^2/2}\;\mathfrak{u}^m[\lambda]=k^m\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{2^r r!}\frac{\Gamma(2r+m+1)}{\Gamma(r+1+m/2)}k^{2r}\,.$$

该级数收敛到关于 k 的整函数：

$$a_m(k)=\frac{k^m(2k^2+1)^{-\frac{m-1}{2}}\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(1+m/2)}\,,$$

由此：

$$a_m(1)=\frac{3^{-\frac{m-1}{2}}\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(1+m/2)}\,.\tag{43}$$

总之，例 12 对任意 k 和 $n\in\mathbb{N}$，都收敛到一个整函数。当代入$k=1$时，该函数返回所需的值 I_n。例如，直接计算 I_1 和 I_3,，使用例 12进行计算，可得：

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}(2x)\exp_G(-x)=-\frac{4i\sqrt{2}}{3}\,,$$

$$I_3=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}(8x^3-12x)\exp_G(-x)=-\frac{8i\sqrt{2}}{9}\,,$$

这与借助 Mathematica™ 直接求解积分所得的结果相对应。

5 结论

我们已经证明，在特殊函数理论框架中作为计算工具发展起来的指标影形式体系，可以通过将影算子 u 重新定义为解析收敛形式级数的基态子代数上的泛函，从而有效地推广到更广泛的形式幂级数 $\mathbb{C}[\![t]\!]$ 这一领域 $\mathbb{C}\{t\} \subset \mathbb{C}[\![t]\!]$。

对于经过仔细定义的一类基态 φ，其范围足以涵盖迄今研究的大多数有趣情形，这种转置使形如$F(\zeta) = f(\zeta\,\mathrm{u}^{\mu})[\varphi]$的幂影恒等式能够获得严谨的意义，并可重新解释为定义良好的形式级数$F \in \mathbb{C}[\![\zeta]\!]$，其中$f \in \mathbb{C}[\![t]\!]$任意。

为了联系形式体系的具体应用（这些应用要求$F \in \mathbb{C}\{\zeta\}$），我们施加了附加条件$f \in \mathbb{C}\{t\}$。

即使对f施加了这一限制，对于基态 φ中涉及的某些参数取值，形式级数$F(\zeta) = f(\zeta\,\mathrm{u}^{\mu})[\varphi]$仍可能发散。因此，我们运用形式级数 Gevrey 分类中成熟的结果，分析了其收敛条件。

这最终使我们得以确定F收敛的一些一般判据。特别是，我们证明，即使F 是 Gevrey阶$k > 0$的发散级数，仍有可能通过广义 k-Borel-Laplace求和程序对其求和。我们在一系列明确的例子中验证了这些结果，并将其应用于分析一种新颖且前景可期的高斯三角函数幂影表述。

最后，我们简要而批判性地比较本文提出的幺半框架与 Roman 经典影算术。比较结果总结于表 1。

尽管这两种方法有许多相通之处，但它们的适用范围本质上不同，旨在实现不同的目标。在 Roman 的理论中，$f(\mathrm{u})[\varphi]$ 形式的表达式被作代数解释。这些表达式用作组合工具，用于表示 Sheffer序列、线性泛函及其他符号构造。

相比之下，在当前方法中，$f(\zeta\,\mathrm{u}^{\mu})[\varphi]$这类示性表达式会在形式幂级数的严谨框架内重新诠释，并根据 Gevrey类和 Borel-Laplace求和来分析其收敛性。在这里，基态 $\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$ 通常是某个结构化函数（例如伽马函数之比或 Pochhammer符号）的麦克劳林展开，而算子 u^{μ} 最终被理解为作用于收敛形式级数子代数上的泛函，并受到约束，须产生收敛结果。换言之，我们的形式体系保留了符号上的一般性，同时以解析性质为基础。具体而言：

	经典翁布拉演算-lus	**当前方法**
基态 φ	任意 形式级数; 主要是组合的	结构化函数（例如, in- 涉及 Γ、Pochhammer）；与 可和性
解析控制	最简；纯符号化	详细的渐近分析和收 通过 Gevrey 理论处理发散
Goal	符号生成 恒等式和序列	函数的严格构造, 可能通过重求和 技术
Borel-Laplace 理论	未使用	重构.....的核心工具 发散级数中的函数
算子 u^{μ}	符号移位或降阶 算子	表示为泛函；仔 细分析收敛性
Gevrey类	不存在	对分类和重新求和至关重要 形式级数
函数解析观点	不存在	强：涉及增长、奇异 奇点、解析域

表 1：与 Roman 示性演算的主要区别

- 形式级数根据其系数的增长情况被归入 Gevrey类；

- 当这些级数发散时，可通过 Borel–Laplace 重求和来解释，从而在复平面的扇形区域上得到解析函数；
- 因此，示性表达式 $f(\zeta\,\mathrm{u}_{\mu})[\varphi]$ 并非仅仅是符号：其收敛性和解析结构取决于函数 f与基态 φ之间的相互作用，而二者决定了相关形式级数的 Gevrey 类型。

因此，Roman 示性演算在精神上是代数的、组合的，而本文的“解析”幂影形式体系则为底层代数结构赋予渐近分析与可求和性理论的工具，从而构建出一个强大的框架，可依据发散的形式数据构造并诠释特殊函数。

总之，所提出的框架为迄今发展出的相当一部分指标示性方法奠定了坚实基础，同时也使一些表面上发散的结果变得可解释。

目前正在开展相关工作，以纳入更多类可接受的基态，并涵盖不同类型的重求和过程（例如

Borel–Le Roy 重求和），并将这些思路应用于现代理论物理若干基本问题的研究，例如重整化理论的某些方面 [22]。

作者感谢 G. Dattoli 博士审阅稿件并提出许多富有启发性的建议。

参考文献

[1] W. Balser. 通过迭代拉普拉斯积分对形式幂级数求和。《数学分析与应用杂志》，94(1):305– 314，1983。[2] J. Blissard. 通用方程理论。《纯粹与应用数学季刊》，4:279–305，1861。[3] E. Borel. Le¸c¸cons sur les s´eries divergentes。Gauthier-Villars 经典丛书。J. Gabay，索镇，1988。原版出版于 1901 年。[4] D. Burago、Yu. Burago 和 S. Ivanov. 度量几何教程，数学研究生教材第 33 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001。[5] C. Canuto 和 A. Tabacco. 数学分析 II，Unitext 第 38 卷。施普林格，第 2 版，2015。[6] G. Dattoli 和 M. Del Franco. 欧拉对现代物理学的遗产。跨学科数学研讨会讲义，9:1–24，2010。[7] G. Dattoli、E. Di Palma 和 Licciardi S. 关于高斯函数与类高斯函数的影算视角。《Symmetry》，15:2157，2023。[8] G. Dattoli、E. Di Palma、E. Sabia、K. G´orska、A. Horzela 和 K. A Penson. 运算方法与影算方法及 Borel 变换。《应用与计算数学国际期刊》，3:3489–3510，2015。[9] G. Dattoli、M. Haneef、S. Khan 和 S. Licciardi. 运用影算技术揭示超几何函数的新视角。https://arxiv.org/abs/2401.17209，2024。arXiv:2401.17209 [数学分析]。

[10] G. Dattoli 和 S. Licciardi。运算方法、哑元方法、Borel 变换与负阶导数算子技术。积分变换与特殊函数，31(3):192–220，2020。

[11] G. Dattoli 和 S. Licciardi。运算方法与哑元方法及 Borel 变换。《数学》，8(5):788，2020。[12] A. Deeb。基于发散级数重新求和的时间积分器：在力学中的应用。博士论文，拉罗谢尔大学；黎巴嫩大学，2015。[13] A. Di Bucchianico 和 D. E. Loeb。哑元演算精选综述。《组合学电子期刊》，动态综述（DS3）：1–34，2000年。访问日期：2025年11月11日。[14] NIST数学函数数字图书馆。https://dlmf.nist. gov/，2025年12月15日发布的1.2.5版。F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。[15]V. N. Faddeeva 和 N. N. Terent’ev。复自变量的函数w(z) =exp(−z²)$\left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(t^2)\, dt\right)$表。国家技术理论文献出版社，莫斯科，1954年。英文译本：培格曼出版社，纽约，1961年。[16] J. P. Jean-Pierre Ramis。发散级数与渐近理论，《法国数学学会公报增刊》第121卷。法国数学学会，巴黎，1993年。[17] S. Licciardi 和 G. Dattoli。《哑元演算指南》。世界科学出版社，2022年。[18] M. Loday-Richaud。发散级数、可和性与复兴 II：简单可和性与多重可和性。《数学讲义》。施普普林格出版社（Cham），2016年。[19] E. Maillet。论发散级数与微分方程。《高等师范学校科学年鉴》，20:487–518，1903年。[20] C. Mitschi 和 D. Sauzin。发散级数、可和性与复兴 I：单值化与复兴。《数学讲义》。施普普林格出版社（Cham），2016年。[21] T. Nahid 和 H. P. Rani。通过哑元方法研究基于 Mittag-Leffler 的贝塞尔函数与 Tricomi函数。《数学物理学报告》，92(1):1–17，2023年。[22] G. Parisi。Borel 变换与重整化群。《物理学报告》，49(2):215–219，1979年。《物理学快报》评论栏目。

[23] T. R. Prabhakar. 核中含有广义 Mittag Lef- fler 函数的奇异积分方程。横滨数学杂志，19:7–15，1971。[24] B. Pym. 几何学与物理学中的复兴。讲义。2016。[25] S. Roman.《影子演算》，纯粹与应用数学丛书第 111 卷。学术出版社，1984。[26] G.-C. Rota. 有限算子演算。学术出版社，纽约，1975。Kahaner 和 Odlyzko 共同撰写。[27] G. N. Watson. 渐近级数理论。伦敦皇家学会哲学汇刊。*A* 辑，数学或物理类论文，211(471-483):279–313，1912。[28] E. M. Wright. 广义贝塞尔函数的渐近展开。伦敦数学学会会刊，2(1):257–270，1934。