arXiv:2601.10476v1 [math.SP] 15 Jan 2026

# 广义强预解式收敛与范数预解式收敛

Gerald Teschl、Yifei Wang、Bing Xie 和 Zhe Z HOU

Abstract. 我们提出了一种简化的方法，用于处理不同希尔伯特空间中自伴算子的广义强收敛与范数收敛。特别地，我们证明了相应的（半）群、（本质）谱和谱投影的收敛性。此外，我们还给出了若干关于斯图姆–刘维尔算子的应用。

## 1. 引言

无界自伴算子的标准收敛概念是强预解式收敛与范数预解式收敛。在经典情形下，所有算子都定义在同一个希尔伯特空间上。然而，在许多实际情形中，两个算子定义在不同的希尔伯特空间上。例如，研究将算子限制在子空间序列上的情形时便会遇到这种情况。为适应此类情形，自然的做法是引入相应的嵌入算子序列；这种方法通常称为广义强／范数预解收敛，其历史至少可以追溯到 Stolz 和 Weidmann [8, 9]，他们将其用于以正则斯图姆–刘维尔算子逼近奇异斯图姆–刘维尔算子。Weidmann 在其专著 [13, 第 9.3] 节中进一步拓展了这一理论（另见 [11]和 [10, 第 6.6] 节）。其他应用包括权函数变化时的斯图姆–刘维尔算子（或更一般的典则系统、椭圆型偏微分算子），以及在不同图上逼近薛定谔算子。特别是，为了后一目的，Post 在 [5]中以及其专著[6, 第 4]章中进一步拓展了广义强／范数预解收敛。另见 Post 和 Simmer [7]近期的综述。此外，此类情形下的扰动理论在研究不定型斯图姆–刘维尔算子时也发挥着重要作用 [2]。本文的主要动机源于权函数变化时斯图姆–刘维尔算子的应用。

本文的主要目的是倡导一种精简的方法，同时处理广义强预解收敛与范数预解收敛。我们的动机是减少对嵌入算子的要求数量，并且分别针对广义强预解收敛和广义范数预解收敛，只采用一个自然条件，即公式 (2.2) 和 (2.1)。与 Stolz 和 Weidmann 不同，我们不要求嵌入算子是投影。至少在强预解收敛的情形下，这似乎很常见；而本文稍微更一般的方法在这一背景下也显得自然，并且不会带来任何额外困难。与 Post 不同，我们减少了要求的数量，也不引入量化的 $\delta$-拟酉概念，因为

2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：47A55、47A10；次要分类号：34L40、34L05。*Key words and phrases.* 范数预解收敛，斯图姆–刘维尔算子。

我们只关注极限结果。这样便能采用一种精简的方法，在仅七页的篇幅中给出（在我们看来）主要结果及其完整证明。总体而言，我们遵循 [10, 第 6 节6]（而该节又受到 [13, 第 9 节3]的启发）的论述方式，同时尝试进一步简化证明（以弥补嵌入算子带来的额外复杂性），并在若干处补充了一些甚至超越经典结果的内容。此外，同样与 Post 不同，我们不要求算子具有半下界。

在最后一节中，我们将给出这些结果的一些应用，并展示如何改进近期采用其他方法得出的若干结果。

总的来说，我们希望这一结果能推动这一方向的进一步研究，因为我们认为这是算子理论中的一个重要课题，值得得到更多关注。

## 2. Generalized strong and norm resolvent convergence

设 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{H}_n$、$n \in \mathbb{N}$ 是可分希尔伯特空间，并配备有界算子 $J_n \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_n)$，满足

$$\|J_n\| \le C, \qquad \|J_n^* J_n - \mathbb{I}\| = \|J_n J_n^* - \mathbb{I}\| \to 0, \tag{2.1}$$

其中 $C$ 是一个正数，$J_n^*$ 是 $J_n$ 的伴随算子。虽然这与 [6, Chapter 4], 类似，但为了达到我们的预期目的，我们选择了一个稍加简化的定义，这样更简单也更自然。对此请注意，(2.1) 蕴含 $J_n^* J_n$ 和 $J_n J_n^*$ 在充分大的 $n$ 下均可逆。因此不难看出，在这种情况下，$J_n^{-1} = J_n^*(J_n J_n^*)^{-1}$ 和 $(J_n^*)^{-1} = (J_n J_n^*)^{-1} J_n$ 均存在，其中 $\|J_n^* - J_n^{-1}\| \to 0$、$\|J_n\| = \|J_n^*\| \to 1$ 和 $\|J_n^{-1}\| = \|(J_n^*)^{-1}\| \to 1$。

我们还将考察以下情形：

$$\|J_n\| \le C, \qquad \|J_n^* J_n \psi - \psi\| \to 0, \quad \psi \in \mathfrak{H}. \tag{2.2}$$

在这种情况下，$J_n$ 不必最终可逆，我们只有 $\liminf_{n\to\infty} \|J_n\| \ge 1$。不过，在我们考虑的应用中，$J_n$ 将是满射，因此根据巴拿赫闭值域定理，$J_n^*$ 将有有界逆（反过来也成立）。

**例 2.1.** 我们考虑的第一个例子是加权勒贝格空间 $\mathfrak{H} := L^2(\mathbb{R}^d, w_\infty(x)\mathrm{d}x)$，$\mathfrak{H}_n := L^2(\mathbb{R}^d, w_n(x)\mathrm{d}x)$，其中 $w_n(x) \le C w_\infty(x)$ 且 $\|\frac{w_n}{w_\infty} - 1\|_\infty \to 0$，并令 $0^0 := 1$。在这种情况下，$J_n \psi = \psi$ 就是自然嵌入，而 $J_n^*$ 是与 $\frac{w_n}{w_\infty}$ 相乘。若 $\frac{w_n}{w_\infty} \to 1$ 一致，则方程 (2.1) 成立。

另一个例子是 $\mathfrak{H}_n \subseteq \mathfrak{H}$ 为子空间序列的情形。在这种情况下，$J_n$ 是相应的正交投影，而 $J_n^*$ 是自然嵌入。注意，我们有 $J_n J_n^* = \mathbb{I}$，且当 $J_n \to \mathbb{I}$ 强收敛时，式 (2.2) 成立。

设 $A \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$、$A_n \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H}_n)$ 是（稠密定义的）闭算子。若（2.1）成立，并且

$$\lim_{n\to\infty} \|J_n^* R_{A_n}(z) J_n - R_A(z)\| = 0 \tag{2.3}$$

对某个 $z \in \Gamma = \mathbb{C} \setminus \Sigma$， $\Sigma := \sigma(A) \cup \bigcup_n \sigma(A_n)$，则称 $\cup \bigcup_n \sigma$ 在广义范数预解意义下收敛于 $A_n$。利用（2.1），这等价于

$$\lim_{n\to\infty} \|R_{A_n}(z)J_n - J_n R_A(z)\| = 0. \tag{2.4}$$

类似地，若满足 (2.2) 且

$$\lim_{n\to\infty} \|J_n^* R_{A_n}(z)J_n\psi - R_A(z)\psi\| = 0, \qquad \psi \in \mathfrak{H}, \tag{2.5}$$

对某个 $z \in \Gamma$ 成立，我们就称 $z \in \Gamma$ 在广义强预解意义下收敛到 。与之前一样，由 (2.2) 可知，这由下式推出：

$$\lim_{n\to\infty} \|R_{A_n}(z)J_n\psi - J_n R_A(z)\psi\| = 0, \qquad \psi \in \mathfrak{H}, \tag{2.6}$$

但除非 $J_n$ 是满射，反向推论未必成立。

**注记 2.2**。 在经典情形中，人们通常会避免在 $\Sigma$ 的定义中取闭包。事实上，由于强收敛/范数收敛序列有界，满足 (2.3) 或 (2.5) 的 $z$ 在此情形下总会位于 $\Gamma$ 的内部。如前所述，在我们的情形中，对于 (2.3) 这仍然成立，因为 $J_n$ 可逆。若 $J_n$ 是正交投影或 $J_n$ 可逆，对于 (2.5) 也成立。然而，一般而言，这一点可能不成立，而且似乎不值得添加额外条件，将这些额外点纳入 $\Gamma$。

**定理 2.3**。 设 $A_n$、 $A$ 为自伴算子，并假设 $A_n$ 在广义范数预解意义下收敛到 $A$ 。那么

$$\lim_{n\to\infty} J_n^* f(A_n)J_n = \lim_{n\to\infty} J_n^{-1} f(A_n)J_n = f(A) \tag{2.7}$$

对于每个有界连续函数 $f$： $\Sigma \to \mathbb{C}$，都有 $\lim_{\lambda\to-\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda)$。

若 $A_n$ 在广义强预解意义下收敛到 $A$ ，则

$$\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} J_n^* f(A_n)J_n = f(A) \tag{2.8}$$

对于每个有界连续函数 $f$： $\Sigma \to \mathbb{C}$。

证明。使结论成立的函数构成一个 $*$-子代数。它是子代数这一点源于加法、数乘和乘积在范数收敛/强收敛下均连续。若结论对 $f$成立，要证明其对 $f^*$成立，可利用 $\|J_n^* f(A_n)J_n - f(A)\| = \|J_n^* f^*(A_n)J_n - f^*(A)\|$在范数收敛的情形下成立。在强收敛的情形下，注意到$J_n^* f(A_n)J_n\psi \to f(A)\psi$意味着弱收敛 $J_n^* f^*(A_n)$ $J_n\psi \rightharpoonup f^*(A)\psi$，且$\|J_n^* f(A_n)J_n\psi\| = \|J_n^* f^*(A_n)J_n\psi\| \to \|f(A)\psi\| = \|f^*(A)\psi\|$，因为 $f(A_n)$ 和 $f(A)$ 均为正规算子。两者结合即可得到 $J_n^* f^*(A_n)J_n\psi \to f^*(A)\psi$。

由于这个 $*$-子代数包含 $f(\lambda) = 1$和 $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z_0}$, $z_0 \in \Gamma$，根据 Stone–Weierstrass 定理，它是稠密的。通常的 $\frac{\varepsilon}{3}$ 论证表明，这个 $*$-子代数也是闭的。□

值得注意的两个简单推论是：

**推论 2.4**。 假设 $A_n$ 对某个 $z_0 \in \Gamma$ 在广义强预解式意义或范数预解式意义下收敛到 $A$ 。那么，对所有 $z \in \Gamma$，这一结论都成立。

**推论 2.5**。 假设 $A_n$ 在广义强预解意义下收敛到 $A$ 。那么

$$J_n^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA_n} J_n \xrightarrow{s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

并且，如果所有算子都由同一个界半有界

$$J_n^* \mathrm{e}^{-tA_n} J_n \xrightarrow{s} \mathrm{e}^{-tA}, \qquad t \geq 0. \tag{2.10}$$

如果满足广义范数预解收敛，最后一个结论在范数意义下同样成立。

接下来我们讨论验证预解收敛的判据。第一个判据处理差为相对有界的情形。

**引理 2.6**。 设 $A_n$, $A$ 为自伴算子，满足 $J_n\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(A_n)$。则 $A_n$ 在广义范数预解意义下收敛于 $A$ ，当且仅当存在趋于零的非负数列 $a_n$ 和 $b_n$ ，使得

$$\|(A_n J_n - J_n A)\psi\| \leq a_n \|A\psi\| + b_n \|\psi\|, \quad \psi \in \mathfrak{D}(A). \tag{2.11}$$

证明。 由第二预解公式

$$R_{A_n}(z) J_n - J_n R_A(z) = R_{A_n}(z)(J_n A - A_n J_n) R_A(z), \quad z \in \Gamma, \tag{2.12}$$

我们得到

$$\begin{aligned} \|(R_{A_n}(\mathrm{i}) J_n - J_n R_A(\mathrm{i}))\psi\| &\leq \|R_{A_n}(\mathrm{i})\| \Big( a_n \|A R_A(\mathrm{i})\psi\| + b_n \|R_A(\mathrm{i})\psi\| \Big) \\ &\leq (a_n + b_n)\|\psi\| \end{aligned}$$

因此 $\|R_{A_n}(\mathrm{i}) J_n - J_n R_A(\mathrm{i})\| \leq a_n + b_n \to 0$。 □

第二种情况讨论差是相对型有界的情形。

设 $A \in \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ 是一个闭线性算子。那么表达式 $\langle \psi, A\psi \rangle$ 称为与 $A \in \mathfrak{C}$ 相关的二次型，

$$\mathbf{q}_A(\psi) = \langle \psi, A\psi \rangle, \quad \psi \in \mathfrak{D}(A),$$

如果对所有 $\psi \in \mathfrak{D}(A)$，都有$\mathbf{q}_A(\psi) \geq 0$，则称算子 $A$ 为非负算子。对于非负算子 $A$，引入标量积

$$\langle \varphi, \psi \rangle_A := \langle \varphi, (A+1)\psi \rangle, \quad \forall\, \varphi, \psi \in \mathfrak{D}(A).$$

设 $\mathfrak{H}_A$ 是关于上述标量积的 $\mathfrak{D}(A)$ 的完备化。容易验证， $\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{H}_A \subseteq \mathfrak{H}$。显然，二次型 $\mathbf{q}_A$ 可以通过以下方式延拓到每个 $\psi \in \mathfrak{H}_A$：

$$\mathbf{q}_A(\psi) = \langle \psi, \psi \rangle_A - \|\psi\|^2, \quad \psi \in \mathfrak{Q}(A) = \mathfrak{H}_A.$$

集合 $\mathfrak{Q}(A)$ 也称为 $A$ 的型域。更多详情请参见 [10]。

**引理 2.7**。 设 $A$、$A_n \geq \gamma$ 有下界，且 $J_n\mathfrak{Q}(A) \subseteq \mathfrak{Q}(A_n)$。则当存在收敛于零的非负序列 $a_n$ 和 $b_n$ ，使得

$$|\boldsymbol{q}_A(\psi) - \boldsymbol{q}_{A_n}(J_n\psi)| \leq a_n \boldsymbol{q}_{A-\gamma}(\psi) + b_n \|\psi\|^2, \qquad \psi \in \mathfrak{Q}(A),$$

其中，$\boldsymbol{q}_A$ 和 $\boldsymbol{q}_{A_n}$ 是相应的二次型。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $a_n, b_n < 1$ 。应用 [10, 定理 6.31] ，令 $\mathbf{q}(\psi) = \mathbf{q}_{A_n}(J_n\psi) - \mathbf{q}_A(\psi)$，对任意 $\psi \in \mathfrak{Q}(A)$，可得

$$\|C_{\mathbf{q}}(\lambda)\| \leq \max\left( a_n, \frac{b_n}{\lambda + \gamma} \right) \to 0, \quad \lambda > -\gamma,$$

and

$$R_{B_n}(-\lambda) = R_A(-\lambda)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{I} + C_{\mathbf{q}}(\lambda))^{-1} R_A(-\lambda)^{\frac{1}{2}},$$

其中， $C_{\mathbf{q}}(\lambda)$ 是与二次型 $\mathbf{q}(R_A(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\cdot)$ 对应的有界算子，而 $B_n := J_n^* A_n J_n$ 是与二次型$\mathbf{q}^{A_n}(J_n\cdot)$相关联的自伴算子。因此可得

$$\begin{aligned}\|R_{B_n}(-\lambda) - R_A(-\lambda)\| &= \|R_A(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\left((1+C_{\mathbf{q}}(\lambda))^{-1}-1\right)R_A(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\| \\ &\leq \|R_A(-\lambda)^{\frac{1}{2}}\|^2\|(1+C_{\mathbf{q}}(\lambda))^{-1}-1\| \to 0.\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\|J_n R_{B_n}(-\lambda) - R_{A_n}(-\lambda)J_n\| &= \|R_{A_n}(-\lambda)(A_n+\lambda)(J_n R_{B_n}(-\lambda) - R_{A_n}(-\lambda)J_n)\| \\ &\leq \|R_{A_n}(-\lambda)\|\|(A_n+\lambda)J_n R_{B_n}(-\lambda) - J_n\| \\ &\leq \|R_{A_n}(-\lambda)\|\|(J_n^*)^{-1}\|\|(B_n+\lambda+\lambda(J_n^*J_n-\mathbb{I}))R_{B_n}(-\lambda) - J_n^*J_n\| \\ &\leq \|R_{A_n}(-\lambda)\|\|(J_n^*)^{-1}\|\|(\lambda R_{B_n}(-\lambda)-1)\|\|J_n^*J_n - \mathbb{I}\| \to 0, \qquad \square\end{aligned}$$

由此可得该结论。

接下来，我们证明算子的强收敛意味着预解的强收敛。

设 $A$ 是定义域 $\mathfrak{D}(A)$ 稠密的对称算子，且 $A$ 是它唯一的自伴扩张。则称 $A$ 为本质自伴，称 $\mathfrak{D}(A)$ 为 $A$ 的核。更多详情请参见 [10]。

**引理 2.8**。若存在 $A$ 的一个核 $\mathfrak{D}_0$，使得对每个 $\psi \in \mathfrak{D}_0$，当 $n$ 充分大时，我们都有 $J_n\psi \in \mathfrak{D}(A_n)$，且 $(A_nJ_n - J_nA)\psi \to 0$，则序列 $A_n$ 在广义强预解意义下收敛于 $A$。

证明。利用第二预解公式 (2.12)，我们有

$$(R_{A_n}(\mathrm{i})J_n - J_nR_A(\mathrm{i}))\phi = -R_{A_n}(\mathrm{i})(A_nJ_n - J_nA)\psi \to 0$$

对于 $\phi = (A-\mathrm{i})\psi$，其中 $\psi \in \mathfrak{D}_0$ 稠密，因为 $\mathfrak{D}_0$ 是一个核。其余部分由 [10, 引理 1.14] 得出。□

最后，我们指出，广义弱预解收敛等价于广义强预解收敛。

**引理 2.9**。设 $A_n$、$A$ 为自伴算子。假设 (2.2) 且 $\|J_nJ_n^* - \mathbb{I}\| \to 0$。若 $J_n^*R_{A_n}(z)J_n$ 对某个 $z \in \Gamma \setminus \mathbb{R}$ 弱收敛到 $R_A(z)$，则 $R_{A_n}(z)$ 在广义强预解意义下收敛到 $R_A(z)$。

证明。由 $J_n^*R_{A_n}(z)J_n \rightharpoonup R_A(z)$，我们也有 $J_n^*R_{A_n}(z)^*J_n \rightharpoonup R_A(z)^*$，因此根据第一预解公式

$$\begin{aligned}&\left|\|J_n^*R_{A_n}(z)J_n\psi\|^2 - \|R_A(z)\psi\|^2\right| \\ &= |\langle\psi, J_n^*R_{A_n}(z^*)J_nJ_n^*R_{A_n}(z)J_n\psi - R_A(z^*)R_A(z)\psi\rangle| \\ &\leq |\langle\psi, J_n^*R_{A_n}(z^*)(J_nJ_n^*-\mathbb{I})R_{A_n}(z)J_n\psi\rangle| \\ &\quad + |\langle\psi, (J_n^*R_{A_n}(z^*)R_{A_n}(z)J_n - R_A(z^*)R_A(z))\psi\rangle| \\ &\leq \|J_n^*\|\|R_{A_n}(z^*)\||\langle\psi, (J_nJ_n^*-\mathbb{I})R_{A_n}(z)J_n\psi\rangle| \\ &\quad + \frac{1}{|z-z^*|}|\langle\psi, (J_n^*R_{A_n}(z)J_n)\psi - (J_n^*R_{A_n}(z)^*J_n)\psi\rangle| \\ &\to 0.\end{aligned}$$

结合 $J_n^*R_{A_n}(z)J_n \rightharpoonup R_A(z)$，根据 [10, 引理 1.12 (iv)]，我们有 $J_n^*R_{A_n}(z)J_n\psi \to R_A(z)\psi$。□

现在我们转而讨论谱收敛。照例，我们用 $\lim S_n$ 表示$n\to\infty$所有满足以下条件的 $\lambda$ 的集合：存在一个序列 $\lambda_n \in S_n$ 收敛到 $\lambda$。

**定理 2.10.** 设 $A_n$ 和 $A$ 是自伴算子。若 $A_n$ 在广义强预解意义下收敛到 $A$，则有 $\sigma(A) \subseteq \lim_{n\to\infty}\sigma(A_n)$。

若 $A_n$ 在广义范数预解意义下收敛到 $A$，则有 $\sigma(A) = \lim^{\sigma}_{n\to\infty}(A_n)$。此外，对每个 $\lambda \in \rho(A)$，存在一个邻域，该邻域最终包含于 $\rho(A_n)$。

证明。首先，我们断言 $\sigma(A) \subseteq \lim^{\sigma}_{n\to\infty}(A_n)$。否则，我们可以找到一个 $\lambda \in \sigma(A)$ 和某个 $\varepsilon > 0$，使得

$$\sigma(A_n) \cap (\lambda - 2\varepsilon, \lambda + 2\varepsilon) = \emptyset.$$

取一个非负有界连续函数 $f$，它在 $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ 上取值为 1，并在 $(\lambda - 2\varepsilon, \lambda + 2\varepsilon)$ 外为零。于是 $f(A_n) = 0$。结合定理 2.3，可得

$$J_n^* f(A_n) J_n \psi - f(A)\psi \to 0 \quad \text{for any } \psi \in \mathfrak{D}(A),$$

因此 $f(A)\psi = 0$。另一方面，由于 $\lambda \in \sigma(A)$，存在一个非零的$\psi \in \operatorname{Ran} P_A((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon))$，这意味着 $f(A)\psi = \psi$，与此矛盾。

为得到反向结论，我们选取 $\lambda \in \rho(A)$ 和 $\varepsilon > 0$，使得 $\sigma(A) \cap (\lambda - 2\varepsilon, \lambda + 2\varepsilon) = \emptyset$。选取一个非负有界连续函数 $f$，使其在 $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ 上取值为 1，并在 $(\lambda - 2\varepsilon, \lambda + 2\varepsilon)$ 外为零。于是 $f(A) = 0$，并且根据 $J_n^* f(A_n) J_n \to 0$，我们还有 $f(A_n) \to 0$，且

$$f(A_n) P_{A_n}((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) = P_{A_n}((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) \to 0.$$

这意味着 $P_{A_n}((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon))$ 最终成立，从而证明了该结论。 □

此外，关于谱投影的收敛，我们还有以下结果。

**引理 2.11**。 假设 $A_n$ 在广义强预解意义下收敛到 $A$。若$P_A(\{\lambda\}) = 0$，则

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} J_n^* P_{A_n}((-\infty, \lambda)) J_n = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} J_n^* P_{A_n}((-\infty, \lambda]) J_n = P_A((-\infty, \lambda)) = P_A((-\infty, \lambda]). \tag{2.13}$$

证明。由定理 2.3，与 $A_n$ 对应的谱测度 $\mu_{n,J_n\psi}$ 弱收敛到 $A$ 的谱测度 $\mu_\psi$。因此，$\|P_{A_n}(\Omega) J_n \psi\|^2 = \mu_{n,J_n\psi}(\Omega)$ 与 [10,引理 A.34] 一起推出所述结论。□

利用 $P((\lambda_0, \lambda_1)) = P((-\infty, \lambda_1)) - P((-\infty, \lambda_0])$，我们还可得到

**引理 2.12**。 假设 $A_n$ 在广义强预解意义下收敛到$A$。若 $P_A(\{\lambda_0\}) = P_A(\{\lambda_1\}) = 0$，则

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} J_n^* P_{A_n}((\lambda_0, \lambda_1)) J_n = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} J_n^* P_{A_n}([\lambda_0, \lambda_1]) J_n = P_A((\lambda_0, \lambda_1)) = P_A([\lambda_0, \lambda_1]). \tag{2.14}$$

此外，

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ran} P_A((\lambda_0, \lambda_1)) &\le \liminf_{n\to\infty} \dim \operatorname{Ran} J_n^* P_{A_n}((\lambda_0, \lambda_1)) J_n \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \|J_n\|^2 \liminf_{n\to\infty} \dim \operatorname{Ran} P_{A_n}((\lambda_0, \lambda_1)). \end{aligned} \tag{2.15}$$

证明。 接下来只需证明这些不等式。由于我们可以写成

$$\dim \operatorname{Ran} P_{A_{n_k}}((\lambda_0,\lambda_1)) = \operatorname{tr}(P_{A_{n_k}}((\lambda_0,\lambda_1)))$$

第一条由谱投影的强收敛结合法图引理得出。第二个不等式成立，因为对于每个秩为 $N$ 的正算子 $P$，我们有 $\operatorname{tr}(P) \leq N\|P\|$。□

**推论 2.13.** 假设 $A_n$ 在广义强预解意义下收敛到 $A$。若 $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$，则对每个 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \dim \operatorname{Ran} P_{A_n}((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)) = \infty. \tag{2.16}$$

证明. 如有必要，将 $\varepsilon$ 递减，我们可以假设 $P_A(\{\lambda-\varepsilon\}) = P_A(\{\lambda+\varepsilon\}) = 0$。因此，由前引理可得结论，因为该假设意味着对每个 $\varepsilon > 0$，$\dim \operatorname{Ran} P_A((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)) = \infty$。□

对于接下来的结果，回顾以下众所周知的结论：若 $P$、 $Q$ 是两个满足 $\|P-Q\| < 1$ 的投影，则它们的值域维数相同。

**引理 2.14.** 假设 $A_n$ 在广义范数预解意义下收敛到 $A$，且 $\lambda$ 是 $\sigma(A)$ 的一个孤立点。那么

$$\lim_{n\to\infty} J_n^{-1} P_{A_n}((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)) J_n = P_A(\{\lambda\}), \tag{2.17}$$

当 $\varepsilon$ 足够小时，使得 $(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$。特别地，两个投影的值域维数最终相同。

证明。 设 $f$ 是一个连续函数，在 $(\lambda-\varepsilon/2,\lambda+\varepsilon/2)$ 上取值为 1，在其外取值为 0。那么，当 $n$ 充分大时，我们有 $\sigma(A_n) \cap \{\alpha \mid \varepsilon/2 \lhd |\alpha-\lambda| < \varepsilon\} = \emptyset$。因此 $f(A_n) = P_{A_n}((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon))$，并且 $f(A) = P_A(\{\lambda\})$，使得 $J_n^{-1} P_{A_n}((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)) J_n \to P_A(\{\lambda\})$，结论得证。□

**定理 2.15**。 设 $A_n$ 和 $A$ 为自伴算子。若 $A_n$ 在广义范数预解意义下收敛到 $A$，则有 $\sigma_{ess}(A) = \lim_{n\to\infty}{}^{\sigma_{ess}}(A_n)$。这里$\lim_{n\to\infty}{}^{\sigma_{ess}}(A_n)$ 表示所有 $\lambda$ 的集合，其中存在一个序列 $\lambda_n \in \sigma_{ess}(A_n)$ 收敛到 $\lambda$。

证明。 如果 $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$，那么 $\lambda$ 属于离散谱（或预解集），结论由引理 2.14 得出。

反之，设 $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$。如果不存在收敛到 $\lambda$ 的序列 $\lambda_n \in \sigma_{ess}(A_n)$，则我们可以找到 $\varepsilon > 0$ 以及一个子列 $n_k$，使得 $\dim \operatorname{Ran} P_{A_{n_k}}((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)) < \infty$。为方便记号起见，我们转而考虑该子列。此外，我们可以选取一个奇异韦尔序列 $\psi_k$，满足 $\|\psi_k\| = 1$、 $\psi_k \rightharpoonup 0$ 以及 $\|R_A(\mathrm{i}) - (\lambda-\mathrm{i})^{-1})\psi_k\| \to 0$。于是

$$\begin{aligned}
\|J_n^* R_{A_n}(\mathrm{i}) J_n - R_A(\mathrm{i})\| &\geq \limsup_{k\to\infty} \|(J_n^* R_{A_n}(\mathrm{i}) J_n - R_A(\mathrm{i}))\psi_k\| \\
&= \limsup_{k\to\infty} \|(J_n^* R_{A_n}(\mathrm{i}) J_n - (\lambda-\mathrm{i})^{-1})\psi_k\| \\
&= \limsup_{k\to\infty} \|J_n^*(R_{A_n}(\mathrm{i}) - (\lambda-\mathrm{i})^{-1}) J_n\psi_k\| \\
&= \limsup_{k\to\infty} \|J_n^*(R_{A_n}(\mathrm{i}) - (\lambda-\mathrm{i})^{-1}) P_{A_n}(\mathbb{R}\setminus(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)) J_n\psi_k\| \\
&\geq \|(J_n^*)^{-1}\| \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \|J_n^{-1}\|
\end{aligned}$$

这与范数预解收敛相矛盾。在这里，我们利用了 $J_n^* P_{A_n}((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)J_n\psi_k \to 0$，这是由紧性得到的。□

## 3. Applications to Sturm–Liouville operators

本节中，我们将广义范数预解收敛应用于不同希尔伯特空间中的 Sturm–Liouville 算子。本节始终采用关于系数的通常假设：

**假设 3.1**。假设 $I=(a,\ b)$ 是某个区间。令 $w,\ p^{-1},\ q\in L^1_{loc}(I,\ \mathrm{d}x)$ 为实值，并且 $p,\ w>0$ 在 $I$ 上几乎处处成立。

接下来考虑 Sturm–Liouville 算子：

$$\begin{aligned} T:\quad & \mathfrak{D}(T)\to L^2(I,w(x)\mathrm{d}x)\\ & f\mapsto \frac{1}{w}\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+qf\Big), \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中

$$\mathfrak{D}(T)\subseteq\{f\in L^2(I,w(x)\mathrm{d}x): f,pf'\in AC(I),\frac{1}{w}\big(-(pf')'+qf\big)\in L^2(I,w(x)\mathrm{d}x)\}. \tag{3.2}$$

为了使 $T$ 自伴，可能需要施加额外的边界条件，但我们暂且搁置这个问题。

就我们当前的目的而言，需要相应的型域。我们所知的大多数结果都考虑薛定谔算子的情形（$w=p=1$），例如参见 [10], ；或者考虑正则算子的情形，参见 [3]。为了在更一般的情况下计算型域，我们将首先令 $q$ 等于 0，并按照 $A^*A$ 对 $T$进行因式分解，从而得到 $\mathfrak{Q}(T)=\mathfrak{D}(A)$。

为此，定义

$$\begin{aligned} A_+:\quad & \mathfrak{D}(A_+)\to L^2(I,w(x)\mathrm{d}x)\\ & f\mapsto \frac{1}{w}\sqrt{wp}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{D}(A_+):=\{f\in L^2(I,\ w(x)\mathrm{d}x):\ f\in AC(I)\ \sqrt{p}f'\in L^2(I,\ \mathrm{d}x)\}$ 且

$$\begin{aligned} A_-:\quad & \mathfrak{D}(A_-)\to L^2(I,w(x)\mathrm{d}x)\\ & f\mapsto -\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{wp}f, \end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{D}(A_-):=\{f\in L^2(I,\ w(x)\mathrm{d}x):\sqrt{wpf}\in AC(I)\ \ \frac{1}{\sqrt{w}}(\sqrt{wpf})'\in L^2(I,\ \mathrm{d}x)\}$。

此外，我们还需要相关的极小算子 $A_{0,\ \pm}$ 它们是将 $A_\pm$ 限制在具有紧支撑的函数上得到的。

注意，对于 $(c,\ d)\ \subseteq\ (a,\ b)$、$f\in\mathfrak{D}(A_+)$ 和 $g\in\mathfrak{D}(A_-)$，通过分部积分可得

$$\begin{aligned} &\int_c^d g(x)\sqrt{w(x)p(x)}f'(x)\mathrm{d}x\\ &\quad=(\sqrt{wp}g)(d)f(d)-(\sqrt{wp}g)(c)f(c)-\int_c^d(\sqrt{wp}g)'(x)f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.3}$$

此外，由于所有被积函数均可积，边界项的极限分别存在，且为 $c\downarrow a$ 和 $d\uparrow b$。

此外，如果 $g \in L^2(I, w(x)\mathrm{d}x)$，那么我们有

$$f_+(x) := f_+(c) + \int_c^x \sqrt{\frac{w(y)}{p(y)}} g(y)\mathrm{d}y \tag{3.4}$$

满足 $f_+ \in AC(I)$ 和 $\sqrt{p/w}(\overline{f_+})' = g$ 且

$$f_-(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)w(x)}} \left( (\sqrt{wp} f_-)(c) + \int_x^c w(y)g(y)\mathrm{d}y \right) \tag{3.5}$$

满足 $\sqrt{wp}\overline{f_-} \in AC(I)$ 和 $-1/w(\sqrt{wp}f_-)' = g$。

以下类型的结果众所周知。为求完整起见，我们给出证明。

**引理 3.2**。 算子 $A_{0,\pm}$ 稠密定义，其闭包为

$$\overline{A_{0,+}} f = A_+ f, \quad \mathfrak{D}(\overline{A_{0,+}}) = \{ f \in \mathfrak{D}(A_+) : \lim_{x \to a,b} (\sqrt{wp} g)(x) f(x) = 0, \ \forall g \in \mathfrak{D}(A_-) \}$$

*and*

$$\overline{A_{0,-}} f = A_- f, \quad \mathfrak{D}(\overline{A_{0,-}}) = \{ f \in \mathfrak{D}(A_-) : \lim_{x \to ,a,b} (\sqrt{wp} f)(x) g(x) = 0, \ \forall g \in \mathfrak{D}(A_+) \}.$$

它们的伴随算子为

$$A^*_{0,\pm} f = A_\mp f, \quad \mathfrak{D}(A^*_{0,\pm}) = \mathfrak{D}(A_\mp).$$

证明。 由 (3.3)，我们有 $\mathfrak{D}(A_\mp) \subseteq \mathfrak{D}(A^*_{0,\pm})$，接下来只需证明 $\mathfrak{D}(A^*_{0,\pm}) \subseteq \mathfrak{D}(A_\mp)$。若有

$$\langle h, A_{0,\pm} f \rangle = \langle k, f \rangle, \qquad \forall f \in \mathfrak{D}(A_{0,\pm}),$$

则由 (3.4)、(3.5)，可找到一个在局部属于 $\mathfrak{D}(A_\mp)$ 的 $h$，使得 $A_\mp h = k$；分部积分可得

$$\int_a^b (h(x) - \tilde{h}(x)^*) A_\pm f(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad \forall f \in \mathfrak{D}(A_{0,\pm}).$$

现在考虑线性泛函

$$\ell(g) = \int_a^b (h(x) - \tilde{h}(x))^* g(x) w(x)\mathrm{d}x, \quad \ell_\pm(g) = \int_a^b u_\mp(x)^* g(x) w(x)\mathrm{d}x,$$

定义在 $L^2_c(I, w(x)\mathrm{d}x)$ 上，其中 $u_+ = 1$ 且 $u_- = \frac{1}{\sqrt{wp}}$。那么 $g \in \ker(\ell_\pm)$ 蕴含

$$f(x) = \begin{cases} \int_a^x \sqrt{\frac{w(y)}{p(y)}} g(y)\mathrm{d}y \in \mathfrak{D}(A_{0,+}) & \text{when } g \in \ker(\ell_+) \\ \frac{1}{\sqrt{p(x)w(x)}} \int_x^b w(y)g(y)\mathrm{d}y \in \mathfrak{D}(A_{0,-}) & \text{when } g \in \ker(\ell_-) \end{cases} \tag{3.6}$$

且 $A_\pm f = g$。因此 $\ell(g) = 0$，即 $g \in \ker(\ell)$。所以由 [10, 引理 9.3]，我们得出 $\ell = \alpha_\mp \ell_\pm$，其中 $\alpha_\mp$ 为常数。因此，如所需，$h(x) = h(x) + \alpha_\mp u_\mp(x) \in \mathfrak{D}(A_\mp)$。

若 $\mathfrak{D}(A_{0,\pm})$ 不稠密，那么对于 $h = 0$，我们可以选取某个非零的 $k \in \mathfrak{D}(A_{0,\pm})^\perp$，而上面的计算形式将导出矛盾 $k = A_\mp \tilde{h} = A_\mp h = 0$。因此我们已经证明了 $A^*_{0,\pm} = A_\mp$。

最后，简记 $\mathfrak{D}_\pm := \{f \in \mathfrak{D}(A_\pm) : \lim_{x\to,\ a,\ b}(\sqrt{w}pf)(x)\overline{g}(x) = 0, \quad \forall g \in \mathfrak{D}(A_\mp)\}$。于是 (3.3) 表明 $\mathfrak{D}_\pm \subseteq \mathfrak{D}(A_{0,\ \pm}^{**}) = \mathfrak{D}(A_{0,\ \pm})$。反过来，由于 $A_{0,\ \pm} = A_\mp^* \subseteq A_\pm$，我们可以利用 (3.3) 得出结论

$$\sqrt{w(b)p(b)}f(b)h(b) - \sqrt{w(a)p(a)}f(a)h(a) = 0, \quad f \in \mathfrak{D}(\overline{A_{0,\pm}}), h \in \mathfrak{D}(A_\mp).$$

˜现在用一个 $h \in \mathfrak{D}(A_\mp)$ 替换 $h$，它在 $a$ 附近与 $h$ 重合，并在 $b$ 附近恒等于零。于是

$$\sqrt{w(a)p(a)}f(a)h(a) = \sqrt{w(a)p(a)}f(a)\tilde{h}(a) - \sqrt{w(b)p(b)}f(b)\tilde{h}(b) = 0.$$

最后，$\sqrt{w(b)p(b)}f(b)h(b) = \sqrt{w(a)p(a)}f(a)h(a) = 0$ 表明了 $f \in \mathfrak{D}_\pm$。 □

基于这一结果，我们定义

$$\mathfrak{Q} := \mathfrak{D}(A_+), \qquad \mathfrak{Q}_0 := \{f \in \mathfrak{Q} : \lim_{x\to a,b}(\sqrt{wp}g)(x)f(x) = 0,\ \forall g \in \mathfrak{D}(A_-)\}. \quad (3.7)$$

于是我们得到两个相应的算子：Friedrichs扩张 $A_-A_{0,\ +}$ 其型域为 $\overline{\mathfrak{Q}_0}$；以及 $A_{0,\ -}A_+$ 其型域为 $\overline{\mathfrak{Q}}$。如果底层微分表达式 $-\frac{1}{w}\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}x^p\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}x$ 在两个端点处都是极限点，那么这两个算子当然一致。

为了纳入 $q$，我们假设 $w,\ p \geq \delta$ 其中存在某个常数 $\delta > 0$，使得 $L^2(I,\ w(x)\mathrm{d}x) \subseteq L^2(I,\ \mathrm{d}x)$ 且 $\mathfrak{Q} \subseteq H^1(I,\ \mathrm{d}x)$，其中 $H^1(I,\ \mathrm{d}x) := W^{1,\ 2}(I,\ \mathrm{d}x)$ 是 Sobolev空间。

**引理 3.3.** 假设 $w$、$p$、$q$ 满足

$$w, p \geq \delta, \quad M := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \int_{[k,k+1)\cap I} |q(x)|\mathrm{d}x < \infty, \quad (3.8)$$

其中 $\delta$ 为正常数。若 $I$ 是紧的，则对 $q$ 的条件相当于要求 $q$ 可积。

则 $q/w$ 相对于 $A_-A_{0,+}$和 $A_{0,-}A_+$均为相对型有界，且有界度为 0，即对任意 $\epsilon > 0$,

$$\int_I |q(x)||f(x)|^2\mathrm{d}x \leq M\left(\epsilon\int_I p(x)|f'(x)|^2\mathrm{d}x + \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)\int_I |f(x)|^2 w(x)\mathrm{d}x\right), \quad f \in \mathfrak{Q}.$$

证明。这可直接仿照引理 9.33，由 [10]得出。 □

因此，我们可以将 $T = A_-A_{0,+} + q/w$ 与 $\mathfrak{D}(T) = \{f \in \mathfrak{Q}_0 \mid A_{0,+}f \in \mathfrak{D}(A_-)\}$ 和 $\mathfrak{Q}(T) = \mathfrak{Q}_0$，或将 $T = A_{0,-}A_+ + q/w$ 与 $\mathfrak{D}(T) = \{f \in \mathfrak{Q} \mid A_+f \in \mathfrak{D}(A_{0,-})\}$ 和 $\mathfrak{Q}(T) = \mathfrak{Q}$ 定义为型和，使得其关联二次型为

$$\int_a^b \big(p(x)f'(x)^*g'(x) + q(x)f(x)^*g(x)\big)\mathrm{d}x, \qquad f, g \in \mathfrak{Q}(T). \quad (3.9)$$

**定理 3.4.** 假设 $w$、$p$、$q$ 以及 $w_n$、$p_n$、$q_n$ 均满足 假设 3.1、(3.8) 以及$q_n$、$q \geq \gamma$，其中某个常数为 $\gamma \in \mathbb{R}$。若

$$w_n/w \to 1, \quad p_n/p \to 1, \qquad C_n := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \int_{[k,k+1)\cap I} |q_n(x) - q(x)|\mathrm{d}x \to 0, \quad (3.10)$$

一致地，那么我们有 $T_n \to T$ 属于广义范数预解收敛。

证明。容易验证

$$\begin{aligned} J_n: \quad L^2(I, w(x)\mathrm{d}x) &\to L^2(I, w_n(x)\mathrm{d}x) \\ f &\mapsto f, \end{aligned}$$

满足 (2.1)。由于

$$\int_I |f(x)|^2 w_n(x)\mathrm{d}x = \int_I |f(x)|^2 w(x)\frac{w_n(x)}{w(x)}\mathrm{d}x,$$

我们有 $J_n\mathfrak{Q}(T) \subseteq \mathfrak{Q}(T_n)$。令 $T = T_{(1)} + T_{(2)}$，其中 $T_{(1)} := \frac{1}{w}(= \mathrm{d}\,\mathrm{d}x\frac{p}{\mathrm{d}\,\mathrm{d}x})$ 且 $T^{(2)} := \frac{q}{w}$属于 $L^2(I, w(x)\mathrm{d}x)$。对于任意 $\psi \in \mathfrak{Q}(T)$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}_{T^{(1)}}(\psi) - \mathbf{q}_{T_n^{(1)}}(J_n\psi)| &= \left| \int_I \left( \frac{p_n(x)}{p(x)} - 1 \right) p(x)|\psi'(x)|^2 \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \left\| \frac{p_n}{p} - 1 \right\|_\infty \int_I p(x)|\psi'(x)|^2 \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

并由引理 3.3,

$$\begin{aligned} &|\mathbf{q}_{T^{(2)}}(\psi) - \mathbf{q}_{T_n^{(2)}}(J_n\psi)| \leq \int_I |q(x) - q_n(x)|\,|\psi(x)|^2 \mathrm{d}x \\ &\leq C_n C(p, w)\left( \epsilon \int_I p(x)|\psi'(x)|^2 \mathrm{d}x + \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \int_I |\psi(x)|^2 w(x)\mathrm{d}x \right), \end{aligned}$$

其中 $C(p, w)$ 是与 $p$ 和 $w$相关的正常数。

注意到 $T_n, T \geq \gamma$ 有下界。因此，利用引理 2.7，最终得到 $T_n \to T$ 在广义范数预解意义下收敛。□

以下结果推广了 [1]中的定理 3.5。

**定理 3.5**。假设 $I = \mathbb{R}$、$w_0$、$p_0$、$q_0$ 以及 $w_\infty$、$p_\infty$、$q_\infty$ 均满足假设 3.1、(3.8) 和 $q_0$、$q_\infty \geq \gamma$，其中常数为 $\gamma \in \mathbb{R}$。若

$$w_\infty(x)/w_0(x) \to 1, \quad p_\infty(x)/p_0(x) \to 1, \quad as\ |x| \to \infty,$$

*and*

$$\int_k^{k+1} |q_\infty(x) - q_0(x)|\mathrm{d}x \to 0, \quad as\ |k| \to \infty.$$

则 $\sigma_{ess}(T_\infty) = \sigma_{ess}(T_0)$。

证明。定义

$$w_n(x) = \begin{cases} w_\infty(x), & |x| \leq n, \\ w_0(x), & |x| > n \end{cases}$$

并类似地定义 $p_n$ 和 $q_n$。众所周知，$\sigma_{ess}(T_n) = \sigma_{ess}(T_0)$，因为当系数在紧集上发生改变时，本质谱不会改变：在 $-n$和 $n$处添加额外的（例如）狄利克雷边界条件，会将该算子分解为三个算子的直和，而这三个算子与原算子相差一个秩二扰动。因此，根据韦伊定理，原算子的本质谱是这三个部分的本质谱之并。由于中间部分对应于一个正则算子，它不会对本质谱作出贡献。

利用定理 3.4，我们有 $T_n \to T_\infty$ 处于广义范数预解意义，结论得证。□

**致谢**。 Y. Wang 和 Z. Zhou 感谢维也纳大学数学学院在 2025年长期访问期间给予的热情接待。

Y. Wang 和 Z. Zhou 获得了国家自然科学基金委员会（编号：12271509、12090010、12090014）的部分资助。

## References

[1] J. Behrndt、P. Schmitz、G. Teschl 和 C. Trunk, *Relative oscillation theory and essential spectra of Sturm–Liouville operators* 518 2023 , 《数学分析及其应用杂志》 126673 （），第 [2] J. Behrndt、P. Schmitz、G. Teschl 和 C. Trunk, *Perturbation and spectral theory for singular indefinite Sturm–Liouville operators* 405 2024 151 , 《微分方程杂志》（），– 178。[3] F. Gesztesy、B. Simon 和 G. Teschl, *Zeros of the Wronskian and renormalized oscillation theory* 118 1996 571 594 , 《美国数学杂志》（），–。

[4] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 第 2 版，数学经典丛书 132，施普林格，纽约，1995年。[5] O. Post, *Spectral convergence of quasi-one-dimensional spaces*《亨利·庞加莱年刊》7（2006年），933–973。[6] O. Post, *Spectral Analysis on Graph-Like Spaces*，数学讲义 2039，施普林格，2010年。[7] O. Post 和 J. Simmer, *Quasi-unitary equivalence and generalized norm resolvent convergence* 2503 22611 , arXiv：。

[8] G. Stolz 和 J. Weidmann, *Approximation of isolated eigenvalues of ordinary differential operators* 445 1993 31 44 , 《纯粹与应用数学杂志》（），–。[9] G. Stolz 和 J. Weidmann, *Approximation of isolated eigenvalues of general singular ordinary differential operators* 28, 3 4 8 1995 345 35 , 《数学成果》第 - 期（），–。

[10] G. Teschl, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics; With Applications to Schrödinger Operators* 157, , 数学研究生教材，美国数学学会，普罗维登斯，2009年。[11] G. Teschl, *On the approximation of isolated eigenvalues of ordinary differential operators* 136 2008 2473 247 , 《美国数学会会刊》（），–。

[12] J. Weidmann, *Spectral Theory of Ordinary Differential Operators*，数学讲义 1258，施普林格，1987年。[13] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen I*，托伊布纳出版社，斯图加特，2000年。[14] J. Weidmann, *Spectral theory of Sturm–Liouville operators; approximation by regular problems*，载于《斯图姆–刘维尔理论：过去与现在》（编者：W. Amrein、A. Hinz 和 D. Pearson），29–43，Birkh¨auser，巴塞尔，[15] A. Zettl, *Sturm-Liouville Theory*，数学调查与专著 121，美国数学学会，普罗维登斯，2005年。

Faculty of Mathematics, University of Vienna, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090Wien, Austria*Email address*: Gerald.Teschl@univie.ac.at*URL*: https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/

State Key Laboratory of Mathematical Sciences, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, 100190 Beijing, China, School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, 100049 Beijing, China*Email address*: wangyifei@amss.ac.cn

School of Mathematics and Statistics, Shandong University, 264209 Weihai, China *Email address*: xiebing@sdu.edu.cn

State Key Laboratory of Mathematical Sciences, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, 100190 Beijing, China*Email address*: zzhou@amss.ac.cn