网格去噪

Constantin Vaillant-Tenzer[1, 2, 3]

[1]巴黎高等师范学院 - *PSL*：认知研究系[2]巴黎高等师范学院 - *PSL*：数学与应用系[3]巴黎西岱大学：基础与生物医学科学学院和 *IHSS*[1]
constantin.tenzer@ens.psl.eu

2022年1月

arXiv:2601.10487v1 [stat.CO] 15 Jan 2026

摘要

本文研究了四种网格去噪方法：线性滤波、热扩散方法、索博列夫正则化，以及在较小程度上基于 Sinkhorn 算法的重心方法。我们说明，在简单的图像去噪任务中，若天真地选择吉布斯核，可能会导致不理想的结果。我们证明，尽管在我们的实现中，索博列夫正则化是速度最快的方法，但与迭代滤波或热扩散所得的最佳结果相比，它生成的去噪网格保真度略低。通过实证，我们表明，对于所研究的大型网格，热扩散方法比滤波更慢，效果也没有更好；而对于小型网格，恰当选择扩散参数则可以提升质量。最后，我们观察到，三种基于网格的方法在大型网格上的表现都明显优于在小型网格上的表现。

1 引言

1.1 问题

在计算机中表示三维物体时，网格非常实用。网格 $\mathcal{M}$由一个指标集 $\mathcal{V} = [\![1, n]\!]$构成，该指标集用于索引 n 顶点、一组边 $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$以及一组面 $\mathcal{F} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}$。尽管这些物体在日常应用中尚未普及，但它们是表示和传输三维内容的天然选择，例如可用于全息显示器或沉浸式通信。通过噪声信道传输的信息可能会遭到破坏，因此有必要进行去噪。在本研究中，我们从图 1.1所示的含噪网格开始。

然而，这项任务并非易事。首先，这些物体可能包含大量顶点n，尤其是在需要忠实表示现实世界中的三维物体时。因此，算法必须足够快速且具备良好的可扩展性。我们也可能希望机器能够判断收到的网格是否需要去噪，并在不知道原始网格的情况下估计噪声水平。这些属于本文未涉及的学习问题。相反，我们重点关注可作为监督学习流程构建模块的算法去噪方法。

一种颇具前景但在技术上要求较高的方法，是在几何域上进行最优传输，并通过 Sinkhorn算法 [Sol+15]进行数值实现。更快速或更简单的方法，例如索博列夫正则化或基于图的滤波，仍然可以取得良好效果。了解这些方法的局限性及其适用范围十分重要。特别是，我们将看到，它们在小型和大型网格上的表现截然不同，但仍能将严重退化的形状转化为视觉上可辨识的形状。

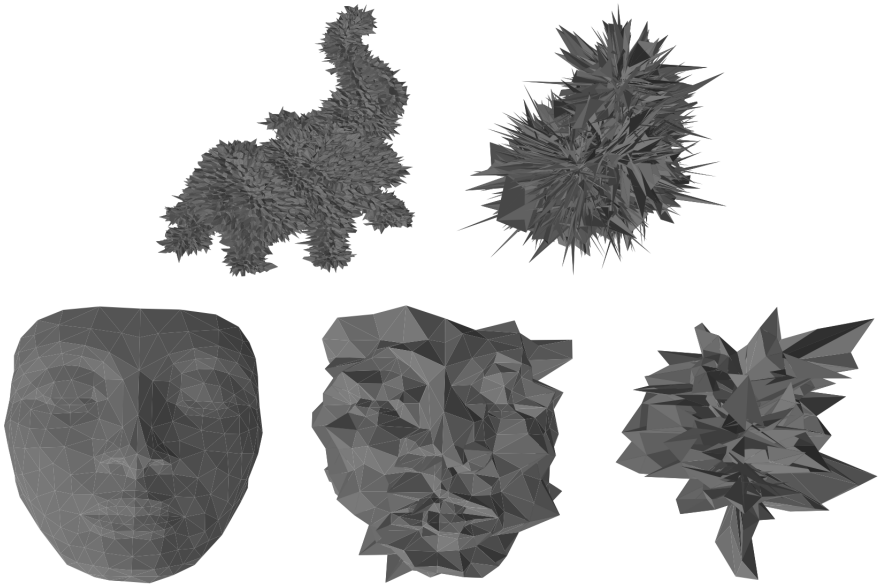

图1：表中研究的各种含噪网格 4.1。从左到右： $\rho = 0.015$， $\rho = 0.2$，$\rho = 1$ （仅底行）。

1.2 贡献

在回顾 Sinkhorn算法的理论基础——即离散最优传输和 Kullback–Leibler散度——并重温热方程和 Cholesky 分解之后，我们将简要尝试应用熵正则化最优传输方案对图像进行去噪。随后，我们将重点介绍三种网格去噪方法：低通图滤波器、线性热扩散方法和 Sobolev型正则化。我们将在两个尺寸相差悬殊的网格上比较它们的准确性和执行时间（$n = 24,\ 955$ 个顶点和 $n = 299$ 个顶点）。最后，我们将讨论实验中观察到的主要局限性，并概述可能的拓展方向。

2 Sinkhorn算法的相关理论

2.1 最优传输

2.1.1 蒙日问题及其由Kantorovich提出的松弛

蒙日问题是一个离散优化问题。

定义 1。 设 X 和 Y 是两个各含 $N \geq 1$ 个元素的集合。我们定义成本矩阵 $c := (c_{x,y})_{(x,y)\in X\times Y} \in \mathbb{R}^{X\times Y}$。我们用 $\mathrm{Bij}(X, Y)$表示从 X 到 Y的所有双射组成的集合。

Monge问题表述如下:

$$\min_{\varphi\in \mathrm{Bij}(X,Y)} \sum_{x\in X} c_{x,\varphi(x)}. \tag{2.1.1}$$

注 1。 集合 X 和 Y通常是同一向量空间中的点集。起初， X中的每个点上都有一个物体。对于 $(x, y) \in X \times Y$， $c_{x,y}$表示将物体从x 运输到 y的成本。目标是将物体从 X 运输到 Y，使每个目标点恰好放置一个物体，同时使总成本最小。根据这种解释，自然可以（尽管基本存在性理论并不严格要求）假设$c_{x,y} \geq 0$。

注2。 以这种方式表述后，该问题完全是离散的，而且 $\mathrm{Bij}(X,\ Y)$ 是有限的。这就形成了一个组合优化问题，其复杂度会随着 N 迅速增长。一种经典的简化求解方法是基于运输计划进行松弛。

蒙日–康托罗维奇问题从先验上看更为一般。设 X 和 Y 是两个非空有限集，其基数分别为 N 和 M。设 μ 和 ν 分别是定义在 X 和 Y 上的概率测度。目标是在保持每个 x 处的初始质量以及每个 y 处规定质量的同时，将所有质量从 X 运输到 Y。

定义 2. 在此背景下，运输计划定义如下： $\gamma := (\gamma_{x,y})_{(x,y)\in X\times Y}$是一族非负实数；若满足$\gamma \in \Pi_{\mu,\nu}$，则称其为运输计划，其中：

$$\Pi_{\mu,\nu} := \left\{ \gamma \in \mathbb{R}_+^{X\times Y} \;\middle|\; \forall x \in X,\ \sum_{y\in Y} \gamma_{x,y} = \mu_x,\ \ \forall y \in Y,\ \sum_{x\in X} \gamma_{x,y} = \nu_y \right\}. \tag{2.1.2}$$

定义 3. 蒙日–康托罗维奇问题的代价泛函采用与蒙日问题相同的代价族c，定义为：

$$C(\gamma) := \sum_{(x,y)\in X\times Y} c_{x,y}\,\gamma_{x,y}. \tag{2.1.3}$$

定义 4. 蒙日–康托罗维奇（MK）问题表示为：

$$\min_{\gamma\in\Pi_{\mu,\nu}} C(\gamma). \tag{2.1.4}$$

命题1. （*MK*）问题存在解 *[San15]*.

证明. 集合$\Pi_{\mu,\nu}$ 非空，例如，乘积测度 $\mu\otimes\nu$ 定义了一个可行运输计划。集合$\Pi_{\mu,\nu}$ 是闭且凸的。由于 μ 和 ν 是概率测度，所有元素均满足$0 \le \gamma_{x,y} \le 1$，且总质量固定，因此$\Pi_{\mu,\nu}$ 在 $\mathbb{R}^{X\times Y}$中有界。于是，$\Pi_{\mu,\nu}$是紧的。泛函 C 关于 γ是线性的，因而连续。根据魏尔斯特拉斯定理，最小值存在。

□

注记 3. 假设 X 和 Y 具有相同的基数 N，且 μ 和 ν 分别在 X和 Y 上均匀分布。通过以下方式将置换与置换矩阵对应起来：

$$\varphi \in \mathrm{Bij}(X,Y) \;\longmapsto\; (\mathbb{1}_{\{\varphi(x)=y\}})_{x,y},$$

可以验证

$$\arg\min_{\varphi\in\mathrm{Bij}(X,Y)} \sum_{x\in X} c_{x,\varphi(x)} = \left(\arg\min_{\gamma\in\Pi_{\mu,\nu}} C(\gamma)\right) \cap \mathrm{Perm}(N), \tag{2.1.5}$$

其中，Perm(N)表示 $N\times N$ 置换矩阵的集合。因此，当存在置换型最优计划时，作为 (M) 松弛的 (MK) 问题将蒙日解作为一种特殊情形。

2.1.2 Wasserstein度量

定义 5. 我们用 $P(\mathbb{R}^n)$表示 $\mathbb{R}^n$上的（博雷尔）概率测度集合。我们将原子概率测度的集合定义为

$$A(\mathbb{R}^n) := \left\{ \mu \in P(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \exists N\in\mathbb{N}^*,\ (x_i)_{i=1}^N \in (\mathbb{R}^n)^N,\ (\mu_i)_{i=1}^N \in [0,1]^N,\ \sum_{i=1}^N \mu_i = 1,\ \mu = \sum_{i=1}^N \mu_i\,\delta_{x_i} \right\}. \tag{2.1.6}$$

定义 6. 设 $p \ge 1$。对于在 (MK) 框架中给定的有限子集 $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ 和 μ, ν

$$\mu = \sum_{x\in X} \mu_x \delta_x, \qquad \nu = \sum_{y\in Y} \nu_y \delta_y,$$

我们令 $c := (\|y-x\|^p)_{(x,y)\in X\times Y}$，并定义 W_p： $A(\mathbb{R}^n) \times A(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ 为

$$W_p(\mu,\nu) := \left(\min_{\gamma\in\Pi_{\mu,\nu}} C(\gamma)\right)^{1/p} = \left(\min_{\gamma\in\Pi_{\mu,\nu}} \sum_{(x,y)\in X\times Y} \gamma_{x,y}\,\|y-x\|^p\right)^{1/p}. \tag{2.1.7}$$

注记 4. 量 W_p 在 $A(\mathbb{R}^n)$ 上定义了一个度量，并且可以扩展到更一般的概率测度类。它刻画了将一种质量分布转变为另一种所需的“最小总位移”这一直观概念。

2.2 广义熵

（香农）熵的概念 [Sha48] 是信息论和统计学中的基本概念：它量化了分布的离散程度以及一次观测的预期信息量。对于离散概率向量 $p = (p_i)$，该熵定义为 $H(p) = -\sum_i p_i \log p_i$。对于连续情形，也可以定义类似的微分熵，不过由于它取决于底层参考测度和单位，其解释更为微妙。

为了在最优传输中应用熵正则化，方便起见，我们引入一种用于比较概率测度与参考测度的散度。这便得到 Kullback–Leibler 散度 [AS66]。

定义 7. 设 M 是 $\mathbb{R}^d$的一个紧子集。设 P 和 Q 是 M上的两个概率测度，它们相对于同一个参考测度（例如 Lebesgue 测度）绝对连续，对应的密度分别为 p 和 q。P 相对于 Q 的 Kullback–Leibler散度定义为

$$\mathrm{KL}(P\|Q) = \int_M p(x)\, \log\!\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) dx, \tag{2.2.1}$$

按照通常的 约定 $0 \log 0 = 0$和 $p(x) \log(p(x)/q(x)) = +\infty$若 $p(x) > 0$且 $q(x) = 0$.

在离散情形下 $P = (p_i)_i$ 和 $Q = (q_i)_i$，定义变为

$$\mathrm{KL}(P\|Q) = \sum_i p_i\, \log\!\left(\frac{p_i}{q_i}\right). \tag{2.2.2}$$

2.3 Sinkhorn算法

如第 2.1节所示，最小化 Wasserstein距离并非易事：采用（MK）表述的离散最优传输问题是一个有限维线性规划，因此是凸的，但当点的数量增加时，通用求解器的计算成本可能很高。一种常见的正则化变体是在原始代价 C（γ）上加入熵惩罚，从而得到一个数值上更易处理的问题。在最简单的对称形式中，考虑

$$\min_{\gamma \in \Pi_{\mu,\nu}} \sum_{(x,y)} c_{x,y}\, \gamma_{x,y} + \varepsilon\, \mathrm{KL}(\gamma \| \mu \otimes \nu), \tag{2.3.1}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是正则化参数， $\mu \otimes \nu$ 是乘积测度。相应的吉布斯核

$$K_{x,y} = \exp\!\left(-\frac{c_{x,y}}{\varepsilon}\right) \tag{2.3.2}$$

在最终得到的算法中发挥着核心作用。

Sinkhorn算法（也称为迭代比例拟合程序）可写成如下矩阵形式。我们寻求一个形式如下的耦合 π

$$\pi = \mathrm{diag}(u)\, K\, \mathrm{diag}(v), \tag{2.3.3}$$

wh其中 u 和 v 是缩放向量，其取值使得 π 的边缘分布分别与 μ 和 ν匹配 ：

$$\pi \mathbf{1} = \mu, \qquad \pi^\top \mathbf{1} = \nu.$$

从初始猜测（例如 $v^{(0)} = \mathbf{1}$）开始，经典Sinkhorn迭代通过交替归一化来更新 u 和v：

$$u^{(\ell+1)} = \mu \oslash (K v^{(\ell)}), \tag{2.3.4}$$

$$v^{(\ell+1)} = \nu \oslash (K^\top u^{(\ell+1)}), \tag{2.3.5}$$

其中 $\oslash$ 去噪 进行逐元素除法。可以通过边缘残差来监测收敛情况

$$\|\pi^{(\ell)}\mathbf{1}-\mu\|_1, \qquad \|(\pi^{(\ell)})^\top\mathbf{1}-\nu\|_1,$$

其中 $\pi^{(\ell)}$ =diag$(u^{(\ell)})K$diag$(v^{(\ell)})$。

每次迭代都需要利用核 K进行少量矩阵-向量乘积运算。对于稠密 $n\times n$ 核，一次迭代的计算成本为 $O(n^2)$。总复杂度取决于所需精度以及 ε；近期分析给出了在各种情形下形如 $O(n^2\log n/\varepsilon^2)$ 的界 [Cut13;Pey19a]，这通常远低于使用通用线性规划方法求解未正则化运输问题的计算成本。

2.4 热方程

热方程是一种基本的偏微分方程。在三维空间中，它写作

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}=\frac{\partial^2 f_t}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f_t}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 f_t}{\partial x_3^2}=\Delta f_t, \tag{2.4.1}$$

给定初始条件 f_0。

在有限图或网格上，通常会用作用于顶点上定义的函数的离散拉普拉斯算子 L，来替代连续拉普拉斯算子 Δ 。对于向量值信号 X_t （例如，将三维坐标堆叠起来），其标准线性扩散方程可用矩阵形式表示为

$$\frac{\partial X_t}{\partial t}=-LX_t, \tag{2.4.2}$$

其中，符号的选取使流动具有平滑效果（拉普拉斯算子是半正定的，并且 $-L$ 生成一个压缩半群）。

2.5 Cholesky分解

这里使用的 Cholesky分解是一种线性代数技术，可简化对对称正定方程组的求解。

命题 2。 设 A 为实对称正定矩阵。则存在唯一的下三角矩阵 L ，其对角线元素严格为正，并满足

$$A=L\,L^\top. \tag{2.5.1}$$

求解线性方程组 $Ax=b$ 可转化为求解由 L 和 $L^\top$构成的两个三角方程组，这比显式求逆 A 更高效，数值稳定性也更好。

2.6 使用 Sinkhorn算法对网格和图像去噪

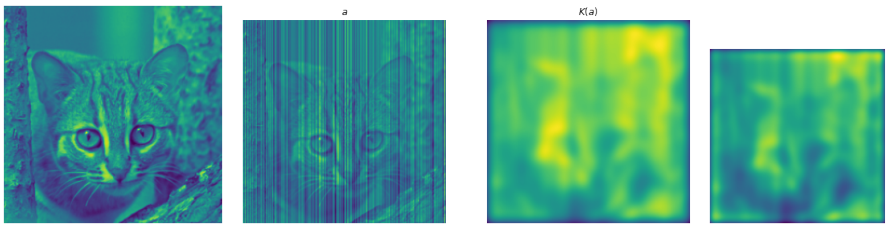

图 2：从左到右：猫的照片；加入振幅为$\rho=0.2$的白噪声后得到的同一张照片；噪声图像的核；算法迭代一次后求得的重心 b 。

原则上，可以计算噪声图像或网格的重心（或 Wasserstein 均值）以减少噪声。在离散情形下，这相当于求解

$$\min_b \sum_{k=1}^{R} W_\gamma(a_k, b), \tag{2.6.1}$$

其中 $(a_k)_{k=1}^R$ 是输入分布，且 W_γ 是正则化最优传输代价。该问题可以通过 Sinkhorn算法的变体 [Ben+15; Sol+15]来解决。

实际上，核 K 和正则化参数 ε 的选择会对结果产生显著影响。在使用简单吉布斯核进行的初步图像去噪实验中，视觉质量并不十分令人满意，这表明需要采用更适合的核或多尺度策略，才能使该方法与更简单的方法相竞争。

3 ThreeMesh 去噪方法

现在，我们将详细介绍所测试的三种网格去噪方法。为此，我们引入网格的（归一化）邻接矩阵。

定义 8（邻接关系及相关矩阵）。令 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{M}$的边集合。我们将（可能为有向的）邻接矩阵 W 定义为

$$W_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.0.1}$$

我们将度向量 $d \in \mathbb{N}^n$ 定义为

$$d_i = \sum_j W_{i,j}, \tag{3.0.2}$$

以及对角度矩阵 $D = \mathrm{diag}_i(d_i)$。于是，(行)归一化邻接矩阵定义为

$$\tilde{W} = D^{-1}W. \tag{3.0.3}$$

我们还定义（未归一化的）图拉普拉斯算子

$$L := D - W, \tag{3.0.4}$$

以及归一化拉普拉斯矩阵

$$\tilde{L} := D^{-1}L = I_n - \tilde{W}. \tag{3.0.5}$$

~ ~注：5。当 W 为行随机时，左乘 W 会对每个顶点及其邻居进行平均，因此可将其解释为一个简单的低通滤波步骤。相反，拉普拉斯算子 L 强调局部差异，通常与高频分量相关联。在谱图框架下，这些解释可以得到精确表述。

3.1 滤波

设 $X \in \mathbb{R}^{n\times 3}$ 表示由含噪顶点的三维坐标组成的矩阵。一种简单的滤波操作是反复应用邻域平均算子，例如

$$X^{(\ell+1)} = \tilde{W}X^{(\ell)}, \tag{3.1.1}$$

从 $X^{(0)} = X$ 开始。在我们的实现中，我们使用一种等价的表述，将X 右乘以 $\tilde{W}^\top$，这对应于转置约定。

在每次迭代中，都需要将一个 $n \times n$ 矩阵与一个 $n \times 3$ 矩阵相乘。如果忽略稀疏性，则每次迭代的计算成本为 $O(n^2)$ 次运算（因子 3 为常数）。在我们所考虑的实际网格中，邻接关系具有稀疏性且度有界，因此每次迭代的真实成本更接近 $O(m)$ 次运算，其中 m 为边的数量。

3.2 线性热扩散

~ ~我们使用如下所述的归一化拉普拉斯矩阵 $L = I_n - W$。其思想是通过如下形式的离散热方程（2.4.2）的解来近似去噪网格。使用时间步长 $\tau > 0$ 的显式欧拉格式可得到递推关系

$$X^{(\ell+1)} = X^{(\ell)} - \tau \tilde{L} X^{(\ell)} = (1-\tau)\, X^{(\ell)} + \tau \tilde{W} X^{(\ell)}. \tag{3.2.1}$$

这是单位算子与平均算子的凸组合，对于足够小的 τ，它定义了一个稳定的扩散过程。

对于 $\tau = 1$，此迭代退化为上述类型的纯滤波步骤。对于 τ 的中间值，尤其是在较小的网格上，我们观察到，选择合适的 τ 可以在给定迭代次数下提升去噪效果。

每次迭代需要一次乘法运算。~~以及将算子~~视为稠密矩阵，~ 并将信号视为 $n \times 3$，则每次迭代的计算成本为 $O(n^2)$；但采用稀疏邻接矩阵时，实际成本随边数 m 增长。

3.3 索博列夫正则化

另一种方法是将去噪网格定义为如下惩罚最小二乘泛函的极小值点

$$\min_{Y \in \mathbb{R}^{n\times 3}} \|Y - X\|_F^2 + \mu \, \|L^{1/2} Y\|_F^2, \tag{3.3.1}$$

其中，$\mu > 0$ 是正则化参数，$\|\cdot\|_F$ 表示弗罗贝尼乌斯范数。欧拉–拉格朗日方程导出如下线性方程组

$$(I_n + \mu L)\, Y = X. \tag{3.3.2}$$

等价地，用转置形式表示为，

$$X_\mu^\top = (I_n + \mu L)^{-1} X^\top, \tag{3.3.3}$$

其中，X_μ 表示去噪顶点矩阵。

由于 L 是对称半正定的，因此对于所有 $\mu > 0$，矩阵 $I_n + \mu L$ 都是对称正定的，所以它可以进行Cholesky分解（$I_n + \mu L$） $= LL^\top$。因此，可以针对 X的每个坐标列，通过前代/回代高效地求解该方程组。

如果将（$I_n + \mu L$）视为稠密矩阵，Cholesky分解需要 O（n^3）次运算，而将分解应用于 3 个坐标列时，每列需要 O（n^2）次运算。对于有界度的稀疏网格，利用稀疏性和适当的排序可显著降低实际复杂度；在我们的实验中，对每个网格进行一次求解的成本远低于迭代方法运行多次迭代的成本。重要的是，对于给定的 μ完成分解后，改变 X 无需重新计算分解。

μ 越高，平滑效果越强。在我们的实验中，我们针对每个数据集调整 μ ，以优化信噪比。

4 在两种不同网格上对这些方法进行实证比较

为了对这三种方法进行实证比较，我们将它们应用于两个不同的网格，分别表示一头大象（24,955 个顶点、49,918 个面和 74,877 条边）以及奈费尔提蒂半身像（299 个顶点、562 个面和 860 条边） [Pey19b；Pey19c]。

我们通过沿每个顶点的法向方向位移，向这些网格添加白高斯噪声：

$$x_i = x_{0,i} + \rho\, \epsilon_i \, N_i \in \mathbb{R}^3, \tag{4.0.1}$$

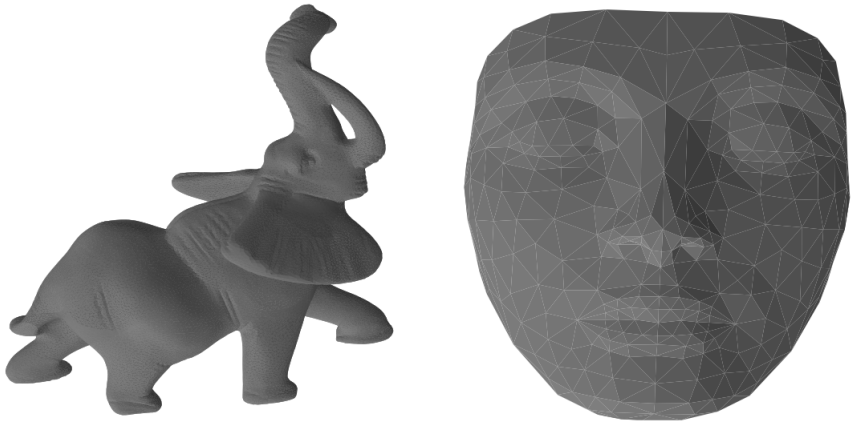

图3：原始网格、大象 [Pey19b] 和奈费尔提蒂半身像 [Pey19c]。

其中 $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$， $N_i \in \mathbb{R}^3$ 为顶点 i 处的单位法向量， $\rho > 0$ 为控制噪声水平的参数。我们从效果和实测执行时间两方面比较这些方法。为衡量效果，我们使用信噪比（SNR）计算分贝（dB）误差：

$$\mathrm{SNR}(X, Y) := -20 \log_{10} \left(\frac{\|X - Y\|_F}{\|Y\|_F} \right), \tag{4.0.2}$$

其中， X 和 Y 分别是原始网格和去噪网格的顶点矩阵。信噪比越高，表示去噪网格越接近原始网格（$\mathrm{SNR} = +\infty$ 对应完美重建）。

4.1 比较要素与解释

在屏幕上显示时，这三种去噪方法都能将严重受噪声干扰的网格转换为人眼可辨认的形状。从定量角度看，我们观察到这两个网格之间存在系统性差异，这主要归因于二者的尺寸相差很大，因为相对而言，它们的连通性特征相似。这三种方法在大网格上的表现显著更好。不出所料，噪声水平越高，恢复原始网格就越困难。

对于相近的参数选择，滤波和线性热扩散得到的信噪比非常相似。索博列夫正则化得到的信噪比略低（通常低 1–2 dB），但在我们的实验中速度显著更快，因为它对每个网格只需求解一个线性方程组，而不必进行多次迭代。

Mesh	噪声图像	滤波	Heat	索博列夫
大象， $\rho = 0.015$	26.77	39.82	39.81	38.13
大象， $\rho = 0.2$	4.34	26.81	26.81	25.27
奈费尔提蒂， $\rho = 0.015$	41.76	41.76	41.83	21.77
奈费尔提蒂， $\rho = 0.2$	19.33	23.17	24.17	22.95
奈费尔提蒂， $\rho = 1$	5.15	14.56	14.62	13.86

表 1：不同去噪方法获得的最佳 SNR （单位：dB）。

在我们的实验中，索博列夫正则化显然是最快的方法，实际运行时间通常快一个数量级以上。此外，通过观察显示执行时间与迭代次数关系的曲线（图 4.1），我们发现，对于可比的信噪比水平，索博列夫正则化始终比最佳的滤波或热扩散配置更快。在

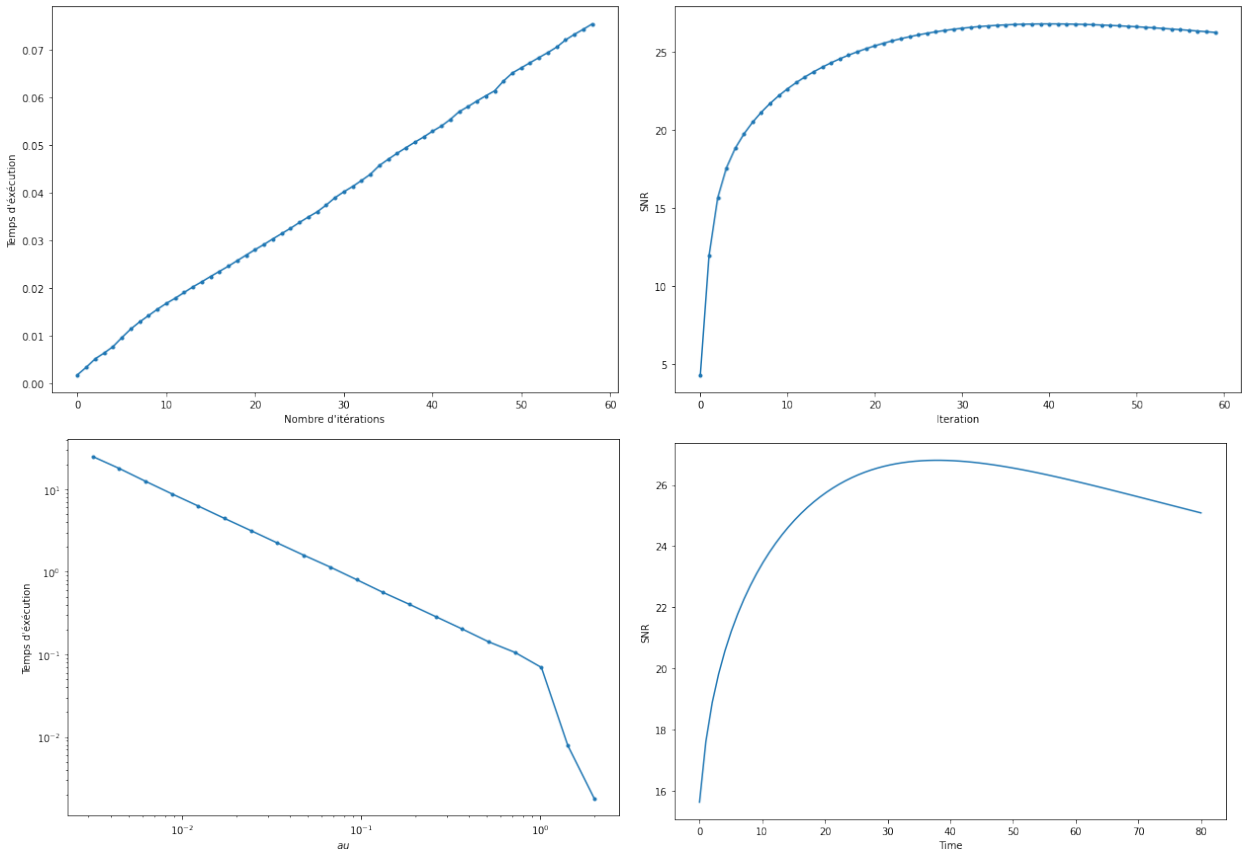

图4：**上：** 大象网格在噪声为 $\rho = 0.2$ 时，处理时间与滤波迭代次数的关系（左，单位为秒），以及去噪水平与迭代次数的关系（右）。
下： 大象网格在噪声为 $\rho = 0.2$ 时，处理时间与参数 τ 的选择之间的关系（左，单位为秒），该参数用于获得尽可能好的结果；对于最有效且最快的算法，去噪水平与迭代次数之间的关系（右），参数为 $\tau = 1.01$，在 $T = 37.4$ 时达到最大值，执行时间为 70 毫秒。

请注意，要达到与索博列夫正则化（25 dB）相近的去噪水平，滤波和热方程方法都需要 20 ms。由于索博列夫算法的执行时间不取决于参数 μ，因此我们已经掌握了进行比较所需的全部信息。

Mesh	滤波	Heat	索博列夫
大象， $\rho = 0.015$	14.2 ± 0.449	9.66 ± 0.098	0.0355 ± 0.002
大象， $\rho = 0.2$	50.8 ± 1.38	70.7 ± 0.6	0.0349 ± 0.0046
奈费尔提蒂， $\rho = 0.015$	0	0.106 ± 0.0134	0.0831 ± 0.0178
奈费尔提蒂， $\rho = 0.2$	0.0447 ± 0.0022	0.507 ± 0.051	0.101 ± 0.0275
奈费尔提蒂， $\rho = 1$	0.303 ± 0.0351	0.465 ± 0.048	0.0787 ± 0.016

表2：使用不同去噪方法获得最佳结果时的机器使用时间（以毫秒 ms 计），使用 *timeit* 方法计算。

对于大象网格，热方程方法中使信噪比达到最大的 τ 值通常接近 1，这使得该方案的表现类似于重复滤波，同时会产生更高的计算开销。

然而，对于奈费尔提蒂半身像，热扩散方法在中间值 τ（约为 0。5 对于 $\rho = 0.2$，以及约为 0。7 对于 $\rho = 1$），见图 4.1。这表明，在小型网格上，对参数选择的敏感性可能更高。

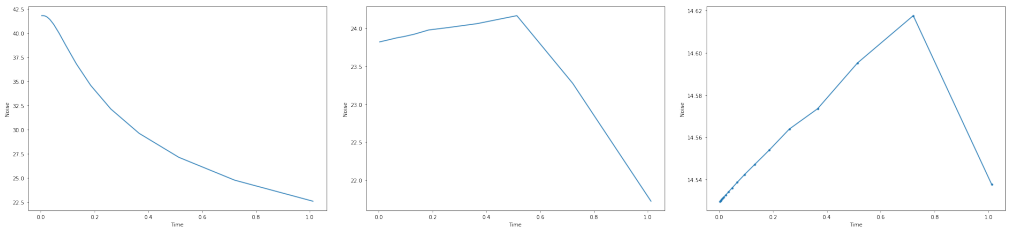

图5：对奈费尔提蒂半身像进行热扩散处理后获得的最佳降噪效果。从左到右： $\rho = 0.015$, $\rho = 0.2$, $\rho = 1$。

我们还注意到，在相同噪声水平下，两个网格的最优参数有所不同。一般而言，对于较大的网格，最优正则化参数更高：对于初始信噪比为 5.15 dB 的奈费尔提蒂网格，采用 $\mu = 2$ 作为索博列夫正则化的参数、进行 3 遍滤波，并将扩散时间设为约 3，即可达到经验上的最大值。随着噪声水平增加，需要进行更多迭代或使用更强的正则化。对于 $\rho = 0.2$ 处初始信噪比为 4.34 dB 的大象网格，我们观察到，最佳降噪效果是在参数约为 $\mu = 51$、进行 40 次滤波迭代，以及热方程方法的扩散时间约为 40 个单位时获得的。

5 结论

我们的研究表明，在详细研究的三种基于网格的方法中，索博列夫正则化在精度与速度之间实现了最佳权衡：其信噪比接近最佳滤波和热扩散配置所达到的水平，同时所需的计算时间却少得多。滤波和热扩散达到的信噪比非常相近；在小网格上，若参数经过精心调整，热扩散有时还能带来微小提升。

我们的实验揭示了三项主要局限。首先，与大象网格相比，这三种方法在小型奈费尔提蒂网格上的效果都明显较差，这表明网格分辨率对可达到的最高信噪比有很强的限制。其次，最高信噪比似乎始终无法达到完美重建：例如，在任何去噪网格中，大象的眼睛都未能还原，因此重建结果仍存在明显瑕疵。第三，对于某些低噪声配置，进一步处理带来的信噪比提升有限，且偶尔会使量化指标略有下降，因此需要采用更具适应性或数据驱动的策略。

一种改进网格去噪的有趣途径，是按照 [Sol+15]中提出的方法，使用 Sinkhorn算法对几何数据进行重心插值。主要挑战在于

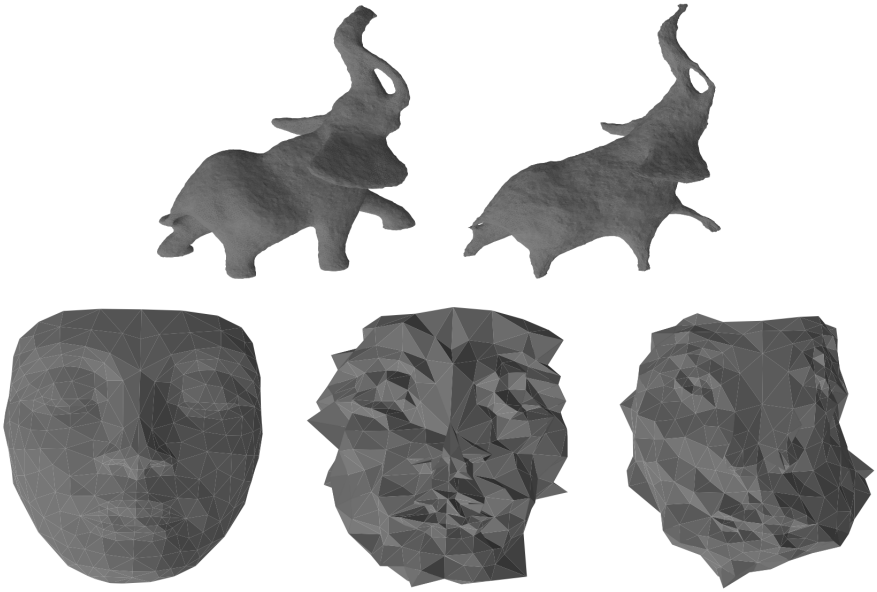

图 6：使用索博列夫正则化去噪的各种网格。从左到右：$\rho = 0.015$、 $\rho = 0.2$、 $\rho = 1$。

设计适用于网格几何的核（例如基于离散热核的核），以及将该框架调整为适用于分辨率各异的不规则网格上的信号。

Ac致谢 感谢 Gabriel Peyré 提供本文所用的宝贵资源 e.

利益冲突 我声明不存在利益冲突。

补充信息 代码可通过以下地址获取： https://github.com/cvt8/Mesh-denoising。

参考文献

[AS66] Syed Mumtaz Ali 和 Samuel D Silvey。“一个分布相对于另一个分布的散度系数的一般类”。载于：《皇家统计学会期刊：B辑（方法论）》28.1（1966），第131–142页。[Ben+15] Jean-David Benamou 等。“用于正则化运输问题的迭代Bregman投影”。载于：《SIAM科学计算杂志》37.2（2015），A1111–A1138。[Cut13] Marco Cuturi。“Sinkhorn距离：最优传输的极速计算”。载于：《神经信息处理系统进展》26（2013），第2292–2300页。[Pey19a] Gabriel Peyré。数值之旅：最优传输的熵正则化。2019年。网址：http://www.numerical-tours.com/python/。[Pey19b] Gabriel Peyré。数值之旅：网格去噪。2019年。网址：http://www.numerical- tours.com/python/。[Pey19c] Gabriel Peyré。数值之旅：网格参数化。2019年。网址：http://www.numerical- tours.com/python/。[San15] Filippo Santambrogio。面向应用数学家的最优传输——变分法、偏微分方程与建模。2015年。

[Sha48] Claude Elwood Shannon。“通信的数学理论”。载于：贝尔系统技术期刊 27.3（1948），第379–423页。[Sol+15] Justin Solomon 等。“卷积Wasserstein距离：几何域上的高效最优运输”。载于：*ACM*图形学汇刊（*TOG*） 34.4（2015），第1–11页。