arXiv:2601.10456v1 [math.QA] 15 Jan 2026

对称空间、非形式星乘积与 Drinfel'd 扭曲

Pierre Bieliavsky（UCLouvain，比利时）

目录

1 辛对称空间 **7**

1.1 对称空间.7 1.2 辛对称空间.13

2 缩回方 法在形式变形量子化中的应用 19

2.1 辛流形上的星乘积.19 2.2 Drinfel'd 扭曲与辛李群.21 2.3 交织 Drinfel'd 扭曲——缩回方法.23 2.3.1 辛扭元与自然性.23 2.3.2 缩回方法 I：将等价关系描述为演化方程的解 . . . . . 23 2.3.3 缩回方法 II：一般背景.27

3 容许的相 ˇ面积、Weinstein 与 Severa 的面积 3 **1**

3.1 魏因斯坦面积.35 ˇ3.2 Severa 区域.39 3.3 双曲平面.40 3.4 初等群型厄米空间.44 3.5 群 $ax + b$ 的辛对称几何.45 3.6 测地三角形上的辛通量.47

4 振荡积分 在指数李群上的 49

4.0.1 符号空间.49 4.0.2 振荡积分.51 4.0.3 变形.53

5 左不变非形式星乘积与 Drinfel'd-Iwasawa 扭曲 **57**

5.1 对称空间的酉表示.57 5.1.1 群型对称空间的表示.58 5.1.2 收缩对.58 5.2 伊wasawa因子的等变量子化 $\mathbb{S} = AN$ .59 5.2.1 Weyl 量子化.60 5.2.2 $\mathbb{S}$ 的量子化.60

6 双曲平面的量子化与 Drinfel'd 扭曲 **67**

6.1 收缩双曲平面：非形式背景.70 6.2 回缩的基本性质.75 6.3 非形式星乘积与 Drinfel'd 扭曲的显式公式.79

引言

这些讲义对应于我在“非交换几何在规范理论、场论与量子时空中的应用”会议期间开设的一门迷你课程。该会议将于2025年4月7日至11日在吕米尼国际数学会议中心举行。

这些讲义回顾了我与合作者在具有大群对称变换的非形式变形量子化领域所做的一些工作（[Bi95、Bi02、BM01、BG15、BDS09]）。此外，讲义还包含新的材料和结果。

这项工作的动机有三方面。首先，它涉及解决 A. Weinstein 于1994年提出的一个问题：如何用辛对称空间上的测地三角形的辛面积，从几何上描述不变星积的三点施瓦茨核。这个问题最初在可解辛对称空间的情形下得到解决（即 G 是一个可解李群）。后来，[BDS09]给出了双曲平面情形下的解。该处使用的方法称为缩回方法。第2章将对该方法作大幅推广。然而，如何将这些解解释为 G-等变符号演算（“量子化映射”）框架下的复合公式，仍不清楚。该框架将经典可观测量定义为相空间上的光滑函数 G/K ，并将其映射为作用于 G 酉不可约表示中的算子。尤其是，我们的工作与 A. 和 J. Unterberger 在此框架下的工作之间有何关系，仍不清楚；在该框架中， $G = \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{R})$ 和 $K = \mathrm{SO}(2)$。

其次，在同一时期（1993—1994年），M. Rieffel 提出了一种方法，可以将基于向量群（或李代数） $\mathbb{R}^{2n}$ ([Ri1]) 的通常阿贝尔莫亚尔–德林费尔德扭结以非形式的方式实现。换言之，Rieffel 定义了一个泛变形公式，将其应用于 $C^\star$ or Fr´echet $\mathbb{R}^{2n}$ 代数时，可以得到这些代数的变形，且变形保持在同一拓扑类中，而非通过形式幂级数展开实现。Rieffel 在[Ri2]中提出了为非阿贝尔群作用定义此类泛变形公式的问题。基于 [Bi02], 给出的显式非形式星乘积公式， [BG15]针对每个厄米型实单李群的伊wasawa因子 AN 作用，解决了这一问题。具体而言，这项工作将 [Bi02] 的公式诠释为可解李群或对称空间上的非阿贝尔等变伪微分演算中的符号复合公式。非阿贝尔 UDF 源自辛对称空间中测地三角形的辛面积，这一点令人瞩目。

第三，上述问题在可解情形下已得到探讨，但在双曲平面情形下仍未解决。无论是在我的研究背景下，还是在 Unterberger 的研究背景下，情况都是如此；后者并未定义闭算子代数。在本综述第6章中，我通过在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的射影全纯离散级数中，利用紧算子子代数对双曲平面上的 Schwartz型非交换函数代数进行 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-等变量子化，从而解决了这一问题。

第1章

辛对称空间

1.1 对称空间

定义 1.1。1 *[Lo69]* 一个对称空间是一个对(M, s)，其中 M 是一个连通可微流形，并且

$$s : M \times M \to M : (x, y) \mapsto s_x y$$

是一个光滑映射，使得

(1) 对于 M 中的每个点 x，映射 $s_x \colon M \to M$ 都是对合的（即 $s_x^2 = \mathtt{id}_M$），且点 x 是其孤立不动点。映射 s_x 称为以 x 为中心的对称变换 。

(2) 对所有属于 M 的 x 和 y，都有

$$s_x s_y s_x \;=\; s_{s_x y} \,.$$

例 1.1 .1 (i) 每个有限维实向量空间 V 都自然地是一个对称空间，其

$$s_x y \;:=\; 2x - y \quad (x, y \in V) \,.$$

(ii) 更一般地，每个李群 G 在赋予由下式给出的对称变换后，自然成为一个对称空间:

$$s_x y \;:=\; x y^{-1} x \quad (x, y \in G) \,.$$

(iii) 设 V 是有限维实向量空间，其上有一个非平凡的标量积 B （惯性指数任意，也可能退化）。那么每个（非空）球面

$$S_{B,R} \;:=\; \{x \in V \mid B(x, x) \;=\; R\} \quad (R \in \mathbb{R}_0)$$

赋予"诱导"的对称结构后，自然成为一个对称空间。事实上，对于球面上的每个 x，以 x 所指向的向量轴为轴的正交对称变换都有定义，且保持该球面不变。将其限制在球面上，便定义了以 x 为中心的对称变换:

$$s_x y \;:=\; \frac{2}{R} B(x, y) x - y \quad (y \in S_{B,R}) \,.$$

对称空间具有典范几何。更准确地说，其上存在一个（[Lo69]）与对称变换相容的协变导数，并且它有一个非常简单的显式公式（[Bi95，BB11]）:

命题 1.1.1 设$(M,\ s)$ 是一个对称空间。设 X, Y是 M上的光滑切向量场，且 x是 M中的一点。那么，

(i) 以下公式

$$\nabla_X Y|_x \;:=\; \frac{1}{2} \left[X \,,\, Y \,+\, s_{x\star} Y\right]_x \tag{1.1}$$

在 M 上定义了一个仿射联络 ∇ 。

(ii) ∇ 是 M 上唯一一个在这些对称变换下保持不变的仿射联络。

(iii) 它是无挠的，且其黎曼曲率张量是平行的。

(iv) 这些对称变换扩展了 ∇的局部测地对称变换。更确切地说，若 x 是 M中的一点，并且记Exp_x^{∇}: $U_x \subset T_xM \to M$ 为相应的指数映射（U_x 表示 T_xM 中一个关于零对称的开邻域，在该邻域上此映射有定义），则有

$$s_x \mathrm{Exp}_x^{\nabla}(v) \;=\; \mathrm{Exp}_x^{\nabla}(-v)\;.$$

证明。首先，我们注意到

$$s_{x\star x} \;=\; -\mathtt{Id}_{T_xM}\;. \tag{1.2}$$

事实上， $s_{x\star x}$ 是 T_xM的一个对合。因此， T_xM 分解为 ± 1-特征子空间的直和。由于x 是孤立不动点，不动向量子空间是平凡的。

作为一个将两个向量场 $X, Y \in \mathsf{Vec}(M)$映射到第三个向量场 $\nabla_X Y$的映射，它显然是 $\mathbb{R}$-双线性的。现在设 $f \in C^\infty(M)$ 是 M上的一个光滑函数。首先有

$$\begin{aligned}
\nabla_{fX} Y|_x \;&=\; \frac{1}{2}\left[fX\,,\, Y \,+\, s_{x\star}Y\right]_x \\
&=\; \frac{1}{2}\left(f\left[X\,,\, Y \,+\, s_{x\star}Y\right] - s_{x\star}Y(f)X - Y(f)X\right)_x \\
&=\; f\nabla_X Y|_x - \frac{1}{2}\left(s_{x\star}Y(f)X + Y(f)X\right)_x
\end{aligned}$$

根据性质 (1.2)，这等于 $f\nabla_X Y|_x$。

此外，有

$$\begin{aligned}
\nabla_X (fY)|_x \;&=\; \frac{1}{2}\left[X\,,\, fY \,+\, s_x^\star f s_{x\star}Y\right]_x \\
&=\; \frac{1}{2}\left(f\left[X\,,\, Y\,\right] + (s_x^\star f)\left[X\,,\, s_{x\star}Y\right] + X(f)Y + X(s_x^\star f)s_{x\star}Y\right)_x \\
&=\; f\nabla_X Y|_x + \frac{1}{2}\left(X(f)Y + X(s_x^\star f)s_{x\star}Y\right)_x \;=\; f\nabla_X Y|_x
\end{aligned}$$

由公式 (1.2) 可得。这证明了第 (i) 项。

关于第 (ii) 项，我们首先注意到，对于每个 $y \in M$，有

$$\begin{aligned}
\nabla_{s_{y\star}X}(s_{y\star}Y)|_x \;&=\; \frac{1}{2}\left(s_{y\star}\left[X\,,\, s_{x\star}s_{y\star}Y \,+\, Y\right]\right)_x \\
&=\; \frac{1}{2}\left(s_{y\star}\left[X\,,\, s_{y\star}s_{x\star}s_{y\star}Y \,+\, Y\right]\right)_x \;=\; \frac{1}{2}s_{y\star s_y x}\left[X\,,\, s_{s_y x\star}Y \,+\, Y\right] \\
&=\; \left(s_{y\star}\nabla_X(Y)\right)_x\;.
\end{aligned}$$

No现在考虑另一个对称不变联络 ∇'。并构造张量量 y:

$$S(X,Y) \;=\; \nabla_X Y - \nabla'_X Y\;.$$

于是有:

$$\begin{aligned}
S(X,Y)_x \;&=\; S(s_{x\star}X, s_{x\star}Y)_x \;=\; \nabla_{s_{x\star}}Xs_{x\star}Y|_x - \nabla'_{s_{x\star}X}s_{x\star}Y|_x \\
&=\; \left(s_{x\star}S(X,Y)\right)_x \;=\; -S(X,Y)_x \;=\; 0\;.
\end{aligned}$$

这就证明了条目 (ii)。

利用 (1.2) 展开挠率和黎曼张量的协变导子中涉及的所有项，经过冗长但直接的计算即可得到条目 (iii)。

（iv）由以下事实得出：由于 $s_{x\star_x}^2 = \mathrm{id}_{T_xM}$， x 处的切空间分解为 $s_{x\star_x}$的（± 1）-特征子空间。然而，由于 s_x 孤立地固定了 x ，不动向量子空间必定是平凡的。事实上，考虑一个由 s_x 保持不变的黎曼度量，经过 x 的每条非平凡测地线（相对于该度量）在 s_x 作用下都必须翻转，因为 s_x 孤立地固定了 x 。因此，没有非平凡测地线与 T_xM 中的不动向量空间相切。 ∎

注 1.1.1 该对称变换在全局上有定义这一事实意味着，联络 ∇ 是测地完备的。

定义 1.1.2 两个对称空间 $(M_i, s^{(i)})$ $(i = 1,2)$ 之间的一个态射 是一个光滑映射 $\phi : M_1 \to M_2$ ，它与对称变换相容:

$$\phi \circ s^{(1)}_x = s^{(2)}_{\phi(x)} \circ \phi \quad (\forall x \in M_1) .$$

在微分同胚的情形下，我们称其为 M_1 与 M_2 之间的一个同构；当 $M_1 = M_2$时，则称其为一个自同构。

对称空间自动成为齐性空间。更确切地说，有

命题 1.1.2 对称空间的自同构群 自同构群(M, s) 是一个作用于 M 上的变换李群，并且在 M上具有传递作用。

证明。我们首先证明，(M, ∇) 上的仿射变换群 Aff(∇) 等于 Aut(M, s)。设 ϕ 是 (M, s) 的一个自同构。于是有

$$\begin{aligned} \phi_\star \nabla_X Y|_x &= \frac{1}{2}\phi_{\star_{\phi^{-1}(x)}} \left[X, Y + s_{\phi^{-1}(x)\star} Y\right] \\ &= \frac{1}{2}\phi_{\star_{\phi^{-1}(x)}} \left[X, Y + \phi_\star^{-1} s_{x\star}\phi_\star Y\right] = \frac{1}{2}\phi_\star\phi_\star^{-1} \left[\phi_\star X, \phi_\star Y + s_{x\star}\phi_\star Y\right]_x \\ &= \nabla_{\phi_\star X}\phi_\star Y|_x . \end{aligned}$$

于是得到包含关系 Aut$(M, s) \subset$ Aff(∇)。
关于另一个包含关系，我们注意到，(M, ∇) 上的任意仿射变换 ψ 都在局部与 M 中任意一点 x 周围的测地对称变换相互交织:

$$\psi s_x(\mathrm{Exp}_x(v)) = \psi \mathrm{Exp}_x(-v) = \mathrm{Exp}_{\psi(x)}(-\psi_{\star x}(v)) = s_{\psi(x)}\psi(\mathrm{Exp}_x(v)) .$$

因此，存在 M 的一个开子集 U，在该子集上仿射变换 ψs_x 与 $s_{\psi(x)}\psi$ 重合。由曲率张量和平行挠率张量是平行的这一事实可知 [KN69] [第 263 页定理 7.7] ，流形 M 关于正规坐标是解析的。因此，仿射映射也是解析映射。由于该流形是连通的， ψs_x 和 $s_{\psi(x)}\psi$ 必然在全局上重合。

由于 Aff(∇) 是 M [上的一个变换李群69] [定理 1.5 第 229], 页，Aut(M, s) 也是如此。现在我们来证明作用的传递性。设 x, y 是 M 中的点，且 γ: $[0, 1] \to M$ 是一条连接它们的连续路径。由于 $\gamma[0, 1]$ 是紧的，存在有限多个点 $\{x = x_0, ..., x_N = y\}$，使得 $U_i := \mathrm{Exp}^{x_i}(T_{x_i}M) \cap \mathrm{Exp}^{x_{i+1}}(T_{x_{i+1}}M) \neq \emptyset$。这给出一条分段测地线，由 $2N$ 个连续的测地线段组成， $\{\gamma_j\}$ 将 x 与 y 连接起来。记 γ_j 的中点为 m_j，则有 $s_{m_{2N}} \circ .. \circ s_{m_1}(x) = y$，从而证明了传递性。 ■

因此，仿射对称空间 M 是一个齐性空间：固定一个基点 $o \in M$，并将 Aut$(M,\ s)$ 中 o 的稳定子记为 H，则有如下 H-主纤维化:

$$\mathtt{Aut}(M, s) \to M \simeq \mathtt{Aut}(M, s)/H : g \mapsto g(o) .$$

我们注意到，映射

$$\tilde{\sigma} : \mathtt{Aut}(M, s) \to \mathtt{Aut}(M, s) : g \mapsto s_o g s_o$$

是李群 Aut$(M,\ s)$ 的一个对合自同构。
De记 Aut$(M,\ s)$ 的李代数 Vec(M) 为 $\mathfrak{aut}(M,\ s) \subset$，则有如下分解

$$\mathfrak{aut}(M, s) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$$

到 ± 1 的特征子空间中

$$\sigma := \tilde{\sigma}_{\star e} =: \mathtt{id}_\mathfrak{h} \oplus (-\mathtt{id}_\mathfrak{p}) .$$

命题 1.1.3 H 的李代数等于 $\mathfrak{h}$，而向量空间 $\mathfrak{p}$ 自然地与 $T_o(M)$ 相同。

˜证明。令 Z 为 H的李代数 $\mathfrak{h}$ 中的一个元素。对于每个 $t\in\mathbb{R}$，有：

$$\exp(-tZ)s_o\exp(tZ) \;=\; s_{\exp(-tZ)o} \;=\; s_o\,.$$

因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \exp(-t\sigma Z)\exp(tZ) \;=\; 0 \;=\; Z-\sigma Z\,.$$

也就是说； $Z\in\mathfrak{h}_o$

对于另一包含关系，注意到若 $X\in\mathfrak{h}$，则有

$$\exp(t\sigma X).o \;=\; s_o\exp(tX)s_oo \;=\; s_o\exp(tX).o \;=\; \exp(tX).o\,,$$

˜因此，由于 s_o 孤立地固定 o：当 t 足够小时，即 $X\in\mathfrak{h}$, $\exp(tX)o=o$。记

$$\pi:\mathtt{Aut}(M,s)\to M:g\mapsto g.o\,,$$

可知，将 $\pi_{\star e}:\mathfrak{aut}(M,\ s)\to T_oM$限制到 $\mathfrak{p}$ 上

$$\pi_{\star e}|_{\mathfrak{p}}:\mathfrak{p}\to T_oM$$

是一个线性同构。 ■

定义 1.1.3 一对$(\mathfrak{g},\sigma)$，其中 $\mathfrak{g}$ 是有限维实李代数，且 σ 是 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构，称为对合李代数（简称 iLa）。

两个 *iLa*之间的态射 $(\mathfrak{g}_i,\sigma^{(i)})\,(i\;=\;1,2)$ 是李代数同态 $\psi\colon\ \mathfrak{g}_1\ \to\ \mathfrak{g}_2$，且满足与对合相交换：

$$\psi\circ\sigma^{(1)} \;=\; \sigma^{(2)}\circ\psi\,.$$

当它可逆时，称之为同构。

注 1.1.2 给定一个对合李代数$(\mathfrak{g},\sigma)$，向量空间 $\mathfrak{g}$ 分解为 σ 的(±1)-特征子空间的直和：

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}\qquad \sigma \;=\; \mathtt{id}_{\mathfrak{k}}\oplus(-\mathtt{id}_{\mathfrak{p}})\,.$$

在此背景下，可以观察到以下关系：

$$\begin{aligned}[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] &\subset \mathfrak{k}\\ [\mathfrak{k},\mathfrak{p}] &\subset \mathfrak{p}\\ [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] &\subset \mathfrak{k}\,.\end{aligned}$$

特别 地， $\mathfrak{k}$ 变成 $\mathfrak{g}$ 的李子代数，并作用于其典范向量直和项 $\mathfrak{p}$.

命题 1.1.4 这对$(\mathfrak{aut}(M,s)\ \sigma:=\tilde{\sigma}_{\star e})$ 是一个对合李代数。

给定一个李群，我们用 exp 表示相应的指数映射。

命题 1.1.5 *(i)* 子空间

$$\mathfrak{g}(M,s)\ :=\ \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}\quad\text{with}\quad \mathfrak{k}\ :=\ [\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$$

是 $\mathfrak{aut}(M,s)$的李子代数。

(*ii*) 记 G（M,s） 为与 $\mathfrak{g}$（M,s） 相切的 M,s 的 自同构群 的连通李子群，并记

$$K\ :=\ G(M,s)\cap H\,,$$

映射

$$\Psi:G(M,s)/K\to M:g\mapsto g.o$$

是一个微分同胚。

Proof. 对于每个首先证明，映射 $\mathrm{Exp}_o : \mathbb{R} \to M : t \mapsto \exp(tX).o$ 是与 X 相切的测地线，其起始方向为 o：

$$\mathrm{Exp}_o(tX) \;=\; \exp(tX).o \quad \text{where} \quad \mathfrak{p} \;=\; T_oM \,.$$

为此，我们考虑向量场

$$X^\star_x \;:=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 \exp(-tX).x \,.$$

我们有

$$\nabla_{X^\star} X^\star|_{\exp(tX).o} \;=\; \frac{1}{2}\left[X^\star, s_{\exp(tX).o_\star} X^\star\right]_{\exp(tX).o} \,.$$

But,

$$\begin{aligned}
-\left(s_{\exp(tX).o_\star} X^\star\right)_x \;&=\; s_{\exp(tX).o_\star s_{\exp(tX).o}(x)} X^\star \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} s_{\exp(tX).o}\left(\exp(sX) s_{\exp(tX).o}(x)\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \exp(tX) s_o \exp(-tX) \exp(sX) \exp(tX) s_o \exp(-tX)(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \exp(tX) s_o \exp(sX) s_o \exp(-tX)(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \exp(tX) \exp(-sX) \exp(-tX)(x) \;=\; X^\star_x \,.
\end{aligned}$$

由此得证。

现在设 $x \in M$ 和 $\{\gamma_j\}_{j=0,\dots,N}$ 是一列有限个首尾相接的测地线，将 o 与 x 连接起来。在 $\gamma_0(1) \;=\exp(X_0).o$，每条测地线 γ_1 都是将 o 处形如 $\exp(tY).o$ ($Y \in \mathfrak{p}$) 的测地线沿 $\exp(X_0)$ 平移所得：

$$\gamma_1(t) \;=\; \exp(X_0)\exp(tY).o \;=\; \exp(t\mathtt{Ad}_{\exp X_0} Y)\exp(X_1).o \,.$$

特别地，存在一个元素 $X_1 \in \mathfrak{g}(M,\ s)$，使得

$$\gamma_1(t) = \exp(tX_1)\exp(X_0).o \,.$$

反复进行，我们得到元素 X_0，.....，$X_N \in \mathfrak{g}(M,\ s)$，使得

$$x \;=\; \exp(X_N)...\exp(X_0).o \,.$$

因此，群 $G(M,\ s)$ 在 M 上传递地作用。 ∎

定义 1。 **1.4** 群 $G(M,s)$ 称为对称空间 (M,s) 的平移群 .

注 1.1.3 平移将平移的概念推广到了对称空间：想想向量空间 V 的例子，其中两个欧几里得中心对称的乘积确实定义了一个平移。

由此，我们可以用对合李代数这一纯粹的李论概念来编码对称空间 M 的几何结构。下面我们将描述这一过程。

定义 1.1.5 平移 *iLa* 是一种满足以下两个性质的 *iLa* $(\mathfrak{g},\sigma)$：

(1) $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] = \mathfrak{k}$ 且 *(2)* 表示 $\mathfrak{k} \times \mathfrak{p} \to \mathfrak{p} : (X,Y) \mapsto [X,Y]$ 是忠实的。

命题 1.1.6 设 (M,s) 是一个对称空间。则数对 $(\mathfrak{g}(M,s)\ \sigma :\ =\ \tilde{\sigma}_{\star e}|_{\mathfrak{g}(M,s)})$ 是一个平移 *iLa*。特别地，对称空间与平移 *iLa* 之间存在对应关系：

$$(M,s) \mapsto (\mathfrak{g}(M,s),\sigma) \,.$$

.

证明。唯一需要证明的是忠实性，这由 $\mathrm{Aut}(M,s)$ 由 M 的变换构成这一事实立即得出；根据定义，这些变换确实是忠实的。 ∎

定理 1.1.1 上述将每个对称空间与一个平移 *iLa* 相关联的对应关系，在单连通对称空间的同构类与平移 *iLa* 的同构类之间诱导出一个双射。

证明。设 (M,s) 和 (M',s') 是两个单连通对称空间，它们通过同构 $\phi\colon M\to M'$ 相互同构。我们考察它们的自同构群之间的同构：

$$\hat{\phi}:\mathtt{Aut}(M,s)\to\mathtt{Aut}(M',s'):\varphi\mapsto\phi\varphi\phi^{-1}\,.$$

我们选取一个基点 $o\in M$，并将 $\phi(o)=:o'$ 记为 M' 中对应的基点。这些选取定义了对合 $\tilde{\sigma}$ 和 $\tilde{\sigma}'$，其中

$$\tilde{\sigma}'\;=\;\hat{\phi}\tilde{\sigma}\hat{\phi}^{-1}\,.$$

此外，还有如下分解：

$$\mathfrak{aut}(M,s)\;=\;\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}\quad\text{and}\quad\mathfrak{aut}(M',s')\;=\;\mathfrak{h}'\oplus\mathfrak{p}'$$

分别根据

$$\sigma\quad\text{and}\quad\sigma'\;:=\;\tilde{\sigma}'_{\star\mathtt{id}}\;=\;\hat{\phi}_{\star\mathtt{id}}\sigma\hat{\phi}^{-1}_{\star\mathtt{id}}\,.$$

现在，令 $\underline{\phi}:=\phi_{\star\mathtt{id}}$，则有

$$\mathfrak{p}'\;=\;\underline{\phi}(\mathfrak{p})\,.$$

因此，由于 $\underline{\phi}$ 是李代数同构，其在 $\mathfrak{g}(M,s)$ 上的限制实现了与$\mathfrak{g}(M',s')$ 的同构，并且该同构与对合相容。

现在我们反过来考虑这一对应关系。固定一个平移 iLa $(\mathfrak{g}\;=\;\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p},\;\sigma)$。我们将为它构造一个单连通对称空间。为此，我们考虑李代数为 $\mathfrak{g}$ 的单连通李群 G，以及 G 中与 $\mathfrak{k}$ 相切的连通李子群 K。纤维化 $K\hookrightarrow G\to G/K$ 的长同伦序列告诉我们，由于 K 连通且 G 单连通，G/K 是单连通的。这个陪集空间典范地构成一个对称空间。事实上，考虑 G 的对合自同构 $\tilde{\sigma}$，它与 σ 相切，令

$$s_{gK}(g'K)\;:=\;g\tilde{\sigma}(g'g^{-1})K\,.$$

上述公式在 G/K 上定义了对称空间结构。事实上，记 $\pi:G\to G/K$ 为典范投影，则对每个 $X\in\mathfrak{p}$，有：

$$s_{K\star K}\pi_{\star e}X\;=\;\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 s_K\pi(\exp(tX))\;=\;\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0\pi\tilde{\sigma}(\exp(tX))\;=\;-\pi_{\star e}X\,.$$

因此 $s_{K\star K}\;=\;-\mathrm{id}_{T_KM}$，由齐性可知 s_{gK} 将 gK 固定为孤立点。其余公理很容易验证。

现在，我们考虑李群同态：

$$\tau:G\to\mathtt{Aut}(G/K,s):g\mapsto\tau_g\;:=\;[g'K\mapsto gg'K]\,.$$

一般来说，这个同态不是单射。不过，它的微分是单射。事实上，在 $\mathrm{Aut}(G/K,s)$ 的层面上令 $\hat{\sigma}(\varphi):=\;s_K\varphi s_K$，则有

$$\hat{\sigma}_{\star\mathtt{id}}\tau_{\star e}(X)|_{gK}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 s_K\tau_{\exp(tX)}s_K(gK)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0\tilde{\sigma}(\exp(tX)\tilde{\sigma}(g))$$
$$=\;\;\tau_{\star e}\sigma(X)|_{gK}\,.$$

这意味着，记 $\mathfrak{aut}(G/K,s)\;=\hat{\mathfrak{h}}\oplus\hat{\mathfrak{p}}$ 为 iLa 分解，则有

$$\tau_{\star e}\mathfrak{p}\subset\hat{\mathfrak{p}}\,.$$

根据齐性空间 G/K 的维数可知，

$$\tau_{\star e}\mathfrak{p}=\hat{\mathfrak{p}}\,.$$

$\mathfrak{k}\;=\;[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$ 在 $\mathfrak{p}$ 上的作用是忠实的，且 $\tau_{\star e}$ 是李代数同态，因此 $\tau_{\star e}|_{\mathfrak{k}}$ 也是单射。于是，$\tau_{\star e}$ 给出了 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 与 $(G/K,s)$ 的平移 iLa 之间的同构。

其余部分显而易见。 ∎

例1.1.1 将李群 $\mathbb{L}$ 视为对称空间，可以为其关联所谓的“交换情形”iLa。记 $\mathbb{L}$的李代数为 $\mathfrak{L}$，定义

$$\mathfrak{L}^2 \;:=\; \mathfrak{L}\oplus\mathfrak{L} \quad \text{and} \quad \sigma:\mathfrak{L}^2\to\mathfrak{L}^2:(X,Y)\mapsto(Y,X)\;.$$

于是，$(\mathfrak{L}^2,\ \sigma)$ 是一个具有典范特征子空间的 iLa

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}_2 \;&=\; \{(X,X)\} \;\simeq\; \mathfrak{L}\\ \mathfrak{p}_2 \;&:=\; \{(X,-X)\}\;.\end{aligned}$$

$\mathfrak{k}_2$ 在 $\mathfrak{p}_2$ 上的作用通常并不忠实，而且通常也没有 $[\mathfrak{p}_2,\mathfrak{p}_2]=\mathfrak{k}_2$。不过，考虑以下对象可以恢复平移 iLa：

$$\mathfrak{g} \;:=\; \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$$

with

$$\mathfrak{k} \;:=\; \mathfrak{L}'/\mathfrak{z} \quad \text{and} \quad \mathfrak{p} \;:=\; \mathfrak{p}_2$$

其中 $\mathfrak{L}':=[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 表示 $\mathfrak{L}$ 的一阶导子，而 $\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{L}'$ 中 $\mathfrak{L}$ 的中心化子（关于伴随表示）：

$$\mathfrak{z} \;:=\; \mathfrak{L}'\cap\mathfrak{z}(\mathfrak{L})\;.$$

定义1.1.6 若存在一个李子群 $\mathbb{S}\subset G$ 在 M 上单传递地作用，即存在一个 $\mathbb{S}$-等变微分同胚：则称对称空间 M 为群型。

$$\mathbb{S}\to M:x\mapsto xK\;.$$

于是，我们称其为抽象李群 $\mathbb{S}$ 上的群型对称空间。

现在我们考虑一个李群 $\mathbb{S}$，它配备了一族光滑的群型对称空间结构（因此是左不变的）：

$$s^{(\kappa)}:\mathbb{S}\times\mathbb{S}\to\mathbb{S}\quad(\kappa\in I)$$

其中，I 是 $\mathbb{R}$的一个连通区间。
我们用 $\mathfrak{g}_\kappa$ 表示相应的平移李代数族，并用

$$\mathfrak{g}_\kappa \;=\; \mathfrak{k}_\kappa\oplus\mathfrak{p}_\kappa$$

表示相应的对称空间分解。在此背景下，我们作出如下定义。

定义1.1.7 对于 κ 和 κ'，我们称 $s^{(\kappa')}$ 是 $s^{(\kappa)}$ 的曲率收缩，如果

$$\dim\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}_{\kappa'}}(\mathfrak{k}_{\kappa'}) \;>\; \dim\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}_{\kappa}}(\mathfrak{k}_{\kappa})$$

其中，我们用 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{k})$ 表示 $\mathfrak{p}$ 中 $\mathfrak{k}$ 的中心化子。

这实质上说明，$s^{(\kappa')}$ 的曲率是通过令其曲率分量的一部分趋于零，从 $s^{(\kappa)}$ 的曲率得到的。

1.2 辛对称空间

定义 1.2。1 *[Bi95, BCG96]* 辛对称空间 （简称 *SSS*）是一个三元组(M, s, ω)，其中(M, s) 是一个对称空间，并且 ω 是定义在 M 上的一个非退化 *2-* 形式，且该形式在对称变换下不变：

$$s_x^\star\omega \;=\; \omega \quad (\forall x\in M)\;.$$

如果两个辛对称空间之间存在一个辛同胚，并且该辛同胚同时也是其底层对称空间之间的对称空间同构，那么称这两个辛对称空间是同构的。

14 第*1*章：辛对称空间以下观察是 [KN69] （第??页）的直接推论

命题1.2.1 二形式 ω 关于典范仿射联络 ∇平行：

$$\nabla\omega \;=\; 0\,.$$

特别地，它是闭的：

$$\mathrm{d}\omega \;=\; 0$$

因此是辛的。

例1.2.1 Hermite 对称空间

我们从一个具有有限中心的单李群 G 开始，其李代数 $\mathfrak{g}$ 绝对单（即$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}:=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ 是单的）。我们考虑一个极大紧子群 $K\subset G$，其李代数 $\mathfrak{k}$ 假定具有非平凡中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$。这样的李群 G称为厄米型。

在这种情况下，已知 $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ 是一维的（[K65，Bi95]），由一个在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$上充当复结构的元素 Z_0 生成。

更准确地说，记 B 为 $\mathfrak{g}$上的 Killing形式，则该分解

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{k}\oplus(\mathfrak{p}\;:=\;\mathfrak{k}^{\perp_B})$$

构成一个 iLa（$\mathfrak{g}$，θ），其对合 θ 是 $\mathfrak{g}$的 Cartan 对合。
Z_0 在 $\mathfrak{p}$上的作用：

$$\mathcal{J}\;:\mathfrak{p}\to\mathfrak{p}:X\mapsto[Z_0,X]$$

于是就是一个复结构：

$$\mathcal{J}^2 \;=\; -\mathtt{id}_{\mathfrak{p}}\,.$$

由此得到由下式定义的辛元素 $\Omega\in\bigwedge^2(\mathfrak{p}^\star)$

$$\Omega(X,Y)\;:=\;B(\mathcal{J}X,Y)\,,$$

它在陪集 s 上　　空间 $M:=G/K$ 定义了一个 G不变的辛结构 ω 贯穿整个公式　　：

$$\omega_{gK}(X^\star,Y^\star)\;:=\;\Omega\left((Ad_{g^{-1}}X)_{\mathfrak{p}}\,,\,(Ad_{g^{-1}}Y)_{\mathfrak{p}}\right)\quad(X,Y\in\mathfrak{p})\tag{1.3}$$

其中我们对每个 $T\in\mathfrak{g}$记

$$T\;=\;T_{\mathfrak{k}}+T_{\mathfrak{p}}$$

根据 Cartan 分解。
如上所示，齐性空间 M 被自然赋予了对称空间结构

$$s_{gK}g'K\;:=\;g\theta(g^{-1}g')K$$

其中我们（不严格地）用 θ 表示 G 的对合自同构，它积分为 $\mathfrak{g}$的 Cartan 对合 θ。于是，三元组 $(M,\;s,\;\omega)$ 是一个辛对称空间。

注释 1.2.1 *(i)* 半单李群 $G\;=\;ANK$ 的岩泽分解表明，这些 *Hermite* 对称空间全都是群型的。

(ii) 在上述例子中，公式：

$$J_{gK}(X^\star)\;:=\;\mathcal{J}(Ad_{g^{-1}}X)_{\mathfrak{p}}\quad(X\in\mathfrak{g})$$

在 $M=G/K$ 上定义了一个 G-不变复结构。元素

$$\beta(X^\star,Y^\star)\;:=\;-\omega(\mathcal{J}X,Y)$$

然后在 M 上定义一个 G-不变的 *Kähler* 度量。

其中其无穷小结构类似于 iLa 的结构，用来刻画辛对称空间的概念，具体如下。

定义 1.2.2 一个辛三元组（简称 *ST*）是一个三元组$(\mathfrak{g},\sigma,\Omega)$，其中$(\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p},\sigma)$是一个 *iLa*，且$\Omega$ 是一个 *Chevalley 2*-余循环（相对于 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的平凡表示）：

$$\Omega\in\bigwedge^{2}(\mathfrak{g}^{\star}):\delta\Omega = 0$$

它在 $\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{k}\times\mathfrak{p}$ 上恒为零，并且在 $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ 上限制为一个非退化 *2*-形式。

若存在底层 *iLa* 之间的同构，且该同构将两个 *2*-余循环相互交织，则称这两个辛三元组同构。

注 1.2.1 在上述定义中，Chevalley 余边界算子按通常方式定义为

$$\delta\Omega(X,Y,Z) := \Omega([X,Y],Z)+\Omega([Z,X],Y)+\Omega([Y,Z],X)\,.$$

于是有

定理 1.2.1 对称空间与 *iLa*（参见定理 *1.1.1*）之间的对应关系，在单连通 *SSS* 的同构类集合与平移 *ST* 的同构类集合之间诱导出一个双射。

证明。对于一个 SSS (M,s,ω)，按显然的方式与一个 ST 对应：$(\mathfrak{g},\sigma)$ 定义为与对称空间 (M,s) 相关联的平移 i La；而通过同构

$$\pi_{\star_0}|_{\mathfrak{p}}:\mathfrak{p}\to T_oM$$

（其中 $o\in M$ 满足 $\sigma_{o_{\star e}} = \sigma$），将 Ω 定义为在 $\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{k}\times\mathfrak{p}$ 上取零的 $(\pi_{\star_0}|_{\mathfrak{p}})^{\star}\omega_o$ 的扩张。容易验证，所得三元组 $(\mathfrak{g},\sigma,\Omega)$ 是一个 SST。
反过来，对于一个 ST $(\mathfrak{g},\sigma,\Omega)$，定理 1.1.1 的证明构造出一个以 G/K 为模型的对称空间。于是公式 (1.3) 定义了所需的辛结构，从而得到一个 SSS $(G/K,s,\omega)$。
其余部分沿用定理 1.1.1 证明中的思路即可立即得出。 ■

根据 B. Kostant 的一项早期结果，辛对称空间一般而言局部上是一个余伴随轨道。但一般来说，它并非其平移群的余伴随轨道。不过，在本书中，我们将关注 SSS 的以下子类。

定义 1.2.3 若 *SSS* (M,s,ω) 的平移群 G 以哈密顿方式作用于 (M,ω)，则称其为哈密顿的；也就是说，赋予 $C^{\infty}(M)$ 与辛结构相对应的泊松结构后，存在一个 G- 等变的李代数同态

$$\lambda:\mathfrak{g}\to C^{\infty}(M):X\mapsto\lambda_X$$

使得

$$\mathrm{d}\lambda_X = i_{X^{\star}}\omega\,.$$

其中 i 表示向量场对微分形式的通常内积。

注 1.2.2 在这种情况下，*Kostant* 关于辛齐性空间的一般结果表明，该映射

$$m:M\to\mathfrak{g}^{\star}:x\mapsto[X\mapsto\lambda_X(x)]$$

实现了一个 G-等变的辛覆盖，将 M 覆盖在 G在 $\mathfrak{g}^{\star}$中的余伴随轨道 $\mathcal{O}$ 上。

注 1.2.3 对于半单辛对称空间，也就是说，当 G 是半单时，简单应用 *Whitehead* 引理即可推出这一点总是成立。

注 1.2.4 与哈密顿 *SSS* (M,s,ω) 相对应的是这样一个平移 *ST* $(\mathfrak{g},\sigma,\Omega)$，它具有精确的辛元素

$$\Omega = \delta\xi\quad(\xi\in\mathfrak{g}^{\star})\,.$$

例 1.2.2 收缩洛巴切夫斯基平面 **lane**

在本段中，我们将把群 $\mathbb{S} = ax + b$ 的几何表示为双曲平面的曲率收缩。

现在我们考虑实数直线上的仿射变换构成的二维李群 $\mathbb{S}$ 之连通分支的如下实现。我们考虑由两个元素H 和 E生成的二维李代数 $\mathfrak{s}$，其李括号为:

$$[H, E] := 2E .$$

相应的连通单连通李群 $\mathbb{S}$ 由全局坐标图给出

$$\mathfrak{s} \to \mathbb{S} : aH + nE \mapsto \exp(aH).\exp(nE) =: (a, n)$$

其中群运算定义为

$$(a, n).(a', n') := (a + a' , e^{-2a'}n + n')$$

单位元为

$$e := (0, 0)$$

和逆元

$$(a, n)^{-1} = (-a, -e^{2a}n) .$$

在此图表中，左不变 Haar 体积为

$$\omega := \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}n .$$

在此背景下，我们有

$$\tilde{H} = \partial_a - 2n\partial_n \quad \tilde{S} = \partial_n .$$

命题 1.2.2 *(i)* 令

$$s_e^{(\kappa)} : \mathbb{S} \to \mathbb{S} : (a, n) \mapsto (-a - \frac{1}{2}\log(1 + \kappa n^2) , -n)$$
$$and \quad s_x^{(\kappa)} := L_x s_e^{(\kappa)} L_{x^{-1}} \quad \kappa \in [0, \infty[$$

定义了 $(\mathbb{S}, \omega)$ 上的光滑辛对称空间族。

(ii) 对于每个 $\kappa > 0$，辛对称空间 $(\mathbb{S}, s^{(\kappa)}, \omega)$ 作为 *SSS* 与双曲平面同构

$$\mathbb{D} := \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$$

配备（归一化的）*Kähler* 辛形式 ω。

(iii) 对于 $\kappa > 0$，辛对称空间 $(\mathbb{S}, s^{(0)}, \omega)$ 是辛对称空间 $(\mathbb{S}, s^{(\kappa)}, \omega)$的曲率收缩。

(iv) 作为对称空 间，$(\mathbb{S}, s^{(0)})$ 与 $\mathbb{S}$ 上的典范李群对称空间结构同构 .

(v) $(\mathbb{S}, s^{(0)})$ 的平移李代数 $\mathfrak{g}_0$ 与 *Poincar´e* 群$SO(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$的李代数同构。

(vi) 作为辛对称空间，$(\mathbb{S}, s^{(0)}, \omega)$ 与 $\mathfrak{g}_0^\star$ 中 $SO(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的余伴随轨道上的辛对称空间结构典范同构。

证明。我们考虑由以下李括号表给出的 $\{\mathfrak{g}_\kappa\}_{\kappa\in\mathbb{R}^+}$ 在 $\mathbb{R}^3 := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{H, E, F\}$ 上的李代数结构族:

$$\begin{aligned} [H, E] &= 2E \\ [H, F] &= -2F \\ [E, F] &= \kappa H . \end{aligned}$$

en $\kappa \neq 0$ $\mathfrak{g}_\kappa$ is i同构 hic to $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.
其中，元素 $Z := E - F$ 生成一条直线 $\mathfrak{k}_\kappa$，该直线由$\mathfrak{g}_\kappa$的一个极大紧李子代数组成。

在基 $\{H, E, F\}$ 下，Killing形式 B_κ 具有如下矩阵形式：

$$[B_\kappa] \;=\; \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\kappa \\ 0 & 4\kappa & 0 \end{pmatrix} .$$

在等变识别下，将 B_κ 从 $\mathfrak{g}_\kappa$ 传输到 $\mathfrak{g}_\kappa^\star$ 所定义的 $\mathfrak{g}_\kappa^\star$ 上的对偶度量 $B_\kappa^\star$

$$\sharp : \mathfrak{g}_\kappa^\star \to \mathfrak{g}_\kappa : \Xi \mapsto {}^\sharp\Xi$$

$$B_\kappa({}^\sharp\Xi\,,\, X) \;:= < \Xi, X >$$

在 $\{H, E, F\}$ 的对偶基 $\{H^*, E^*, F^*\}$ 下，其矩阵形式如下：

$$[B_\kappa^\star] \;=\; \frac{1}{4\kappa} \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

经过缩放，我们便在对偶空间 $\mathfrak{g}_\kappa^\star$ 上得到一个余伴随不变标量积 η_κ，其在基 $\{H^*, E^*, F^*\}$ 下的矩阵形式为

$$[\eta_\kappa] \;:=\; \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

因此，对于 η_κ，非零球面 $S_{t,\ R}$ 是对称空间，它们共有的平移群由 $\mathfrak{g}_\kappa$ 的伴随群 G_κ 实现（同构于 PSL(2，ℝ)），并通过限制余伴随作用在 $S_{\kappa,\ R}$ 上作用。每个 $S_{\kappa,\ R}$ 在赋予其典范辛形式——即所谓的 *KKS*形式——后，便成为一个 SSS；这一典范辛形式与其作为余伴随轨道的性质相对应。

注意到元素 $o := E^* - F^*$ 在 K_κ 作用下保持不变（对于 $(E^* - F^*)\circ$，$_Z \;=\; 0$ 是伴随算子），由此可知，在这一图景中，双曲平面 $\mathbb{D}$ 由 $S_{\kappa,\ -2}$ 的连通分支实现。令

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{n} & := & \mathbb{R}E \\ \mathfrak{a} & := & \mathbb{R}H \\ A & := & \exp \mathfrak{a} \\ N & := & \exp \mathfrak{n} \\ \mathbb{S} & := & A.N \\ K_\kappa & := & \exp \mathfrak{k}_\kappa \ , \end{array}$$

岩泽分解

$$G_\kappa \;=\; \mathbb{S}K_\kappa$$

给出一个整体微分同胚

$$\mathbb{S} \to \mathbb{D} \subset \mathfrak{g}_\kappa^\star : x \mapsto x.o \ .$$

上述微分同胚在源空间赋予 $\mathbb{S}$ 通过左平移作用于自身的作用时是 $\mathbb{S}$-等变的。

通过 $\mathbb{S}$ 协调伊wasawa因子

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{S} : (a, n) \mapsto \exp(aH) \exp(nE)$$

或者等价地，其轨道$\mathbb{D} \subset S_{\kappa,\ -2}$ 在.....之下

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{D} : (a, n) \mapsto \exp(aH) \exp(nE).o \ ,$$

一个简单的计算在 $\mathbb{S}$ 的层面上实现了对称变换 s_o

$$\mathbb{S} \to \mathbb{S} : (a, n) \mapsto (\, -a - \frac{1}{2} \log(1 + \kappa n^2)\,,\, -n\,) \ .$$

18 第*1*章：辛对称空间坐标系 $(a,\ n)$ 具有 达布 性质，即下面的 2-形式：

$$\omega\ :=\ \mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}n\ .$$

是左不变的。因此，它对应于对 Haar 体积和 KKS形式二者的归一化。

极限 $\kappa\ \to\ 0$ 现在给出了双曲平面（$\mathbb{D},\ s,\ \omega$）到辛对称空间的一个曲率收缩，后者以下记为（$\mathbb{M},\ s,\ \omega$），其平移李代数 $\mathfrak{g}_0$ 同构于庞加莱李代数 $so(1,\ 1)\ \ltimes\ \mathbb{R}^2$。

球面 $S_{\kappa,\ -2}$ 收缩为内积空间（$\mathfrak{g}_0^\star,\ \eta_0$）中的球面 $S_{0,\ -2}$ 。需要注意的是，在这个极限 $\kappa=0$ 下，标量积 η_0 现在是退化的。作为 $\mathfrak{g}_0^\star$中的余伴随轨道，这些球面 $S_{0,\ -2}$对应于庞加莱群 $SO(1,\ 1)\ \ltimes\ \mathbb{R}^2$的“有质量”轨道。

关于 $S_{\kappa,\ -2}$上的辛对称空间结构，在极限 $\kappa=0$下，可得平移 iLa（$\mathfrak{g}_0,\ \sigma$），其非零括号如下：

$$\begin{array}{rcl}[H,E] & = & 2E\\ [H,F] & = & -2F\end{array}$$

以及“收缩的嘉当对合”：

$$\sigma H=-H\quad\sigma E=-F\ .$$

相应的特征空间分解为

$$\mathfrak{g}_0\ =\ \mathfrak{k}_0\oplus\mathfrak{p}_0$$

with

$$\mathfrak{k}_0\ =\ \mathtt{span}\{H\,,\,E+F\}\quad\mathfrak{p}_0\ =\ \mathtt{span}\{Z\ :=\ E-F\}\ .$$

最后，我们注意到，平移 iLa $(\mathfrak{g}_0,\sigma)$ 与实数直线上仿射变换李群$\mathbb{S}\ =\ AN$ 的平移 iLa 同构。事实上，记其李代数为 $\mathfrak{s}:=\ \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}$，根据上文对例1.1.1的描述，我们有

$$\mathfrak{L}\ =\ \mathfrak{s}\quad,\mathfrak{z}\ =\ \{0\}\quad,\mathfrak{L}'\ =\ \mathbb{R}(E,E)\ .$$

iLa 同构由下式给出

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{L}'\oplus\mathfrak{p}_2 & \longrightarrow & \mathfrak{k}_0\oplus\mathfrak{p}_0\\ (E,E) & \mapsto & E-F\\ (E,-E) & \mapsto & E+F\\ (H,-H) & \mapsto & H\ .\end{array}$$

■

第2章

形式变形量子化中的回缩方法

2.1 辛流形上的星乘积

定义 2.1.1 设(M,ω) 是一个辛流形，其对应的辛泊松括号记为$\{\,,\,\}^{\omega}$。记 $C^{\infty}(M)[[\nu]]$ 为形式参数 ν 下系数取自 $C^{\infty}(M)$ 的形式幂级数空间。在星乘积 (M,ω) 上， $\mathbb{C}[[\nu]]$ 双线性结合代数结构为 $C^{\infty}(M)[[\nu]]$:

$$\star_{\nu} : C^{\infty}(M)[[\nu]] \times C^{\infty}(M)[[\nu]] \to C^{\infty}(M)[[\nu]]$$

使得，将嵌入在 $C^{\infty}(M)[[\nu]]$ 中的 $C^{\infty}(M)$ 视为零阶系数，并对所有 $u, v \in C^{\infty}(M)$写作:

$$u \star_{\nu} v \;=:\; \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{k} C_{k}(u,v)\;,$$

则有

(1) $C_0(u,v) \;=\; uv$ （函数的逐点乘法）。

(2) $C_1(u,\;v) - C_1(v,\;u) \;=\; \{u,v\}^{\omega}$。

(3) 对于每个 k，系数 C_k: $C^{\infty}(M) \times C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$ 都是双微分算子。它们称为星乘积的上链 。

星乘积 当 C_2 是二阶双微分算子时，该星乘积称为自然的 （参见 *[Lo69]*） 。

定义 2.1.2 如果存在如下形式的微分算子形式幂级数，则称这两个星乘积 $\star_{\nu}^{j}$ *(*$j = 1,2$*)* 等价 :

$$T \;=\; \mathtt{id} \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{k} T_{k} \;:\; C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)[[\nu]] \tag{2.1}$$

使得对于所有 $u,\; v \in C^{\infty}(M)$:

$$T(u) \star_{\nu}^{2} T(v) \;=\; T(u \star_{\nu}^{1} v)\;, \tag{2.2}$$

其中，我们用 T 表示将 *(2.1)* 扩张为 $C^{\infty}(M)[[\nu]]$ 上的 $\mathbb{C}[[\nu]]$-线性映射。

由于此类等价算子 T 的零阶项是恒等算子，因而可逆，所以下述论证表明， T 本身作为 $C^{\infty}(M)[[\nu]]$ 上的 $\mathbb{C}[[\nu]]$-线性算子也是可逆的。

引理 2.1.1 设$(\mathbb{A}, I)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的含单位结合代数，并且 $A := \; I \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{k} A_{k}$ 是 $\mathbb{A}[[\nu]]$ 的一个元素。那么 A 在 $\mathbb{A}[[\nu]]$ 中存在逆元 A^{-1} 。

20 第2章. 形式变形量子化中的回缩方法 证明。容易验证 $A^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^p A'_p$，其中 A'_p 定义为下列递推关系的解:

$$A'_p = -A_p - \sum_{n+k=p;\, n,k\geq 1} A_k A'_n \,.$$

■

将其逆元记为

$$T^{-1} : C^\infty(M)[[\nu]] \to C^\infty(M)[[\nu]] \,.$$

我们采用以下记号。

定义 2.1.3 设 $\star_\nu^j (j = 1, 2)$ 是 (M, ω) 上的两个星乘积，它们在定义（*2.1.2*）中的等价算子 T 作用下彼此等价。我们用以下记号表示方程（*2.2*）:

$$\star_\nu^2 = T(\star_\nu^1) \,.$$

现在设 G 是 M的一个变换群。

定义 2.1.4 若星乘积 $\star_\nu$ 作用于 (M, ω) 上，且其上链是 G-不变的双微分算子，则称其为 G-不变的；对每个 $g \in G$，记作:

$$g^\star(u \star v) = g^\star(u) \star_\nu g^\star(v) \quad (u, v \in C^\infty(M)) \,.$$

若存在一个与 G交换的等价算子 T，使两个 G-不变星乘积 $\star_\nu^j$ $(j = 1,2)$ 彼此等价，则称它们是 G-等变等价的:

$$T(\star_\nu^1) = \star_\nu^2 \quad \text{and} \quad T(g^\star u) = g^\star T(u)$$

对于所有 $g \in G$ 和 $u \in C^\infty(M)$。

定理 2.1.1 设 (M, ω) 是一个辛流形。设 G 是 (M, ω) 上的辛变换群，并且保持 M上的一个仿射联络。那么，(M, ω) 上 G-等变的 G-不变星乘积的等价类集合，由形式幂级数空间,$H^2_{dR}(M)^G[[\nu]]$唯一参数化，其系数取自 M的 G-不变的第二德拉姆上同调空间

在上述陈述中，我们提到了 G-不变的德拉姆复形。具体而言，在二次情形下，我们指的是如下内容。一次情形下的德拉姆微分限制在 G-不变的可微一形式上，其像落在同样 G-不变的闭二形式中。与这一限制相关的上同调空间定义为 $H^2_{dR}(M)$。

注记 2.1.1 定理 2.1.1 概述了许多学者在辛流形的变形量子化领域所做的一系列工作。辛流形上星乘积的存在性主要有三个来源： [DL83、OMY91、Fe94]。在我看来，第三个来源（[Fe94]）最具构造性，也最适合应用。等价分类则是结合 [Fe94], [G79] 和 [Be93]的成果得出的。后来有人独立发表了这一结果，见 [NT95]。

关于仿射 G-不变情形，参见 [BBG98]。

我们以以下内容结束本节:

定义 2.1.5 星乘积 $\star$ 在(M, ω) 上的一个导子 是一个形式级数

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k D_k$$

由微分算子组成，$\{D_k\}$ 作用于 $C^\infty(M)$，使得对于所有 $u, v \in C^\infty(M)$，都有

$$D(u \star v) = (Du) \star v + u \star (Dv) \,.$$

$\star$ 的导子（李代数）记作 $\mathfrak{Der}(\star)$。

命题 2.1.1 *[GR99]* 当 M 为单连通时， $\star$ 上的每个导子 D 都是内 的，也就是说，存在一个元素 $\lambda_D \in C^\infty(M)[[\nu]]$ 使得

$$\nu D u = [\lambda_D \,,\, u]_\star \quad (\forall u)$$

其中我们设定

$$[u, v]_\star = u \star v - v \star u \,.$$

2.2 Drinfel'd 扭曲与辛李群

我们考虑一个李群 $\mathbb{L}$，其李代数为 $\mathfrak{L}$，我们将其包络代数记为 $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$。后者具有 Hopf 代数结构，我们将其结合乘积记为

$$. : \mathcal{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{L}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{L}) : X \otimes Y \to X.Y$$

和余乘积

$$\Delta : \mathcal{U}(\mathfrak{L}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{L}) : X \mapsto \Delta(X) \ .$$

这些结构自然地 $\mathbb{C}[[\nu]]$-线性扩展到形式幂级数空间 $\mathcal{U}(\mathfrak{L})[[\nu]]$，并赋予其双代数结构。

定义 2.2.1 基于 Drinfel'd 扭曲 $\mathfrak{L}$ 是一个元素 $F \in \mathcal{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{L})[[\nu]]$，其形式为

$$F \ = \ 1 \otimes 1 \ + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k F_k \tag{2.3}$$

使得下列余循环关系成立：

$$(\Delta \otimes \mathtt{id})(F).(F \otimes 1) \ = \ (\mathtt{id} \otimes \Delta)(F).(1 \otimes F) \ . \tag{2.4}$$

在上述关系（2.4）中，“.”表示 $\mathcal{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{L})[[\nu]]$ 上由 $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ 上的乘积自然诱导的代数结构。

表述 Drinfel'd 扭曲这一概念的另一种方式如下。正如 $\mathbb{L}$ 上的左微分算子定义了 $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ 的一个元素一样，像 (2.3) 这样的级数中出现的每个元素 $F_k \in \mathcal{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{L})$，都可以解释为某个唯一对应的左不变双微分算子在单位元 e 处的取值。

$$\widetilde{F}_k : C^\infty(\mathbb{L}) \times C^\infty(\mathbb{L}) \to C^\infty(\mathbb{L}) \ .$$

级数 F 对应于　　因此，唯一对应一个左不变微分算子的形式幂级数 s:

$$\widetilde{F} \ = \ m_0 \ + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \widetilde{F}_k \tag{2.5}$$

其中，m_0 表示 $C^\infty(\mathbb{L})$ 上函数的逐点乘法。于是，余循环条件 (2.4) 恰好对应于结合性，即有

命题 2.2。1 *[德林费尔德]* 元素 $F \in \mathcal{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{L})[[\nu]]$ 是 ***Drinfel'd*** 扭曲，当且仅当其对应元素 $\widetilde{F}$（参见 *(2.5)*）构成 $\mathbb{L}$ 上的左不变形式星乘积 $\star_\nu^F$ 的上链级数；也就是说，它是 $C^\infty(\mathbb{L})[[\nu]]$上的左不变结合代数律，并满足定义 *2.1.1* 的条件 *(1)* 和 *(3)*。

给定这样的星乘积，很容易验证，变形参数ν 的一阶结合性对应于一阶上链的反对称化是一个泊松括号这一性质。也就是说，在我们的情形中有

引理 2.2.1 元素

$$\{\ ,\ \}^F : C^\infty(\mathbb{L}) \times C^\infty(\mathbb{L}) \to C^\infty(\mathbb{L}) : (u, v) \mapsto \widetilde{F}_1(u, v) - \widetilde{F}_1(v, u)$$

在 $C^\infty(\mathbb{L})$ 上定义了一个李代数结构，并具有如下附加性质：对于每个 $u \in C^\infty(\mathbb{L})$，元素

$$\Xi_u^F \ := \ \{\, u\, ,\, .\, \}^F$$

是 $\mathbb{L}$ 上的一个向量场。

由左不变性和雅可比恒等式，很容易证明

 命题 2.2.2 定义在 $\mathbb{L}$ 上的切分布 $\tilde{\mathfrak{s}}^F$

$$x \mapsto \tilde{\mathfrak{s}}^F_x \ := \ \{\Xi^F_u|_x \ : \ u \in C^\infty(\mathbb{L})\}$$

是左不变的，即在左平移下保持不变。特别地，它具有常秩 r。此外，它是光滑且对合的，也就是说，向量场的括号仍属于该分布。

因此，分布 $\tilde{\mathfrak{s}}^F$ 是可积的，也就是说，群流形 $\mathbb{L}$ 叶状分解为一族 r 维的浸入叶，且这些叶都与 $\tilde{\mathfrak{s}}^F$ 相切。由此立即可得

命题 2.2.3 *(i)* 经过单位元 e 且与 $\tilde{\mathfrak{s}}^F$ 相切的叶 $\mathbb{S}^F$ 是 $\mathbb{L}$ 的一个浸入李子群。

(ii) 泊松双向量场

$$\tilde{w}^F(u,v) \ := \ \{u,v\}^F$$

限制在 $\mathbb{S}^F$ 上时是辛的，也就是说，对每个 $x \in \mathbb{S}^F$，映射

$$T^\star_x(\mathbb{S}^F) \to T_x(\mathbb{S}^F) : \alpha \mapsto \iota_\alpha \tilde{w}^F_x \ =: \ ^\sharp\alpha \tag{2.6}$$

是一个线性同构。

在上述 陈述中，符号 ι 表示一形式对双向量的内积 .

注 2.2.1 上述同构 *(2.6)* 的逆元：

$$T_x(\mathbb{S}^F) \to T^\star_x(\mathbb{S}^F) : v \mapsto {}^\flat v$$

对应于 $T^\star_x(\mathbb{S}^F) \otimes T^\star_x(\mathbb{S}^F)$ 的一个元素 ω^F_x：

$$\omega^F_x(v,w) \ := < {}^\flat v \, , \, w > \ .$$

该场

$$\omega^F : x \mapsto \omega^F_x$$

*t*结果是 $\mathbb{S}^F$ 上的一个辛 *2*-形式，它在左平移下保持不变 *s.*

上述讨论引出了以下定义（参见 [LM88]），它刻画了作为 Drinfel'd 扭曲半经典极限的李群类。

定义 2.2.2 辛李群是一个二元组$(\mathbb{S},\omega)$，其中 $\mathbb{S}$ 是一个李群，ω 是定义在 $\mathbb{S}$ 上、在左平移下不变的辛结构：

$$L^\star_x \omega \ = \ \omega \quad (\forall x \in \mathbb{S}) \, .$$

人们可能会想知道 任何辛李群是否都来自 Drinfel'd 扭曲。确实如此 se.

命题 2.2.4 每个辛李群都存在一个自然的左不变星乘积。

证明。我们首先考虑由李群 $\mathbb{S}$ 的对称空间结构所关联的仿射对称联络 $\nabla^{\mathbb{S}}$，其定义在 $\mathbb{S}$ 上。一般而言，该联络与 ω 不相容；换言之，只有当 $\mathbb{S}$ 是阿贝尔群时，2-形式 ω 才是平行的 [Bi95]。不过，通常的技巧（归功于 Lichn´erowicz）可以根据 $\nabla^{\mathbb{S}}$ 的数据构造出一个辛联络 ∇：

$$\nabla_X Y \ := \ \nabla^{\mathbb{S}}_X Y \ + \ \frac{1}{3}{}^\sharp \left(\iota_X \nabla^{\mathbb{S}}_Y \omega \ + \ \iota_Y \nabla^{\mathbb{S}}_X \omega \right) \, .$$

这个联络 ∇ 显然是左不变的。现在，我们使用 Fedosov 方法，将一个星乘积 $\star_\nu$ 唯一地与数据 $(\omega, \ \nabla)$ [Fe94] 关联起来。由此构造的星乘积便回答了这个问题。 ■

作为上述证明的推论，更确切地说，由于每个辛李群都存在左不变辛联络，我们现在处于可以将定理 2.1.1 应用于这一具体情形的境况：

命题 2.2.5 在单连通辛李群 $\mathbb{S}$ 上，其李代数为 $\mathfrak{s}$，左不变（辛）星乘积的左等变等价类由与 $\mathfrak{s}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的平凡表示相关联的第二 *Chevalley* 上同调空间 $H^2_{Chev}(\mathfrak{s})$ 中的元素序列参数化。

2.3.1 辛扭元与自然性

我们考虑一个单连通可解的[1] 辛李群（$\mathbb{S}$，ω），其李代数为 $\mathfrak{s}$。左不变辛结构 ω 确定一个双线性二形式

$$\Omega \;:=\; \omega_e$$

在 $\mathfrak{s}$ 上。

定义 2.3.1 若基于 $\mathfrak{s}$ 的 *Drinfel'd* 扭曲 F 基于（$\mathfrak{s}$、Ω），是指其在 $\mathbb{S}$ 上所对应的左不变泊松结构与 ω 所对应的泊松括号相一致。

定义 2.3.2 设 $F^{(j)}$ *(*$j=1$、2*)* 是基于 （$\mathfrak{s}$、Ω） 的两个 *Drinfel'd* 扭曲。若它们所对应的左不变形式星乘积 $\tilde{\star}_\nu^{F^{(j)}}$ 属于同一个 $\mathbb{S}$-左等变等价类，则称它们是等价的。

In t本章节将描述 Drinfel'd 扭曲的等价类。

定义 2.3.3 设 F 是基于($\mathfrak{s}$,Ω) 的 *Drinfel'd* 扭曲，其对应的左不变星乘积为 $\tilde{\star}_\nu^F$。 F 的内部对称李代数 $\mathfrak{g}_F$ 是由 $\mathbb{S}$ 上使 $\tilde{\star}_\nu^F$ 保持不变的向量场构成的李代数：

$$\mathfrak{g}_F \;:=\; \Gamma^\infty(T(\mathbb{S}))\cap\mathfrak{Der}(\tilde{\star}_\nu^F)\;.$$

注 2.3.1 存在典范嵌入

$$\mathfrak{s}\hookrightarrow\mathfrak{g}_F : X\mapsto X^\star$$

with

$$X^\star_x \;:=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_0\exp(-tX)x\;.$$

引理 2.3.1 当基于($\mathfrak{s}$,Ω) 的扭曲 F 是自然的，也就是说 $\tilde{\star}_\nu^F$ 是自然星乘积时，其内部对称李代数是有限维的。

证明。这样的自然星乘积确定了一个仿射联络，其 $\mathfrak{g}_F$ 是导子 [GR99] 的李子代数。

■

2.3.2 The 缩回方法 I：将等价描述为演化解

现在，在基于 ($\mathfrak{s}$，Ω) 的 Drinfeld 扭曲的给定等价类中，我们考虑一个自然元素 F（根据目前所知，这样的元素总是存在）。我们将其对应的

$$\sharp \;:=\; \tilde{\star}_\nu^F$$

左不变星乘积记为 $\mathbb{S}$，并将其

$$\mathfrak{g} \;:=\; \mathfrak{g}_F$$

内部对称李代数记为。
我们还固定另一个与 F 等价的 Drinfel'd 扭曲，其对应的左不变星乘积记为 $\star$，除此之外不作进一步要求。

命题 2.3。**1** [缩回方法的相关性] 令 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{g},\mathfrak{Der}(\star))$ 表示从 $\mathfrak{g}$ 到李代数 $\mathfrak{Der}(\star)$ 的李代数态射空间，其中该李代数由 ($C^\infty(\mathbb{S})[[\nu]],\star$) 上的导子构成，且这些态射在 $\mathfrak{s}$-相对 的意义下满足：$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{g},\mathfrak{Der}(\star))$ 中的每个元素 D 限制在 $\mathfrak{s}$ 上时都是恒等映射：

$$D_X \;=\; X^\star\;.$$

那么，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{g},\mathfrak{Der}(\star))$ 是形式域 $\mathbb{R}[[\nu]]$上的有限维空间。

[1]事实上，可解性这一假设并非必要。不过，它能使证明更具李论色彩。

引理2.3.2 设 V 是一个有限维实向量空间。考虑 $f \in C^\infty(\mathbb{S}) \otimes V$ 和 $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{s},\mathtt{End}(V))$。那么，该方程的解空间为

$$X^\star \underline{\lambda} \;=\; A(X)\underline{\lambda} + f$$

是有限维的。

证明。考虑一个元素 $0 \neq X_1 \in \mathfrak{s}\backslash[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]$ 和一个向量子空间 $\mathfrak{s}_2 < \mathfrak{s}$，使得

$$\mathfrak{s} \;=\; \mathbb{R}X_1 \oplus \mathfrak{s}_2 \quad \text{and} \quad [\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}_2 \,.$$

于是，空间 $\mathfrak{s}_2$ 自动成为 $\mathfrak{s}$ 的李子代数。
记 $\mathbb{S}_2$ 为 $\mathbb{S}$ 的解析子群，其李代数为 $\mathfrak{s}_2$，并考虑局部坐标系

$$\mathbb{R} \times \mathbb{S}_2 \to \mathbb{S} : (x^1, y) \mapsto \exp(-x^1 X_1).y \,.$$

在此坐标系中，方程

$$X_1^\star \underline{\lambda} \;=\; A(X_1)\underline{\lambda} + f$$

满足

$$\partial_{x^1}\underline{\lambda} \;=\; A_1\underline{\lambda} + f \quad (A_1 \;:=\; A(X_1)) \,,$$

其每个解都具有如下形式

$$\underline{\lambda}(x^1, y) \;=\; \exp(x^1 A_1)\underline{\lambda}_2(y) \;+\; \mu_1(x^1, y)$$

with

$$\mu_1(x^1, y) \;:=\; \int_{x_0^1}^{x^1} \exp(-tA_1) f(\exp(tX_1), y)\,\mathrm{d}t$$

且 $\underline{\lambda_2} \in C^\infty(\mathbb{S}_2) \otimes V$ 任意。
特别地，在 $m = 1$ 的情形下，该方程的解构成一个维数为 $\dim V$ 的仿射空间。现在我们对 $\dim \mathbb{S}$ =作归纳： m。

李子代数 $\mathfrak{s}_2$ 也是可解的，因此固定一个元素 $0 \neq X_2 \in \mathfrak{s}_2\backslash[\mathfrak{s}_2,\mathfrak{s}_2]$ 和一个向量子空间$\mathfrak{s}_3$，使得 $\mathfrak{s}_2$

$$\mathfrak{s}_2 \;=\; \mathbb{R}X_2 \oplus \mathfrak{s}_3 \quad \text{and} \quad [\mathfrak{s}_2,\mathfrak{s}_2] \subset \mathfrak{s}_3 \,.$$

记 $\mathbb{S}_3$ 为 $\mathbb{S}_2$ 中李代数为 $\mathfrak{s}_3$ 的解析子群，并考虑局部坐标系

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_2 \to \mathbb{S} : (x^1, x^2, z) \mapsto \exp(-x^1 X_1).\exp(-x^2 \mathtt{Ad}_{x_1^{-1}} X_2).z \,,$$

其中

$$x_1 \;:=\; \exp(-x^1 X_1) \,.$$

在这个坐标系中，令

$$x_2 \;:=\; \exp(-x^2 \mathtt{Ad}_{x_1^{-1}} X_2) \,,$$

可得

$$X_2^\star \;=\; \partial_{x^2} \,.$$

确实:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 \exp(-tX_2)x_1x_2z \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 x_1x_1^{-1}\exp(-tX_2)x_1x_2z \\
=\;& L_{x_1\star}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 \exp(-t\mathtt{Ad}_{x_1^{-1}}X_2)\exp(-x^2\mathtt{Ad}_{x_1^{-1}}X_2)z \\
=\;& L_{x_1\star}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 \exp(-(t+x^2)\mathtt{Ad}_{x_1^{-1}}X_2)z \,.
\end{aligned}$$

$$X_2^\star \underline{\lambda}(x^1,x^2,z) \;=\; \exp(x^1A_1)\partial_{x^2}\underline{\lambda}_2(x^2,z)+\mu_2(x^1,x^2,y)$$

with

$$\mu_2 \;:=\; \partial_{x^2}\mu_1\;.$$

由此可得, $A_2 := A(X_2)$,

$$A_2\underline{\lambda}+f \;=\; A_2\exp(x^1A_1)\underline{\lambda}_2+A_2\mu_2+f\;.$$

因此, $X := X_2$ 对应的方程为:

$$\partial_{x^2}\underline{\lambda}_2 \;=\; A_2'\underline{\lambda}_2+f_2$$

with

$$A_2' \;:=\; \exp(-x^1A_1).A_2.\exp(x^1A_1) \quad\text{and}\quad f_2 \;:=\; \exp(-x_1A_1)(A_2\mu_2+f)\;.$$

归纳法由此得出该断言。 ■

命题的证明。考虑 $\mathfrak{g}$的一个向量子空间 W，它是 $\mathfrak{s}$的补空间:

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{s}\oplus W$$

假设其非平凡。设 W的一组基为 $\{Y_a\}_{a\in\{1,\dots,n\}}$。此外，我们将考虑 $\mathfrak{s}$的一组基$\{X_j\}_{j\in\{1,\dots,m\}}$。

将与 $\mathfrak{s}$的作用相关的结构常数记为 C 和C：

$$[X_j,Y_a] \;=:\; C_{ja}^kX_k \;+\; \underline{C}_{ja}^bY_b\;.$$

令 $D\in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{g},\ \mathfrak{Der}(\star))$。
由于 $\mathbb{S}$ 是单连通的，我们有函数 $\{\lambda_j\}$ 和 $\{\lambda_a\}$，使得

$$\nu X_j^\star u \;=\; [\lambda_j\,,\,u]_\star \quad\text{and}\quad \nu D_{Y_a}u \;=\; [\underline{\lambda}_a\,,\,u]_\star \quad (u\in C^\infty(\mathbb{S}))\;.$$

此外，D 上的李代数同态条件意味着，对于所有 X_j 和 Y_a，元素 t

$$c_{ja} \;:=\; C_{ja}^k\lambda_k \;+\; \underline{C}_{ja}^b\underline{\lambda}_b-[\lambda_j\,,\,\underline{\lambda}_a]_\star$$

在 $(C^\infty(\mathbb{S})[[\nu]],\ \star)$ 中是中心元，因此是形式常数（因为它是辛的）。
因此，对每个 j，我们都有两个矩阵 C_j 和 C_j: —

$$[C_j]_a^k \;:=\; -\nu^{-1}C_{ja}^k \quad\text{and}\quad -[\underline{C}_j]_a^b \;:=\; \nu^{-1}\underline{C}_{ja}^b$$

使得

$$X_j^\star\underline{\lambda} \;=\; -C_j\lambda \;+\; -\underline{C}_j\underline{\lambda}\;+\;c_j \tag{2.7}$$

其中，c_j 是 $\mathbb{R}^n[[\nu,\nu^{-1}]$中的一个向量。
该断言是引理的直接推论。 ■

现在，让我们讨论 $\star$ 和 $\sharp$之间的交织算子。我们首先注意到

引理 2.3.3 由于它与左正则作用交换，$\star$ 和 $\sharp$ 之间的任意（形式上可逆的）交织算子 T（即 $T(\star)=\sharp$）都必须是如下形式的卷积算子

$$T^{-1}\varphi(x) \;=<u\,,\,L_x^\star\varphi>$$

其中，$u\in\mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$ 表示 T^{-1}的（形式）分布核。

证明。根据施瓦茨核定理，每个微分算子 A在 $C^\infty(\mathbb{S})$上的限制都可表示为 $\mathcal{D}(\mathbb{S})$，其形式为

$$A\varphi \;=:\; [x\mapsto<u_A(x),\varphi>]$$

其中 $u_A\in C^\infty(\mathbb{S},\ \mathcal{D}'(\mathbb{S}))$。在左不变的情况下，可得到

$$A\varphi(x) \;=<u\,,\,L_x^\star\varphi> \quad\text{with}\quad u \;:=\; u_A(e)\;.$$

当然，这也适用于形式幂级数的情形。 ■

当然， T 也有类似的结论，但我们只会在后文中用到它。

回到 T^{-1}，我们将采用以下记号，与由局部可积函数定义的分布相一致：

$$T^{-1}\varphi(x) \ :=: < L^{\star}_{x^{-1}}u\,,\,\varphi > = \int_{\mathbb{S}} u(x^{-1}y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

其中，$\mathrm{d}y$ 表示 $\mathbb{S}$ 上的左不变Haar测度。

引理 2.3.4 设 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})$ 和 A 是 $C^{\infty}(\mathbb{S})$上的微分算子。那么，对于任意 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$，映射

$$x \mapsto < L^{\star}_{x^{-1}}u, \varphi >$$

属于 $C^{\infty}(\mathbb{S})$，并且有

$$< A_x[L^{\star}_{x^{-1}}u]\,,\,\varphi > = \ A_x(< [L^{\star}_{x^{-1}}u]\,,\,\varphi >)\,.$$

证明。令

$$\tau\varphi(x) \ := < [L^{\star}_{x^{-1}}u]\,,\,\varphi > = < u, L^{\star}_{x}\varphi > \ .$$

考虑 A 是具有局部流 ϕ 的向量场的情形：

$$A_x \ =: \ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \phi_t(x)\,.$$

有

$$\frac{1}{t}\left(< u\,,\,L^{\star}_{\phi_t(x)}\varphi > - < u\,,\,\varphi >\right) = < u\,,\,\frac{1}{t}\left(L^{\star}_{\phi_t(x)}\varphi - \varphi\right) > \ .$$

$t \to 0$ 关于 $\frac{1}{t}\left(L^{\star}_{\phi_t(x)}\varphi - \varphi\right)$ 的极限存在于 $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ 中。因此，上述等式右端的极限 $t \to 0$ 存在，因为 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})$。这证明了 $[x \mapsto \tau\varphi(x)]$ 是光滑的。

反复应用即可得到高阶微分算子的相应结论。 ■

命题 2.3.2 考虑这样一个交织算子 T，其分布核为 u。那么 .

(i) 映射

$$D^T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{Der}(\star) : X \mapsto T^{-1}X^{\star}T$$

属于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{Der}(\star))$。

(ii) 核 u 是下列演化方程的（弱）联合解：

$$-X^{\star}_y[u(x^{-1}y)] \ = \ D^T_X|_x[u(x^{-1}y)] \quad (\forall X \in \mathfrak{g})\,.$$

证明。根据上述引入的记号以及前面的引理，我们有 ave

$$T^{-1}X^{\star}(\varphi)(x) \ = \ \int u(x^{-1}y)\,X^{\star}_y(\varphi)\,\mathrm{d}y \ = \ -\int X^{\star}_y[u(x^{-1}y)]\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \ D^T_X|_x \int u(x^{-1}y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y \ = \ \int D^T_X|_x u(x^{-1}y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

因为 $X^{\star}$ 是辛的，因此保持（Liouville）哈尔测度；又因为 φ 是紧支撑的。

■

在本章节中，我们考虑

- 一个可解的单连通辛李群（$\mathbb{S}$，ω），其辛李代数为（$\mathfrak{s}$，Ω）。
- 一个固定的有限维李代数 $\mathfrak{g}$，其中包含 $\mathfrak{s}$作为李子代数。
- 一个基于（$\mathfrak{s}$，Ω）的固定 Drinfel'd 扭曲，或者等价地，在（$\mathbb{S}$，ω）上的左不变形式星乘积 $\star$。

引理 2.3.5 设 D 是 $\mathtt{Hom}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{Der}(\star))$ 中的一个元素。

(i) 对每个 $X \in \mathfrak{g}$，映射

$$X_D^\star : C^\infty(\mathbb{S}) \to C^\infty(\mathbb{S}); f \mapsto D_X(f) \mod (\nu) =: X_D^\star f$$

是一个辛向量场。

（*ii*）映射

$$\mathfrak{g} \to \Gamma^\infty(T(\mathbb{S})) : X \mapsto X_D^\star \tag{2.8}$$

是李代数同态。

（*iii*）对于每个 $x \in \mathbb{S}$，我们设

$$\mathfrak{k}_x := \{X \in \mathfrak{g} \mid X_D^\star|_x = 0\}$$

并且在单位元 $e \in \mathbb{S}$ 处：

$$\mathfrak{k} := \mathfrak{k}_e .$$

于是，对于每个 $x \in \mathbb{S}$，稳定子 $\mathfrak{k}_x$ 是 $\mathfrak{g}$ 的李子代数，并且有

$$\mathfrak{k}_x = \mathtt{Ad}_x \mathfrak{k} .$$

证明。与之前一样，我们考虑映射

$$\underline{\lambda} : \mathfrak{g} \to C^\infty(\mathbb{S})[[\nu]]; X \mapsto \underline{\lambda}_X$$

由以下条件确定（相差形式常数）：

$$D_X \varphi = \frac{1}{2\nu} [\underline{\lambda}_X, \varphi]_\star .$$

取零阶项即可得到（i）和（ii）项。
（iii）项显然成立。 ■

定义 2.3.4 设 $(M、\mathrm{d}\mu)$ 为赋有体积形式的光滑流形，并以 $L^2(M、\mathrm{d}\mu)$表示与之关联的平方可积函数类的希尔伯特空间。设 A 为 $C^\infty(M)$上的微分算子。记 $A^\dagger$ 为其在 $\mathcal{D}(M)$ 上的伴随算子，关于希尔伯特结构满足：

$$\int_M \overline{A^\dagger \varphi}\, \psi \, \mathrm{d}\mu := \int_M \overline{\varphi}\, A\psi \, \mathrm{d}\mu \quad (\varphi\,, \psi \in \mathcal{D}(M)) .$$

若分布 $u \in \mathcal{D}'(M)$ 满足条件，则称其属于 A 的弱核

$$< u, A^\dagger \varphi > = 0$$

对每个 $\varphi \in \mathcal{D}(M)$。

定义 2.3.5 设 D 是 $\mathtt{Hom}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{Der}(\star))$中的一个元素。
一个元素 $u \in \mathcal{D}'$（$\mathbb{S}$）$[[\nu]]$，使得

(a) 它是以下方程组的联合（弱）解

$$D_Z u \;=\; 0 \quad \forall Z \in \mathfrak{k}\,.$$

(b) 其奇异支集仅包含单位元：

$$\mathrm{supp}(u) \;=\; \{e\}\,.$$

(c) 它满足以下半经典条件：

$$u \bmod \nu \;=\; \delta_e\,.$$

称为一个 D-回缩。

下面的陈述是经典结果。

命题 2.3.3 $\mathbb{S}$ 上的左不变微分算子空间（与 $\mathcal{U}(\mathfrak{s})$）典范同构）可识别为 $\mathcal{D}'(\mathbb{S})$ 中支集位于单位元 e处的分布子空间。

证明。我们首先回顾 Peetre 定理：它将流形 M 上的微分算子空间刻画为 $C^\infty(M)$ 的自同态空间，其中这些自同态会缩小支集 [P59]。˜设 A 是 $\mathcal{U}(\mathfrak{s})$ 中的一个元素， A 是相应的 $C^\infty(\mathbb{S})$ 上的左不变微分算子。用 u_A 表示其分布核：

$$\tilde{A}_x\varphi \;=:<u_A\,,\,L_x^\star\varphi>\;.$$

˜假设 $\mathrm{supp}\varphi$ 不包含单位元 e。那么，由于 A 是微分的，便有包含关系 $\mathrm{supp}A\varphi \subset \mathrm{supp}\varphi$。因此

$$\tilde{A}_e\varphi \;=\; 0 \;=<u_A\,,\,\varphi>\;.$$

换言之， u_A 的支集仅包含单位元。

˜反过来，假设 u 的支集仅为单位元 e ，并考虑左等变映射 U ：$\mathcal{D}(\mathbb{S}) \to C^\infty(\mathbb{S})$ 定义为

$$\tilde{U}\varphi(x) \;:=<u, L_x^\star\varphi>\;.$$

注意到，对每个 $x \in \mathbb{S}$，等式

$$\mathrm{supp}L_x^\star\varphi \;=\; L_{x^{-1}}\mathrm{supp}\varphi\,,$$

˜由此可推得，对每个属于 $\mathrm{supp}U\varphi$ 的点 x：

$$\tilde{U}\varphi(x) \;\neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{supp}L_x^\star\varphi \ni e \;\Rightarrow\; L_{x^{-1}}\mathrm{supp}\varphi \ni e \;\Rightarrow\; \mathrm{supp}\varphi \ni x\,,$$

因此包含关系

$$\mathrm{supp}\tilde{U}\varphi \subset \mathrm{supp}\varphi$$

这根据 Peetre 定理意味着它可微。 ■

推论 **y 2.3.1** 设 u 是一个 D-回缩，并考虑模函数 $\Delta \in C^\infty(\mathbb{S})$ ，其定义为 by

$$\mathrm{d}(y^{-1}) \;=:\; \Delta(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

那么，卷积算子

$$\tau_u\varphi(x) \;:=<u^\vee\,,\,L_x^\star\varphi>:=<u\,,\,\Delta R_{x^{-1}}^\star(\varphi^\vee)> \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{S}))$$

是微分算子，并满足半经典条件：

$$\tau_u \;=\; \mathtt{Id} \bmod \nu\,.$$

因此，它可扩展为一个可逆自同态

$$\tau_u : C^\infty(\mathbb{S})[[\nu]] \to C^\infty(\mathbb{S})[[\nu]]$$

称为逆回缩算子。其形式逆元

$$T_u \;:=\; \tau_u^{-1}$$

称为直接收缩算子。

$$< u_A \,,\, \Delta R^{\star}_{x^{-1}}(\varphi^{\vee}) > = \; \tilde{A}_e \left(\Delta R^{\star}_{x^{-1}}(\varphi^{\vee}) \right) \; =: \; \tilde{A}^{\dagger}_x \varphi$$

这也是一个左不变微分算子。剩下的结论显然。 ■

定理 2.3.1 ***(i)*** 设 u 是一个 D-回缩，其关联的直接收缩算子为 $T_u : \, C^{\infty}(\mathbb{S})[[\nu]] \to C^{\infty}(\mathbb{S})[[\nu]]$。那么，

$$T_u(\star) \; =: \; \sharp^u$$

是一个形式 星乘积，定义在$(\mathbb{S}, \omega)$ 上，并且相对于无穷小作用 *(2.8)* 是 $\mathfrak{g}$-不变的。

(ii) 给定 $\mathfrak{g}$ 在$(\mathbb{S}, \omega)$ 上的任意辛作用，该作用在 $\mathfrak{s}$ 上限制为正则作用，则每个与 $\star$ 在 $\mathbb{S}$-等变意义下等价的 $\mathfrak{g}$-不变星乘积，都可表示为 $\sharp^u$，其中 D是某个回缩 u。

证明。 $\mathfrak{g}$-不变性由关于 u的以下条件推出：

$$D_X \tau_u \varphi \; = \; \tau_u X^{\star}_D \varphi$$

令 $v \, : \, = \, u^{\vee}$，则有

$$< v \,,\, D_X|_x [L^{\star}_x \varphi] - L^{\star}_x X^{\star}_D \varphi > = \; 0 \; .$$

现在，对于每个 x，我们确定该算子的伴随算子：

$$A_{X,x} : \varphi \mapsto D_X|_x [L^{\star}_x \varphi] - L^{\star}_x X^{\star}_D \varphi \; .$$

令 $w \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$，并注意到哈尔测度的左不变性以及 $X^{\star}_D$ 是辛向量场这一事实，可得：

$$\begin{aligned} & \int w(y) \; \left(D_X|_x [L^{\star}_x \varphi](y) - L^{\star}_x X^{\star}_D \varphi(y) \right) \, \mathrm{d}y \\ = \; & \int \left(D_X|_x [w(x^{-1}y)] + X^{\star}_D|_y [w(x^{-1}y)] \right) \, \varphi(y) \, \mathrm{d}y \; . \end{aligned}$$

将 $\mathfrak{g}$ 中的每个 X 写成

$$X \; =: \; X_{\mathfrak{k}} + X_{\mathfrak{s}}$$

根据分解

$$\mathfrak{g} \; = \; \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s} \; ,$$

我们注意到

$$X^{\star}_D|_e \; = \; (X_{\mathfrak{s}})^{\star}_e \; .$$

现在， $\mathbb{S}$ 的 D -等变性给出：

$$\begin{aligned} & D_X|_x [w(x^{-1}y)] + X^{\star}_D|_y [w(x^{-1}y)] \; = \; D_X|_x [w^{\vee}(y^{-1}x)] + X^{\star}_D|_y [w(x^{-1}y)] \\ = \; & L^{\star}_{y^{-1}} \left(D_{\mathtt{Ad}_{y^{-1}} X} w^{\vee} \right)(x) + \left(\mathtt{Ad}_{y^{-1}} X_D \right)^{\star} |_e (L^{\star}_{x^{-1}y} w) \\ = \; & L^{\star}_{y^{-1}} \left(D_{\mathtt{Ad}_{y^{-1}} X} w^{\vee} \right)(x) + \left(\mathtt{Ad}_{y^{-1}} X \right)_{\mathfrak{s}}{}^{\star} |_e (L^{\star}_{x^{-1}y} w) \\ = \; & L^{\star}_{y^{-1}} \left(D_{\mathtt{Ad}_{y^{-1}} X} w^{\vee} \right)(x) + \left(\mathtt{Ad}_{y^{-1}} X \right)_{\mathfrak{s}}{}^{\star} |_{y^{-1}x} (w^{\vee}) \\ = \; & L^{\star}_{y^{-1}} \left(D_{\mathtt{Ad}_{y^{-1}} X} w^{\vee} \right)(x) - D_{\left(\mathtt{Ad}_{y^{-1}} X \right)_{\mathfrak{s}}} w^{\vee}(y^{-1}x) \\ = \; & L^{\star}_{y^{-1}} \left(D_{\left(\mathtt{Ad}_{y^{-1}} X \right)_{\mathfrak{k}}} w^{\vee} \right)(x) \; = \; \left(D_{\left(\mathtt{Ad}_{y^{-1}} X \right)_{\mathfrak{k}}} w^{\vee} \right)^{\vee} (x^{-1}y) \; . \end{aligned}$$

因此，考虑 $\mathfrak{k}$ 的基 $\{Z_j\}$，并将线性映射 $\mathfrak{k} \to \mathfrak{k} : \, X \mapsto \left(\mathtt{Ad}_{y^{-1}} X \right)_{\mathfrak{k}}$ 的矩阵记为 $[A(y)]$，则对每个 j，有：

$$D_{Z_j}|_x [w(x^{-1}y)] + Z_j{}^{\star}_D |_y [w(x^{-1}y)] \; = \; [A(y)]^k_j \left(D_{Z_k} w^{\vee} \right)^{\vee} (x^{-1}y) \; .$$

$$< w, A_{Z_j,x}\varphi >= \sum_k < \left(D_{Z_k} w^{\vee}\right)^{\vee} , L_x^{\star}([A]_j^k \varphi) > \ .$$

我们得出结论：只要对于所有 k， $u = v^{\vee}$ 都属于 D_{Z_k} 的弱核，星积 $\sharp^u$ 就是 $\mathfrak{g}$-不变的，从而证明了条目 (i)。

（ii）由命题 2.3.2（i）结合上述讨论即可得出。 ■

第3章

可容许相位、Weinstein 与 ˇSevera 面积

本章节要探讨的问题是：给定一个定向对称空间 M，并赋予其一个对称不变体积形式 μ，那么一个（对称不变的）三点函数需要满足什么条件

$$S \in C^\infty(M \times M \times M, \mathbb{R})$$

从而保证乘积的结合性

$$u \star v(x) = \int_{M\times M} e^{iS(x,.,.)} u \otimes v \, \mu \otimes \mu \quad ?$$

上文中，对称不变的含义是：

$$S(s_w x, s_w y, s_w z) \;=\; S(x,y,z) \quad (\forall x,y,z,w \in M)\,.$$

Wh通过核公式的形式在函数上定义一个（连续）乘法时 :

$$u \star v(x) = \int_{M\times M} K(x,.,.) u \otimes v \quad ,$$

计算表明，乘法 $\star$ 的结合性（至少在形式上）等价于以下条件：

$$\int_M K(a,b,t)K(t,c,d)\mu(t) = \int_M K(a,\tau,d)K(\tau,b,c)\mu(\tau), \tag{3.1}$$

对于 M 中的每一组四个点 a、b、c、d。如果能通过变量替换 $\tau = \varphi(t)$ 将一个被积函数变为另一个，那么等式 (3.1) 显然成立。这启发我们

定义 3.0.1 设 (M,μ) 是一个赋有对称不变体积形式 μ 的对称空间。若对于 M 中每一组四个点 a、b、c、d，都存在一个保体积微分同胚，则称三点核 $K \in C^\infty(M\times M\times M)$ 为**几何结合的**

$$\varphi : (M,\mu) \to (M,\mu),$$

使得对所有 M 中的 t：

$$K(a,b,t)K(t,c,d) = K(a,\varphi(t),d)K(\varphi(t),b,c).$$

我们将在命题 3.0.1 中证明，以下结构在附加条件下会导出一个几何结合核。

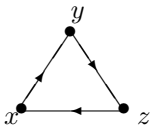
定义 3.0.2 设(M,μ) 是一个定向对称空间。容许函数 $S\colon M\times M\times M \to \mathbb{R}$是定义在 M 上的光滑对称不变三点函数，使得：

 (i) $S(x,y,z) = S(z,x,y) = -S(y,x,z)$;

(ii) 对所有 $x \in M$，有：

$$S(x,y,z) = -S(x, s_x(y), z) \qquad \forall y, z \in M.$$

定义 3.0.2 中的性质 (i) 自然地引导我们为 S 采用以下“有向图”类型的记号：



$\stackrel{\text{def.}}{=} S(x,y,z).$

改变这种“有向三角形”的定向会使其取值改变符号。不过，这种“三角形”所表示的取值并不取决于它“如何摆放”，只取决于顶点的数据和边的定向。

现在，给定两个 紧支撑函数 u 和 $v \in C_c^\infty(M)$，考虑以下“乘积” ：

$$u \star v(x) := \int_{M\times M} u(y)v(z)e^{iS(x,y,z)}\mu(y)\,\mu(z).$$

采用上述关于 S 的记号后，$\star$ 的结合性形式上可写为：

$$u\star(v\star w)(a) = \int \exp i\Big(\ \Big)\ \int \exp i\Big(\ \Big)\ u(b)\,v(c)\,w(d)$$

$$= \int \exp i\Big(\ \Big)\ \int \exp i\Big(\ \Big)\ u(b)\,v(c)\,w(d)\ = (u\star v)\star w(a),$$

对变量 b、c、d、t 和 τ 进行 μ 积分。这对于 $K = e^{iS}$ 导出 $M\times M\times M\times M$ 上两个“分布值函数”之间的等式（参见公式 (3.1)）：对于 M 中任意四个点 a、b、c、d，$\star$ 的结合性可写为

$$\int_M \exp\ i\Big(\ \Big)\ \mu(t) = \int_M \exp\ i\Big(\ \Big)\ \mu(\tau). \tag{3.2}$$

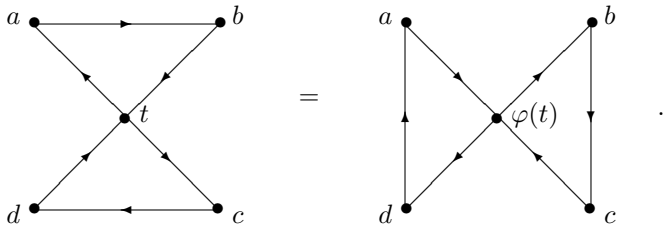
在上式中，左侧（分别为右侧）exp 中自变量里的图表示 $S(a、b、t) + S(t、c、d)$（分别为 $S(a、d、\tau) + S(\tau、b、c)$）。

命题 3.0 **.1** 设 S 在 M 上容许。若满足以下“余循环条件”：

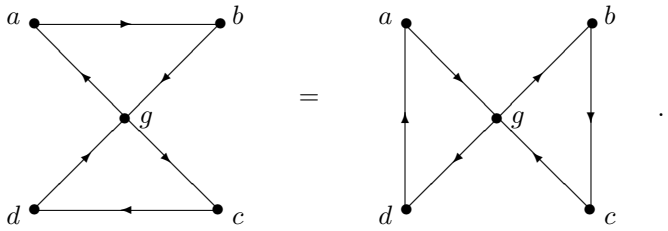
$$S(m,x,y) + S(m,y,z) + S(m,z,x) \ =\ S(x,y,z) \quad (\forall x,y,z,m \in M)\ ,$$

相应的三点核 $K = e^{iS}$ 是几何结合的。

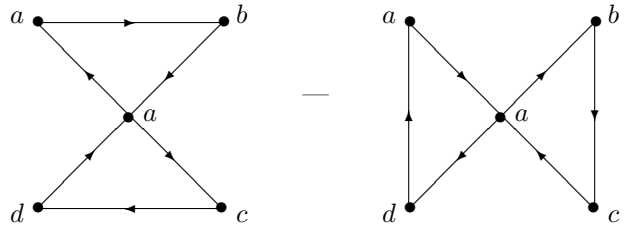
证明。固定四个点 a，b，c，d。根据定义 3.0.1 和公式 (3.2)，需要构造我们的保体积微分同胚 $\varphi\colon (M,\ \mu) \to (M,\ \mu)$，使得对所有 t，



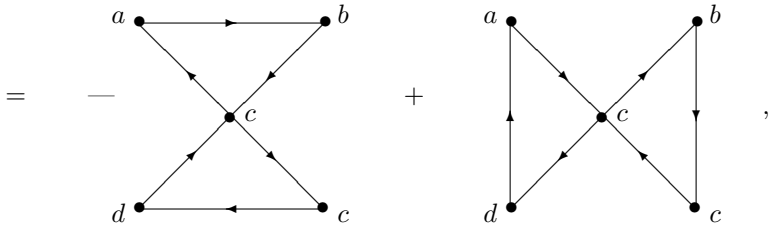
我们首先注意到，四个点 a、b、c、d 的数据确定了我们称为“S-重心”的点，即满足下列条件的点 $g = g(a$、b、c、$d)$：



事实上，由于

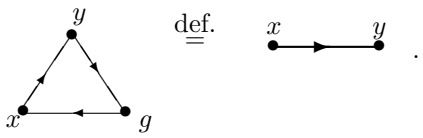




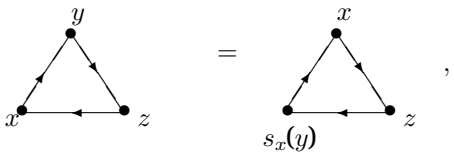


，

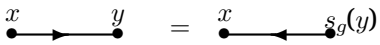
任意一条连接 a和 c 的连续路径都包含这样的点 g。



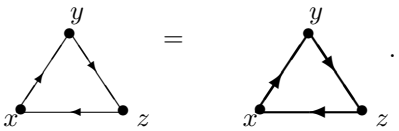
同样，这类箭头的定向改变会使其取值变号。此外，可容许性（定义 3.0.2）的性质 (ii) 表述为



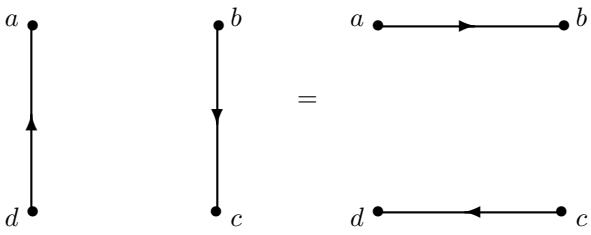
意味着

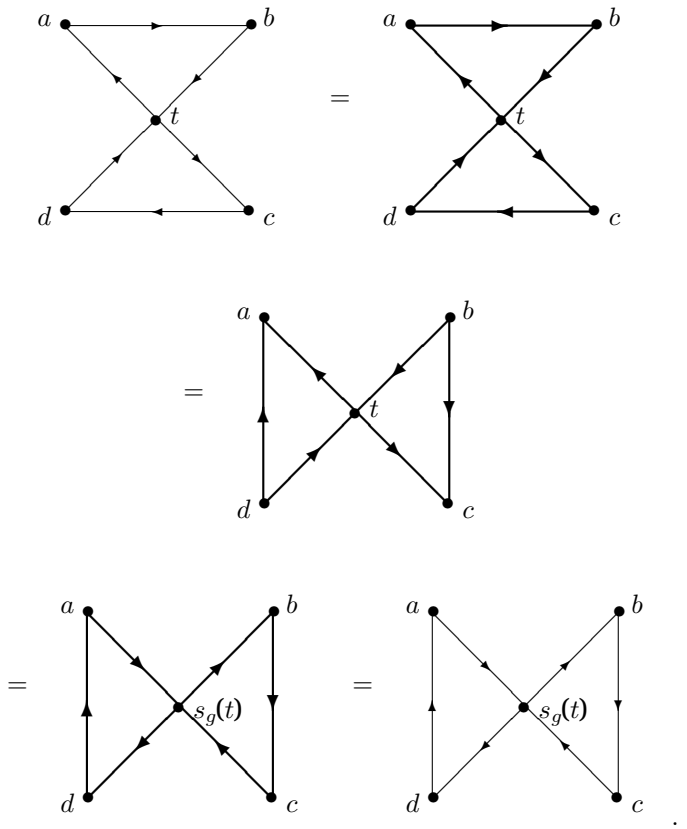


对所有 x 和 y 属于 M均成立。而由余循环条件（取 $m=g$），可得



此外， g 的重心性质为





.

因此，可以将我们的微分同胚 φ 选为

$$\varphi = s_g.$$

■

注 3.0.1 对于赋予其自然对称空间结构的双曲平面，人们很容易提出这样的问题：由测地三角形 Δxyz 的辛面积 $SA(x,\ y,\ z)$ 定义的三点函数是否满足定义 3.0.2 中的性质（i）—（iii）。答案是否定的。事实上，性质（ii）和（iii）将意味着 SA 无界。这表明，当要求 S 与对称变换之间具有某种相容性时，性质（iii）在某种程度上过强了。

3.1 魏因斯坦面积

在 [We93], Weinstein 证明了，对于非紧型厄米对称空间（$M,\ \omega,\ s$），在通过某类振荡积分公式定义的（$M,\ \omega$）的给定不变 WKB量子化的表达式中出现的相位函数 S_W，

$$u \star v(x) = \int u(y)v(z)a_\hbar(x,y,z)e^{\frac{i}{\hbar}S_W(x,y,z)}dy\,dz, \tag{3.3}$$

必须如下。

- 设 $x,\ y$ 和 z 是 M 中的三个点，使得下列方程有解 t ：

$$t = s_x s_y s_z(t)$$

（如果存在，t 是唯一的）。

• 设 Σ 是 M 中的一个曲面，其边界由测地三角形 ΔtAB 围成，其中 $A = s_x(t)$ 和 $B = s_y(A) = s_y s_x(t)$ $(t = s_z(B))$。

那么，如果存在某个形如

$$a_\hbar(x, y, z) = a_0(x, y, z) + \hbar a_1(x, y, z) + \hbar^2 a_2(x, y, z) + ... \quad ,$$

乘积 (3.3) 定义了 $(M,\ \omega)$ 的不变形变量子化，则 $(x,\ y,\ z)$ 上的"WKB"相位函数 S_W 的值为

$$S_W(x, y, z) = -\int_\Sigma \omega.$$

实际上，函数 S_W 难以显式计算；不过， [Qi96] 中讨论了一些二维例子。振幅 $a_\hbar$ 的求解问题尚未解决。

定义 3.1.1 设 $(M、\ s)$ 是一个平移群为 G 的对称空间。若二点函数 $u \in C^\infty(M \times M、\ \mathbb{R})$ 满足以下两个性质，则称其为容许的

(a) 存在一个 点 $o \in M$，使函数 u 在各向同性群 $K_o \subset G$ 下保持不变 t 点 o：对所有 $k \in K_o$ 和 $x、\ y \in M$：

$$u(k.x\,,\, k.y) \ = \ u(x, y)\ .$$

(b) 对所有 $x、\ y \in M$：

$$u(s_o x, y) \ = \ -u(x, y)\ .$$

(c) 存在一个以点 o 为中心的 ∇-正规邻域 u_0，位于 M 中，使得对所有 $x \in u_0$ 和 $y \in M$：

$$u(x, s_{\frac{x}{2}} y) \ = \ -u(x, y)$$

其中 $\frac{x}{2}$ 表示 u_0 中 o 与 x 之间测地线上的唯一中点。

"WKB"相位函数 S_W 在 $(x,\ y,\ z)$ 上的值由下式给出

$$S_W(x, y, z) = -\int_\Sigma \omega.$$

实际上，函数 S_W 很难显式计算；不过， [Qi96] 研究了一些二维例子。振幅 $a_\hbar$ 的求解问题尚未解决。

命题 3.1.1 函数 S_W 是容许的。

证明。设 $x,\ y$ 和 z 是 M中的三个点，并令

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y & = & s_z s_y s_x(Y) \qquad (*) \\ Z & = & s_x(Y) \\ X & = & s_y s_x(Y) = s_y(Z) \end{array} \right.$$

and

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \zeta & = & s_{s_x(y)} s_z s_x(\zeta) \qquad (**) \\ \xi & = & s_x(\zeta) \\ \eta & = & s_z s_x(\zeta) = s_z(\xi), \end{array} \right.$$

（假设方程 (*) 和 (**) 有解）。我们真正需要证明的只有函数S_W 满足性质（iii）；也就是说，

$$SA(X, Y, Z) = SA(\xi, \eta, \zeta),$$

其中，函数 SA定义如下。对于点序列 $\{x_i\}_{0 \le i \le N}$，表达式 $SA(x_0,\ .....,\ x_N)$ 表示 $SA(\gamma) = \int_\gamma \alpha$，其中 γ 是分段测地路径，其第 i条测地线段从点 x_i 出发，并在模 $(N+1)$下终止于点 x_{i+1}，且 α 是满足 $\omega = d\alpha$的 1- 形式。

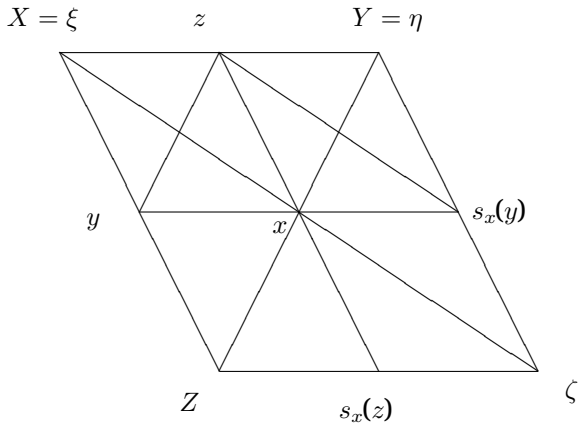
n the first hand, 一个 h

因为：$s_x s_{s_x(y)} s_z(X) = s_x s_x s_y s_x s_z(X) = s_y s_x s_z(X) = X$.因此，$X = \xi$ 且$s_{s_x(z)}(Z) = \zeta$。另一方面，SA 在对称变换下的不变性给出：$SA(\xi,\eta,\zeta) = SA(s_x(\xi)\ s_x(\eta)\ s_x(\zeta)) = SA(\zeta, Z, \xi)$。此外，$SA(\xi,\eta,\zeta) + SA(\zeta, Z, \xi) = SA(\xi,\eta,\zeta, Z)$，因此

$$S_W(x, s_x(y), z) = \frac{1}{2} SA(\xi, \eta, \zeta, Z).$$

同理，可得

$$S_W(x, y, z) = -\frac{1}{2} SA(\xi, \eta, \zeta, Z).$$



■

引理 3.1.1 设 $S \in C^\infty(M \times M \times M, \mathbb{R})$ 是一个可容许三点函数。设 o 是 M中的一点。则，由下式定义的函数 $u \in C^\infty(M \times M, \mathbb{R})$

$$u(x, y) := S(o, x, y)$$

是两点容许的。

证明。我们先选取一个以 o 为中心的正规邻域 u_0，使其中点映射光滑且定义良好：

$$u_0 \to u_0 : x \mapsto \frac{x}{2}\,.$$

于是，对所有点 $x \in u_0$ 和 $y \in M$，都有

$$\begin{aligned} & S(x, y, o) = S(s_{\frac{x}{2}} o, y, o) = S(s_{\frac{x}{2}} s_{\frac{x}{2}} o, s_{\frac{x}{2}} y, s_{\frac{x}{2}} o) = S(o, s_{\frac{x}{2}} y, x) \\ = \ & u(s_{\frac{x}{2}} y, x) = S(o, x, y) = u(x, y)\,. \end{aligned}$$

其余部分显而易见。 ■

反过来，有

命题 3.1.2 设(M, s) 为对称空间。为简单起见，假设它是严格测地凸的，也就是说，任意两点都能由唯一的测地线段连接。设 $u \in C^\infty(M \times M, \mathbb{R})$ 是两点容许的。那么，由下式定义的元素 $S \in C^\infty(M \times M \times M, \mathbb{R})$

$$S(x, y, z) := u(s_{\frac{x}{2}} y, s_{\frac{x}{2}} z)$$

是三点容许的。

我们首先注意到 s_o的不变性 u:

$$u(s_o x, s_o y) \;=\; -u(s_o x, s_o s_o y) \;=\; u(y, s_o x) \;=\; -u(y, s_o s_o x) = u(x, y)\,.$$

我们继续指出，对于 M 中的任意点 x 和 z，元素

$$s_o s_{\frac{x}{2}} s_{\frac{z}{2}} s_{\left(\frac{s_{\frac{z}{2}}(x)}{2}\right)}$$

属于 K_o。
Now,

$$\begin{aligned}
& S(x,y,z) \;=\; u(s_{\frac{x}{2}}(y), s_{\frac{x}{2}}(z)) \\
= \;& -u(s_{\frac{x}{2}}(z), s_{\frac{x}{2}}(y)) = -u(s_{\frac{x}{2}} s_{\frac{z}{2}} \left(s_o s_{\frac{x}{2}} s_{\frac{z}{2}} s_{\left(\frac{s_{\frac{z}{2}}(x)}{2}\right)} \right)^{-1} (o), s_{\frac{x}{2}}(y)) \\
= \;& -u(s_{\frac{x}{2}} s_{\frac{z}{2}} s_{\left(\frac{s_{\frac{z}{2}}(x)}{2}\right)} s_{\frac{z}{2}} s_{\frac{x}{2}}(o), s_{\frac{x}{2}}(y)) \\
= \;& -u(s_{\frac{x}{2}} s_{\frac{z}{2}} s_{\left(\frac{s_{\frac{z}{2}}(x)}{2}\right)} s_{\frac{z}{2}}(x), s_{\frac{x}{2}} s_{\frac{z}{2}} s_{\left(\frac{s_{\frac{z}{2}}(x)}{2}\right)} s_{\left(\frac{s_{\frac{z}{2}}(x)}{2}\right)} s_{\frac{z}{2}}(y)) \\
= \;& -u(s_{\frac{z}{2}}(x), s_{\left(\frac{s_{\frac{z}{2}}(x)}{2}\right)} s_{\frac{z}{2}}(y)) = u(s_{\frac{z}{2}}(x), s_{\frac{z}{2}}(y)) \\
= \;& S(z,x,y) \;=\; -u(s_{\frac{z}{2}}(y), s_{\frac{z}{2}}(x)) \;=\; -S(z,y,x)\,.
\end{aligned}$$

同样，对于每个 x，$w \in M$，元素 t

$$s_{\frac{x}{2}} s_w s_{\frac{s_w x}{2}}$$

稳定于 o。因此:

$$\begin{aligned}
& S(s_w x, s_w y, s_w z) \;=\; u(s_{\frac{s_w x}{2}} s_w y, s_{\frac{s_w x}{2}} s_w z) \\
= \;& u(s_{\frac{x}{2}} s_w s_{\frac{s_w x}{2}} s_{\frac{s_w x}{2}} s_w y, s_{\frac{x}{2}} s_w s_{\frac{s_w x}{2}} s_{\frac{s_w x}{2}} s_w z) \\
= \;& u(s_{\frac{x}{2}x} y, s_{\frac{x}{2}x} z) \;=\; S(x,y,z)\,.
\end{aligned}$$

最后:

$$\begin{aligned}
& S(x, s_x y, z) \;=\; u(s_{\frac{x}{2}} s_x s_{\frac{x}{2}} s_{\frac{x}{2}} y, s_{\frac{x}{2}} z) \;=\; u(s_{s_{\frac{x}{2}} x} s_{\frac{x}{2}} y, s_{\frac{x}{2}} z) \\
= \;& u(s_o s_{\frac{x}{2}} y, s_{\frac{x}{2}} z) \;=\; -u(s_{\frac{x}{2}} y, s_{\frac{x}{2}} z) \;=\; -S(x,y,z)\,.
\end{aligned}$$

■

我们以一条评注及由此引出的定义结束本章节。上述函数 u 上的二点可容许性概念意味着，对每个整数 r:

$$u(x,y) \;=\; u(x, s_{\frac{x}{2}} s_o y) \;=\; u(x, \left(s_{\frac{x}{2}} s_o\right)^r y)$$

对所有点 x 和 y，其中 M。将这一事实与引理 3.1.1 结合并令

$$x \;=\; \mathrm{Exp}_o^{\nabla}(X) \quad (X \in \mathfrak{p} \;:=\; \mathfrak{p}_o)\,,$$

我们得到

$$u(\exp(X).o\,,\, \exp(rX).y)$$

f或对每个 $y \in M$。这引出了下面稍强一些的可容许性概念。

定义 3.1.2 设(M, s) 是一个（严格测地完备的）对称空间。K_o-不变的斜对称度量元素 $u \in C^\infty(M \times M, \mathbb{R})$ 称为正则可容许 的，当且仅当对每个 $X \in \mathfrak{p}$、每个 $t \in \mathbb{R}$ 和 $x \in M$:

$$u(\exp(X).o\,,\, x) \;=\; -u(\exp(X)\,,\, s_o x) \;=\; u(\exp(X).o\,,\, \exp(tX).x)\,.$$

例 3.1.1 *(i)* G给定一个实有限维向量空间 V （视为平坦对称空间 *)* 以及一个双线性 2-形式 $\Omega \in \bigwedge^2(V^\star)$，元素

$$u_0(x,y) \;:=\; \Omega(x,y) \quad (x,y \in V)$$

是正则可容许的。相应的可容许三点函数

$$S_0(x,y,z) \;=\; \Omega(x,y)+\Omega(y,z)+\Omega(z,x)$$

满足命题 *3.0.1* 的余循环条件。

(ii) 给定一个非紧不可约黎曼对称空间 $M \;=\; G/K$。可以观察到，其（必然约化的）平移群 $G \;=\; ANK$ 的岩泽分解意味着，正则可容许元素 $u \in C^\infty(M\times M,\mathbb{R})$ 完全由一个光滑元素 $f \in C^\infty(M)$ 的数据通过以下公式确定

$$f(anK) \;:=\; u(aK\,,\,nK)$$

其中 $a \in A$ 和 $n \in N$。

基于这一评论，我们表述如下

定义 3.1.3 我们称 A-轨道 在 M 中为形如以下形式的任意路径

$$t \mapsto \exp(tX).x$$

其中 $x \in M$ 和 $X \in \mathfrak{p}$。

ˇ3.2 Severa 区域

考虑一个哈密顿 SSS（M,s,ω），其平移群为 G。我们采用章节 **??**中引入的记号。对于每个 x 属于 M，线性单射

$$i_x : \mathfrak{p}_x \hookrightarrow \mathfrak{g}$$

映入平移李代数后，双重地诱导出一个 K_x-等变线性投影

$$\mathfrak{g}^\star \to \mathfrak{p}_x^\star\,.$$

将后者与由 ω_x 诱导的辛同构 $\mathfrak{p}_x^\star \to \mathfrak{p}_x$ 复合，并与动量映射 $m\colon M \to \mathfrak{g}^\star$ 预复合，即得到映射:

$$p_x : M \to \mathfrak{p}_x\,. \tag{3.4}$$

ˇ 给定 M 中的两点 y 和 z，Severa 面积定义为 $\mathfrak{p}_x$ 中以 $\{0\,,\,p_xy\,,\,p_xz\}$ 为顶点的欧几里得三角形上 ω_x 的通量。形式上，令

定义 3.2.1 给定 M 中的三点 x、y 和 z，记为

$$\mathrm{Triang}(0\,,\,p_xy\,,\,p_xz) \tag{3.5}$$

顶点为 $(0$、 p_xy、 $p_xz)$ 的定向欧几里得三角形。
任取一个原始一形式 $\alpha_x \in \Omega^1(\mathfrak{p}_x)$，对于 ω_x:

$$\mathrm{d}\alpha_x \;=\; \omega_x\,,$$

ˇ x、y 和 z 的Severa 面积定义为

$$S_M(x,y,z) \;:=\; \oint_{\mathrm{Triang}(0\,,\,p_xy\,,\,p_xz)} \alpha_x\,.$$

光滑函数

$$S_M : M\times M\times M \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto S_M(x,y,z)$$

ˇ是 M 的 *Severa* 面积。

命题 3.2.1 若 维数 $M=2$，则 M 的 *Severa* 面积是正则可容许的。

证明。令 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ 为对应于基点 $o\in M$选择的 M 的平移 iLa。由于 $\dim\mathfrak{p}=2$和 $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]=\mathfrak{k}$，有 $\dim\mathfrak{k}=1$（根据哈密顿条件，它不可能为零），即

$$\dim\mathfrak{g}=3\ .$$

记 $\mathfrak{g}^\star$ 中动量映射 m 的 M的像中的余伴随轨道为 $\mathcal{O}$。对于每个 $x\in M$ 和每个非零的 $X\in\mathfrak{p}$，对每个 $t\in\mathbb{R}$，都有：

$$<m(\exp(tX).x)\,,\,X>=<m(x)\,,\,\mathtt{Ad}_{\exp(-tX)}X>=<m(x)\,,\,X>\ .$$

换言之，曲线 $\mathbb{R}\to\mathfrak{g}^\star:\ t\mapsto m(\exp(tX).x)-m(x)$ 取值于与元素 X正交的 2-平面 $X^{\perp}$ 中。

现在，投影 $i_o^\star$ 的核 $\mathfrak{g}^\star\to\mathfrak{p}^\star$ 恰好由与 $\mathfrak{p}$正交的空间 $\mathfrak{p}^{\perp}$ 组成。特别地，它是 $X^{\perp}$中的一条向量直线。

综合以上所述，我们得出结论：“A-轨道” $t\mapsto m(\exp(tX).x)$经 $i_o^\star$ 投影后落在 $\mathfrak{p}^\star$ 中的直线上，该直线由 $i_o^\star m(x)+X^{\perp}\cap\mathfrak{p}^\star$构成。

换言之，每个 A-轨道 $t\mapsto\exp(tX).x$ 经 p_o 投影后都会落在 $\mathfrak{p}$ 中的一条直线上，而该直线与 $\{p_o(\exp(tX).o)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 所在的直线平行。

因此，关于断言 (i)，由于对于所有 $v,\ w\in\mathfrak{p}$，量 $\Omega(u,\ v)$（即 $\omega_o(u,\ v)$）计算的是顶点为 $0,\ v$ 和 w的欧几里得三角形的（有向）欧几里得面积，所以对于每个 t，我们有：

$$\begin{aligned}&S_M(o,\exp(X).o,\exp(tX).x)\ =\ \Omega(p_o(\exp(X).o),p_o(\exp(tX).x))\\=\ &\Omega(p_o(\exp(X).o),p_o(x))\ =\ S_M(o,\exp(X).o,x)\ .\end{aligned}$$

现在我们证明该元素：

$$u_M(x,y)\ :=\ S_M(o,x,y)$$

满足可容许性的其他条件。

K_o-不变性。映射

$$p_o:M\to\mathfrak{p}$$

是 K_o-等变的，因为根据假设，动量映射 m 是 G-等变的，而嵌入 $\mathfrak{p}\hookrightarrow\mathfrak{g}$是$K_o$-不变的。于是，元素 u_M 的 K_o-不变性可由辛元素 $\Omega\ =\ \omega_o$ 在 $\mathfrak{p}\ =\ T_oM$上的 K_o 不变性推出。

斜对称性。显然，这是由 Ω 的斜对称性得出的。

s_o-相容性。由下列恒等式可得

$$p_o\circ s_o\ =\ -\mathtt{id}_{\mathfrak{p}}\ .$$

总 之，我们注意到映射 p_x $(x\in M)$ 具有如下性质：对于每个 $g\in G$:

$$p_{g.x}(g.y)\ =\ Ad_gp_xy\ .$$

ˇ因此，Severa 区域 S_M 在 $M\times M\times M$上的 G 对角作用下不变。因此，它可通过 $S_M(g.o,\ x,\ y)\ =\ u_M(g^{-1}.x,\ g^{-1}.y)$由 u_M确定。 ■

3.3 双曲平面

本章节我们讨论双曲平面的情形。我们特别证明，可容许正则相位远非唯一。

et S^1 be the Furstenberg boundary of the hyperbolic plane $\mathbb{D}$ = G/K (G = SL(2, $\mathbb{R}$),K = SO(2))。它通过下式确定一个正则可容许的二点函数 u

$$u(x,y) \;:=\; S(o,x,y) \quad (o \;:=\; eK).$$

由于二点函数 u 是 K-不变的，它本身由其在 $A.o \times \mathbb{D}$ 上的限制确定，其中 $G = ANK$ 表示前文讨论过的岩泽分解。此外，正则可容许性的性质（??）表明，它实际上完全由其在 $A.o \times N.o$ 上的限制确定，而 $A.o \times N.o$ 可自然地识别为 $\mathbb{D} \simeq \mathbb{S} = AN$。换言之，由下式定义的元素 $f \in C^\infty(\mathbb{S})$

$$f(an) \;:=\; u(a.o, n.o) \;=\; S(o, a.o, n.o) \tag{3.6}$$

确定 S。
命题 ?? 说明， $\mathbb{D}$ 上哪些二点函数可通过这一限制过程，来自 $\mathbb{D}$ 上的正则可容许三点相位。再进一步：哪些一点函数 f 是由正则可容许的二点函数得到的？这正是本段要回答的问题。

我们先介绍几个引理。

引理 3.3.1 对于每个 $n \in N$，存在唯一的 $a_n \in A$ 和唯一的 $k_n \in K$，使得下式在 $\mathbb{D}$ 中成立：

$$nK \;=\; k_n a_n K\,.$$

定义3.3.1 我们将 K 对 $\mathbb{S}$ 的dressing作用以及 $\mathbb{S}$ 对 K 的作用定义为

$$K \times \mathbb{S} \to \mathbb{S} : (k,s) \mapsto s^k$$

and

$$\mathbb{S} \times K \to K : (s,k) \mapsto k^s$$

通过以下关系

$$ks \;=:\; s^k k^s \;\in G\,.$$

此外，对于每个 $g \in G$，记

$$g \;=:\; g_A g_N g_K$$

其关于 $G = ANK$ 的岩泽分解为，我们定义映射

$$\Phi : \mathbb{S} \to \mathbb{S} : an \mapsto a_n \left((a^{-1})^{k_n^{-1}} \right)_N\,.$$

引理3.3.2

$$\Phi(a,n) \;=\; \left(\operatorname{arcsinh}(n/2)\,,\, \frac{\sinh(2a)}{\sqrt{1+n^2/4}} \right)\,.$$

证明。我们首先确定每个 $n \in N$、 k_n 和 a_n。这相当于寻找满足以下条件的 $k_0 \in K$

$$n \;=\; k_n a_n k_0$$

由所谓的“KA^+K-分解”决定。令

$$k_n \;=:\; \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\,;\; k_0 \;=:\; \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) & \sin(\theta_0) \\ -\sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{pmatrix}\,;$$

and

$$a_n \;=:\; \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \quad (r > 0)\,,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -e^r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -e^{-r} \\ n & 1 & 0 & -e^r \\ 1 & -n & -e^{-r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \end{pmatrix} \;=\; 0\,.$$

后者在高斯算法下等价于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -e^r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -e^{-r} \\ 0 & 0 & ne^r & -2\sinh(r) \\ 0 & 0 & 2\sinh(r) & -ne^{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \end{pmatrix} \;=\; 0\,.$$

这意味着

$$\det \begin{pmatrix} ne^r & -2\sinh(r) \\ 2\sinh(r) & -ne^{-r} \end{pmatrix} \;=\; 0$$

i.e.

$$n \;=\; \epsilon 2\sinh(r) \quad (\epsilon \;:=\; \mathrm{sign}(n))\,.$$

利用上述条件，便可求解该系统，得到

$$\tan(\theta) \;=\; \epsilon e^{-r}\,.$$

现在，岩泽分解为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{c^2+d^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & bd+ac \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}} & \frac{-c}{\sqrt{c^2+d^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} & \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}} \end{pmatrix}\,.$$

因此，将其应用于 $g = k_n^{-1}a$，得到

$$(a^{k_n^{-1}})_N \;=\; -\sinh(2a)\sin(2\theta) \;=\; \frac{-\epsilon\sinh(2a)}{\cosh(r)} \;=\; \frac{-\epsilon\sinh(2a)}{\sqrt{1+n^2/4}}\,.$$

■

命题 3.3.1 设 $f_0 :\; \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数。当且仅当它满足以下两个性质时，它是与罗巴切夫斯基平面 $\mathbb{D}$ 上的一个（可测）正则可容许函数相关联的单点函数（参见 *(3.6)*）：

(a)

$$\Phi^\star f_0 \;=\; f_0\,,$$

and

(b)

$$f_0(a,n) \;=\; -f_0(-a,n)\,.$$

证明。从任意函数 f_0 出发，很容易定义一个双点函数 u_0，它是 K-不变的，并且具有正则可容许性的性质（？）。事实上，根据极分解和岩泽分解，对所有点 $x_j \;=\; a_j n_j \in \mathbb{S} \subset G$ $(j = 1,2)$，定义如下：

$$x_1 \;=:\; k_1 a_1' k_1' \quad \text{and} \quad a_2' n_2' k_2 \;:=\; k_1^{-1} x_2\,.$$

然后定义：

$$u_0(x_1.o, x_2.o) \;:=\; f_0(a_1' n_2')\,.$$

上述元素 u_0 满足该要求。事实上，对于每个 $k \in K$，都有

$$kx_1 \;=\; kk_1 a_1' k_1' \quad \text{and} \quad (kk_1)^{-1} k x_2 \;=\; a_2' n_2' k_2\,.$$

ence the K-invari性。 Also, f或对每个 $a \in A$，有

$$u_0(a_1'.o, ax_2.o) \;=\; u_0(a_1'.o, aa_2n_2.o) \;=\; f_0(a_1'n_2) \;=\; u_0(a_1'.o, x_2.o)\,.$$

现在，我们讨论 u_0 的斜对称性问题。它相当于性质 th at

$$u_0(x_1.o, a_2.o) \;=\; -u_0(a_2.o, x_1.o)\,.$$

事实上:

$$u_0(x_2.o, x_1.o) \;=\; u_0(k_1^{-1}x_2.o, a_1'.o) \;=\; -u_0(a_1'.o, k_1^{-1}x_2.o) \;=\; -u_0(x_1.o, x_2.o)\,.$$

现在，写成

$$x_1.o \;=:\; k_1a_1.o$$

如引理 3.3.1 中那样。于是斜对称性相当于

$$\begin{aligned} u_0(k_1a_1.o, a_2.o) \;&=\; u_0(a_1.o, (a_2^{k_1^{-1}})_N.o) \;=\; f_0(a_1(a_2^{k_1^{-1}})_N) \\ =\;\; -u_0(a_2.o, k_1a_1.o) \;&=\; -u_0(a_2.o, (a_1^{k_1})_N.o) \;=\; -f_0(a_2(a_1^{k_1})_N)\,. \end{aligned}$$

现在，将任意 $n \in N$ 表示为引理 3.3.1 中的形式，我们得到

$$n.o \;=\; (a_n)_A^{k_n}(a_n)_N^{k_n}.o\,,$$

而岩泽分解给出:

$$n \;=\; (a_n)_N^{k_n}\,.$$

因此，根据上述讨论，我们得到:

$$f_0(an) \;=\; f_0(a(a_n)_N^{k_n}) \;=\; -f_0(a_n(a_n)_N^{k_n^{-1}})\,.$$

由此我们从

$$f_0(an) \;=\; -f_0(s_oan) \;=\; f_0(a^{-1}n)\,.$$

■

现在，我们给出例 1.2.2 中引入的 $\mathbb{D}$ 参数模型的显式公式。

命题 3.3.2 考虑例 *1.2.2* 中引入的李群 $\{G_\lambda\}_{\lambda\in[0,\infty)}$ 的单参数族。

(i) 令 λ、$R>0$，并将罗巴切夫斯基平面 $\mathbb{D}$ 实现为余伴随轨道 $S_{\lambda,\,R}$，其位于 $(\mathfrak{g}_\lambda^\star,\ \eta_\lambda)$ 中。*Ševera*面积 $S_{S_{\lambda,\,R}}$ 与正则可容许三点相位 $S_{\mathbb{D}}$ 成正比，即 *soci-*
在 *(3.6)* 下作用于元素 $f_{\mathbb{D}} \in C^\infty(\mathbb{S})$，该元素由下式给出

$$f_{\mathbb{D}}(a,n) \;:=\; \sinh(2a)\,n\,.$$

(ii) 典范辛对称空间结构的 *Ševera*面积 $S_{\mathbb{S}}$ 与 $ax+b$ 群 $\mathbb{S}$ 上与元素 $f_{\mathbb{S}} \in C^\infty(\mathbb{S})$ 相关的正则可容许三点相位 $S_{\mathbb{S}}$ 成正比，该元素由下式给出

$$f_{\mathbb{S}}(a,n) \;:=\; \sinh(2a)\,n\,.$$

证明。考虑例 1.2.2 中的元素 $Z = E-F$。对于每个元素 $x =: an = \exp(aH)\exp(nE)$，其中 $\mathbb{S}$，计算可得

$$\mathtt{Ad}_x Z \;=\; -\lambda nH + \frac{1}{2}\left(e^{2a}(1+\lambda n^2) - e^{-2a}\right)H^\perp + \frac{1}{2}\left(e^{2a}(1+\lambda n^2) + e^{-2a}\right)Z$$

with

$$H^\perp \;:=\; E+F\,.$$

因此:

$$(\mathtt{Ad}_a Z)_{\mathfrak{p}} \;=\; \sinh(2a)H^\perp \quad\text{and}\quad (\mathtt{Ad}_n Z)_{\mathfrak{p}} \;=\; -\lambda nH + \frac{\lambda n^2}{2}H^\perp\,.$$

因此， $\mathfrak{p}$ 上的任意反对称双线性2-形式在 $((\mathrm{Ad}_a Z)_{\mathfrak{p}}$，$(\mathrm{Ad}_n Z)_{\mathfrak{p}})$ 上的取值都与 $f_{\mathbb{D}}(a,\ n)$ $=\sinh(2a)n$ 成正比。对于 Z 的任意倍数，结论同样成立。
由于线性同构 $\sharp\colon \mathfrak{g}_\lambda^\star \to \mathfrak{g}^\lambda$ is G_λ-等变，因此得到结论 (i)。另一项断言则由元素 $f_{\mathbb{D}}$ is λ-独立这一事实推出，因此它在收缩极限$\lambda = 0$处给出相同的公式。

■

注记3.3.1 利用引理3.3.2中给出的显式公式，对于 $\lambda = 1$，不变性 $\Phi^\star f_{\mathbb{D}} = f_{\mathbb{D}}$ 显而易见。

3.4 初等群型 Hermite 空间

现在我们转向给定的 $2d+2$ 维初等正规 **j**-群 $\mathbb{S}$ 及其关联的辛形式 $\omega^{\mathbb{S}}$这一特殊情形。令 $a, t \in \mathbb{R}$ 和 $v \in V \simeq \mathbb{R}^{2d}$。以下恒等识别将始终默认成立：

$$\mathbb{R}^{2d+2} \ni x := (a, v, t) \mapsto aH + v + tE \in \mathfrak{s} .$$

以下结果摘自 [BM01]：

命题3.4.1 *(i)* 映射

$$\mathfrak{s} \to \mathbb{S} , \quad (a, v, t) \mapsto \exp(aH) \exp(v + tE) = \exp(aH) \exp(v) \exp(tE) , \tag{3.7}$$

是 $(\mathbb{S}, \omega^{\mathbb{S}})$ 上的全局达布坐标图，其中辛结构表示为：

$$\omega^{\mathbb{S}} := 2\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}t + \omega_0 .$$

(ii) 进一步令

$$s_{(a,v,t)}(a', v', t') := \big(2a - a', 2\cosh(a - a')v - v', 2\cosh(2a - 2a')t + \omega_0(v, v') \sinh(a - a') - t'\big) ,$$

在初等正规**j**-群 $\mathbb{S}$上定义辛对称空间结构$(\mathbb{S}, s, \omega^{\mathbb{S}})$.
(iii) 左作用 $L_x : \mathbb{S} \to \mathbb{S} : x' \mapsto x.x'$ 定义了一个单射李群同态

$$L : \mathbb{S} \to \mathtt{Aut}(\mathbb{S}, s, \omega^{\mathbb{S}}) .$$

在坐标(3.7)中，我们有

$$x.x' = (a, v, t).(a', v', t') = \big(a + a', e^{-a'} v + v', e^{-2a'} t + t' + \tfrac{1}{2} e^{-a'} \omega_0(v, v')\big) .$$

and

$$x^{-1} = (a, v, t)^{-1} = (-a, -e^a v, -e^{2a} t) .$$

(iv) 正规**j**-群 $\mathbb{S}$ 的自同构作用$\mathbf{R} : \mathrm{Sp}(V, \omega^0) \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}, (A, (a, v, t)) \mapsto \mathbf{R}_A(a, v, t) := (a, Av, t)$ 诱导一个单射李群同态：

$$\mathbf{R} : \mathrm{Sp}(V, \omega^0) \to \mathtt{Aut}(\mathbb{S}, s, \omega^{\mathbb{S}}) , \quad A \mapsto \mathbf{R}_A .$$

注意，在这些坐标中，$\mathbb{S}, \Delta_{\mathbb{S}}$ 的模函数为 $e^{(2d+2)a}$。
现在我们来定义 $\mathbb{S}$ 上的三点相位。为此，我们需要用到 A. Weinstein [We93] 和 Z. Qian [Qi96]引入的“双测地三角形”这一概念。

定义 3.4.1 *Let* (M, s, ω) 为一个辛对称空间。M 上的**中点映射**是一个光滑映 p

$$M \times M \to M , \quad (x, y) \mapsto \mathtt{mid}(x, y) ,$$

满足以下条件：对所有点 $x, y \in M$：

$$s_{\mathtt{mid}(x,y)}(x) = y .$$

注 3.4.1 注意，当部分映射 $s^y : M \to M, x \mapsto s_x(y)$ 是 M 的整体微分同胚时，中点映射存在，且定义如下：

$$\mathtt{mid}(x, y) := (s^x)^{-1}(y) .$$

注意，在这种情况下，每个 $\varphi \in$ 自同构群(M, s, ω) 都保持中点不变。事实上，由于对所有 $x, y \in M$，我们都有 $\varphi(s_y(x)) = s_{\varphi(y)}(\varphi(x))$，因此得到

$$\varphi\big(\mathtt{mid}(x, y)\big) = \mathtt{mid}\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) .$$

引理 3.4.1 对于底层为初等正规 j-群的对称空间$(\mathbb{S}, s)$，其相关的部分映射都是整体微分同胚。在坐标(3.7)中，我们有：

$$\big(s^{(a_0,v_0,t_0)}\big)^{-1} : (a,v,t) \mapsto \Big(\frac{a+a_0}{2}, \frac{v+v_0}{2\cosh(\frac{a-a_0}{2})}, \frac{t+t_0}{2\cosh(a-a_0)} - \omega_0(v,v_0)\frac{\sinh(\frac{a-a_0}{2})}{4\cosh(a-a_0)\cosh(\frac{a-a_0}{2})}\Big) . \quad (3.8)$$

以下命题在 [Bi02] 中得到证明。

命题 3.4.2 *(i)* 仿射空间$(\mathbb{S}, \nabla)$ 是严格测地完备的，即任意两点确定唯一的测地线弧。

(ii) "双三角形"三点函数

$$\Phi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 , \quad (x_1,x_2,x_3) \mapsto \big(\mathtt{mid}(x_1,x_2), \mathtt{mid}(x_2,x_3), \mathtt{mid}(x_3,x_1)\big) ,$$

是一个 $\mathbb{S}$-等变的（在左正则作用下）整体微分同胚。

由于我们的空间 $\mathbb{S}$ 的二阶德拉姆上同调平凡，任意三个点 (x,y,z) 确定一个定向测地三角形 $T(x,y,z)$，其辛面积可通过在任意一个以 $T(x,y,z)$ 为边界的曲面上积分二形式 ω 来定义。稍微滥用一下记号，我们设

$$\mathrm{Area}(x,y,z) := \int_{T(x,y,z)} \omega^{\mathbb{S}} .$$

定义 3.4.2 与初等正规j群相关联的**典范二点相位**定义为

$$S^{\mathbb{S}}_{\mathrm{can}}(x_1,x_2) := \mathrm{Area}\left(\Phi^{-1}(e,x_1,x_2)\right) \in C^\infty(\mathbb{S}^2,\mathbb{R}) ,$$

其中 $e := (0,\ 0,\ 0)\,d$ 表示 $\mathbb{S}$ 中的单位元。在(3.7)坐标下，可得显式表达式：

$$S^{\mathbb{S}}_{\mathrm{can}}(x_1,x_2) = \sinh(2a_1)t_2 - \sinh(2a_2)t_1 + \cosh(a_1)\cosh(a_2)\,\omega_0(v_1,v_2) . \quad (3.9)$$

与初等正规j群相关联的**典范二点振幅** 定义为

$$A^{\mathbb{S}}_{\mathrm{can}}(x_1,x_2) := \mathrm{Jac}_{\Phi^{-1}}(e,x_1,x_2)^{1/2} \in C^\infty(\mathbb{S}^2,\mathbb{R}) .$$

在(3.7)坐标下，其表达式为

$$A^{\mathbb{S}}_{\mathrm{can}}(x_1,x_2) = \big(\cosh(a_1)\,\cosh(a_2)\,\cosh(a_1-a_2)\big)^d \big(\cosh(2a_1)\,\cosh(2a_2)\,\cosh(2a_1-2a_2)\big)^{1/2} . \quad (3.10)$$

3.5 群 $ax+b$ 的辛对称几何

我们用 $\mathbb{S}$ 表示这样一个实二维连通单连通李群：其李代数 $\mathfrak{s}$ 由两个元素 H 和 E 生成，括号表为

$$[H,E] \ = \ 2E .$$

我们将 $\mathbb{S}$ 称为 $ax+b$-群。
在本书中，群 $ax+b$ 始终通过映射来赋予坐标

$$\mathbb{R}^2 \ \simeq \ \mathfrak{s} \longrightarrow \mathbb{S} : (a,n) \ := \ aH+nE \mapsto \exp(aH).\exp(nE) \ =: \ a.n .$$

上述坐标的优点在于，对于任意左不变的辛体积形式 $\omega^{(m)}$ on $\mathbb{S}$，它们都构成一个全局达布坐标图：

$$\omega^{(m)} \ = \ m\,\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}n \quad (m \in \mathbb{R}_0) .$$

$$(a,n),(a',n') \;=\; (a+a'\,,\, e^{-2a}n+n')$$

带有单位元

$$e \;=\; (0,0)$$

以及逆元

$$(a,n)^{-1} \;:=\; (-a,-e^{2a}n)\,.$$

作为李群 ， $\mathbb{S}$ 自然赋有对称空间结构（参见定义 1.1.1） :

$$\hat{s}:\mathbb{S}\times\mathbb{S}\to\mathbb{S}:(x,y)\mapsto \hat{s}_x y \;:=\; xy^{-1}x\,.$$

注 3.5.1 Haar 元 $\omega^{(m)}$ 在对称变换 $\{\hat{s}_x\}_{x\in\mathbb{S}}$下并非不变。然而， $\mathbb{S}$ 上存在一种与其李群结构自然对应的辛对称空间结构，下面我们将对此进行描述。

上述对称空间对应于所谓的“交换”iLg $(\mathbb{S}\times\mathbb{S},\ \sigma^e)$，其中

$$\sigma^e(x,y) \;:=\; (y,x)\,;$$

所实现的投影映射为

$$\pi:\mathbb{S}\times\mathbb{S}\to\mathbb{S}:(x,y)\mapsto xy^{-1}$$

其纤维是对角子群 $K^e\simeq\mathbb{S}$ in $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ 的左侧陪集。在无穷小层面，它对应于由以下式子定义的 iLa （$\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{s},\ \sigma^e$）：

$$\sigma^e(X,Y) \;:=\; (Y,X)\,.$$

然而，上述 iLa 并未以这种形式实现平移 iLa。事实上，$\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{s}$ in 中由对角元素组成的各向同性李代数

$$\mathfrak{k}^e \;:=\; \{(X,X)\}$$

同构于 $\mathfrak{s}$ ，而全纯李代数 $\mathfrak{k}$ 是一维的。平移李代数可以看作交换 iLa 的一个子 iLa，如下所示。考虑分解为 σ^e-特征子空间:

$$\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{s} \;=\; \mathfrak{k}^e\oplus\mathfrak{p}$$

其中 $\mathfrak{p}:=\{(X,\ -X)\}$，有

$$\mathfrak{k} \;=\; [\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\,.$$

因此，令

$$\mathfrak{a} \;:=\; \mathbb{R}\,H \quad\text{and}\quad \mathfrak{n} \;:=\; \mathbb{R}\,E\,,$$

平移李代数 $(\mathfrak{g},\sigma)$ 因而可认作以下阿贝尔$\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{n}$由 $\mathfrak{a}$ 作用得到的半直扩张:

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{a}\ltimes(\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{n})$$

其表如下

$$[H\,,\,E] \;=\; 2E \quad;\quad [H,F] \;:=\; -2F \quad\text{and}\quad [E\,,\,F] \;=\; 0$$

这里稍微滥用了记号，我们定义

$$H \;:=\; (H,-H) \quad;\quad E \;:=\; (E,0) \quad\text{and}\quad F \;:=\; (0,E)\,.$$

在这种表示下，对合由下式给出

$$\sigma H \;=\; -H \quad,\quad \sigma E \;=\; F\,.$$

$\ltimes\mathbb{R}^2$。

李代数嵌入

$$\mathfrak{s} \to \mathfrak{g} : aH + nE \mapsto a(H,-H) \,+\, n(E,0)$$

经指数映射后，将 $ax+b$ 群 $\mathbb{S}$ 实现到 $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ 中，在

$$\mathbb{S} \to \mathbb{S}\times\mathbb{S} : an \mapsto (a,a^{-1}).(n,e) \;=\; (an,a^{-1})\,.$$

This 给出 $\mathbb{S}$ 在$(\mathbb{S}\times\mathbb{S})/K^e$ 上的单传递作用及相应的微分同胚

$$\mathbb{S} \to \mathbb{S} : (a,n) \mapsto \pi(an,a^{-1}) \;=\; ana\,. \tag{3.11}$$

注记 3.5.3 映射 (3.11) 不是群同态。

如前所述，我们现在有

命题 3.5.1 在微分同胚 *(3.11)* 下，群对称空间结构 $\hat{s}$表示为

$$s_{(a,n)}(a',n') \;=\; (\,2a \,-\, a'\,,\, 2\cosh(2(a-a'))n \,-\, n'\,)\,.$$

Haar 元 $\omega^{(m)} \;=\; m\,\mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}n$ 是 $\mathbb{S}$ 上在传递对称变换$\{s_x\}_{x\in\mathbb{S}}$作用下保持不变的唯一 *2*-形式。

证明。记$\mathbf{C}$为共轭作用$\mathbf{C}_x y \;=\; xyx^{-1}$，可得:

$$\hat{s}_{ana}(a'n'a') = anaa'^{-1}n'^{-1}a'^{-1}ana \;=\; a^2a'^{-1}\mathbf{C}_{a'a^{-1}}n.n'^{-1}.\mathbf{C}_{aa'^{-1}}n.a^2a'^{-1}\,.$$

所述公式由$\mathbf{C}_a n \;=$ $(0, e^{-2a}n)$这一事实即可推出。 ■

换言之，三元组 $(\mathbb{S},\omega^{(m)},s)$ 是一个辛对称空间。

3.6 穿过测地线三角形的辛通量

定理 3.6.1 *(i)* 对称空间 $(\mathbb{S},s)$ 存在一个光滑中点映射，也就是说，对于任意两个点 x 和 y 属于 $\mathbb{S}$，存在唯一的点 $m(x,y)$ 使得

$$s_{m(x,y)}x \;=\; y$$

且映射 $m:\,\mathbb{S}\times\mathbb{S}\to\mathbb{S}$ 是 C^∞。
(ii) 映射

$$\Phi : \mathbb{S}\times\mathbb{S}\times\mathbb{S} \to \mathbb{S}\times\mathbb{S}\times\mathbb{S} : (x,y,z) \mapsto (\,m(x,y)\,,\,m(y,z)\,,\,m(z,x)\,)$$

是一个微分同胚。

(iii) 令 $\Phi^{-1}(x,y,z) \;=:(x',y',z')$，并以 $x'y'z'$ 表示顶点为 x'、y' 和 z' 的定向测地三角形，我们考虑 $\omega^{(1)}$ 穿过 $x'y'z'$（被任意曲面所围成）的通量:

$$S(x,y,z) \;:=\; \int_{\overset{\triangle}{x'y'z'}} \omega^{(1)}\,.$$

其显式公式为:

$$S(x_0,x_1,x_2) \;=\; \sinh(2(a_0-a_1))n_2 \,+\, \sinh(2(a_2-a_0))n_1 \,+\, \sinh(2(a_1-a_2))n_0$$

其中，对于每个 $j=0$、1、2，我们设定 $x_j=(a_j,n_j)$。

第4章

指数李群上的振荡积分

4.0.1 符号空间

我们考虑一个无中心李群 $\mathbb{L}$，其李代数为 $\mathcal{L}$，相应的包络代数为 $\mathcal{U}(\mathcal{L})$。对于每个 $X\tilde{}$属于 $\mathcal{L}$ 的元素，我们用 X 表示其在 $\mathbb{L}$上的相应左不变向量场，用 $X^\star$ 表示其相应的右不变向量场：

$$\tilde{X}_x \;:=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_0 x\exp(tX)\,, \quad X^\star_x \;:=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_0 \exp(-tX)x\;.$$

对于包络代数 $\mathcal{U}(\mathcal{L})$中的元素，我们也采用相同的记号。

定义 4.0.1 选取 $\mathfrak{L}$ 上的一个向量范数 $|\,|$，我们将考虑由下式定义的元素 $\mathfrak{d}_{\mathbb{L}} \in C^\infty(\mathbb{L})$

$$\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}(x) \;:=\; \sqrt{1 \,+\, |\mathtt{Ad}_x|^2 \,+\, |\mathtt{Ad}_{x^{-1}}|^2}$$

其中，对每个 x， $\mathbb{L}$，$\mathtt{Ad}_x$ 表示 $\mathfrak{s}$ 中 x 的伴随作用，其算子范数记为 $|\mathtt{Ad}_x$ $|$.

元素 $\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}$ 的主要性质是

引理 4.0.1 *(i)* 存在一个正的 C，使得对所有 x、$y \in \mathbb{L}$:

$$\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}(xy) \;<\; C\,\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}(x)\,\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}(y)\;.$$

(ii) 对每个 $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{L})$，都存在 C，使得

$$|\tilde{X}.\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}| \;<\; C\,\mathfrak{d}_{\mathbb{L}} \quad \textit{and} \quad |\underline{X}.\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}| \;<\; C\,\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}\;.$$

记作

$$\mathcal{U}(\mathfrak{L}) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_k(\mathfrak{L})$$

自然滤过，我们作出

定义 4.0.2 设 $N \in \mathbb{R}$ 且 $p \in \mathbb{N}$。我们定义

$$\mathcal{B}^N_p(\mathbb{L}) \;:=\; \{\, F \in C^p(\mathfrak{L}) \,|\, \forall X \in \mathcal{U}_p(\mathfrak{L})\, \exists\, C > 0 \,:\, |\tilde{X}.F| \;<\; C\,\mathfrak{d}^N_{\mathbb{L}} \,\}\;.$$

类似地，我们定义

$$\mathcal{B}^N(\mathbb{L}) \;:=\; \mathcal{B}^N_\infty(\mathbb{L}) \;:=\; \{\, F \in C^\infty(\mathfrak{L}) \,|\, \forall X \in \mathcal{U}(\mathfrak{L})\, \exists\, C > 0 \,:\, |\tilde{X}.F| \;<\; C\,\mathfrak{d}^N_{\mathbb{L}} \,\}\;,$$

and

$$\mathcal{B}(\mathbb{L}) \;:=\; \mathcal{B}^0(\mathbb{L})\;.$$

 配备函数的逐点乘法后，这些空间在赋予以下半范数时成为交换的 *Fr´echet* 代数：

$$|\varphi|_J^N \;:=\; \sup_{x\in\mathbb{S}}\{\,|\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^{-N}(x)\,\widetilde{\Xi_J}_x.\varphi|\,\} \tag{4.1}$$

其中我们固定了 $\mathfrak{L}$ 的一组基 $\{\Xi_j\}$，并且 $J=(j_1,j_2,...,j_d)\in\mathbb{N}^{\dim\mathbb{L}}$ 是一个多重指标，满足 $d\le p$；与之对应的 *Poincar´e-Birkoff-Witt*（*PBW*）基元素为 $\Xi_J:=\Xi_1^{j_1}...\Xi_d^{j_d}$，属于 $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$。

赋予半范数 (4.1) 后，我们注意到 $\mathcal{B}_p^N$变成了巴拿赫空间，在 p (N 固定)下，它们是 Fr´échet 射影极限； $\mathcal{B}^N$ 和 $\mathcal{B}$ 也是如此。
与 $\mathbb{L}=\mathbb{R}^n$的通常阿贝尔情形类似，我们有

命题4.0.1 *(i)* 对所有 N,N' 和 p,p'，函数的逐点乘法给出分别连续的双线性映射：

$$\mathcal{B}_p^N\times\mathcal{B}_{p'}^{N'}\to\mathcal{B}_{\min\{p,p'\}}^{N+N'}\,.$$

(ii) 对每个 $X\in\mathcal{U}_k$（$\mathfrak{L}$），都有连续映射

$$\mathcal{B}_p^N\to\mathcal{B}_{p-k}^N:F\mapsto\tilde{X}.F\,.$$

(iii)

$$\mathcal{B}_p^N\;=\;\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^N\mathcal{B}_p^0\quad and\quad \mathcal{B}^N\;=\;\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^N\mathcal{B}^0\,.$$

(iv) 记$\mathrm{adh}^{\mathcal{B}_p^N}$为 $\mathcal{B}_p^N$中的拓扑闭包，则对所有 $N>N'\ge 0$ 和 $\infty\ge p'\ge p$：

$$\mathrm{adh}_{\mathcal{B}_p^N}\mathcal{D}\;\supset\;\mathcal{B}_{p'}^{N'}$$

其中 $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\mathbb{L})$ 表示紧支撑 C^∞ 函数的检验函数空间。
(v) 记 $C_b(\mathbb{L})$ 为 $\mathbb{L}$ 上的 $C^\star$代数，即（右）一致连续有界函数的代数。该 $C^\star$ 代数在右正则表示下由 $\mathbb{L}$ 强连续且等距地作用。$C_b(\mathbb{L})$ 中的光滑向量所组成的（*Fr´échet*）子代数包含于空间 $\mathcal{B}(\mathbb{L})$中。

的一个$ticular,\ th$空间 $\mathcal{B}(\mathbb{L})$ 是光滑的 $th\ left\ \mathbb{L}\text{-}module\ under\ R.$

如果 $(\mathfrak{F},\{|\ |\}_{j\in\mathbb{N}})$ 是一个 Fr´echet 空间，其拓扑由一组固定的半范数 $\{|\ |\}_{j\in\mathbb{N}}$ 定义，那么显然可以得到上述定义空间的 $\mathfrak{F}$ 值版本 $\mathcal{B}_p^N$。然而，事实证明，稍微复杂一些的定义在应用中更为相关：

定义 4.0.3 我们令

$$\mathcal{B}_p^N(\mathbb{L},\mathfrak{F}):=\{F\in C^\infty(\mathbb{L},\mathfrak{F})\mid\forall j\in\mathbb{N},X\in\mathcal{U}_p(\mathfrak{L})\;:\exists C>0\;:|\tilde{X}.F|\;<\;C\,\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^N\}.$$

与复值情形一样，这些空间自然地构成 Fr´echet 空间，并且命题4.0.1 的显然类似结论成立。具体而言，

命题 4.0.2 *(i)* 对所有 N 和 p,p'，函数的逐点乘法给出分别连续的双线性映射：

$$\mathcal{B}_p^N(\mathbb{L})\times\mathcal{B}_{p'}^N(\mathbb{L},\mathfrak{F})\to\mathcal{B}_{\min\{p,p'\}}^{2N}(\mathbb{L},\mathfrak{F})\,.$$

(ii) 对每个 $X\in\mathcal{U}_k(\mathfrak{L})$，都有连续映射

$$\mathcal{B}_p^N\to\mathcal{B}_{p-k}^N:F\mapsto\tilde{X}.F\,.$$

(iii) 记 $\mathrm{adh}^{\mathcal{B}_p^N}$ 为 $\mathcal{B}_p^N$ 中的拓扑闭包，则对所有 $N'\prec N$ 和 $\infty\ge p'\ge p$：

$$\mathrm{adh}_{\mathcal{B}_p^N}\mathcal{D}\;\supset\;\mathcal{B}_{p'}^{N'}$$

其中，$\mathcal{D}=\mathcal{D}(\mathbb{L},\mathfrak{F})$ 表示取值于 F、具有紧支集的 C^∞ 函数所构成的检验函数空间。

4.0.2 振荡积分

在本章节中，我们定义“广义积分”的概念，以便在 $\mathcal{B}$ 型空间上定义我们的非形式变形乘积。我们从下面这些相当技术性的定义开始，但它们将在后文中发挥基础作用。

Fr从现在起，我们假设李群 $\mathbb{L}$ 是指数型可解的。

定义 4.0.4 若映射(G,S) 是**温和的**，则称这对

$$\phi : G \to \mathfrak{g}^\star : x \mapsto \Big[\mathfrak{g} \to \mathbb{R} : X \mapsto \mathrm{d}S_x(\widetilde{X}) = \big(\widetilde{X}.S\big)(x) \Big] , \tag{4.2}$$

是整体微分同胚。

给定温和对 (G,S)，其中 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，现在考虑一个向量空间分解：

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n=0}^{N} V_n , \tag{4.3}$$

并且对于每一个 $n=0$，...，N，一组有序基 $\{e_j^n\}_{j=1,\ ...,\ \dim(V_n)}$，属于 V_n。由此得到 G上的整体坐标：

$$x_n^j := \big(\widetilde{e_j^n}.S\big)(x) , \qquad n=0,\dots,N , \quad j=1,\dots,\dim(V_n) . \tag{4.4}$$

我们在每个 V_n 上选取一个标量积，并令 $|.|_n$ 为相应的欧几里得范数。我们始终通过庞加莱-比尔霍夫-维特线性同构，将泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$与 $\mathfrak{g}$的对称代数 $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$等同起来。给定一个元素 $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$，记 A^* 为左不变微分算子 $\widetilde{A}$关于 $L^2\big(G,\ \mathrm{d}_G\big)$的内积的形式伴随。我们显然可以观察到$\widetilde{\ }$，$A^*$ 仍然是左不变的。事实上，对于 ψ，$\varphi \in C_c^\infty(G)$ 和 $g \in G$，有

$$\langle L_g^\star \widetilde{A}^* \psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \widetilde{A} L_{g^{-1}}^\star \varphi \rangle = \langle \psi, L_{g^{-1}}^\star \widetilde{A} \varphi \rangle = \langle \widetilde{A}^* L_g^\star \psi, \varphi \rangle .$$

此外，我们对 $L^2(G,\ \mathrm{d}_G)$ 上的伴随映射提出以下要求，使其与有序分解 (4.3) 相容：

$$\forall\, n=0,\dots,N, \quad \forall\, A \in \mathfrak{S}(V_n) , \quad \exists\, B \in \prod_{k=0}^{n} \mathfrak{S}(V_k) \quad \text{such that} \quad \widetilde{A}^* = \widetilde{B} . \tag{4.5}$$

现在我们转而讨论关于函数 S的正则性假设。

定义 4.0.5 *([BG15] 定义 2.24 第 26 页)* 设

$$\mathbf{E} := \exp\{iS\} . \tag{4.6}$$

若存在一个分解 *(4.3)* 及其对应的坐标系 *(4.4)*，使得对于每个 $n=0,\dots,N$，都存在一个元素 $X_n \in \mathfrak{S}(V_n) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$，其对应的乘子 α_n 定义为，则称温和对 (G,S) 是**容许的**

$$\widetilde{X}_n \mathbf{E} =: \alpha_n \mathbf{E} , \tag{4.7}$$

满足以下性质：
(i) 存在 $C_n > 0$ 和 $\rho_n > 0$ 使得：

$$|\alpha_n| \geq C_n\big(1 + |x_n|_n^{\rho_n}\big) ,$$

其中 $x_n := (x_n^j)_{j=1\ ,\dots,\text{维数}(V_n)}$。
(ii) 对于所有 $n=0$、.....、N，存在一个温和函数 $0 < \mu_n \in C^\infty(G)$，使得：

(ii.1) 对于每个 $A \in \prod_{k=0}^{n} \mathfrak{S}(V_k) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$，存在 $C_A > 0$，使得：

$$\left|\widetilde{A}\,\alpha_n\right| \;\leq\; C_A\;|\alpha_n|\;\mu_n\;. \tag{4.8}$$

(ii.2) 对所有 $r \leq n$，函数 μ_n 都与变量 $\{x_r^j\}_{j=1,\dots,\dim(V_r)}$ 无关：

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial x_r^j} \;=\; 0\,,\quad \forall r \leq n\,,\;\forall j = 1,\dots,\dim(V_r)\;. \tag{4.9}$$

根据第30页的命题2.28及其证明，在 [BG15], 中，我们有

命题4.0.3 对于每个 $N \in \mathbb{N}$，都存在一个微分算子 $\mathbf{D}$ 和一个整数 K，使得对于每个 M 和 $F \in \mathcal{B}_K^M(\mathbb{L})$，都有

(i)

$$|\mathbf{D}^{\star}F| \;\leq\; |F|_{K,M}\;\mathfrak{d}^{-N}$$

and

(ii)

$$\mathbf{D}\left(e^{iS}\right) \;=\; e^{iS}\;.$$

令 $(\mathfrak{B}, ||\;||)$ 为一个巴拿赫空间，我们可推出：

命题4.0.4 对于每个 $N \in \mathbb{N}$，都存在一个微分算子 $\mathbf{D}$ 和一个整数 K，使得对于每个 M 和 $F \in \mathcal{B}_K^M(\mathbb{L}, \mathfrak{B})$，都有

(i)

$$||\mathbf{D}^{\star}F|| \;\leq\; ||F||_{K,M}\;\mathfrak{d}^{-N}$$

and

(ii)

$$\mathbf{D}\left(e^{iS}\right) \;=\; e^{iS}\;.$$

推论4.0.1 设 $\mu \in \mathcal{B}^N(\mathbb{L})$，且 K 充分大。那么，对于每个 $M \in \mathbb{N}$，映射

$$\mathcal{D}(\mathbb{L}, \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B} : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{L}} \mu\, e^{iS}\,\varphi \tag{4.10}$$

关于 $\mathcal{D}$ 由 $\mathcal{B}_K^{M+\epsilon}(\mathbb{L}, \mathfrak{B})$诱导的拓扑是连续的。
因此，对于每个足够大的 K，该映射

$$\int \mu\, e^{iS} \;:\; \mathcal{D}(\mathbb{L}, \mathfrak{B}) \longrightarrow \mathfrak{B} : F \mapsto \langle \int \mu\, e^{iS}\,,\, F \rangle\;.$$

以唯一的方式延拓为连续线性映射：

$$\widetilde{\int \mu\, e^{iS}} \;:\; \mathcal{B}_K^M(\mathbb{L}, \mathfrak{B}) \longrightarrow \mathfrak{B} : F \mapsto \langle \widetilde{\int \mu\, e^{iS}}\,,\, F \rangle\;.$$

.

证明。对于每个足够大的 N'，有：

$$\left\|\int_{\mathbb{L}} \mu e^{iS}\varphi\right\| \;=\; \left\|\int_{\mathbb{L}} \mu \mathbf{D}(e^{iS})\varphi\right\| \;=\; \left\|\int_{\mathbb{L}} e^{iS}\mathbf{D}^{\star}(\mu\varphi)\right\| \;\leq\; \int_{\mathbb{L}} ||\mathbf{D}^{\star}(\mu\varphi)||$$
$$\leq\; ||\mu\varphi||_{K,N'} \int \mathfrak{d}^{-N'} \;=\; C'||\mu\varphi||_{K,N'}\;.$$

现在，有

$$||\mu\varphi||_{K,N'} \;=\; \sup \mathfrak{d}^{-N'}||\tilde{X}(\mu\varphi)|| \;=\; \sup \mathfrak{d}^{-N'}||\sum_{(X)} \tilde{X}_{(1)}(\mu)\tilde{X}_{(2)}(\varphi)||$$
$$\leq\; \sum_{(X)} \sup \mathfrak{d}^{-N'}\mathfrak{d}^{N} C_{(1)}||\tilde{X}_{(2)}(\varphi)|| \;\leq\; C''||\varphi||_{K,M+\epsilon} \sup \mathfrak{d}^{N-N'+M+\epsilon}$$

当 $N' > N + M + \epsilon$ 时，该值即有界。这意味着对于每个 ϵ，都有

$$\left|\left|\int_{\mathbb{L}} \mu e^{iS}\varphi\right|\right| \leq C||\varphi||_{K,M+\epsilon} .$$

■

4.0.3 变形

我们现在考虑 $\mathfrak{B}$ 为一个巴拿赫代数。

定义 4.0.6 我们考虑以下连续双线性映射

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \quad C(\mathbb{L},\mathfrak{B}) \quad \times \quad C(\mathbb{L},\mathfrak{B}) \to C(\mathbb{L}\times\mathbb{L}, C(\mathcal{F},\mathfrak{B})) : & \quad (4.11)\\ (F_1,F_2) \quad \mapsto [\,(x_1,x_2)\mapsto [x\mapsto F_1(xx_1).F_2(xx_2) \;= & \quad (4.12)\\ \mu_{\mathfrak{B}}(R^\star\otimes R^\star_{(x_1,x_2)}(F_1\otimes F_2))(x)\,]\,] & \quad (4.13) \end{aligned}$$

$\mu_{\mathfrak{B}}$ 表示 $\mathfrak{B}$ 中的乘法。

引理 4.0.2 映射 *(4.11)* 对 $\mathcal{B}^N_p(\mathbb{L},\mathfrak{B})\times \quad \mathcal{B}^N_p(\mathbb{L},\mathfrak{B})$ 的限制在 $\mathcal{B}^{q+N}{}^{,q+N}_{p-q\;p-q},(\mathbb{L}\times\mathbb{L},\mathcal{B}^{2N}_q(\mathbb{L},\mathfrak{B}))$中分别连续：

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \quad \mathcal{B}^N_p(\mathbb{L},\mathfrak{B}) \quad \times \quad \mathcal{B}^N_p(\mathbb{L},\mathfrak{B}) \to \mathcal{B}^{q+N,q+N}_{p-q,p-q}(\mathbb{L}\times\mathbb{L},\mathcal{B}^{2N}_q(\mathbb{L},\mathfrak{B})) : & \quad (4.14)\\ (F_1,F_2) \quad \mapsto [\,(x_1,x_2)\mapsto [x\mapsto F_1(xx_1).F_2(xx_2)\,]\,] & \quad (4.15) \end{aligned}$$

对于每个 $q \leq p$。

证明。 $\mathcal{B}^{N_1}_{q_1}(\mathbb{L},\ \mathfrak{B}) \ni f$ 上的一般半范数由 $(X\in\mathcal{U}_{q_1}(\mathfrak{L}))$ 给出：

$$||f||^{N_1}_{q_1} := \sup_x\{\mathfrak{d}^{-N_1}_{\mathbb{L}}(x)||\tilde{X}_x(f)||\} .$$

$\mathcal{B}^{N_2,\ N'_2}_{q_2\ q'_2,}(\mathbb{L}\times\mathbb{L},\ \mathcal{B}^{N_1}_{q_1}(\mathbb{L},\ \mathfrak{B})) \ni \Phi$ 上的一般半范数因此由 $(Y\in\mathcal{U}_{q_2+q'_2}(\mathfrak{L}\oplus\mathfrak{L}))$ 给出：

$$||\Phi||^{N_2,N'_2}_{q_2,q'_2} := \sup_{(x_1,x_2)}\{\mathfrak{d}^{-N_2,-N'_2}_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}}(x_1,x_2)||\tilde{Y}_{(x_1,x_2)}(\Phi)||^{N_1}_{q_1}\} .$$

现在考虑元素 $\mathcal{R}(F_1,\ F_2) \in C^{q_2,\ q'_2}(\mathbb{L}\times\mathbb{L},\ C^{q_1}(\mathbb{L},\ \mathfrak{B}))$。我们希望估计以下量：

$$\sup_{(x_1,x_2)}\{\mathfrak{d}^{-N_2,-N'_2}_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}}(x_1,x_2)||\tilde{Y}_{(x_1,x_2)}(\mathcal{R}(F_1,F_2))||^{N_1}_{q_1}\} .$$

is b有界。我们首先注意到，对于每个 $\vec{x}\in\mathbb{L}\times\mathbb{L}$和 $\mathcal{R}(F_1,\ F_2) \in C^q(\mathbb{L}\times\mathbb{L},\ \mathfrak{B}\qquad\qquad)$:

$$\tilde{Y}_{\vec{x}}\mathcal{R}(F_1,F_2) \;=\; \mathcal{R}(\tilde{Y}(F_1,F_2))(\vec{x}) .$$

因此：

$$||\tilde{Y}_{(x_1,x_2)}(\mathcal{R}(F_1,F_2))||^{N_1}_{q_1} \;=\; ||\mathcal{R}(\tilde{Y}(F_1,F_2))(x_1,x_2)||^{N_1}_{q_1}$$

这等于

$$\sup_x\{\mathfrak{d}^{-N_1}_{\mathbb{L}}(x)||\tilde{X}_x\left(\mathcal{R}(\tilde{Y}(F_1,F_2))(x_1,x_2)\right)|| .$$

考虑形式为 $Y \;=\; Y_1\otimes Y_2$ 的 Y，注意到

$$\tilde{X}_x\left(\mathcal{R}(\tilde{Y}(F_1,F_2))(x_1,x_2)\right) \;=\; \left((\mathtt{Ad}_{x_1^{-1}}X)Y_1\otimes(\mathtt{Ad}_{x_2^{-1}}X)Y_2\right)^{\sim}_{\vec{x}}\mathcal{R}(F_1,F_2)(x) .$$

因此

$$\begin{aligned}&\left|\left|\tilde{X}_x\left(\mathcal{R}(\tilde{Y}(F_1,F_2))(x_1,x_2)\right)\right|\right| \leq\\&\left|\left|C\mathfrak{d}_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}}^{|X|,|X|}(x_1,x_2)\mathcal{R}((X\otimes X.Y)(F_1,F_2))(x_1,x_2)(x)\right|\right| \leq\\&C'\left|\left|\mathfrak{d}_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}}^{q_1,q_1}(x_1,x_2)\mathcal{R}((X\otimes X.Y)(F_1,F_2))(x_1,x_2)(x)\right|\right| \leq\\&C'\mathfrak{d}_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}}^{q_1,q_1}(x_1,x_2)\,\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^{N}(xx_1)\,\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^{N}(xx_2)\,||F_1||_{q_1+q_2}^{N}||F_2||_{q_1+q_2'}^{N} \leq\\&C''\mathfrak{d}_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}}^{q_1+N,q_1+N}(x_1,x_2)\,\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^{2N}(x)\,||F_1||_{q_1+q_2}^{N}||F_2||_{q_1+q_2'}^{N}\,.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&|\tilde{Y}_{(x_1,x_2)}(\mathcal{R}(F_1,F_2))|_{q_1}^{N_1}\\\leq\;& C'''||F_1||_{q_1+q_2}^{N}||F_2||_{q_1+q_2'}^{N}\mathfrak{d}_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}}^{q_1+N,q_1+N}(x_1,x_2)\;\sup_x\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^{2N-N_1}(x)\end{aligned}$$

由此得到估计:

$$\begin{aligned}&\sup_{(x_1,x_2)}\{\mathfrak{d}_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}}^{-N_2,-N_2'}(x_1,x_2)|\tilde{Y}_{(x_1,x_2)}(\mathcal{R}(F_1,F_2))|_{q_1}^{N_1}\}\\\leq\;& C_j||F_1||_{q_1+q_2}^{N}||F_2||_{q_1+q_2'}^{N}\times\\\times\;&\sup_{(x_1,x_2)}\{\mathfrak{d}_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}}^{(-N_2+q_1+N,-N_2'+q_1+N)}(x_1,x_2)\}\;\sup_x\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^{2N-N_1}(x)\end{aligned}$$

由此得到有限性条件:

$$\begin{array}{rcl}q_1+q_2 & \leq & p\\q_1+q_2' & \leq & p\\q_1+N & \leq & N_2\\q_1+N & \leq & N_2'\\2N & \leq & N_1\end{array}$$

这一设定

$$q\;:=\;\min\{q_2,q_2'\}$$

便得到了所述结论。 ■

于是我们得到

推论 4.0.2 设 $A\in\mathcal{B}^{N_0}(\mathbb{L}^2,\mathbb{C})$。设 $q\in\mathbb{N}$。那么，只要 p 足够大，对于所有$F_1,F_2\in\mathcal{B}_p^N(\mathbb{L},\mathfrak{B})$，振荡积分都会给出一个属于 $\mathcal{B}_q^{2N}(\mathbb{L},\mathfrak{B})$ 的元素:

$$\star_S\;=\;\widetilde{\int_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}}A\,e^{-iS}}:\mathcal{B}_p^N(\mathbb{L},\mathfrak{B})\times\mathcal{B}_p^N(\mathbb{L},\mathfrak{B})\to\mathcal{B}_q^{2N}(\mathbb{L},\mathfrak{B}):(F_1,F_2)\mapsto F_1\star_S F_2\,.$$

此外，乘积 $\star_S$ 是双线性的且分别连续。
特别地，对于 $p=\infty$，有

$$\star_S\;=\;\widetilde{\int_{\mathbb{L}\times\mathbb{L}}A\,e^{-iS}}:\mathcal{B}_\infty^0(\mathbb{L},\mathfrak{B})\times\mathcal{B}_\infty^0(\mathbb{L},\mathfrak{B})\to\mathcal{B}_\infty^0(\mathbb{L},\mathfrak{B})\,.$$

定义 4.0.7 我们称推论 *4.0.2* 中给出的乘积 $\star_S$ 为**弱结合**的，如果对于所有 $\psi_1,\psi_2,\psi_3\in\mathcal{D}(\mathbb{L},\mathfrak{B})$，都有$(\psi_1\star_S\psi_2)\star_S\psi_3=\psi_1\star_S(\psi_2\star_S\psi_3)$属于 $\mathcal{B}_\infty^0(\mathbb{L},\mathfrak{B})$。

命题 4.0.5 弱结合性意味着强结合性，也就是说，当满足弱结合性时，对所有元素$(F,F',F'')\in\mathcal{B}_p^N(\mathbb{L},\mathfrak{B})\times\mathcal{B}_p^N(\mathbb{L},\mathfrak{B})\times\mathcal{B}_p^N(\mathbb{L},\mathfrak{B})$，存在等式$(F\star_S F')\star_S F''=F\star_S(F'\star_S F'')$成立于 $\mathcal{B}_q^{4N+1}(\mathbb{L},\mathfrak{B})$ 中，其中某个 q。

证明。这由测试函数在 $\mathcal{B}$型空间中的稠密性得出。事实上，设 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$、 $\{\phi'_{n'}\}_{n'\in\mathbb{N}}$ 和$\{\phi''_{n''}\}_{n''\in\mathbb{N}}$是测试函数序列，分别收敛于 F, F'和 F''，且收敛于 $\mathcal{B}_p^{N+\epsilon}(\mathbb{L},\mathfrak{B})$ 中。由分别连续性可知,

$$F\star_S F' \;=\; \lim_{n,n'}(\phi_n\star_S\phi_{n'})$$

其中，右端的极限是在 $\mathcal{B}_q^{2(N+\epsilon)}(\mathbb{L},\mathfrak{B})$ 中取的，且 $q<<p$。现在，由于

$$\mathcal{B}_p^N(\mathbb{L},\mathfrak{B})\;\subset\;\mathcal{B}_q^{2(N+\epsilon)}(\mathbb{L},\mathfrak{B})\;,$$

收敛 $\lim_{n''}\phi_{n''}\;=\;F''$ 在 $\mathcal{B}_q^{2(N+\epsilon)}(\mathbb{L},\mathfrak{B})$ 中同样成立。因此，对每个 $q'<<q<<p$，再次由分别连续性可得

$$(F\star_S F')\star_S F''\;=\;\lim_{n,n',n''}(\phi_n\star_S\phi'_{n'})\star(\phi''_{n''})$$

其中，右端的极限是在 $\mathcal{B}_{q'}^{4(N+\epsilon)}(\mathbb{L},\mathfrak{B})$ 中取的。

对 $F\star_S(F'\star_S F'')$ 作同样的论证，可得

$$F\star_S(F'\star_S F'')\;=\;\lim_{n,n',n''}\phi_n\star_S(\phi'_{n'}\star\phi''_{n''})\;.$$

由弱结合性即可得出结论。 ■

现在我们引入施瓦茨空间的概念，这一概念将在后文中发挥重要作用。

定义 4.0.8 我们将 $\mathbb{L}$ 的施瓦茨空间 定义为以下函数空间:

$$\mathcal{S}(\mathbb{L})\;=\;\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{L})\mid\forall X\in\mathcal{U}(\mathfrak{L}),N\in\mathbb{R}:\;|\mathfrak{d}^N\tilde{X}(\varphi)|<\infty\}\;.$$

当然，施瓦茨空间在以下半范数下是一个弗雷歇空间:

$$|\varphi|_{J,N}|\;:=\;|\varphi|_J^{-N}$$

采用定义 4.1 中的记号。注意，此处 N 是变量，而对于 $\mathcal{B}$ 型空间则并非如此。

还要注意,

$$\mathcal{S}(\mathbb{L})\;=\;\cap_{N,q\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_q^{-N}(\mathbb{L})$$

并且显然存在一个取值于 $\mathfrak{B}$ 的类似形式。

命题 4.0.6 施瓦茨空间 $\mathcal{S}(\mathbb{L})$ 是$(\mathcal{B}_\infty^0(\mathbb{L})\;\star_S)$中的一个双边理想。

证明。证明与公式 4.14 的证明类似。我们考虑 $F\in\mathcal{B}_\infty^0(\mathbb{L})$，并将其视为 $\mathcal{B}_(^0\mathbb{L})$ 中的一个元素，以及 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{L})$。与之前一样，我们考虑基本元素 $Y\in\mathcal{U}_{q_1}(\mathfrak{L})\otimes\mathcal{U}_{q_2}(\mathfrak{L})$ 和 $X\in\mathcal{U}_q(\mathfrak{L})$。于是我们对以下量进行估计:

$$\sup_{(x_1,x_2)\in\mathbb{L}^2}\{\Big|\tilde{Y}_{(x_1,x_2)}\mathcal{R}(F\otimes\varphi)\Big|_{X,N}\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^{-N_1}(x_1)\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^{-N_2}(x_2)\}\tag{4.16}$$

其中，我们首先观察到 $\mathcal{R}(F\otimes\varphi)$ 属于 $\mathcal{S}(\mathbb{L})$。

同样，沿用之前的思路，我们有

$$\tilde{X}_x\left(\tilde{Y}_{(x_1,x_2)}\mathcal{R}(F\otimes\varphi)\right)\;=\;\mathcal{R}\left[(\mathtt{Ad}_{x_1^{-1}}X\otimes\mathtt{Ad}_{x_2^{-1}}X).Y\right]^\sim_{(xx_1,xx_2)}(F\otimes\varphi)\;.$$

因此，上述表达式的模可由以下形式的元素界定

$$C\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^q(x_1)\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^q(x_2)|F|_{q+q_1}|\varphi|_{q+q_2,N'}\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^{-N'}(x_2)\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^{-N'}(x)$$

对于任意 $N'\in\mathbb{N}_0$。

因此，为了对 (4.16) 进行估计，我们需要对以下形式的表达式进行估计

$$\mathfrak{d}_{\mathbb{L}}^{-N_1+q}(x_1)|F|_{q+q_1}|\varphi|_{q+q_2,N}\;.$$

因此，我们有， $\mathcal{R}$ 到 $\mathcal{B}_p^0(\mathbb{L})\times\mathcal{S}(\mathbb{L})$ 的限制取值于

$$\mathcal{B}_{p-q}^{q,0}(\mathbb{L}^2,\mathcal{B}_{q'}^{-N'}(\mathbb{L}))$$

对于所有 q， q'， $N'\in\mathbb{N}_0$（N'足够大时）。 ■

第5章

左不变非形式星乘积与 Drinfel'd-Iwasawa 扭曲

5.1 对称空间的酉表示

定义 5.1.1 设(M, s)是一个对称空间，其平移对合李群为(G, σ)。(M, s)的一个**酉表示** 是一个三元组$(\mathcal{H}, \mathbf{U}\ \mathbf{\Sigma})$，其中 $\mathcal{H}$ 是一个可分希尔伯特空间，$\mathbf{U}$ 是李群 G 在 $\mathcal{H}$ 上的一个酉（强连续）表示 $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U} : G \to GL(\mathcal{H}) \ ,$$

并且 $\mathbf{\Sigma}$ 是一个酉对合:

$$\mathbf{\Sigma} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

使得对于每个 $g \in G$:

$$\mathbf{U}(\sigma g) \ = \ \mathbf{\Sigma}\, \mathbf{U}(g)\, \mathbf{\Sigma} \ .$$

表示 $(\mathcal{H},\ \mathbf{\Omega})$称为**不可约**，当且仅当其底层群表示$(\mathcal{H},\ \mathbf{U})$ i $s.$

命题 5.1.1 设$(\mathcal{H},\ \mathbf{U}\ \mathbf{\Sigma})$是对称空间$(M,\ s)$的酉表示。设 K 是 G 中基点 $o \in M$ 的各向同性子群，并考虑 G-齐性空间同构:

$$G/K \to M : gK \mapsto g.o \ .$$

那么，

(i) 映射:

$$\mathbf{\Omega} : G \to U(\mathcal{H}) : g \mapsto \mathbf{\Omega}(g) \ := \ \mathbf{U}(g)\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}(g^{-1})$$

它在 G 中 K 的每个左侧类上都是常值的。因此，它下降到 $M = G/K$ ，成为一个仍记作$\mathbf{\Omega}$的映射:

$$\mathbf{\Omega} : M \to U(\mathcal{H}) : g.o \mapsto \mathbf{\Omega}(g) \ .$$

(ii) 映射 $\mathbf{\Omega}$ 满足以下性质:

$$\mathbf{\Omega}(x)\mathbf{\Omega}(y)\mathbf{\Omega}(x) \ = \ \mathbf{\Omega}(\mathbf{s}_x y)$$

对于所有 $x, y \in M$。

5.1.1 群型对称空间的表示

对称空间的表示这一概念可用一种自然的方式定义：它是其平移群的表示，并且与作为齐性空间的对称空间结构相容。

定义 5.1.2 群型对称空间的平方可积不可约酉表示M是一个三元组 $(\mathcal{H},\ U,\ \Sigma)$ 其中

- $\mathcal{H}$ 是一个可分希尔伯特空间，
- U 是作用在 $\mathcal{H}$上的 G 的酉表示，
- 存在一个 G不变的稠密 *Fr´echet* 子空间 $\mathcal{H}^\infty$ ，它是 $\mathcal{H}$ 的子空间；并且存在一个 $\mathcal{H}^\infty$ 的自同构 Σ ，它与 $U(K)$可交换。

使得

(i) 以下映射

$$\Omega : G/K \to \mathtt{Aut}(\mathcal{H}^\infty) : gK \mapsto U(g)\Sigma U(g^{-1})\ .$$

是连续且单射的。

(ii) 表示 U 在 $\mathbb{S}$ 上的限制是不可约且平方可积的。

注 5.1.1 注意，映射 Ω 必然是 G-等变的。

给定这样一个 表示的群型对称空间 M，由于 Ω 连续，我们考虑映射

$$\Omega : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}^\infty) : f \mapsto \int_{\mathbb{S}} f(x)\,\Omega(x)\,\mathrm{d}x$$

其中， M 上的测度是对 $\mathbb{S}$ 上的左不变Haar测度进行推送所得的测度，而 $\mathcal{B}(\mathcal{H}^\infty)$表示 $\mathcal{H}^\infty$上的连续线性算子代数。

定义 5.1.3 如果表示具有迹性，则映射Ω 可延拓为从 $L^2(M)$ 到 $\mathcal{H}$上的 *Hilbert-Schmidt* 算子代数 $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ 的酉（G-等变）同构：

$$\Omega : L^2(M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^2(\mathcal{H})\ .$$

注 5.1.2 在具有迹性的情形下，Ω 的逆元 σ_Ω 由下式给出：

$$\sigma_\Omega(A)(x) \ = \ \mathrm{Tr}(A\Omega(x))$$

将其理解为弱迹分布。

5.1.2 收缩对

收缩对这一概念涉及一对具有共同对称性的群型对称空间。通常，我们考虑其中一个空间是另一个空间的曲率收缩的情形。如果它们在表示层面也共享这一共同对称性，那么它们就构成一对收缩对。下文中，我们将利用收缩对这一概念，在函数层面以某种方式逆转收缩过程。

设 $M_1 = G_0/K_1$ 和 $M_2 = G_1/K_2$ 是同一抽象李群 $\mathbb{S}$ 上的群型对称空间。设 $(\mathcal{H}_j,\ U_j,\ \Sigma_j)$ $(j = 1,\ 2)$ 是 M_j 的一个平方可积不可约酉表示。

分别与两个表示相关联的 Duflo-Moore 算子平方根的定义域。对每个 $x \in \mathbb{S}$，令：

艾玛.....5 1 左

$$\phi_x^{(1)} := U_1(x)\phi_e^{(1)} \quad \phi_x^{(2)} := U_2(x)\phi_e^{(2)} .$$

那么，对于所有 $\varphi \in \mathcal{H}_1$ 和 $\psi \in \mathcal{H}_2$，函数

$$\mathbb{S} \to \mathbb{C} : x \mapsto <\varphi, \phi_x^{(1)}>_1 <\phi_x^{(2)}, \psi>_2 \tag{5.1}$$

（其中 $<$、$>_j$ 表示 在 $\mathcal{H}_j$ 上的内积）相对于左不变*Haar*测度 $\mathrm{d}x$在 $\mathbb{S}$ 上可积 .

证明。对于表示的平方可积性（限制到 $\mathbb{S}$），柯西–施瓦茨不等式给出了该断言。

■

我们将由上述矩阵系数定义的从 $\mathcal{H}_2$ 到 $\mathcal{H}_1$ 的映射记为 T，在 bra-ket 记号中，它表示为以下弱积分：

$$[T : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1] := \int_{\mathbb{S}} |\phi_x^{(1)}><\phi_x^{(2)}| \, \mathrm{d}x .$$

命题5.1.2 映射 T 要么是平凡的，要么是 $\mathbb{S}$-表示的酉等价（相差一个非零常数因子）。

证明。考虑映射

$$[T^* : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2] := \int_{\mathbb{S}} |\phi_x^{(2)}><\phi_x^{(1)}| \, \mathrm{d}x .$$

容易验证， T 和 T^* 是交织算子：

$$U_1 T = T U_2 \quad \text{and} \quad U_2 T^* = T^* U_1$$

因此我们有

$$T^*T U_2 = T^* U_1 T = U_2 T^* T .$$

因此，自伴元素 T^*T 与不可约表示 U_2可交换。由此即可得出舒尔引理。

■

定义 5.1.4 表示群型对称空间 M_1 和 M_2 构成一个收缩对（M_1, M_2），若表示 $\mathbb{S}$的表示 U_0 和 U_1 的限制幺正等价。

根据命题*5.1.2*（它给出了一个显式的交织算子），在这种情况下，我们因此假设

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 =: \mathcal{H} .$$

我们将看到，在许多情况下，群型对称空间的几何可以由一个表示相当充分地编码。因此，收缩对的理念，正如我们稍后将看到的，是从一个“良好”的群型对称空间出发，获得一个更丰富、更复杂的群型对称空间的几何。所谓“获得”，是指在算子代数层面找到某种等价关系，使其从这个“良好”的空间延伸到另一个空间。

5.2 岩泽因子的等变量子化 $\mathbb{S} = AN$

本章节所展示的结果摘自 [Bi02] 和 [BG15], ，但第一小节除外，它属于经典内容。

5.2.1 Weyl 量子化

我们考虑平面 $\mathbb{R}^2 = \{x = (q,\ p)\}$。对于每个 $\tilde{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$，我们定义

$$\Omega_W(x)\tilde{u}(q_0) = e^{2i/\theta(q-q_0)\cdot p}\tilde{u}(2q - q_0)$$

其中 μ 是一个非零实参数。对于每个 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$，我们考虑

$$\Omega_W(\varphi)\tilde{u}(q_0) := \int \varphi(x)\Omega_W(x)\tilde{u}(q_0)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^{i/\theta(q-q_0)\cdot p}\varphi(\frac{q_0+q}{2}, p)\,\tilde{u}(q)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,. \tag{5.2}$$

我们用 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 表示 $\mathbb{R}^2$上快速递减光滑函数的通常施瓦茨空间。于是有如下经典结果：

定理5.2.1 设 $\theta \in \mathbb{R}_0$。则，

(i) 公式 *(5.2)* 定义了一个酉同构（相差一个常数）：

$$\Omega_W : L^2(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}^2(L^2(\mathbb{R})) : \varphi \mapsto \Omega_W(\varphi)\,.$$

(ii) 对所有 $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$，有符号复合公式：

$$\left(\Omega_\theta^W\right)^*\left(\Omega_{\theta,\lambda}^W(u)\Omega_{\theta,\lambda}^W(v)\right)(x) =: u \star_\theta^W v(x) = \frac{1}{\theta^2}\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} e^{i/\theta S_W(x,y,z)}u(y)\,v(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中，令 $\omega := \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$：

$$S_W(x,y,z) := \omega(x,y) + \omega(y,z) + \omega(z,x)\,.$$

(iii) 乘积 $\star_\theta^W$在施瓦茨空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$上封闭。因此，代数 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)\ \star_\theta^W)$ 是 *Fr´echet* *et.*

5.2.2 $\mathbb{S}$的量子化

现在我们考虑在章节 1.2.2 中实现的仿射群 $\mathbb{S}$。

记号 5.2.1 设 $\mathbf{m} \in \mathcal{B}_\infty^N(\mathbb{S}, \mathbb{R})$，$\mathbf{m} > 0$ 且 $\tilde{E}\mathbf{m} = 0$ （即$\mathbf{m}$ 仅取决于变量 $a \in A$）。

1. 我们用

$$\mathcal{F}\varphi(a,\xi) := \int_N e^{-in\xi}\varphi(a,n)\,\mathrm{d}n$$

N变量的偏傅里叶变换。

2. 我们考虑 $\mathbb{R}^2_{(a,\xi)}$上的微分同胚单参数族：

$$\phi_\theta(a,\xi) := (a, \frac{2}{\theta}\sinh(\frac{\theta}{2}\xi))\,.$$

3. 令

$$\mathbf{m}_\theta(\xi) := \mathbf{m}(\frac{\theta}{2}\mathrm{arcsinh}(2\xi))\,.$$

4. 对于每个 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$，我们定义

$$T_{\theta,\mathbf{m}}\varphi := \mathcal{F}^{-1} \circ \mathbf{m}_\theta^{-1} \circ (\phi_\theta^{-1})^\star \circ \mathcal{F}(\varphi)\,.$$

5. 我们用 $L^2_{\theta,\ \mathbf{m}}(\mathbb{S})$ 表示 $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ 在以下内积下的希尔伯特完备化：

$$< u, v >_{\theta,\mathbf{m}} := \int (\phi_\theta^\star \mathbf{m}_\theta \mathcal{F}\overline{u})\,.\,(\phi_\theta^\star \mathbf{m}_\theta \mathcal{F}v)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}a\,.$$

6. 对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}_0$，我们设

$$\mathcal{H}_\lambda := L^2(A, e^{2\lambda a}\,\mathrm{d}a)\,.$$

引理 5.2.1 设 $r\in\mathbb{R}$。那么，对于所有 $k\geq 2(1+r)$ 和 $N\in\mathbb{Z}$，算子

$$\mathbf{A}_r \;:=\; \mathcal{F}^{-1}\circ\left(1+\frac{\theta^2\xi^2}{4}\right)^r\circ\mathcal{F}$$

从 $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ 延拓为一个连续线性映射：

$$\mathbf{A}_r \;:\; \mathcal{B}_k^N(\mathbb{S})\to\mathcal{B}_{k-2(1+r)}^{N+2}(\mathbb{S}).$$

特别地，映射 $\mathbf{A}_r$ 连续地保持施瓦茨空间 $\mathcal{S}(\mathbb{S})$。

证明。对于 $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{S})$，有：

$$\mathbf{A}_r\varphi(a_0,n_0) \;:=\; \int e^{in_0\xi}\left(1+\frac{\theta^2\xi^2}{4}\right)^r e^{-in\xi}\varphi(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi\;.$$

注意到，对每个 $m\in\mathbb{N}$，都有：

$$(1-\partial_n^2)^m\frac{1}{(1+\xi^2)^m}\,e^{-in\xi} \;=\; e^{-in\xi}\;,$$

通过分部积分可得：

$$\mathbf{A}_r\varphi(a_0,n_0) \;:=\; \int e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,e^{-in\xi}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi$$

with

$$\chi_m(\xi) \;=\; \frac{\left(1+\frac{\theta^2\xi^2}{4}\right)^r}{(1+\xi^2)^m}\quad\text{and}\quad \varphi_m \;:=\; ((1-\tilde{E}^2)^m\varphi)\;.$$

由于

$$\tilde{H} \;=\; \partial_{a_0}-2n_0\partial_{n_0}\;,$$

具有

$$\begin{aligned}
\tilde{H}\mathbf{A}_r\varphi(a_0,n_0) \;&=\; \int e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,e^{-in\xi}\partial_{a_0}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi-2in_0\int\xi\,e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,e^{-in\xi}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,e^{-in\xi}\partial_{a_0}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi+2n_0\int e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,\partial_n(e^{-in\xi})\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,e^{-in\xi}\partial_{a_0}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi-2n_0\int e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,(e^{-in\xi})\tilde{E}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,e^{-in\xi}\partial_{a_0}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi+2i\int\partial_\xi(e^{in_0\xi})\chi_m(\xi)\,e^{-in\xi}\tilde{E}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,e^{-in\xi}\partial_{a_0}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi-2i\int e^{in_0\xi}\chi_m'(\xi)\,e^{-in\xi}\tilde{E}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi\\
&\quad -2\int e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,ne^{-in\xi}\tilde{E}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,e^{-in\xi}\tilde{H}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi-2i\int e^{in_0\xi}\chi_m'(\xi)\,e^{-in\xi}\tilde{E}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi\;.
\end{aligned}$$

同样，有

$$\begin{aligned}
\tilde{E}\mathbf{A}_r\varphi(a_0,n_0) \;&=\; i\int\xi\,e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,e^{-in\xi}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi\\
&= -\int e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,\partial_n(e^{-in\xi})\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int e^{in_0\xi}\chi_m(\xi)\,e^{-in\xi}\tilde{E}\varphi_m(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\xi\;.
\end{aligned}$$

62第5章。左不变非形式星乘积与德林费尔德-*Iwasawa* 扭曲˜反复迭代可得，对于每个 $X \in \mathcal{U}_k(\mathfrak{s})$， $X\mathbf{A}_r\varphi$ 都是以下形式元素的线性组合：

$$\Xi(a_0, n_0) \ := \ \int e^{in_0\xi}\chi_{X'}(\xi)\, e^{-in\xi}\tilde{X}'\varphi(a_0, n)\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}\xi$$

with

$$|X'| = k + 2m$$

且具有$\chi_{X'}$ 的形式

$$\chi_{X'}(\xi) \ = \ \frac{b_{X'}(\xi)}{(1+\xi^2)^{m-r}}$$

其中 $b_{X'} \in \mathcal{B}^0_\infty(\mathbb{R})$。
现在，我们估计变量 n 的增长。由于

$$(1-\partial_\xi^2)^j \frac{1}{(1+n^2)^j}\, e^{-in\xi} \ = \ e^{-in\xi}\ ,$$

我们对每个 $j \in \mathbb{N}$ 都有：

$$\Xi(a_0, n_0) \ := \ \int (1-\partial_\xi^2)^j \left(e^{in_0\xi}\chi_{X'}(\xi)\right) \frac{1}{(1+n^2)^j}\, e^{-in\xi}\tilde{X}'\varphi(a_0, n)\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}\xi$$

这是以下形式的元素的线性组合：

$$\Xi_\ell(a_0, n_0) \ := \ n_0^\ell \int e^{in_0\xi}\chi_{X'}(\xi)\, \frac{1}{(1+n^2)^j}\, e^{-in\xi}\tilde{X}'\varphi(a_0, n)\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}\xi$$

其中

$$\ell \le 2j$$

其中 $b_{X'}$ $\mathrm{in}\chi_{X'}$ 可能已经重新定义。观察可得

$$\mathfrak{d}_{\mathbb{S}}(a, n) \ \sim \ \sqrt{n^2 + \cosh(4a)}\ .$$

■

引理 5.2.2 *(i)* 设 $\varphi \in \mathcal{H}_\lambda$。公式

$$(U_{\theta,\lambda}(a, n)\varphi)(a_0) \ := \ e^{-\lambda a + \frac{i}{\theta}e^{2(a-a_0)}n}\varphi(a_0 - a)$$

定义了 $\mathbb{S}$ *on* $\mathcal{H}_\lambda$ 上的一个不可约酉表示。
(ii) 设

$$\Lambda(a) \ := \ e^{-\lambda a}\ .$$

则乘以 Λ 的乘法算子：

$$m_\lambda : \varphi \mapsto \Lambda\varphi$$

定义了 $\mathbb{S}$-表示之间的一个酉等价：

$$\begin{aligned} m_\lambda &: \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_\lambda \\ m_\lambda U_{\theta,0} m_\lambda^{-1} \ &= \ U_{\theta,\lambda}\ . \end{aligned}$$

(iii) 公式

$$\Sigma_{\mathbf{m},\lambda}\varphi(a_0) \ := \ \mathbf{m}(a_0)\Lambda^2(a_0)\varphi(-a_0) \ = \ \mathbf{m}(a_0)e^{-2\lambda a_0}\varphi(-a_0)$$

定义了一个（可能无界的）可逆算子：

$$\Sigma_{\mathbf{m},\lambda} : \mathcal{H}_\lambda \to \mathcal{H}_\lambda$$

该 与 $(\mathcal{H}_\lambda, U_{\theta,\lambda})$ 一起构成一个平方可积酉不可约表示 ：

$$\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda} : \mathbb{M} \to U(\mathcal{H}_\lambda)$$

对称空间 $\mathbb{M}$。

命题 5.2.1 *(i)* 映射 T_θ^{-1}，$\mathbf{m}$ 保持施瓦茨空间不变：

$$T_{\theta,\mathbf{m}}^{-1}\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)\ .$$

(ii) 映射

$$\varphi \mapsto \Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(\varphi)\ :=\ m_\Lambda\left(\Omega_\theta^W T_{\theta,\mathbf{m}}^{-1}(\varphi)\right) m_{\Lambda^{-1}}$$

从 $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ 扩展为 $\mathbb{S}$-等变酉同构，将 $L^2_{\theta,\ \mathbf{m}}(\mathbb{S})$ 映射到 $\mathcal{H}_\lambda$上的希尔伯特–施密特算子：

$$\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda} : L^2_{\theta,\mathbf{m}}(\mathbb{S}) \to \mathcal{L}^2(\mathcal{H}_\lambda)\ .$$

(iii) 根据引理 *(6.1.1) (iii)*，对每个 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$，有：

$$\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(\varphi)\ =\ \int_{\mathbb{S}} \varphi(x)\, \Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(x)\, \mathrm{d}x\ .$$

现在我们得到了与平坦海森堡情形中类似的结果。

命题 5.2.2 设

$$\mathbf{m}^0(a,n)\ :=\ \sqrt{\cosh(2a)}\ .$$

那么，
(i)

$$L^2_{\theta,\mathbf{m}^0}(\mathbb{S})\ =\ L^2(\mathbb{S})\ .$$

(ii) 对于每个 $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$，函数

$$\Omega^{-1}_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(u)\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(v))$$

不依赖于 λ。
(iii) 令

$$u \star_{\theta,\mathbf{m}} v\ :=\ \Omega^{-1}_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(u)\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(v))\ ,$$

则有

$$u \star_{\theta,\mathbf{m}} v(x)\ =\ \frac{1}{\theta^2}\int_{\mathbb{L}} A_{\mathbf{m}}(x,y,z)\, e^{\frac{1}{\theta}S_{\mathbb{M}}(x,y,z)} u(y)\, v(z)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

其中

$$A_{\mathbf{m}}((a_0,n_0),(a_1,n_1),(a_2,n_2))\ :=\ \mathbf{m}(a_0-a_1)\frac{(\mathbf{m}^0)^2(a_1-a_2)}{\mathbf{m}(a_1-a_2)}\mathbf{m}(a_2-a_0)$$

and

$$S_{\mathbb{M}}((a_0,n_0),(a_1,n_1),(a_2,n_2))\ :=\ \sinh(a_0-a_1)n_2 + \sinh(a_2-a_0)n_1 + \sinh(a_1-a_2)n_0\ .$$

(iv) 乘积 $\star_{\theta,\ \mathbf{m}}$ 在施瓦茨空间 $\mathcal{S}$（$\mathbb{S}$）上是闭的。代数 （$\mathcal{S}$（$\mathbb{S}$）$\star_{\theta,\ \mathbf{m}}$）因而是 *Fr´echet*。

记号 5.2.2 情形 $\mathbf{m}\ =\ 1$ 对我们尤为重要。因此我们采用以下记号：

$$\begin{aligned}\Sigma_{1,\lambda}\ &=:\ \Sigma_\lambda\\ \Omega_{\theta,1,\lambda}\ &=:\ \Omega_{\theta,\lambda}\\ \star_{\theta,1}\ &=:\ \star_\theta\ .\end{aligned}$$

现在，我们有三个关于将$\star_{\theta,\mathbf{m}}$扩张到 $\mathcal{B}$型空间的结果。以下命题直接由 [BG15]中定理2.43和命题2.47的校勘得出。

命题 5.2.3 设 $t, s \geq 0$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 满足 $p > 4 + 2N + t + s$ $(\mathbf{m} \in \mathcal{B}^N_\infty(\mathbb{S}))$。那么，(

i) 乘积 $\star_\theta$ ，$\mathbf{m}$ 以典范方式将形式 $\mathcal{D}(\mathbb{S}) \times \mathcal{D}(\mathbb{S})$ 扩张为双线性分别连续映射 :

$$\star_{\theta,\mathbf{m}} : \mathcal{B}^t_p(\mathbb{S}) \times \mathcal{B}^s_p(\mathbb{S}) \to \mathcal{B}^{t+s}_{p-4-2N-2t}(\mathbb{S}) \, .$$

(ii) 上述扩张满足结合律，即对于所有 $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{B}^t_\infty(\mathbb{S})$，有一个 *as*

$$(F_1 \star_{\theta,\mathbf{m}} F_2) \star_{\theta,\mathbf{m}} F_3 \; = \; F_1 \star_{\theta,\mathbf{m}} (F_2 \star_{\theta,\mathbf{m}} F_3)$$

在 $\mathcal{B}^{3t}_\infty(\mathbb{S})$ 中。

引理 5.2.3 与 $\mathbf{m} = 1$ 相关的乘积 $\star_\theta$ 对应于

$$T_\theta \varphi \; := \; \mathcal{F}^{-1} \circ (\phi_\theta^{-1})^\star \circ \mathcal{F}(\varphi) \, .$$

于是有

$$\left(T_\theta^{-1}\right)^* T_\theta^{-1} \; = \; \mathbf{A}_{-1/2}.$$

证明。由 [Bi02], 可得

$$\mathrm{Jac}_{\phi_\theta^{-1}}(\xi) \; = \; (1 + \frac{\theta^2 \xi^2}{4})^{-1/2} \, .$$

该引理可通过直接计算得出。 ■

推论 5.2.1 设定

$$\mathbf{S}_0 \; := \; \mathbf{A}_{1/4} \, ,$$

$\mathcal{S}(\mathbb{S})$上的乘积律

$$u \star^2_\theta v \; := \; \mathbf{S}_0^{-1}(\mathbf{S}_0 u \star_\theta \mathbf{S}_0 v)$$

是迹的，具体而言，

$$\int \overline{u} \star^2_\theta v \; = \; \int \overline{u} v \, .$$

证明。我们有

$$\mathrm{Tr}(\Omega_{\theta,\lambda}(\varphi_1)^* \Omega_{\theta,\lambda}(\varphi_2)) \; = \; \mathrm{Tr}(\Omega_W T_\theta^{-1}(\varphi_1)^* \Omega_W T_\theta^{-1}(\varphi_2)) \; = \; \int T_\theta^{-1}(\overline{\varphi_1}) \star_W T_\theta^{-1}(\varphi_2)$$

$$= \; \int T_\theta^{-1}(\overline{\varphi_1}) T_\theta^{-1}(\varphi_2) \; = \; \int \left(T_\theta^{-1}\right)^* T_\theta^{-1}(\overline{\varphi_1}) \varphi_2 \; = \; \int \mathbf{A}_{-1/2}(\overline{\varphi_1}) \varphi_2 \, .$$

设定

$$\Omega^{(2)}_{\theta,\lambda} \; := \; \Omega_{\theta,\lambda} \mathbf{S}_0$$

于是有

$$\mathrm{Tr}(\Omega^{(2)}_{\theta,\lambda}(\varphi_1)^* \Omega^{(2)}_{\theta,\lambda}(\varphi_2)) \; = \; \int \overline{\varphi_1} \star^2 \varphi_2 \; = \; \mathrm{Tr}(\Omega_{\theta,\lambda} \mathbf{S}_0(\varphi_1)^* \Omega_{\theta,\lambda} \mathbf{S}_0(\varphi_2))$$

$$= \; \int \overline{\mathbf{S}_0 \varphi_1} \star_1 \mathbf{S}_0 \varphi_2 \; = \; \int \mathbf{A}_{-1/2}(\overline{\mathbf{S}_0 \varphi_1}) \mathbf{S}_0 \varphi_2 \; = \; \int \mathbf{S}_0^* \mathbf{A}_{-1/2} \mathbf{S}_0(\overline{\varphi_1}) \mathbf{S}_0 \varphi_2 \; = \; \int \overline{\varphi_1} \varphi_2$$

因为 $\mathbf{A}$ 因此 $\mathbf{S}_0$ 是自伴的。 ■

最后 ，我们得到了经典 Calder`on-Vaillancourt 定理的非阿贝尔版本 [BG15] .

定理 5.2.2 存在 $p_0 \in \mathbb{N}$ ，使得映射 $\Omega_{\theta,\ \mathbf{m},\ \lambda}$ 可从 $\mathcal{D}(\mathbb{S})$典范地延拓为一个从 $\mathcal{B}^0_{p_0}(\mathbb{S})$ 到有界算子的连续映射:

$$\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda} : \mathcal{B}^0_{p_0}(\mathbb{S}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\lambda) \, .$$

$$\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda} : \mathcal{B}^0_{p_0}(\mathbb{S}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\lambda) \ .$$

是单射。

证明。对于每个 $F \in \mathcal{B}^0_{p_0}(\mathbb{S})$ 和每个 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{S})$，算子 $\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(F)\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(\varphi)$ 都是希尔伯特-施密特算子。若 $\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(F) = 0$，则有 $F \star_{\theta,\mathbf{m}} \varphi = 0$。随后对 θ 在零点附近求导，可得对于每个 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{S})$，都有 $F\varphi = 0$。因此 $F = 0$。 ■

结合最后这两个结果，可得

命题 5.2.5 *[BG15]* 记 $\mathcal{H}_\lambda$ 上的算子范数为 $||\ .\ ||_\lambda$，映射

$$||\ .\ ||_{\theta,\mathbf{m},\lambda} : \mathcal{B}^0_{p_0}(\mathbb{S}) \to \mathbb{R} : F \mapsto ||\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(F)||_\lambda$$

限制为 $(\mathcal{B}^0_\infty(\mathbb{S})^{\star_{\theta,\mathbf{m}}})$ 上的 $C^\star$-范数。

事实上，根据正则作用，有:

定理 5.2.3 正则作用

$$\mathcal{B}^0_\infty(\mathbb{S}) \times \mathcal{S}(\mathbb{S}) \to \mathcal{S}(\mathbb{S}) : (F, \varphi) \mapsto F \star_{\theta,\mathbf{m}} \varphi \ =: \ L_{\star_{\theta,\mathbf{m}}}(F)\varphi$$

扩张为 $\mathcal{B}^0_\infty(\mathbb{S})$ 在 $L^2_{\theta,\mathbf{m}}(\mathbb{S})$上的有界作用，且有

$$||L_{\star_{\theta,\mathbf{m}}}(F)||_{\theta,\mathbf{m}} \ = \ ||\Omega_{\theta,\mathbf{m},\lambda}(F)||_\lambda$$

其中 $||\ .\ ||_{\theta,\mathbf{m}}$ 表示作用于 $L^2_{\theta,\mathbf{m}}(\mathbb{S})$上的算子的算子范数。特别地，正如预期，$||\ .\ ||_{\theta,\mathbf{m},\lambda}$ 不依赖于 λ。

第6章

双曲平面的量子化与 Drinfel'd 扭曲

我们从平面 $\mathbb{R}^2 = \{(a,n)\}$ 上的 Moyal $\star$-乘积开始:

$$u \star_\hbar^0 v \quad := \quad u.v + i\frac{\hbar}{2}\{u,v\} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(i\,\hbar/2)^k}{k!} \Omega^{i_1 j_1} \cdots \Omega^{i_k j_k} \partial_{i_1 \cdots i_k} u \partial_{j_1 \cdots j_k} v \quad , \tag{6.1}$$

$$= \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\,\hbar/2)^k}{k!} \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \, \frac{k!}{p!(k-p)!} \, \partial_a^{k-p} \partial_n^p u \, \partial_a^p \partial_n^{k-p} v \quad , \tag{6.2}$$

其中

$$\Omega_{ik}\Omega^{kj} = -\delta_i^k \qquad , \qquad \{u,v\} = \Omega^{ij}\partial_i u \partial_j v := \partial_a u \partial_n v - \partial_n u \partial_a v \quad . \tag{6.3}$$

事实证明，在坐标 (a,n) 下，Moyal 乘积 (6.1) 关于 $G := SL_2(\mathbb{R})$ 在双曲平面 $\mathbb{D} = \mathbb{S}$ [Bi95] 上的双曲作用是 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-协变的。具体而言，将李代数 $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 表示为由 H, E 和 F 在 $\mathbb{R}$ 上生成，并满足:

$$[H,E] = 2E \quad , \quad [H,F] = -2F \quad , \quad [E,F] = H, \tag{6.4}$$

G 在 $\mathbb{D} = G/K = \mathbb{S}$ 上的作用所对应的动量映射为:

$$\lambda_H = \sqrt{\kappa}\, n \,;\, \lambda_E = \frac{\sqrt{\kappa}}{2} e^{-2a} \,;\, \lambda_F = -\frac{\sqrt{\kappa}}{2} e^{2a}(1+n^2) \,. \tag{6.5}$$

相应的基本向量场为:

$$H^\star = -\partial_a ;\; E^\star = -e^{-2a}\partial_n ;\; F^\star = e^{2a}(n\partial_a - (\kappa + n^2)\partial_n) \,. \tag{6.6}$$

最后， $\mathfrak{g}$ 通过 $\star_\hbar^0$ 的导子给出的表示可写为:

$$\rho_\hbar(H) \quad = \quad -\partial_a \tag{6.7}$$

$$\rho_\hbar(E) \quad = \quad -\frac{e^{-2a}}{\hbar} \sin(\hbar\partial_n) \tag{6.8}$$

$$\rho_\hbar(F) \quad = \quad e^{2a}\left(\frac{\hbar}{4}\sin(\hbar\partial_n)\partial_a^2 + n\cos(\hbar\partial_n)\partial_a - (\kappa + n^2)\frac{\sin(\hbar\partial_n)}{\hbar} \right) \,. \tag{6.9}$$

现在考虑关于 n 变量的偏傅里叶变换

$$\mathcal{F}(\varphi)(a,\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta n} \varphi(a,n) \mathrm{d}n \quad , \tag{6.10}$$

$$\phi_\hbar(a,\zeta) = \left(a, \frac{\sinh(\hbar\,\zeta)}{\hbar}\right) \quad , \tag{6.11}$$

˜ ˜ ˜并将 $\mathcal{S}$（分别为 $\mathcal{S}$）记作定义在 $\mathbb{S} = \{(a,\ \zeta)$ 上的施瓦茨测试函数空间 $\mathcal{S}$（$\mathbb{S}$）（分别为 $\mathcal{S}$（$\mathbb{S}$））（分别定义在 $\mathcal{S}$（$\mathbb{S}$）上的 $\mathbb{S} = \{(a,\ n)$），可以观察到以下包含关系:

$$\phi_\hbar^\star\,\tilde{\mathcal{S}} \subset \tilde{\mathcal{S}} \text{ and } \tilde{\mathcal{S}} \subset (\phi_\hbar^{-1})^\star\tilde{\mathcal{S}} \subset \tilde{\mathcal{S}}' \,. \tag{6.12}$$

因此，每个（合理的）单参数可逆函数光滑族 $\mathcal{P}_\hbar = \mathcal{P}_\hbar(b)$ 的数据，都会在 $\mathbb{S} = \{(a,\ n)$ 上的施瓦茨空间 $\mathcal{S}$（$\mathbb{S}$）上诱导出一个算子:

$$\mathbf{T}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{S}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{S}) \tag{6.13}$$

定义为

$$\mathbf{T}^{-1}\varphi(a_0,n_0) = \frac{1}{2\,\pi}\int e^{i\zeta n_0}\,\mathcal{P}_\hbar(\zeta)\,e^{\frac{-i}{\hbar}n\sinh(\hbar\zeta)}\,\varphi(a_0,n)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\zeta \,. \tag{6.14}$$

更一般地，将由 f 给出的逐点乘法算子记为 $\mathcal{M}_f$，则算子:

$$\mathbf{T} : \mathcal{S}(\mathbb{S}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{S}) \tag{6.15}$$

定义为

$$\mathbf{T} \ := \ \mathcal{F}^{-1} \circ (\phi_\hbar^{-1})^\star \circ \mathcal{M}_{\frac{1}{\mathcal{P}}} \circ \mathcal{F} \tag{6.16}$$

是 T^{-1} 的左逆。通过算子 $\mathbf{T}$ 对 Moyal-Weyl 乘积进行交织，可得到上述乘积，其形式为 $\star_{\hbar,\ \mathcal{P}} = \mathbf{T}\,(\star_\hbar^0)$。注意，后者在值域空间 $\mathcal{E}_\hbar$ 上封闭: $=\mathbf{T}\mathcal{S}$，从而给出一参数结合函数代数族（非形式的）: $(\mathcal{E}_\hbar,\ \star_{\hbar,\ \mathcal{P}})$。这些非形式乘积的渐近展开产生了定义在 $\mathbb{M}$ [Bi02] 上真正的庞加莱不变形式星积。

对于一般的 $\mathcal{P}$，上述振荡积分乘积对 $\hbar$ 的所有实值，都在 $\mathbb{M}$ 上的某个函数空间（而非形式幂级数空间）定义了一个结合乘法律。其中最引人注目的情形大概是 $\mathcal{P}$ 为纯相位的情形。在后一种情形下，上述乘积公式（当$\hbar \neq 0$时）可延拓到平方可积函数空间 $L^2(\mathbb{M})$，使其成为一个庞加莱不变的希尔伯特结合代数。这里的星积似乎是强闭的: 对于 $L^2(\mathbb{M})$ 中任意的 u 和 v，$u \star_{\hbar,\ \mathcal{P}} v$ 属于 $L^1(\mathbb{M})$，并且有:

$$\int_{\mathbb{M}} u \star_{\hbar,\mathcal{P}} v \ = \ \int_{\mathbb{M}} u\,v \,.$$

结合 [BG15]第 111 页和 [BDS09] 第 3 章节，可得它与 5.2.2 中定义的星乘积之间的关系为

$$A_{\mathrm{can}}(a_1,a_2,a_3)\,\frac{\mathcal{P}(a_1-a_2)\,\mathcal{P}(a_3-a_1)}{\mathcal{P}(a_2-a_3)} \ = \ \mathbf{m}(a_1-a_2)\frac{\mathbf{m}_0^2(a_2-a_3)}{\mathbf{m}(a_2-a_3)}\,\mathbf{m}(a_3-a_1) \,.$$

现在我们考虑 $\star$ 的如下导子 D_0 : $=\mathbf{T}(\star^0)$: 该算子

$$D_0 \ := \ \mathbf{T}\circ\rho_\hbar(F)\circ\mathbf{T}^{-1} \,. \tag{6.17}$$

特别的选择

$$\mathcal{P}(\zeta) \ \equiv 1 \tag{6.18}$$

得到关于 $i\,\Box := \mathcal{F}\circ D_0\circ\mathcal{F}^{-1}$ 的如下表达式，它似乎是一个二阶微分算子:

$$\Box_{(a,\zeta)} = e^{2a}\left[\frac{\hbar^2}{4}\,\zeta\,\partial_a^2 + \zeta\,(1+\hbar^2\,\zeta^2)\partial_\zeta^2 + (1+\hbar^2\,\zeta^2)\partial_a\partial_\zeta + \hbar^2\,\zeta\,\partial_a + (2+3\hbar^2\,\zeta^2)\partial_\zeta - \zeta\,(k-\hbar^2)\right] \,. \tag{6.19}$$

命题 6.0.1 设 $\star := \star_{\hbar,\,\mathcal{P}}$ 是 $\mathbb{M}$ 上的一个（形式）不变星积，我们将其导子代数记为 $\mathfrak{Der}(\star)$。在条件

$$\mathcal{P}'(0) \;=\; 0\,,$$

(i) 经典动量映射

$$D^1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{Der}(\star) : X \mapsto \frac{1}{i\hbar}[\lambda_X\ ,\ .\ ]_\star$$

是李映射。

(ii) 该 D^1 到 $\mathfrak{s}$ 的限制与由基本向量场给出的几何作用一致：

$$D^1_X \;=\; X^\star \quad \forall X \in \mathfrak{s}\,.$$

(iii) 每个李映射

$$D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{Der}(\star) : X \mapsto D_X$$

延拓 $D^1|_{\mathfrak{s}}$ 的形式为

$$D_F \;=\; D^1_F \;+\; c_\hbar\,[e^{2a}\ ,\ .\ ]_\star$$

其中 $c_\hbar \in \mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]$ 是一个形式常数。

证明。我们寻求一个李代数同态

$$D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{Der}(\star)$$

将映射 $\mathfrak{s} \to \Gamma^\infty(T\mathbb{M}) : X \mapsto X^\star$ 扩展为。鉴于
因为 $\star$is formally e等价于 Moyal星乘积，其每个导子都必须是内导子。特别地，，
存在一个线性 map

$$\Lambda : \mathfrak{g} \to C^\infty(\mathbb{M})[\hbar^{-1},\hbar]] : X \mapsto \Lambda_X$$

使得

$$D_X\varphi \;=:\; [\Lambda_X,\varphi]_\star \qquad (\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{M}))\,.$$

记

$$\mathcal{A}_\hbar \;:=\; (C^\infty(\mathbb{M})[\hbar^{-1},\hbar]],\star)\,,$$

Jacobi恒等式表明，同态缺陷

$$\Gamma_\hbar : \bigwedge^2 \mathfrak{g} \to \mathcal{A}_\hbar : X \wedge Y \mapsto \Lambda_{[X,Y]} - [\Lambda_X,\Lambda_Y]_\star$$

实际上取值于 $\mathcal{A}_\hbar$ 的中心，即形式常数 $\mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]$。注意到它也是一个 Chevalley二-余循环，因此它必为恰当的，因为 $\mathfrak{g}$ 很简单：

$$\Gamma_\hbar \;=:\; \delta\gamma_\hbar \qquad \gamma_\hbar \in \mathfrak{g}^\star \otimes \mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]\,.$$

因此，或许通过减去 $\gamma_\hbar$ 对其作相应修改后，我们可以假设映射 $\Lambda : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}_\hbar$ 是李代数同态。利用条件 $\mathcal{P}'(0) = 0$，表达式 (6.16) 得出

$$\mathbf{T}\lambda_X \;=\; \lambda_X$$

对每个 $X \in \mathfrak{s}$ 都成立。映射

$$\Lambda^0 : \mathfrak{s} \to \mathcal{A}_\hbar : X \mapsto \frac{1}{i\hbar}\lambda_X \;=:\; \Lambda^0_X$$

因此是李群。此外，通过与 $T(n) = n$ 类似的计算，我们发现存在一个（通常非零的）形式常数

$$\kappa_\hbar \;:=\; \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\left(\frac{\cosh(\hbar\xi)}{\mathcal{P}(\xi)}\right)|_{\xi=0}$$

使得

$$T(n^2) \;=\; \kappa_\hbar + n^2\,.$$

 由于算子 T 和 T^{-1} 与每个乘法算子 $\mathcal{M}_f$（其中 $\partial_n f \equiv 0$）都可交换，因此我们得到

$$T\lambda_F \;=\; \lambda_F - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}\kappa_\hbar\, e^{2a}\,.$$

设定

$$\Lambda^0_F \;:=\; \frac{1}{i\hbar}\left(\lambda_F - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}\kappa_\hbar\, e^{2a}\right)\,,$$

因此我们得到李映射

$$\Lambda^0 : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}_\hbar$$

and

$$D^0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{Der}(\star) : X \mapsto D^0_X \;:=\; [\Lambda^0_X\,,\,.\,]_\star\,.$$

给定另一个扩张 D，我们考虑缺陷

$$D_F - D^0_F \;=\; [\gamma_F\,,\,.\,]_\star \quad \text{with} \quad \gamma_F \;:=\; \Lambda_F - \Lambda^0_F\,.$$

由于对每个 $X \in \mathfrak{s}$，都有 $D_X \;=\; D^0_X \;=\; X^\star$，我们注意到:

$$D_X\gamma_F \;=\; [\Lambda_X, \Lambda_F]_\star - [\Lambda^0_X, \Lambda^0_F]_\star \;=\; \Lambda_{[X,F]} - \Lambda^0_{[X,F]} \;=\; X^\star\gamma_F\,.$$

因此 $E^\star\gamma_F \;=\; 0$ 和 $H^\star\gamma_F \;=\; -2\gamma_F$. ■

注 6.0.1 请注意，改变 D 仅对应于重新定义曲率元 κ。

命题 6.0.2 设 U 是 $\star$ 与一个 G不变的 $\star$积 $\natural$之间的 $\mathbb{S}$等变等价映射。那么，*(i)* 存在一个形式分布 $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\hbar]]$，其对应的左不变卷积算子在$\mathbb{S}$ 上与 U^{-1}一致:

$$U^{-1} \;=\; \int_{\mathbb{S}} v(y)\, R^\star_y\, \mathrm{d}y\,.$$

(ii) 傅 里叶变换后的卷积核 $\hat{}v := \mathcal{F}v$ 是二阶偏微分方程的一个弱解 *E:*

$$\Box(P\hat{v}) \;=\; \zeta(P\hat{v})$$

其中乘法因子 P 定义为

$$P \;:=\; \left(\phi^{-1}_\hbar\right)^\star \mathcal{P}\,.$$

(iii) 存在一个 ζ无关解 $\hat{}v$ 的 $\star$积 $\star_{\hbar,\mathcal{P}}$，在相差一个形式常数倍的意义下，对应于以下对象之一:

$$\mathcal{P} \;=\; 1 \quad \text{or} \quad \mathcal{P} \;=\; \cosh(\hbar\zeta)\,.$$

6.1 回缩双曲平面：非形式语境

在本节中，我们将首先证明，($\mathbb{M} := (\mathbb{S},\ s^{(0)},\ \omega)\ \ \mathbb{D}$) 是群流形 $\mathbb{S} = AN$ 上的一个收缩对。然后，我们将说明这两种对称空间结构如何在表示层面提升为“相位”对称变换。最后，我们将给出一个算子，实现从一种相位对称变换到另一种相位对称变换的过渡（即曲率变形过程），反之亦然。这个最后的算子将定义交织算子$\mathfrak{W}$（见引言），它将把 $\mathbb{M}$ 上的星积传递到 $\mathbb{D}$ 上具有完整 SL(2，$\mathbb{R}$)-对称性的星积。

记号 6.1.1 对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}_0$，我们设

$$\mathcal{H}_\lambda \;:=\; L^2(A, e^{2\lambda a}\,\mathrm{d}a)\,.$$

通过直接计算，我们得到

$$\mathbb{D} := \{ z := p + iq \in \mathbb{C} : q > 0 \} .$$

并令

$$\mathcal{D}_{(\frac{\theta+2}{\theta})} := \{h \in \mathrm{hol}(\mathbb{D}) \mid \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{q^{2-2(\frac{\theta+2}{\theta})}} |h(z)|^2 \mathrm{d}q\mathrm{d}p < \infty\}$$

其中 $\mathrm{hol}(\mathbb{D})$表示定义在 $\mathbb{D}$上的全纯函数空间。
记 V_θ 为$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 在 $\mathcal{D}^{(\theta+2}_{\theta})$上的通常射影全纯离散级数。于是，

(i) 表达式

$$T_{\theta,\lambda}\tilde{u}(z_0) := \int_{\mathbb{R}} e^{(\lambda-2(\frac{\theta+2}{\theta}))q_0} e^{\frac{i}{\theta}e^{-2q_0}z_0} \tilde{u}(q_0)\,\mathrm{d}q_0$$

定义了一个酉同构

$$T_{\theta,\lambda} : \mathcal{H}_\lambda \to \mathcal{D}_{(\frac{\theta+2}{\theta})}$$

它交织 $V_\theta|_{\mathbb{S}}$ 与$U_{\theta,\ \lambda}|_{\mathbb{S}}$。
我们将 $\mathbf{U}_{\theta,\ \lambda}$ 记为 $\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{R})$ 在 $\mathcal{H}_\lambda$上的相应表示：

$$\mathbf{U}_{\theta,\lambda} := T^{-1}_{\theta,\lambda} V_\theta T_{\theta,\lambda} .$$

（*ii*）考虑带参数 μ的 J_μ 第一类贝塞尔函数。则公式：

$$\vartheta_{\theta,\lambda}\varphi(a_0) := \frac{4}{\theta} e^{-2\lambda a_0 + i\pi(\frac{\theta+2}{\theta})} \int_{-\infty}^{\infty} J_{2(\frac{\theta+2}{\theta})-1}\left(\frac{2}{\theta}e^{-2a}\right) e^{2(\lambda-1)a}\varphi(2a-a_0)\,\mathrm{d}a$$

定义了一个酉对合：

$$\vartheta_{\theta,\lambda} : \mathcal{H}_\lambda \to \mathcal{H}_\lambda .$$

（*iii*）三元组 ($\mathcal{H}_\lambda$、$\mathbf{U}_{\theta,\ \lambda}$、$\vartheta_{\theta,\ \lambda}$) 是双曲平面的平方可积酉不可约表示。

我们将

$$\mathbf{\Omega}_{\theta,\lambda} : \mathbb{D} \to \mathtt{Aut}(\mathcal{H}_\lambda)$$

相应的映射记为（见定义 *5.1.2*）。

证明。全纯离散级数在 $\mathbb{S}$ 上的限制为：

$$V_\theta(a_0,n_0)h(z) := e^{-2(\frac{\theta+2}{\theta})a_0} h((a_0,n_0)^{-1}.z)$$

其中

$$(a_0,n_0).z := e^{2a_0}(n_0+z) .$$

现在我们将写出交织算子 T 的显式表达式，它从 ($\mathcal{H}_0$，$U_{\theta,\ 0}$) ($\theta \neq 0$) 映射到 ($\mathcal{D}^{(\ \theta+2}_{\theta}$) $V_{(\frac{\theta+2}{\theta})}$)，其形式如下（参见命题5.1.2）：

$$T\tilde{u} := \int_{\mathbb{S}} < U_{\theta,0}(g)\tilde{u}^0, \tilde{u} > V_\theta(g)h^0\,\mathrm{d}g$$

其中 $\tilde{u}^0 \in \mathcal{H}_0$ 和 $h^0 \in \mathcal{D}$（$\frac{\theta+2}{\theta}$）是 Duflo-Moore 算子定义域中的固定非零元素。这等价于：

$$T\tilde{u}(z_0) = \int e^{-2(\frac{\theta+2}{\theta})a + \frac{i}{\theta}e^{2(a-q_0)}n} h^0(e^{-2a}z_0 - n)\,\overline{\tilde{u}^0}(q_0-a)\tilde{u}(q_0)\,\mathrm{d}q_0\mathrm{d}a\mathrm{d}n .$$

选择

$$h^0(z) := (i+z)^{-2(\frac{\theta+2}{\theta})} ,$$

$$\underline{\mathcal{F}}(u)(\tau) := \int_{\mathbb{R}} u(t)\, e^{-it\tau} \mathrm{d}t \quad \text{and} \quad \underline{\mathcal{F}}^{-1}\left((\alpha + i\tau)^{-k}\right)(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha t} H(t) \tag{6.20}$$

($H = H(t)$ 表示 的特征函数 $]0,\ \infty[$ 且 $\Re(\alpha) > 0$) 得到以下表达式:

$$T\tilde{u}(z_0) = \frac{(-i/\theta)^{2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)-1}}{2\pi(\Gamma\left(2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)-1\right)} \int e^{-2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)a}\, e^{-\frac{1}{\theta}(1-iz_0e^{-2a})e^{2(a-q_0)}}\, e^{2(2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)-1)(a-q_0)}\, \overline{\tilde{u}^0}(q_0-a)\tilde{u}(q_0)\, \mathrm{d}q_0\mathrm{d}a$$

or

$$T\tilde{u}(z_0) = \frac{(-i/\theta)^{2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)-1}}{2\pi(\Gamma\left(2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)-1\right)} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2(1-\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right))q - \frac{1}{\theta}e^{-2q}}\, \overline{\tilde{u}^0}(q)\, \mathrm{d}q\right) \int_{\mathbb{R}} e^{-2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)q_0} e^{+\frac{i}{\theta}e^{-2q_0}z_0}\, \tilde{u}(q_0)\, \mathrm{d}q_0\ .$$

用拉普拉斯变换表示

$$\mathcal{L}[f](w) \ := \ \int_0^\infty e^{-rw}\, f(r)\, \mathrm{d}r \quad (\Re(w) > 0)\ ,$$

我们有:

$$T\tilde{u}(z_0) \ = \ C_{\theta,\tilde{u}^0}\, \mathcal{L}\left[r^{\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)-1}\tilde{v}(r)\right](-\frac{i}{\theta}z_0)$$

其中

$$\tilde{v}(e^{-2q_0}) := \tilde{u}(q_0) \quad \text{and} \quad C_{\theta,\tilde{u}^0} := \frac{(-i/\theta)^{2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)-1}}{4\pi(\Gamma\left(2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)-1\right)} \int_{\mathbb{R}} e^{2(1-\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right))q - \frac{1}{\theta}e^{-2q}}\, \overline{\tilde{u}^0}(q)\, \mathrm{d}q\ .$$

以 i 为中心的对称变换 $s_K = -1/z$ 自然地"量子化"或提升到状态空间 $\mathcal{D}(^{\theta+2}_{\theta})$ 中（另见[BG15]）：

$$\vartheta(h)(z) \ := \ i^{2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)} z^{-2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)} h(s_K(z))\ .$$

因此，我们可以利用交织算子 T 在 $\mathcal{H}_0$ 的层面上对其进行传递:

$$\vartheta_{\theta,0}(\tilde{u}) \ := \ T^{-1}\vartheta\left(T(\tilde{u})\right)\ .$$

为此，我们首先注意到，令

$$h_{r_0}(z) \ := \ e^{\frac{i}{\theta}r_0 z} \quad (z \in \mathbb{D})\ ,$$

我们有

$$\vartheta(h_{r_0})(z) \ := \ i^{2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)} z^{-2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)} e^{\frac{-ir_0}{\theta z}}\ ,$$

我们将其视为定义在定义域 $\Re(w) > 0$ 上的函数 η_{r_0}：

$$\eta_{r_0}(w) \ := \ i^{2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)} (-\frac{i}{\theta})^{2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)} w^{-2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)} e^{-\frac{r_0}{\theta^2 w}} \quad \text{with} \quad w \ := \ \frac{-i}{\theta}z\ .$$

由公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon+i\mathbb{R}} e^{Z - \frac{\zeta^2}{4Z}} Z^{-\mu-1}\, \mathrm{d}Z = \left(\frac{2}{\zeta}\right)^{\mu} J_\mu(\zeta) \quad (\epsilon, \mu, \zeta > 0)\ ,$$

我们得到

$$\mathcal{L}^{-1}(\eta_{r_0})(s) \ = \ \frac{1}{\theta}\left(\frac{s}{r_0}\right)^{-\frac{-2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)+1}{2}} J_{-(1-2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right))}\left(\frac{2}{\theta}\sqrt{r_0 s}\right) \quad (s > 0)\ .$$

现在我们表示

$$T \ = \ D_{\frac{-i}{\theta}} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{M}_{Cr^{\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)-1}} \circ \psi^{-1\star} \quad \text{and} \quad T^{-1} \ = \ \psi^\star \mathcal{M}_{\frac{1}{C}r^{1-\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)}} \mathcal{L}^{-1} D_{i\theta} \quad (C \ := \ C_{\theta,\tilde{u}^0})$$

$$T\tilde{u}(z) \;=\; C_{\theta,\tilde{u}^0}\int_0^\infty r_0^{(\frac{\theta+2}{\theta})-1}\tilde{u}(\psi^{-1}(r_0))h_{r_0}(z)\mathrm{d}r_0\;,$$

经过繁琐的计算可得：

$$\vartheta_{\theta,0}(\tilde{u})(q) \;=\; \int_0^\infty J_{2(\frac{\theta+2}{\theta})-1}(\sigma)\,\tilde{u}\left(\ln\left(\frac{2}{\theta\sigma}\right)\,-\,q\right)\,\mathrm{d}\sigma\;.$$

情形 $\lambda\neq 0$ 可由上述情形通过考虑引理 6.1.1 的 (ii) 中提到的酉等价得到。

■

作为上述命题证明的推论，我们有

引理 6.1.1 具体而言，对每个 $\varphi\in\mathcal{H}_\lambda$，都有：

$$\vartheta_{\theta,\lambda}\Sigma_\lambda\varphi(a_0) \;=\; \frac{4e^{i\pi\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)}}{\theta}\int_{-\infty}^\infty J_{2(\frac{\theta+2}{\theta})-1}\left(\frac{2}{\theta}e^{-2a}\right)\,e^{2(\lambda-1)a}\,(U_{\theta,\lambda}((2a,0))\varphi)\,(a_0)\,\mathrm{d}a\;.$$

形式上，令

$$\mathcal{J}_{\theta,\lambda}(a) \;:=\; \frac{4e^{i\pi\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)}}{\theta}\,J_{2(\frac{\theta+2}{\theta})-1}\left(\frac{2}{\theta}e^{-2a}\right)\,e^{2(\lambda-1)a}$$

and

$$(a,0)^2 \;=:\; a^2\;\in\;A$$

可写作

$$\vartheta_{\theta,\lambda}\Sigma_\lambda \;=\; \int_A \mathcal{J}_{\theta,\lambda}(a)\,U_{\theta,\lambda}(a^2)\,\mathrm{d}a\;.$$

现在，我们将为上述公式赋予严谨的含义，并将回缩的概念推广到群 $A\simeq\mathbb{R}$ 在 Fr´echet 空间上的任意足够正则的作用。

设 $\mathfrak{F}$ 是一个 Fr´echet 空间，配备一族递增的半范数 $\{|\ |\}_{j\in\mathbb{N}}$。我们考虑 ρ 在 $\mathfrak{F}$ 上的一个次等距强连续表示 ρ，并为光滑向量空间 $\mathfrak{F}_\infty$ 配备与该作用相关的通常精细拓扑，使其在 ρ 对 $\mathfrak{F}_\infty$ 的限制下成为一个光滑 Fr´echet A-模。首先，我们的目标是定义下述“广义积分”，它为每个 $v\in\mathfrak{F}_\infty$ 赋予一个量（取值于 $\mathfrak{F}_\infty$）：

$$\Xi^{(\rho)}_{\theta,\lambda}(v) \;:=\; \int_A \mathcal{J}_{\theta,\lambda}(a)\,\rho(a)v\,\mathrm{d}a\;.$$

为此，我们注意到以下命题，其证明将推迟到命题 6.2.1 的证明中。

Pro命题 6.1.2 设 $s\in\mathbb{R}$ 和 $\binom{\theta+2}{\theta}>0$。则存在 $\lambda_{\theta,s}$，使得该元素 *nt*

$$\mathcal{D}(A,\mathfrak{F}_\infty)\to\mathfrak{F}_\infty:\phi\mapsto\int_A\mathcal{J}_{\theta,\lambda_{\theta,s}}(a)\,\phi(a)\,\mathrm{d}a$$

连续延拓自 $\mathcal{D}(A,\mathfrak{F}_\infty)$ 至 $\mathcal{B}^s_\infty(A,\mathfrak{F}_\infty)$：

$$\widetilde{\int_A}\mathcal{J}_{\theta,\lambda_{\theta,s}}\;:\;\mathcal{B}^s_\infty(A,\mathfrak{F}_\infty)\to\mathfrak{F}_\infty\;.$$

推论 6.1.1 设 $v\in\mathfrak{F}_\infty$，则该元素

$$A\to\mathfrak{F}_\infty:a\mapsto\rho(a)v$$

属于 $\mathcal{B}^0_\infty(A,\mathfrak{F}_\infty)$。特别地，命题 *6.2.1* 表明，该积分

$$\Xi^{(\rho)}_{\theta,\lambda}(v) \;:=\; \int_A \mathcal{J}_{\theta,\lambda}(a)\,\rho(a)v\,\mathrm{d}a\;.$$

是 $\mathfrak{F}_\infty$ 中定义良好的元素。

证明。第一个断言显然。对于第二个断言，我们使用这样一个事实： $\mathcal{D}(\mathbb{S},\ \mathfrak{F}_\infty)$ 在$\mathcal{B}^\epsilon_\infty(A,\ \mathfrak{F}_\infty)$ 中的闭包包含 $\mathcal{B}^0_\infty(A,\ \mathfrak{F}_\infty)$（参见 [BG15]）。

■

命题 6.1.3 对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $x \in \mathbb{S}$，有

$$\mathbf{\Omega}_{\theta,\lambda}(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_{\theta,\lambda}(a)\, \Omega_{\theta,\lambda}(xa)\, \mathrm{d}a$$

作用于 $\mathcal{H}_\lambda^\infty$时。
此外，对于每个 $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$，都有

$$\mathbf{\Omega}_{\theta,\lambda}(\phi) \;=\; \Omega_{\theta,\lambda}\left(\Xi_{\theta,\lambda+1}^{(R^\vee)}(\phi)\right)$$

其中 $R_a^\vee \phi(x) := \phi(xa^{-1})$ 。

证明。我们将使用以下事实:

$$\vartheta_{\theta,\lambda} U_{\theta,\lambda}(a) \vartheta_{\theta,\lambda} \;=\; \Sigma_\lambda U_{\theta,\lambda}(a) \Sigma_\lambda \;=\; U_{\theta,\lambda}(a^{-1})\,.$$

有

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_{\theta,\lambda}(x) &= U_{\theta,\lambda}(x)\vartheta_{\theta,\lambda}U_{\theta,\lambda}(x^{-1}) \\
&= U_{\theta,\lambda}(x)\vartheta_{\theta,\lambda}\Sigma_\lambda^2 U_{\theta,\lambda}(x^{-1}) \\
&= U_{\theta,\lambda}(x)\left(\int_A \mathcal{J}_{\theta,\lambda}(a)\, U_{\theta,\lambda}(a^2)\mathrm{d}a\right)\Sigma_\lambda U_{\theta,\lambda}(x^{-1}) \\
&= \int_A \mathcal{J}_{\theta,\lambda}(a)\, U_{\theta,\lambda}(xa)\Sigma_\lambda^2 U_{\theta,\lambda}(a)\Sigma_\lambda U_{\theta,\lambda}(x^{-1})\,\mathrm{d}a \\
&= \int_A \mathcal{J}_{\theta,\lambda}(a)\, U_{\theta,\lambda}(xa)\Sigma_\lambda U_{\theta,\lambda}(a^{-1}x^{-1})\,\mathrm{d}a\,,
\end{aligned}$$

这证明了第一个断言，注意到 Σ_λ 在 $\mathcal{H}_\lambda^\infty$上作为连续线性算子作用。第二个断言可直接由引理 6.1.3 得出:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_{\theta,\lambda}(\phi) &= \int_{\mathbb{S}} \phi(y)\mathbf{\Omega}_{\theta,\lambda}(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{S}\times A} \phi(y)\mathcal{J}_{\theta,\lambda}(a)\,\Omega_{\theta,\lambda}(ya)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{S}\times A} \Delta(a)\phi(ya^{-1})\mathcal{J}_{\theta,\lambda}(a)\,\Omega_{\theta,\lambda}(y)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

其中

$$\Delta(a)\mathrm{d}(ya) \;:=\; \mathrm{d}y\,.$$

注意到 $\Delta(a) \;=\; e^{2a}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_{\theta,\lambda}(\phi) &= \frac{4e^{i\pi\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)}}{\theta}\int_{\mathbb{S}\times A} \left(R_{a^{-1}}^\star \phi\right)(y)\, e^{2\lambda a}\, J_{2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)-1}\left(\frac{2}{\theta}e^{-2a}\right)\Omega_{\theta,\lambda}(y)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{S}\times A} \left(R_{a^{-1}}^\star \phi\right)(y)\, \mathcal{J}_{\theta,\lambda+1}(a)\,\Omega_{\theta,\lambda}(y)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

■

定义 6.1.1 令 $C_b(\mathbb{S})$ 表示 $\mathbb{S}$ 上右一致连续函数的空间。记$C_b(\mathbb{S})^\infty$ 为 A 在 $C_b(\mathbb{S})$上作用 $R^\vee$ 的 C^∞-向量空间，我们考虑作用于 $C_b(\mathbb{S})^\infty$上的以下连续线性算子:

$$\frac{-1}{4}e^{\frac{2i}{\theta}\pi}\,\Xi_{\theta,\lambda+1}^{R^\vee} \;=:\; \mathfrak{W}_{\theta,\lambda} \;:=\; \frac{4e^{i\pi\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)}}{\theta}\int_A e^{2\lambda a}\, J_{2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)-1}\left(\frac{2}{\theta}e^{-2a}\right) R_{a^{-1}}^\star\,\mathrm{d}a\,.$$

我们将上述元素称为逆回缩算子。

$$\left(\Xi^{R^\vee}_{\theta,\lambda+1}\right)^{-1} \;=\; -e^{\frac{2i}{\theta}\pi}\,\Xi^{R}_{\theta,1-\lambda} \;=\; -\frac{4e^{i\pi\left(\frac{\theta+4}{\theta}\right)}}{\theta}\int_A e^{-2\lambda a}\,J_{2\left(\frac{\theta+2}{\theta}\right)-1}(\frac{2}{\theta}e^{-2a})\,R^\star_a\,\mathrm{d}a\,.$$

证明。我们从众所周知的反演公式开始:

$$\int\int J_\mu(\eta)\,J_\mu(\xi)\;\phi(\frac{\eta}{\xi})\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi \;=\; \phi(1)\,.$$

换言之，对于每个 x，算子:

$$A\phi(x) \;:=\; \int J_\mu(\xi)\,\phi(x\xi^{-1})\,\mathrm{d}\xi$$

其逆元为:

$$A^{-1}\psi(x) \;=\; \int J_\mu(\eta)\,\psi(x\eta)\mathrm{d}\eta\,.$$

现在我们考虑这些算子

$$A_\lambda\phi(x) \;:=\; \int J_\mu(\xi)\,\xi^\lambda\phi(x/\xi)\mathrm{d}\xi$$

and

$$B_\tau\phi(x) \;:=\; \int J_\mu(\eta)\eta^\tau\phi(x\eta)\mathrm{d}\eta\,.$$

于是我们有

$$B_\tau A_\lambda(\phi)(x) \;=\; \int J_\mu(\eta)J_\mu(\xi)\eta^\tau\xi^\lambda\phi(x\eta/\xi)\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi\,.$$

令 $\Psi(\eta/\xi) := (\eta\xi^{-1})^{-\lambda}\phi(x\eta/\xi)$ 且 $\tau=-\lambda$，由上述反演公式可得

$$B_{-\lambda}A_\lambda(\phi)(x) \;=\; \Psi(1) \;=\; \phi(x)\,.$$

因此，取 $x\in\mathbb{S}$ 时，引理便得证:

$$\xi \;:=\; \frac{2}{\theta}\,e^{-2a} \quad\text{and}\quad \phi(\xi^{-1}) \;:=:\; \varphi_x(\xi^{-1}) \;:=\; \varphi(x.\xi^{-1})\,.$$

■

6.2 回缩的基本性质

现在，我们将回缩算子延拓到 $\mathcal{B}$ 型空间。下述命题涉及参数 λ。这也是本文中引入该参数的唯一原因。

命题 6.2.1 设 θ 满足 $\binom{\theta+2}{\theta}>0$。

(i) 对所有 s 和 $k\in\mathbb{N}$，都存在 $\lambda_{\theta,\,k,\,s}$，使得逆回缩算子 $\mathfrak{W}_{\theta,\,\lambda_{\theta,\,s,\,k}}$ 可从$\mathcal{D}(\mathbb{S})$ 延拓到 $\mathcal{B}^s_\infty(\mathbb{S})$，成为映入 $\mathcal{B}^s_k(\mathbb{S})$ 的连续单射 $\mathcal{B}^s_\infty(\mathbb{S})$:

$$\mathfrak{W}_{\theta,\lambda_{\theta,k,s}}:\mathcal{B}^s_\infty(\mathbb{S})\to\mathcal{B}^s_k(\mathbb{S})\,.$$

(ii) 直接收缩的情形也类似：对于每个 $p\in\mathbb{N}$ *with* $2\binom{\theta+2}{\theta}-1/2\le p\le k$，与 *(i)* 中相同参数 $\lambda_{\theta,k,s}$ 相关联的直接收缩算子，将 $\mathcal{B}^s_p(\mathbb{S})$ 连续单射地映入 $\mathcal{B}^s_p(\mathbb{S})$:

$$\mathfrak{W}^{-1}_{\theta,\lambda_{\theta,k,s}}:\mathcal{B}^s_p(\mathbb{S})\to\mathcal{B}^s_p(\mathbb{S})\,.$$

 证明. 回顾一下，考虑 $x \in \mathbb{S}$ 和 $a := (a,0) \in A$，我们对每个 k:

$$\tilde{E}^k_x(R^\star_{a^{-1}}\varphi) \;=\; e^{2ka}\tilde{X}_{x.a^{-1}}(\varphi) \quad \text{and} \quad \tilde{E}^k_x(R^\star_a\varphi) \;=\; e^{-2ka}\tilde{X}_{x.a}(\varphi)\,. \tag{6.21}$$

我们将使用分部积分技巧来估计回缩。为方便起见，我们将群 A 表示为其乘法形式:

$$A \;=\; \mathbb{R}^+_0 \quad \text{through} \quad \zeta \;:=\; e^{-2a}$$

对于每个 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$，逆回缩基本上可以转化为以下形式

$$\mathfrak{W}\varphi(x) \;:=\; \int_0^\infty \zeta^{-\lambda} J_\mu(\zeta)\,\varphi(x.a^{-1})\,\mathrm{d}\zeta$$

这里我们采用与引理 6.1.2 的证明中相同的记号，并重新定义了 $\lambda \leftarrow \lambda+1$（由于变量替换 $\zeta := e^{-2a}$，$\mathrm{d}a$ 变为 $\zeta^{-1}\mathrm{d}\zeta$）。
由于

$$\tilde{H}|_{C^\infty(A)} \;=\; \partial_a \;:=\; -2\zeta\partial_\zeta\,,$$

我们观察到:

$$e^{-\frac{\zeta^2}{4Z}} \;=\; \frac{1}{1+\zeta^2}\,(1+Z\,\tilde{H})e^{-\frac{\zeta^2}{4Z}}\,.$$

关于 ζ（而非关于 a）的伴随算子:

$$\mathbf{O} \;:=\; \left[\frac{1}{1+\zeta^2}\,(1+Z\,\tilde{H})\right]^* \;=\; (1{+}2Z - Z\tilde{H}) \circ \frac{1}{1+\zeta^2}$$

作用于 $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$ 时，会涉及将 $\frac{1}{1+\zeta^2}$ 和 Z 分别乘以 ψ 的各阶导子。通过归纳法可得

$$\mathbf{O}^N\psi \;=\; \frac{1}{[1+\zeta^2]^N}\sum_{n,m=0}^N b_{m,n}(\zeta)\,Z^n\,(\tilde{H})^m.\psi$$

其中 $b_{m,n}$ 是光滑有界函数，且其所有导子均有界，即属于 $\mathcal{B}^0_\infty(A)$。现在使用以下表达式:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon+i\mathbb{R}} Z^{n-(1+\mu)}e^{Z-\frac{\zeta^2}{4Z}}\,\mathrm{d}Z \;=\; \left(\frac{2}{\zeta}\right)^{\mu-n} J_{\mu-n}(\zeta)\,.$$

随后通过分部积分可得:

$$\mathfrak{W}\varphi(x) \;=\; \sum_{m,n}^N \int_0^\infty \int_{\epsilon+i\mathbb{R}} \frac{Z^{n-(1+\mu)}e^{Z-\frac{\zeta^2}{4Z}}\,b_{m,n}(\zeta)}{[1+\zeta^2]^N}\,(\tilde{H})^m_\zeta\left(\zeta^{\mu-\lambda}L^\star_x\varphi\right)\,\mathrm{d}Z\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

注意到 t $\zeta^{\mu-\lambda}$ 是 $\tilde{H}$ 的特征函数，因此我们需要对以下类型的表达式进行估计 :

$$\mathcal{I} \;=\; \int_0^\infty \int_{\epsilon+i\mathbb{R}} \frac{\zeta^{\mu-\lambda}\,Z^{n-(1+\mu)}e^{Z-\frac{\zeta^2}{4Z}}\,b(\zeta)}{[1+\zeta^2]^N}\,L^\star_x\left[(\tilde{H})^m\varphi\right]\,\mathrm{d}Z\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

由此可知，对每个 $X \in \mathcal{U}_k(\mathfrak{s})$:

$$\tilde{X}_x.\mathfrak{W}\varphi \;=\; \sum_{m,n}^N \int_0^\infty \frac{\zeta^{n-\lambda}\,b^{(2)}_{m,n}(\zeta)}{[1+\zeta^2]^N}\,J_{\mu-n}(\zeta)\,\left(\mathtt{Ad}_{\zeta^{-1}}(X)\,H^m\right)^\sim_{xa^{-1}}.\varphi\,\mathrm{d}\zeta \quad (b^{(2)}_{m,n} \in \mathcal{B}^1_\infty(A))\,.$$

因此，我们得到 po 正常数 $\{c_{m,n}\}$ 和 $X' \in \mathcal{U}_k(\mathfrak{s})$（至多参见 (6.21)），使得对于每个 $s \in \mathbb{R}$:

$$\sup\{\frac{1}{\mathfrak{d}^s}|\tilde{X}(\mathfrak{W}\varphi)|\} \;\le\; \sum_{m,n=0}^N c_{m,n}\sup_x\left\{\frac{1}{\mathfrak{d}^s(x)}\int_0^\infty \frac{\zeta^{n-k-\lambda}}{[1+\zeta^2]^N}\,|J_{\mu-n}(\zeta)|\,\left|\widetilde{H^m X'}_{x.a^{-1}}(\varphi)\right|\,\mathrm{d}\zeta\right\}\,.$$

因此，由于 $\mathfrak{d}\quad|_A(\zeta)\;=\;(\zeta+1/\zeta)$

利用权函数 $\mathfrak{d}$ 的次乘性，可将其表示为与 $s'\in\mathbb{R}$ 相关的输入半范数的如下形式：

$$|\mathfrak{W}\varphi|_{k,s}\;\leq\;\sum_{m,n=0}^{N}c_{m,n}\,|\varphi|_{k+m,s'}\,\sup_x\left\{\frac{1}{\mathfrak{d}^{s-s'}(x)}\right\}\int_0^\infty\frac{\zeta^{n-k-\lambda}}{[1+\zeta^2]^N}\,|J_{\mu-n}(\zeta)|\,(\zeta+1/\zeta)^{s'}\,\mathrm{d}\zeta\;.$$

Now,

ζ 趋近于零时，被积函数在相差一个乘法常数的意义下表现为 $\bullet$

$$\frac{\zeta^{n-k-\lambda}}{[1+\zeta^2]^N}\,|J_{\mu-n}(\zeta)|\,(\zeta+1/\zeta)^{s'}\;\sim\;\zeta^{\mu-k-s'-\lambda}\;,$$

而

ζ 较大时，我们有 $\bullet$

$$\frac{\zeta^{n-k-\lambda}}{[1+\zeta^2]^N}\,|J_{\mu-n}(\zeta)|\,(\zeta+1/\zeta)^{s'}\;\sim\;\zeta^{n-k-2N-1/2+s'-\lambda}\;.$$

给定 k 和 s，$|\mathfrak{W}\varphi|_k$的有限性，s 因此等价于满足以下不等式 s:

$$\left\{\begin{array}{ccc}s-s'&\geq&0\\0&<&\mu-k-s'+1-\lambda\\n-k-2N-1/2+s'-\lambda&<&-1\;.\end{array}\right.$$

换言之（$n\leq N$）：

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{ccc}s'\leq&&s\\k-1+s'+\lambda&<&\mu\\-k-N+s'-\lambda&<&-1/2\;.\end{array}\right.$$

不等式 $k-1+s'+\lambda<\mu$ 对 λ施加了很强的条件：要使其成立，必须选择小于极限量 λ_θ 的 λ，k，s' 其值为

$$\lambda_{\theta,k,s'}\;:=\;\mu-s'-k+1\;.$$

当 μ 较大时，这通常为负。

因此，函数 $\mathfrak{W}_{m,\,\binom{\theta+2}{\theta}\lambda_{\theta,\,k,\,s'}}\varphi$ 是 C^k。

现在我们分析导数阶数 ℓ 小于 k的情况：

$$\ell\leq k\;.$$

因此，分析得出（$\binom{\theta+2}{\theta}$ 足够大时）：

$$(1')\qquad\ell-1+s'+\lambda_{\theta,k,s'}\quad\leq\quad\mu\;.$$

这相当于

$$\ell-1+s'+\mu-s'-k+1\leq\mu\quad\text{i.e.}\quad\ell-k\leq0$$

这成立。因此，元素 $\mathfrak{W}_{m,\,\binom{\theta+2}{\theta}\,k,\,s',\,\lambda_{\theta,\,k,\,s'}}\varphi$ 属于 $\mathcal{B}^s_k(\mathbb{S})$。

关于直接收缩的断言，并采用省略指标的显然记号，我们有如下表达式

$$\mathfrak{W}^{-1}\varphi(x)\;:=\;\int_0^\infty\zeta^\lambda J_\mu(\zeta)\,\varphi(x.a)\,\mathrm{d}\zeta\quad(\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{S}))\;.$$

与逆回缩相同的讨论得出以下估计：

$$|\mathfrak{W}\varphi|_{k,s,p}\;\leq\;\sum_{m,n=0}^{N}c_{m,n}\,|\varphi|_{k+m,s'}\,\sup_x\left\{\frac{1}{\mathfrak{d}^{s-s'}(x)}\right\}\int_0^\infty\frac{\zeta^{n+k+\lambda}}{[1+\zeta^2]^{N'}}\,|J_{\mu-n}(\zeta)|\,(\zeta+1/\zeta)^{s'}\,\mathrm{d}\zeta\;.$$

- 当 ζ 接近零时，被积函数的行为（相差一个乘法常数）为

$$\frac{\zeta^{n+k+\lambda}}{[1+\zeta^2]^{N'}}\left|J_{\mu-n}(\zeta)\right|\,(\zeta+1/\zeta)^{s'}\;\sim\;\zeta^{\mu+k-s'+\lambda}\,,$$

而

- 当 ζ 很大时，我们有

$$\frac{\zeta^{n+k+\lambda}}{[1+\zeta^2]^{N'}}\left|J_{\mu-n}(\zeta)\right|\,(\zeta+1/\zeta)^{s'}\;\sim\;\zeta^{n+k-2N-1/2+s'+\lambda}\,.$$

对于给定的 k 和 s, $|\mathfrak{W}\varphi|_{k,\ s}$ 有限性因此等价于满足以下不等式:

$$\left\{\begin{array}{ccc} s-s' & \geq & 0 \\ 0 & < & \mu+k-s'+1+\lambda \\ k-N'-1/2+s'+\lambda & < & -1\,. \end{array}\right.$$

换言之

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ccc} s' & \leq & s \\ -k-1+s'-\lambda & < & \mu \\ k-N'+s'+\lambda & < & -1/2\,. \end{array}\right.$$

结合系统 (1)，可得

$$\left\{\begin{array}{ccc} s'\leq & s & \\ k-1+s'+\lambda & < & \mu \\ -k-N+s'-\lambda & < & -1/2 \\ -k-1+s'-\lambda & < & \mu \\ k-N'+s'+\lambda & < & -1/2 \end{array}\right.$$

其中 N和 N'相互独立。因此，可以选取它们，使得无论如何选择 λ，不等式 $-k-N+s'-\lambda<-1/2$ 和 $k-N'+s'+\lambda<-1/2$ 都成立。在极限情形下，这些条件$\lambda=\lambda_{\mu,\ k,\ s'}-\epsilon$ 相当于

$$\left\{\begin{array}{ccc} s' & \leq & s \\ s'-1+\epsilon/2 & < & \mu \end{array}\right.$$

但此时函数 φ 仅为 C^p，且可能带有 $p\leq k$。因此，我们至多只能得到一个输出 $\mathfrak{W}_\theta^{-1}{}_{,\ \lambda_{\theta,\ k,\ s'}}\varphi$，属于 $C^{p-N'}$，其中 $N'>\mu+3/2$，即

$$\mu+3/2<N'\leq p\,.$$

施加

$$k\geq p\geq\mu+3/2\,.$$

现在，利用 $\mathcal{D}$型符号在 $\mathcal{B}$中的稠密性，不等式组 (2) 可推出：对每个 $s\in\mathbb{R}$， $\mathfrak{W}^{-1}$ 都将$\mathcal{B}^s_\infty$(𝕊)连续地映射到 $\mathcal{B}^s_\infty$(𝕊)。
而第二个不等式 (2) 则对 $\mathfrak{W}^{-1}$ 蕴含相同的结论，因为 N' 可以任意大。

对于命题 6.1.2 陈述中涉及的广义积分，也可采用与上文类似（但简单得多）的论证。

■

作为上述讨论的直接推论，我们有

定理 6.2.1 回缩算子在施瓦茨空间上稳定 $\mathcal{S}(\mathbb{S})\;=\;\mathcal{S}(\mathbb{M})\;=\;\mathcal{S}(\mathbb{D})$（参见定义 *4.0.8*）。

非形式星乘积与 Drinfel'd 扭曲的显式公式

我们将双曲平面实现为 $\mathfrak{g}$ 中一个紧元素 Z_0的伴随轨道。对偶图景会更加内在，但在伴随轨道框架下计算更为简单。我们考虑动量映射

$$J : \mathbb{S} \to \mathfrak{g} : x \mapsto \mathtt{Ad}_x Z_0$$

其中， $\mathbb{S}$ 被实现为 G的子群。
在每个 $x \in \mathbb{S}$处，我们将切空间实现为 $\mathfrak{g}$ 中与该直线 Killing 正交的子空间，以下记为 $\mathfrak{k}_x$，其支集为 $J(x)$:

$$\mathfrak{p}_x \;:=\; J_{\star x}(T_x\mathbb{S}) \;=\; J(x)^{\perp} \,.$$

（部分）˘**Severa 映射** 随后在 x 处定义为

$$\sigma_x : \mathbb{S} \to \mathfrak{p}_x \;\subset\; \mathfrak{g} : y \mapsto \pi_x(J(y))$$

其中 $\pi_x :\; \mathfrak{g} \to \mathfrak{p}_x$ 表示 Killing 正交投影。于是我们观察到

˘**引理 6.3.1** *Severa* 映射是 $\mathbb{S}$-等变的:

$$\sigma_{gx} \;=\; \mathtt{Ad}_g \circ \sigma_x \circ L_{g^{-1}} \,.$$

对于 $Z_0 := \frac{1}{2}(E - F)$，有

$$\sigma_e(y) \;=\; [Z_0, [\mathtt{Ad}_y Z_0, Z_0]]$$

更一般地:

$$\sigma_x(y) \;=\; [J(x), [J(y), J(x)]] \,.$$

简单计算即可得出

命题 6.3.1 令我们将 $\mathfrak{g}$ 上的 *Killing*形式 β 归一化，使得

$$\beta(Z_0, Z_0) \;= -1$$

并在向量空间 $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}_e$ 上赋予辛结构

$$\omega_0(X, Y) \;:=\; \beta(Z_0, [X, Y]) \,.$$

则向量

$$e_q \;:=\; \frac{1}{2}(E + F) \qquad e_p \;:=\; \frac{1}{2}H$$

构成 $\mathfrak{p}$ *(*$\omega_0(e_q, e_p) \;= 1$*)* 的正交辛基，并通过辛识别

$$\mathbb{R}^2 \to \mathfrak{p} : (q, p) \mapsto q e_q + p e_p$$

˘*Ševera* 映射为

$$\sigma_e(\exp(aH)\exp(nE)) \;=\; \Psi^{-1} Z(a, n)$$

其中 Z 是自然映射

$$Z \;:\; \mathbb{S} \to \;\Pi \;:\; an \mapsto \; an(1) \,.$$

定义 6.3.1 x 周围的**典范面积**定义为

$$S(x, y, z) \;:=\; \beta(J(x), [\sigma_x(y), \sigma_x(z)]) \,.$$

我们设

$$S(x, y) \;:=\; S(e, x, y) \,.$$

注记 6.3.1 我们注意到该函数的重要性

$$\hat{S} : \mathbb{L} \times \mathbb{S} \to \mathfrak{g} : (x, y, z) \mapsto [\sigma_x(y), \sigma_x(z)] \, .$$

在当前二维且经过归一化的情形下，它通过以下恒等式与典范面积相关：

$$\hat{S}(x, y, z) \; = \; S(x, y, z) \, J(x) \, .$$

现在，我们给出双曲平面上 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-不变星积的一个几何显式公式（即与坐标无关的公式）。

定理 6.3.1 设

$$\mathbb{D} \; := \; SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$$

为双曲平面。
考虑以下实变量的特殊函数：

$$\mathbf{E}_\lambda(t) \; := \; \int_0^\infty \, s^2 e^{-\,i s\, t} \; J_\lambda(s) \, \mathrm{d}s \; = \; -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \mathcal{L}(J_\lambda)(-it) \, .$$

对于常数 c_θ的一个适当取值，乘积

$$\varphi \sharp_\theta \psi(x) \; := \; c_\theta \int_{\mathbb{D}^2} A(x, y, z) \, \mathbf{E}_{2\frac{\theta+2}{\theta}-1} \left(S(x, y, z) \right) \, \varphi(y) \, \psi(z) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

其中

1. $\mathrm{d}x$ 表示 $\mathbb{D}$ 上 $SL_2(\mathbb{R})$ 不变测度（的一种归一化），
2. $S(x, y, z)$ 表示 $\mathbb{D}$ 上的 *Ševera*面积（参见 *3.5*），
3. 并且 A 根据 *Ševera* 投影的雅可比行列式（参见 *3.4*）定义为

$$A(x, y, z) \; := \; Jac_{\sigma_x}(y) \, Jac_{\sigma_x}(z)$$

满足

(i) 它将 $C_c^\infty(\mathbb{D})$ 延拓至施瓦茨空间 $\mathcal{S}(\mathbb{D})$（参见定义 *4.0.8*），成为一个 $SL_2(\mathbb{R})$ 等变的结合 *Fŕechet* 代数结构。

(ii) 它在赋予（某种规范化）的 $SL_2(\mathbb{R})$不变辛 *Kähler* 二形式的双曲平面上，表现为一个 $SL_2(\mathbb{R})$不变的形式星积的渐近展开。

(iii) 将 双曲平面 $\mathbb{D}$ 与 $SL_2(\mathbb{R}) \; = ANK$ 的伊*wasawa*因子 $\mathbb{S} := AN$ 识别后，公式

$$\mathcal{F}_\theta \; := \; c_\theta \int_{\mathbb{S}^2} Jac_{\sigma_e}(y) \, Jac_{\sigma_e}(z) \, \mathbf{E}_{2\frac{\theta+2}{\theta}-1} \left(S(y, z) \right) \, R_y^\star \otimes \, R_z^\star \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

定义了一个基于伊*wasawa*因子 $\mathbb{S} := AN$ 的 *Drinfel'd* 扭曲。

证明。我们首先注意到

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathfrak{p}^2} \mathcal{G}(\varphi_1)(x') \, \mathcal{G}(\varphi_2)(x'') \; \int_0^\infty \, J_\lambda(s) \; e^{i/s \, \omega^{\mathfrak{p}}(x', \, x'')} \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}x'' \\
= \; & \int_0^\infty \, J_\lambda(s) \int_{\mathfrak{p}^4} \varphi_1(x_1) \, \varphi_2(x_2) \; e^{i \, (\omega^{\mathfrak{p}}(x_1, x') + \omega^{\mathfrak{p}}(x_2, x''))} \; e^{i/s \, \omega^{\mathfrak{p}}(x', \, x'')} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}x'' \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\
= \; & \int_{\mathfrak{p}^4} \int_0^\infty \, e^{i \, (\omega^{\mathfrak{p}}(x_1, x') + \omega^{\mathfrak{p}}(x_2, x'') \, + \, 1/s \, \omega^{\mathfrak{p}}(x', \, x''))} \; J_\lambda(s) \varphi_1(x_1) \, \varphi_2(x_2) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}x'' \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\
= \; & \int_{\mathfrak{p}^4} \int_0^\infty \, e^{i \, (\omega^{\mathfrak{p}}(x_1 \, - \, 1/s \, x'', x') + \omega^{\mathfrak{p}}(x_2, x''))} \; J_\lambda(s) \varphi_1(x_1) \, \varphi_2(x_2) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}x'' \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\
= \; & \int_{\mathfrak{p}^2} \int_0^\infty \, e^{i \, \omega^{\mathfrak{p}}(x_2, x'')} \; J_\lambda(s) \varphi_1(1/s \, x'') \, \varphi_2(x_2) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x'' \\
= \; & \int_{\mathfrak{p}^2} \int_0^\infty \, s^2 e^{-\,i s \, \omega^{\mathfrak{p}}(x_1, x_2)} \; J_\lambda(s) \; \varphi_1(x_1) \, \varphi_2(x_2) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, .
\end{aligned}$$

6.3. 非形式星乘积与 *Drinfel'd* 扭曲的显式公式81 上述命题 6.3.1 表明，辛傅里叶变换中所蕴含的辛结构 $\omega^{\mathfrak{p}}$ ˇ $\mathcal{G}$ 是 e 处的 Severa 面积元。因此，令

$$x_j \;=\; \Psi^{-1}(\zeta_j)\,,$$

我们有（稍微滥用一下记号：通过映射 Z 将 $\mathbb{S}$ 与 Π 视为相同）：

$$\omega^{\mathfrak{p}}(x_1,x_2) \;=\; S(o\,,\,\zeta_1\,,\,\zeta_j)\,.$$

因此

$$\varphi_1 \bullet\; \varphi_2(0) \;=\; \int_{\Pi^2}\!\!\left(\int_0^\infty s^2 e^{-\,i\,s\,S(\zeta_1,\zeta_2)} J_\lambda(s)\;\,\mathrm{d}s\right)\varphi_1(\Psi^{-1}(\zeta_1))\,\varphi_2(\Psi^{-1}(\zeta_2))\,\mathrm{Jac}_{\Psi^{-1}}(\zeta_1)\,\mathrm{Jac}_{\Psi^{-1}}(\zeta_2)\,\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}\zeta_2$$

其中，$\mathrm{d}\zeta$ 表示双曲平面 Π 上的双曲测度（将其实现为庞加莱半平面）。因此，对于双曲平面 Π 上任意光滑且紧支撑的函数 f_1 和 f_2，我们有

$$(\Psi^{-1\,\star})(f_1)\bullet(\Psi^{-1\,\star})(f_2)(0)=\int_{\Pi^2}\!\!\left(\int_0^\infty s^2e^{-\,i\,s\,S(\zeta_1,\zeta_2)}J_\lambda(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{Jac}_{\Psi^{-1}}(\zeta_1)\mathrm{Jac}_{\Psi^{-1}}(\zeta_2)f_1(\zeta_1)f_2(\zeta_2)\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}\zeta_2$$

其中，$\mathrm{Jac}_{\Psi^{-1}}(\zeta)$ 表示映射 Ψ^{-1} 的雅可比行列式，该映射将 $\mathfrak{p}$ 上的辛（勒贝格）测度与 Π 上的双曲测度联系起来。

现在我们注意到，对于半平面 Π 中的每个 $\zeta \;=\; x \;+\; i\xi$，坐标变换

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& e^{2a}\\ \xi &=& -\,e^{2a}n\end{array}\right.$$

将乘积 $f\bullet g$ 与由下式定义的乘积 $\star$ 视为相同

$$\left(Z^\star(f)\star Z^\star(g)\right)(Z(x_0)) := \int_{\mathbb{S}\times\mathbb{S}} \cosh(2(a_0\;-\;a_2)\cosh(2(a_1\;-\;a_0)\,e^{i\,S(x_0,x_2,x_2)}f(Z(x_1))\,g(Z(x_2))\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

在这一设定下，我们还观察到，对于每个 $x \;+\; i\xi \;=\in \Pi$ 和 $t\coloneqq e^{2b}\in A$，都有

$$tx \;+\; i\xi \;=\; Z(anb)\,.$$

因此，Unterberger 映射 G_λ 是该回缩的一个解。具体而言，我们有

$$G_\lambda g(Z(an)) \;=\; 2\pi\int_A g(Z(anb))\;J_\lambda(4\pi\,e^{2b})\;e^{2b}\;\mathrm{d}b\,,$$

或者等价地：

$$G_\lambda\circ Z^\star \;=\; 2\pi\int_A J_\lambda(4\pi\,e^{2a})\;e^{2a}R_a^\star\,\mathrm{d}a\,.$$

也就是说

$$G_{2\frac{\theta+2}{\theta}-1} \;=\; \frac{1}{4}\,e^{-\,i\,\pi\frac{\theta+2}{\theta}}\,\mathfrak{W}_{-1\,,\,\theta}\;\circ\;R^\star_{-\frac{1}{2}\log(2\pi\theta)}\,.$$

注意，由于星乘积 $\star$是 AN-不变的，当 A-平移 $R^\star_{-\frac{1}{2}\log(2\pi\theta)}$时将不会被观察到

将 $\bullet$与 G_λ^{-1} **(•)**交织。

正如 A. 和 J. Unterberger 已经指出的，乘积 G_λ^{-1} **(•)** 因此是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-等变的。再次通过映射 Z 将 $\mathbb{S}$ 与 Π 视为相同，我们得到

$$\sigma_o(\eta) \;=\; \Psi^{-1}(\eta)\quad(\eta\in\Pi)\,.$$

因此，利用 Ševera 映射的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-等变性，对于每个 g 属于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，我们有　　：

$$\begin{aligned} f_1\sharp f_2(g.o) &:= \int_{\Pi^2}\!\!\left(\int_0^\infty s^2e^{-\,i\,s\,S(\zeta_1,\zeta_2)}J_\lambda(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{Jac}_{\Psi^{-1}}(\zeta_1)\mathrm{Jac}_{\Psi^{-1}}(\zeta_2)f_1(g.\zeta_1)f_2(g\zeta_2)\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}\zeta_2\\ &= \int_{\Pi^2}\!\!\left(\int_0^\infty s^2e^{-\,i\,s\,S(g^{-1}\zeta_1,g^{-1}\zeta_2)}J_\lambda(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{Jac}_{\Psi^{-1}}(g^{-1}\zeta_1)\mathrm{Jac}_{\Psi^{-1}}(g^{-1}\zeta_2)f_1(\zeta_1)f_2(\zeta_2)\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}\zeta_2\\ &= \int_{\Pi^2}\!\!\left(\int_0^\infty s^2e^{-\,i\,s\,S(g.o\,,\,\zeta_1,\zeta_2)}J_\lambda(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{Jac}_{\sigma_{g.o}}(\zeta_1)\mathrm{Jac}_{\sigma_{g.o}}(\zeta_2)f_1(\zeta_1)f_2(\zeta_2)\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}\zeta_2\end{aligned}$$

也就是说，对于每个 ζ 属于 Π:

$$f_1 \sharp f_2(\zeta) = \int_{\Pi^2} \left(\int_0^\infty s^2 e^{-is\,S(\zeta,\zeta_1,\zeta_2)} J_\lambda(s) \mathrm{d}s \right) \mathrm{Jac}_{\sigma_\zeta}(\zeta_1) \mathrm{Jac}_{\sigma_\zeta}(\zeta_2)\; f_1(\zeta_1)\; f_2(\zeta_2)\; \mathrm{d}\zeta_1 \mathrm{d}\zeta_2 \; .$$

由定理 6.2.1 得证。 ■

注记 6.3.1 *(i)* 在定理 *6.3.1* 的第 *(iii)* 项中，尽管该公式并非形式公式，但尚不清楚 *Drinfel'd* 扭曲是否为 AN 在 *Fr´echet* AN-模代数上的作用定义了严格普适变形公式（按 *Rieffel* 的定义）。实际上，还需要进行类似于第*4*章所做的分析。因此，就目前而言，应将 *Drinfel'd* 扭曲 $\mathcal{F}_\theta$ 视为形式的（通过其渐近展开）。

附录： Andr´e 和 Julianne Unterberger 的符号演算

在 [UU88], A. 和 J. Unterberger 考虑开半平面

$$\Pi \;:=\; \{x + i\xi \mid x > 0\,;\; \xi \in \mathbb{R}\} \;\subset\; \mathbb{C}$$

赋予其群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的作用，该作用定义为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \zeta \;:=\; \frac{a\zeta \;-\; ib}{ic\zeta \;+\; d} \; .$$

这是双曲平面的一个等价实现，并配备了 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的自然等距作用。所谓 Fuchs 符号的复合公式 $\mathbf{f}$ 和$\mathbf{g} \;\in C_c^\infty(\Pi)$ 表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \bullet \mathbf{g}(x+i\xi) \;\;:=\;\; & \int_{\Pi\times\Pi} \mathbf{f}(y'+i\eta')\, \mathbf{g}(y"+i\eta") \\ & \exp -2i\pi \left\{ \left(\frac{y'}{y"} - \frac{y"}{y'} \right) \frac{\xi}{x} + \left(\frac{y"}{x} - \frac{x}{y"} \right) \frac{\eta'}{y'} + \left(\frac{x}{y'} - \frac{y'}{x} \right) \frac{\eta"}{y"} \right\} \\ & \left(\frac{x}{y'} + \frac{y'}{x} \right) \left(\frac{x}{y"} + \frac{y"}{x} \right) {y'}^{-2}\, {y"}^{-2}\, \mathrm{d}y'\, \mathrm{d}\eta'\, \mathrm{d}y"\, \mathrm{d}\eta" \; . \end{aligned}$$

对每个 $\lambda > 0$，令:

$$G_\lambda \mathbf{g}(y+i\eta) \;:=\; 4\pi \int_0^\infty \mathbf{g}(ty+i\eta)\, J_\lambda(4\pi\, t)\, \mathrm{d}t \; ,$$

他们证明了

定理 6.3.2

$$G_\lambda^{-1} \left(G_\lambda(\mathbf{f}) \bullet G_\lambda(\mathbf{g}) \right)(1) \;\;=\;\; \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \mathcal{G}(\mathbf{f}\circ\Psi)(q',p')\, \mathcal{G}(\mathbf{g}\circ\Psi)(q",p") \tag{6.22}$$

$$4\pi \int_0^\infty J_\lambda(4\pi\, s)\; \exp \frac{i\pi}{s}(-q'p" + q"p')\, \mathrm{d}s \tag{6.23}$$

$$\mathrm{d}q'\, \mathrm{d}p'\, \mathrm{d}q"\, \mathrm{d}p" \tag{6.24}$$

其中

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \to \Pi : (q,p) \mapsto \frac{\sqrt{1+q^2+p^2}+q}{1-ip}$$

and

$$\mathcal{G}\varphi(\alpha,\beta) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(q,p)\, e^{2i\pi(-\alpha p+\beta q)}\, \mathrm{d}q\, \mathrm{d}p \quad (\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \; .$$

参考文献

[Be93] M´élanie Bertelson, 《辛流形上星乘积的等价类》，硕士论文，ULB（1993年）。[Bi95] Pierre Bieliavsky, 《辛对称空间》，博士论文，UL，布鲁塞尔（1995年）。（math/0703358）[Bi02] Pierre Bieliavsky, 《可解对称空间的严格量子化》，《辛几何学杂志》1（2），269–320，2002年6月。[BB11] Bertelson，M´élanie Bieliavsky，Pierre；《仿射联络与对称性喷流》；arXiv:1103.2300。[BBG98] M. Bertelson、P. Bieliavsky 和 S. Gutt, 《不变星乘积等价类的参数化》。《数学物理快报》46（1998），第4期，339–345。[BCG96] Bieliavsky，P.、Cahen，M. 和 Gutt，S.；《一类齐性辛流形》，《当代数学》（1996年）。[BDS09] Bieliavsky，P.、Detournay，S.、Spindel，Ph.，《双曲平面的变形量子化》。《数学物理通讯》289，529–559（2009年）。[BG15] P. Bieliavsky，V. Gayral；《Kähler李群作用的变形量子化》，《美国数学会回忆录》236（1115）（2015年）。¨BM[Bieliavsky，Pierre；Massar Marc，《一类李群上左不变星乘积的振荡积分公式》；《数学物理快报》58：115–128，2001年。01] CFS[Alain Connes、Mosh92] é Flato 和 Daniel Sternheimer。《闭星乘积与循环上同调》，《数学物理快报》24（1992年）。´DL[M. De Wilde 和 P. B. A. Lecomte，《任意辛流形上星乘积的存在性及泊松李代数形式变形的存在性》，《数学物理快报》7（1983年），487–496。83] OMY[Omori，H.、Maeda，Y.、Yoshioka，A.，《韦尔流形与变形量子化》。《数学进展》85（2），224–255（1991年）。91] Fe[B. V. Fedosov，《一种简明的变形量子化几何构造》，《微分几何杂志》40（1994年），213–238。94] G[S. Gutt，《变形的等价性及相应的星乘积》，《数学物理快报》3（1979年），297–309。79] GR[Gutt，S.、Rawnsley，J.：《辛流形上星乘积的等价性；Deligne的Čech上同调类导论》。《几何与物理学杂志》29（1999年），347–399。99] KN[Kobayashi，S.；Nomizu，K.；《微分几何基础》。Wiley经典文库，第1卷。（2009年）69] 。 [1969]K[S. Koh；《论仿射对称空间》，《美国数学会汇刊》119（1965年），291–30。

84 参考文献[LM88] Lichnerowicz, A. 和 Medina, A.：具有不变辛或凯勒结构的群，巴黎科学院会议录 Ser. I 306(3)（1988），133–138。[Lo69] O. Loos，《对称空间》，Benjamin，纽约，1969。[NT95] R. Nest 和 B. Tsygan，代数指标定理，《数学物理通讯》172（1995），223–262。[P59] Peetre, J.，微分算子的抽象刻画，存档于 Wayback Machine（2007-09-27），《斯堪的纳维亚数学》7（1959），211-218。[Qi96] Z. Qian，《群胚、中点与量子化》，博士论文，加州大学伯克利分校，1997。[Ri1] M. A. Rieffel，Rd 作用的变形量子化，《美国数学会回忆录》106（1993），第506期。[Ri2] Marc A. Rieffel，关于量子化的问题，《当代数学》228（1998），315-326。[UU88] Unterberger, André、Unterberger, Julianne；量化与伪微分分析；《高等师范学校科学年刊》，第4辑，第21卷（1988）第1期，第133-158页。[We93] A. Weinstein，对称辛空间中的迹与三角形，载于《辛几何与量子化》（三田和横滨，1993），《当代数学》179（1994），美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，261–270。