arXiv:2601.10523v1 [math.SP] 15 Jan 2026

整数格上薛定谔算子的若干特征值不等式

刘文涛

摘要：本文为整数格 $\mathbb{Z}^n$ 的任意有限子集上的薛定谔算子，建立了佩恩-波利亚-温伯格、希勒-普罗特和杨特征值不等式的对应形式。这些结果将离散拉普拉斯算子的已知不等式推广到了更一般的一类带非负势函数的薛定谔算子以及加权特征值问题。

关键词：图上的薛定谔算子；特征值；特征值不等式。

1 引言

关于具有狄利克雷边界条件的拉普拉斯算子特征值问题，已有大量文献；例如， [2,7,9,10]。在经典特征值问题中，设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个有界区域。我们考虑

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

1956年，佩恩、波利亚和温伯格 [9]证明了以下普适不等式，适用于$\lambda_i's$ 且 $n = 2$的情形：

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i,$$

并且可以推广到一般的 n 情形，此时有以下不等式：

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{4}{nk} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i,$$

这个不等式称为佩恩-波利亚-温伯格（PPW）不等式。1980年，希尔和普罗特尔 [7]推导出了一个更强的不等式：

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \geq \frac{nk}{4},$$

杨 [11] 证明了一个更强的不等式：

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)(\lambda_{k+1} - (1 + \frac{4}{n})\lambda_i) \leq 0,$$

this 这个不等式称为杨氏第一不等式。并且可以证明， t

$$\lambda_{k+1} \le \frac{1}{k}(1+\frac{4}{n})\sum_{i=1}^{k}\lambda_i,$$

这就是我们所称的杨氏第二不等式。此外，杨氏第一不等式蕴含杨氏第二不等式，而后者又蕴含 Hile-Protter 不等式，进而蕴含 PPW 不等式：

$$Yang1 \Rightarrow Yang2 \Rightarrow HP \Rightarrow PPW.$$

在论文 [8], 中，作者研究了整数格上狄利克雷拉普拉斯算子的特征值问题。他们建立了上述不等式的类似结果，并且在条件 $\lambda_k \le 1+\frac{4}{n}$ 下，还得到了关系式（1.6）。

在本文中，我们考虑一类比拉普拉斯算子更为一般的算子。具体而言，我们研究形如 $-\Delta+V(x)$ 的、在 Ω 上具有非负势函数 $V \ge 0$ 的薛定谔算子，以及加权特征值问题。具体来说，我们考虑特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + Vu = \lambda\rho u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

其中，密度函数 $\rho(x)$ 被假设为正。

关于图上的分析已经形成了大量文献，其中包括对图拉普拉斯算子及其相关解析和几何性质的研究；例如参见 [3–6]。首先，我们回顾离散空间，即图上的拉普拉斯算子的一些基本概念。设 (V,E) 是一个顶点集为 V、边集为 E 的简单无向局部有限图，并假设该图没有孤立顶点。若存在连接两个顶点的边，则称顶点 $x,y\in V$ 为邻点，记作 $x\sim y$。顶点 x 的度（记作 d_x）定义为 x 的邻点数。

Δ 上的离散拉普拉斯算子 Δ on (V,E) 定义为

$$\Delta f(x) := \frac{1}{d_x}\sum_{y\in V:\, y\sim x}\big(f(y)-f(x)\big), \qquad \forall\, f: V\to\mathbb{R}.$$

设 Ω 是 V 的一个有限子集。我们将 Ω 的顶点边界定义为

$$\partial\Omega := \{y\in V\setminus\Omega : y\sim x \text{ for some } x\in\Omega\}.$$

我们用 $\ell^2(\Omega,\rho)$ 表示定义在 Ω 上的所有实值函数构成的希尔伯特空间，其内积为

$$\langle f,g\rangle := \sum_{x\in\Omega} f(x)\,g(x)\,\rho(x)\,d_x, \qquad f,g:\Omega\to\mathbb{R}.$$

我们考虑薛定谔算子的特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + Vu = \lambda \rho u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

~对于有限子集 Ω，我们将相应的算子记为 $H = (-\Delta + V)/\rho$，并记 $\sim H = -\Delta + V$。H 的谱由 $N = |\Omega|$ 个实特征值组成，记为

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_N.$$

下面，我们将为这类算子推导更一般的特征值不等式。

定理 1.1.（杨氏第一类不等式）。设 Ω 是 $\mathbb{Z}^n$ 的有限子集，令 λ_i表示薛定谔问题在Ω上的第 i 个特征值。那么，对于任意 $1 \le k \le \sharp\Omega - 1$，有

$$\sum_{i}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\Big(\lambda_{k+1}\Big(\frac{\rho_{min}}{\rho_{max}} - \rho_{min}\lambda_i\Big) - \lambda_i\Big(\frac{\rho_{min}}{\rho_{max}} - \rho_{min}\lambda_i + \frac{4}{n}\Big)\Big) \le 0. \tag{1.1}$$

定理 1.2.（杨氏第二类不等式）。设Ω 是 $\mathbb{Z}^n$ 的有限子集，令 λ_i表示薛定谔问题在Ω上的第 i 个特征值。那么，对于任意 $1 \le k \le \sharp\Omega - 1$，有

$$\lambda_{k+1}\Big(1 - \frac{\rho_{max}}{k}\sum_{i}^{k}\lambda_i\Big) \le \frac{1}{k}\Big(1 + \frac{4\rho_{max}}{n\rho_{min}}\Big)\sum_{i}^{k}\lambda_i - \frac{\rho_{max}}{k}\sum_{i}^{k}\lambda_i^2. \tag{1.2}$$

定理 1.3.（*Hile–Protter* 型不等式）。设 Ω 是 $\mathbb{Z}^n$ 的有限子集，令 λ_i表示薛定谔问题在Ω上的第 i 个特征值。那么，对于任意 $1 \le k \le \sharp\Omega - 1$，有

$$\sum_{i}^{k}\frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_i} \ge \frac{nk}{4}\Big(\frac{\rho_{min}}{\rho_{max}} - \frac{\rho_{min}}{k}\sum_{i}^{k}\lambda_i\Big). \tag{1.3}$$

定理 1.4. *(Payne–Pólya–Weinberger* 型不等式*).* 设 Ω 是 $\mathbb{Z}^n$ 的一个有限子集，并令 λ_i 表示在Ω上薛定谔问题的第 i 个特征值。则对任意$1 \le k \le \sharp\Omega - 1$，有

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\Big(\frac{\rho_{min}}{\rho_{max}} - \frac{\rho_{min}}{k}\sum_{i}^{k}\lambda_i\Big) \le \frac{4}{nk}\sum_{i}^{k}\lambda_i. \tag{1.4}$$

此外，当密度函数满足 $\rho(x) \equiv 1$ 时，上述不等式可化为 [8] 中得到的不等式。

2 预备知识

本节中，我们采用 [8] 中的记号和约定。设 $G=(V,E)$ 是一个简单无向局部有限图。引入邻接函数会很方便:

$$\mu : V\times V\to\{0,1\},\qquad \mu_{xy}=\begin{cases}1, & \text{if } x\sim y,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

根据上述记号，顶点 $x\in V$ 的度为

$$d_x:=\sum_{y\in V}\mu_{xy}.$$

我们用 $\mathbb{Z}^n$ 表示 n 维整数格图，其边集定义为

$$E=\big\{\{x,y\}\subset\mathbb{Z}^n:\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=1\big\}.$$

给定函数 $f:\ \mathbb{Z}^n\to\mathbb{R}$ 及两个顶点 $x,y\in\mathbb{Z}^n$，沿边 (x,y) 的离散梯度定义为

$$\nabla_{xy}f:=f(y)-f(x).$$

根据这一记号，我们还有图上的格林公式，例如参见 [6]。

命题 2.1 设 (V,E) 为一个图，f 是定义在 V 上的有限支撑函数，g 是定义在 V 上的任意函数。则

$$\sum_{x\in V}(\Delta f)(x)g(x)d_x=-\frac{1}{2}\sum_{x,y\in V}\mu_{xy}\nabla_{xy}f\nabla_{xy}g=\sum_{x\in V}(\Delta g)(x)f(x)d_x. \tag{2.1}$$

我们进一步引入函数平方梯度的离散类比。

定义 2。2 梯度形式 Γ，称为“carré du champ”算子，定义如下：对于 $f,\ g:\ V\to\mathbb{R}$ 和 $x\in V$，

$$\begin{aligned}\Gamma(f,g)(x)&=\frac{1}{2}(\Delta(fg)-f\Delta g-g\Delta f)(x)\\&=\frac{1}{2d_x}\sum_{y}\mu_{xy}\nabla_{xy}f\nabla_{xy}g.\end{aligned} \tag{2.2}$$

引理 2.3 设 u 是定义在 $\mathbb{Z}^n$ 上的一个具有有限支撑的函数，$\{x_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ 是标准坐标函数。那么

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{2}\sum_{x,y}|\nabla_{xy}(x_\alpha)|^2|\nabla_{xy}u|^2\mu_{xy}=\sum_{x}\Gamma(u)(x)d_x, \tag{2.3}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{x}\Gamma(x_\alpha,u)^2(x)d_x\le\frac{1}{2n}\sum_{x}\Gamma(u)(x)d_x. \tag{2.4}$$

详情参见 [8].

3 主要结果的证明

本节按照 [1,8] 的方法证明主要结果。

设 Ω 是 $\mathbb{Z}^n$ 的有限子集，λ_k 是 Ω 上薛定谔问题的第 k 个特征值。设 $k\le\sharp\Omega-1$. 对于任意 $1\le i\le k$，令 $\{u_i\}_{i=1}^k$ 为与前 k 个特征值 λ_i 相对应的归一化特征函数，即

$$\begin{aligned}&-\Delta u_i(x)+V(x)u_i(x)=\lambda_i\rho(x)u_i(x),\\&\sum_{x\in\Omega}u_i(x)u_j(x)\,\rho(x)\,d_x=\delta_{ij},\qquad 1\le i,j\le k.\end{aligned}$$

容易验证:

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^n}(-\Delta+V)(u_i)(x)u_i(x)d_x=\lambda_i.$$

除非另有说明，本文均考虑函数的零延拓，因为 V 非负，根据格林公式，有:

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^n}\Gamma(u_i)(x)d_x\le\lambda_i. \tag{3.1}$$

令 g 为坐标函数之一，即 $g(x)=x_\alpha$ 对于某个 $1\le\alpha\le n$。由（2.2）以及恒等式 $\Delta(g^2)=2g\Delta g+2\Gamma(g)$，可得

$$\Delta g=0,\qquad \Delta(g^2)=\frac{1}{n}. \tag{3.2}$$

对每个 $1\le i\le k$，定义

$$\phi_i:=gu_i-\sum_{j=1}^{k}a_{ij}u_j,$$

其中

$$a_{ij} := \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} g(x)\, u_i(x)\, u_j(x)\, \rho(x)\, d_x,$$

根据构造， ϕ_i 与 $\{u_j\}_{j=1}^k$ 在 $\ell^2(\Omega,\ \rho)$中正交，即

$$\sum_{x\in\Omega} \phi_i(x) u_j(x)\, \rho(x)\, d_x = 0, \qquad 1 \le j \le k.$$

此外，显然，对于所有 $1 \le i,\ j \le k,\ a_{ij} = a_{ji}$ 。
接下来，我们引入

$$b_{ij} := \sum_{x\in\Omega} u_j(x)\, \Gamma(g, u_i)(x)\, d_x.$$

我们有以下恒等式。

命题 3.1. 对于所有 $1 \le i$、 $j \le k$，均有

$$2b_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) a_{ij}. \tag{3.3}$$

证明。 由格林公式，我们计算得

$$\begin{aligned}
\lambda_j a_{ij} &= \sum_{x\in\Omega} g(x)\, u_i(x)\, Hu_j(x)\, d_x \\
&= \sum_{x\in\Omega} g(x)\, u_i(x)\, (-\Delta u_j(x))\, d_x + \sum_{x\in\Omega} V(x)\, g(x)\, u_i(x)\, u_j(x)\, d_x \\
&= -\sum_{x\in\Omega} u_j(x)\big((g\Delta(u_i))(x) + 2\Gamma(g, u_i)(x)\big) d_x + \sum_{x\in\Omega} V(x)\, g(x)\, u_i(x)\, u_j(x)\, d_x \\
&= \sum_{x\in\Omega} g(x) H u_i(x)\, u_j(x)\, d_x - 2\sum_{x\in\Omega} u_j(x)\, \Gamma(g, u_i)(x)\, d_x \\
&= \lambda_i a_{ij} - 2b_{ij}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

定理 *1.1* 的证明。 由瑞利商可得

$$\lambda_{k+1} \sum_{x\in\Omega} \phi_i^2(x)\rho(x) d_x \le \langle \phi_i, \widetilde{H}\phi_i\rangle = \sum_{x\in\Omega} \phi_i(x)(H\phi_i)(x) d_x, \tag{3.4}$$

展开右侧，得到

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\Omega}\phi_i(x)(H\phi_i)(x)d_x &= \sum_{x\in\Omega}\phi_i(x)\Big(-\Delta\Big(gu_i-\sum_j a_{ij}u_j\Big)+V\Big(gu_i-\sum_j a_{ij}u_j\Big)\Big)(x)d_x\\ &= \sum_{x\in\Omega}\phi_i(x)\Big(gHu_i-2\Gamma(g,u_i)-\sum_j a_{ij}Hu_j\Big)(x)d_x\\ &= \lambda_i\sum_{x\in\Omega}\phi_i^2(x)\rho(x)d_x-2\sum_{x\in\Omega}\phi_i(x)\Gamma(g,u_i)(x)d_x, \end{aligned}\tag{3.5}$$

重新整理后得到不等式

$$\lambda_{k+1}-\lambda_i\le\frac{-2\sum_{x\in\Omega}\phi_i(x)\Gamma(g,u_i)(x)d_x}{\sum_{x\in\Omega}\phi_i^2(x)\rho(x)d_x}.\tag{3.6}$$

接下来，我们将分子项计算为

$$0\le-2\sum_{x\in\Omega}\phi_i(x)\Gamma(g,u_i)(x)d_x=-2\sum_{x\in\Omega}(gu_i\Gamma(g,u_i))(x)d_x+\sum_j(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}^2,\tag{3.7}$$

并记

$$I:=2\sum_{x\in\Omega}(gu_i\Gamma(g,u_i))(x)d_x.$$

展开 I 后，我们得到

$$\begin{aligned}I&=\sum_{x,y}\mu_{xy}g(x)u_i(x)\nabla_{xy}g\,\nabla_{xy}u_i\\ &=\frac{1}{2}\sum_{x,y}\mu_{xy}\big(g(x)u_i(x)+g(y)u_i(y)\big)\nabla_{xy}g\,\nabla_{xy}u_i\\ &=\frac{1}{4}\sum_{x,y}\mu_{xy}\nabla_{xy}(g^2)\,\nabla_{xy}(u_i^2)+I_g(u_i)\\ &=-\frac{1}{2}\sum_{x\in\Omega}\Delta(g^2)(x)u_i^2(x)d_x+I_g(u_i)\\ &=-\frac{1}{2n}\sum_{x\in\Omega}u_i^2(x)d_x+I_g(u_i),\end{aligned}\tag{3.8}$$

其中修正项 $I_g(u_i)$ 定义为

$$I_g(u_i):=\frac{1}{4}\sum_{x,y}\mu_{xy}|\nabla_{xy}g|^2|\nabla_{xy}u_i|^2.$$

对于简化表达式（3.8），根据（2.3）、（2.4）、（3.1）以及 u_i 的定义，对于两个相关项，有以下估计成立：

$$\sum_x u_i(x)^2 d_x \geq \frac{1}{\rho_{max}}, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} I_{x_\alpha}(u_i) \leq \frac{\lambda_i}{2}. \tag{3.9}$$

我们还有

$$\begin{aligned}\Big(-2\sum_{x\in\Omega}\phi_i(x)\Gamma(g,u_i)d_x\Big)^2 &= \Big(-2\sum_{x\in\Omega}\phi_i(x)\Big(\Gamma(g,u_i)-\sum_j b_{ij}u_j\rho(x)d_x\Big)\Big)^2\\ &\leq 4\Big(\sum_{x\in\Omega}\phi_i^2(x)\rho(x)d_x\Big)\Big(\sum_{x\in\Omega}(\rho^{-1}(x)\Gamma(g,u_i)^2 d_x - 2\Gamma(g,u_i)\sum_j b_{ij}u_j d_x)+\sum_j b_{ij}^2\Big)\\ &= 4\Big(\sum_{x\in\Omega}\phi_i^2(x)\rho(x)d_x\Big)\Big(\sum_{x\in\Omega}\rho^{-1}(x)\Gamma(g,u_i)^2 d_x - \sum_j b_{ij}^2\Big),\end{aligned} \tag{3.10}$$

因此

$$\lambda_{k+1}-\lambda_i \leq \frac{-2\sum_{x\in\Omega}\phi_i(x)\Gamma(g,u_i)d_x}{\sum_x \phi_i^2(x)\rho(x)d_x} \leq \frac{4\sum_{x\in\Omega}\rho^{-1}(x)\Gamma(g,u_i)^2 d_x - \sum_j(\lambda_i-\lambda_j)^2 a_{ij}^2}{\frac{1}{2n}\sum_x u_i(x)^2 d_x - I_g(u_i) + \sum_j(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}^2}, \tag{3.11}$$

等价地

$$\begin{aligned}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big(\frac{1}{2n}\sum_x u_i(x)^2 d_x - I_g(u_i) + \sum_j(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}^2\Big)&\\ \leq 4\sum_{x\in\Omega}\rho^{-1}(x)\Gamma(g,u_i)^2 d_x - \sum_j(\lambda_i-\lambda_j)^2 a_{ij}^2,&\end{aligned} \tag{3.12}$$

将涉及 a_{ij} 的项重新改写后，我们得到

$$\begin{aligned}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big(\frac{1}{2n}\sum_x u_i(x)^2 d_x - I_g(u_i)\Big) + \sum_j^k(\lambda_{k+1}-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}^2&\\ \leq 4\sum_{x\in\Omega}\rho^{-1}(x)\Gamma(g,u_i)^2 d_x.&\end{aligned} \tag{3.13}$$

两边乘以 $(\lambda_{k+1}-\lambda_i)$，并对 $i=1,\ldots,k$ 求和，可消去所有含有 a_{ij} 的项，从而得到

$$\sum_i^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\Big(\frac{1}{2n}\sum_x u_i(x)^2 d_x - I_g(u_i)\Big) \leq 4\sum_i^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\sum_{x\in\Omega}\rho^{-1}(x)\Gamma(g,u_i)^2 d_x. \tag{3.14}$$

现在，我们完全按照同样的方法，将 g 提升为 x_α，并对 α 从 1 到 n 求和。注意到 (3.1)、(2.4) 和 (3.9)，可得

$$\sum_i^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\Big(\frac{1}{2\rho_{max}}-\frac{1}{2}\lambda_i\Big)\le 4\sum_i^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\sum_{x\in\Omega}\rho^{-1}(x)\Gamma(g,u_i)^2d_x$$
$$\le\frac{2}{n\rho_{min}}\sum_i^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i, \tag{3.15}$$

也就是说

$$\sum_i^k(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big(\lambda_{k+1}\Big(\frac{\rho_{min}}{\rho_{max}}-\rho_{min}\lambda_i\Big)-\lambda_i\Big(\frac{\rho_{min}}{\rho_{max}}-\rho_{min}\lambda_i+\frac{4}{n}\Big)\Big)\le 0.$$

因此，我们证明了定理 1.1 □

定理 *1.2* 的证明。 由（3.6），我们还得到

$$\lambda_{k+1}-\lambda_i\le\frac{-2\sum_{x\in\Omega}\phi_i(x)\Gamma(g,u_i)d_x}{\sum_x\phi_i^2(x)\rho(x)d_x}\le\frac{4\sum_{x\in\Omega}\rho^{-1}(x)\Gamma(g,u_i)^2d_x}{\frac{1}{2n}\sum_x u_i(x)^2d_x-I_g(u_i)+\sum_j(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}^2}, \tag{3.16}$$

or

$$(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big(\frac{1}{2n}\sum_x u_i(x)^2d_x-I_g(u_i)+\sum_j(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}^2\Big)\le 4\sum_{x\in\Omega}\rho^{-1}(x)\Gamma(g,u_i)^2d_x, \tag{3.17}$$

若将（3.13）与（3.17）简单取平均，则得到

$$(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\Big(\frac{1}{2n}\sum_x u_i(x)^2d_x-I_g(u_i)\Big)+\sum_j^k\Big(\lambda_{k+1}-\frac{\lambda_i+\lambda_j}{2}\Big)(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}^2$$
$$\le 4\sum_{x\in\Omega}\rho^{-1}(x)\Gamma(g,u_i)^2d_x. \tag{3.18}$$

然后，按照相同的步骤，我们得到

$$\lambda_{k+1}\Big(1-\frac{\rho_{max}}{k}\sum_i^k\lambda_i\Big)\le\frac{1}{k}\Big(1+\frac{4\rho_{max}}{n\rho_{min}}\Big)\sum_i^k\lambda_i-\frac{\rho_{max}}{k}\sum_i^k\lambda_i^2.$$

这就证明了定理 1.2。 □

定理 *1.3* 的证明。由（3.17），我们还得到

$$\frac{1}{2n}\sum_{x} u_i(x)^2 d_x - I_g(u_i) + \sum_j (\lambda_i - \lambda_j) a_{ij}^2 \leq \frac{4\sum_{x\in\Omega}\rho^{-1}(x)\Gamma(g,u_i)^2 d_x}{\lambda_{k+1}-\lambda_i}. \tag{3.19}$$

并且，按照上述相同的步骤，我们得到 HP 不等式

$$\sum_i^k \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}-\lambda_i} \geq \frac{nk}{4}\Big(\frac{\rho_{min}}{\rho_{max}} - \frac{\rho_{min}}{k}\sum_i^k \lambda_i\Big).$$

这就证明了定理 1.3。 □

定理 *1.4* 的证明。 将 $\lambda_{k+1}-\lambda_i$替换为 $\lambda_{k+1}-\lambda_k$，按照相同的步骤，我们推导出 PPW 不等式

$$(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\Big(\frac{\rho_{min}}{\rho_{max}} - \frac{\rho_{min}}{k}\sum_i^k \lambda_i\Big) \leq \frac{4}{nk}\sum_i^k \lambda_i.$$

我们证明定理 1.4。 □

参考文献

[1] Mark S Ashbaugh. 佩恩-波利亚-温伯格、Hile-Protter 和 H.C. Yang 的普适特征值界。载于《印度科学院院刊——数学科学》，第112卷，第3–30页。Springer，2002年。[2] 陈大光、郑涛和杨洪苍。拉普拉斯算子相邻特征值间隙的估计。《太平洋数学杂志》，282(2):293–311，2016年。[3] Fan Chung 和丘成桐。狄利克雷特征值的 Harnack 不等式。《图论杂志》，34(4):247–257，2000年。[4] Fan RK Chung 和 Kevin Oden。加权图拉普拉斯算子与等周不等式。《太平洋数学杂志》，192(2):257–273，2000年。[5] Jozef Dodziuk。差分方程、等周不等式与某些随机游走的暂留性。美国数学会汇刊，284(2):787–794，1984年。[6] Alexander Grigor'yan。图上的分析导论，第71卷。美国数学会，2018年。

[7] GN Hile 和 MH Protter。拉普拉斯算子特征值的不等式。印第安纳大学数学杂志，29(4):523–538，1980年。[8] 华波波、林勇和苏艳辉。整数格上狄利克雷拉普拉斯特征值的佩恩-波利亚-温伯格、Hile-Protter 和杨氏不等式。几何分析杂志，33(7):217，2023年。[9] Lawrence Edward Payne、GWHF Pólya 和 Hans F Weinberger。关于连续特征值之比。技术报告，1955年。[10] Colin J Thompson。关于n维中连续特征值之比。《应用数学研究》，48(3):281–283，1969年。[11] 杨宏仓。连续特征值之差的估计。国际理论物理中心 *IC/91/60*，1991年。