arXiv:2601.10529v1 [math.CA] 15 Jan 2026

关于一元多项式的三个实现问题

弗拉基米尔·彼得罗夫·科斯托夫

Abstract. 我们考察三个关于首一、系数均非零的实一元多项式的实现问题。这样的多项式 $P:=\sum_{j=0}^{d} b_j x^j$ 定义了符号模式 $\sigma(P):=(\mathrm{sgn}(b_d),\ldots,\mathrm{sgn}(b_0))$。其正根数 p_d 和负根数 n_d（按重数计）P 满足笛卡尔符号法则。问题1询问，对于形如（符号模式 σ，序对 (p_d,n_d)）的序偶 C，其中该序对与 σ 在笛卡尔符号法则意义下相容，哪些序偶是可实现的，即是否存在定义这些序偶的多项式 P。问题2询问，对于哪些 d元组的序对 $T:=((p_d,n_d),\ldots,(p_1,n_1))$，存在多项式$P$，使得 $P^{(d-j)}$ 具有 p_j 个正根和 n_j 个负根。一个 d元组 T 确定符号模式 $\sigma(P)$，但反之不成立。我们通过一个例子表明，6是存在不可实现元组T、而其对应序偶 C 却可实现时 d 的最小值。第三个问题涉及所有根均为实数的多项式。我们在四次多项式的背景下，给出这三个问题的几何解释。

关键词：实一元多项式；双曲多项式；符号模式；笛卡尔符号法则

美国数学学会分类：26C10；30C15

1. Introduction

本文探讨了三个受关于实一元多项式的笛卡尔符号法则启发的实现问题，参见 [2], [4], [5], [6], [7], [8], [10], [14]或 [16]。对于一个次数为 d 的首一多项式

$$P := x^d + \sum_{j=0}^{d-1} b_j x^j \ , \ \ b_j \in \mathbb{R} \ , \tag{1.1}$$

已知，其正根的个数（按重数计）ℓ_+ 不超过其系数序列中的符号变化次数 $\tilde{c}$，两者之差 $\tilde{c}-\ell_+$ 为偶数。计算符号变化时，忽略零系数。若 P 没有零系数，则通过考察多项式 $P(-x)$，可对负根的个数 ℓ_- 以及符号保持次数 $d-\tilde{c}$ 得到类似的条件。因此，当 $b_j\neq 0$、 $j=0$、.....、 $d-1$时，笛卡尔符号法则给出以下限制：

$$\begin{aligned} &\ell_+ \le \tilde{c}\ , \qquad \tilde{c}-\ell_+ \in 2\mathbb{N}\cup 0\ , \qquad \mathrm{sgn}(b_0)=(-1)^{\ell_+}\ , \\ &\ell_- \le d-\tilde{c}\ , \quad d-\tilde{c}-\ell_- \in 2\mathbb{N}\cup 0\ . \end{aligned} \tag{1.2}$$

这些条件仅为必要条件。A. Albouy 和 Y. Fu 也提出了充分条件（见 [1] 及其中所列参考文献），适用于以下形式的更一般函数类：

$$Y := a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_n x^{\alpha_n}$$

其中，$\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$ 是任意实指数，a_j 是非零实数。也就是说，对于给定的基数为 ℓ_+ 的正数集合 E（允许重复），以及如上所述的给定数集 α_j 和具有 $\tilde{c}$ 次符号变化的系数符号选择 a_j，其中 $\tilde{c} - \ell_+ \in 2\mathbb{N} \cup 0$，存在一个函数 Y，其按重数计的正根集合为 E。

Albouy 和 Fu 的充分条件只涉及正根。然而，同时考察正根和负根也是很自然的。（下文所说的多项式 P 均不含零系数。）

定义 1. (1) 长度为 $d+1$ 的符号模式 是由 $d+1$ 个 $+$和/或 $-$ 符号组成的序列。我们称多项式 P 定义了该符号模式

$$\sigma(P) \ := \ (\ +\ ,\ \mathrm{sgn}(b_{d-1})\ ,\ \ldots\ ,\ \mathrm{sgn}(b_0)\ )\ .$$

(2) 给定一个有 $\tilde{c}$ 次符号变化（因此有 $d-\tilde{c}$ 次符号保持）的符号模式 σ，我们将其笛卡儿对 定义为 $(\tilde{c},\ d-\tilde{c})$。相容对 （根据笛卡尔符号法则与 σ 相容）是任意一对

$$(\tilde{c}-2u\ ,\ d-\tilde{c}-2v)\ ,\ \ u,\ v \in \mathbb{N}\cup 0\ ,\ \ \tilde{c}-2u \geq 0\ ,\ \ d-\tilde{c}-2v \geq 0\ .$$

（符号模式，相容对）这样的组合称为相容对。

(3) 若存在一个多项式 P，使得 $\sigma(P) = \sigma_0$，且恰有 ℓ_+ 个正互异根和 ℓ_- 个负互异根，则称相容对 $(\sigma_0,\ (\ell_+,\ \ell_-))$ 可实现 。

例1. 对于符号模式 $\sigma_\dagger := (+,\ -,\ -,\ -,\ +)$，其笛卡儿对为 (2，2)，相容对为 (2，2)、(2，0)、(0，2) 和 (0，0)。

注记1. 每个形如（符号模式，笛卡儿对）的相容对均可实现，见 [13,注记2.2 的第 (1) 部分3]。

我们首先考虑的实现问题如下：

问题1. 对于给定的次数 d，确定哪些相容对可以实现。

定义 2. 对于给定的次数 d，相容对集合上的 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-作用 由两个彼此可交换的对合定义

$$i_m : P(x) \mapsto (-1)^d P(-x) \ \text{ and } \ i_r : P(x) \mapsto x^d P(1/x)/P(0)\ .$$

注 2. 对合 i_m 交换相容对的两个分量，并改变 P 的每隔一个系数的符号。对符号模式的两个分量同时进行变换后，对合 i_r 从右向左读取符号模式，并保持相容对不变。引入因子 $(-1)^d$ 和 $1/P(0)$，以保持首一多项式的集合不变。 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-作用的每个轨道由 4 个或 2 个相容对组成。给定轨道中的所有相容对要么都可实现，要么都不可实现。当相容对在其中一个对合 或 下保持不变时，轨道长度为 2；对于任意符号模式-1，都有 i_m (P) i_r 。

相容对在其中一个对合 i_r 或 $i_m i_r$ 下保持不变；对于任意符号模式 σ，都有 $i_m(\sigma) \neq \sigma$。

记号 1. 对于给定的次数 d，我们用 $\Sigma_{m_1,\ m_2,\ldots,m_n}$、$m_1+\cdots+m_n = d+1$ 表示由 m_1 个符号 $+$ 开始，随后是 m_2 个符号 $-$，再随后是 m_3 个符号 $+$，依此类推的符号模式。

对于 $d = 1$、2 和 3，所有轨道都是可实现的，见 [13, 第 17] 页。对于 $d = 4$ 和 $d = 5$，唯一不可实现的轨道是相容对的轨道

$$(\Sigma_{1,3,1}, (0,2)) \text{ and } (\Sigma_{1,4,1}, (0,3)) \tag{1.3}$$

分别见 [9] 和 [1]。对于 $d = 6$，恰好有 4 个这样的轨道，见 [1]:

$$(\Sigma_{1,5,1}, (0,2)),\ (\Sigma_{1,5,1}, (0,4)),\ (\Sigma_{4,1,2}, (2,0)) \text{ and } (\Sigma_{2,4,1}, (0,4)). \tag{1.4}$$

问题1已在 $d \leq 8$ 的情形下完全解决；对于更高次数的情形也取得了部分结果，关于问题 A，见 [13]。

为了表述下一个问题，我们必须研究相容对序列（*SCP*）。对于一个次数为 d 的多项式 P，我们用 p_j 和 n_j 分别表示 $P^{(d-j)}$ 的正根数和负根数（按重数计）。因此，特别有 $p_d = \ell_+$ 和 $n_d = \ell_-$。当 P 及其所有非恒定导数的实根均互不相同时，我们称 P 实现 该相容对序列

$$S_d := ((p_d, n_d),\ (p_{d-1}, n_{d-1}),\ \ldots,\ (p_1, n_1)).$$

显然，$(p_1,\ n_1) = (1,\ 0)$ 或 $(0,\ 1)$。

罗尔定理对数目 p_j 和 n_j 施加了以下限制:

$$p_j \leq p_{j-1} + 1,\ n_j \leq n_{j-1} + 1 \text{ and } p_j + n_j \leq p_{j-1} + n_{j-1} + 1. \tag{1.5}$$

注 3. 相容对序列 S_d 根据规则 $\operatorname{sgn}(b_j) = (-1)^{p_{d-j}}$ 确定符号模式 $\sigma(P)$。然而，同一个以 $+$ 开头的符号模式可能由多个相容对序列确定。例如：相容对序列

$$((0,1),(2,0),(1,0)) \text{ and } ((0,1),(0,0),(1,0))$$

确定符号模式 $(+,\ -,\ +,\ +) = \Sigma_{1,\ 1,\ 2}$。

下一个实现问题如下:

问题 2。 对于给定的次数 d，确定哪些 *SCP* 是可实现的。

注4。 在问题 2 的语境下，我们仅相对于对合 i_m 定义 SCP 的轨道，而不是同时相对于 i_m 和 i_r，参见定义 2。这是因为多项式 P 求导后，会丢失其右端的系数。因此，在问题 2 的语境下，所有轨道的长度均为 2。

对于 $d = 1$、2 和 3，很容易验证所有 SCP 都是可实现的。对于 $d = 4$和 5（见 [3]），不可实现的 SCP 恰好是那些可由相容对不可实现性推导出的 SCP。我们对此作详细说明。对于 $d = 4$，这个不可实现的相容对

$$C_1 := ((+,-,-,-,+),(0,2))$$

可以对应于单个 SCP，即 $S^*:=((0,2),(1,2),(1,1),(1,0))$。事实上，应用条件 (1.5) 可得 $n_3 \geq 1$，而 $p_3 = p_2 = p_1 = 1$，见 (1.2)。因此 $n_3 = 2$、$n_2 = 1$ 和 $n_1 = 0$。C_1 的不可实现性意味着S^*也不可实现。另一方面，在对合 i_m意义下，唯一不可实现的 SCP 是 S^*，见 [3]。

同理，对于 $n = 5$，不可实现的相容对

$$C_2 := ((+,-,-,-,-,+),(0,3))$$

仅对应于 SCP $S^{**}:=((0,3),(1,3),(1,2),(1,1),(1,0))$。因此，SCP S^{**} 不可实现。还需考虑以下事实：

命题 1。如果截断符号组合 $S_{d-1}:=((p_{d-1},n_{d-1}),(p_{d-2},n_{d-2})..,(p_1,n_1))$ 不可实现，那么 *SCP* S_d 也不可实现。

事实上，如果 SCP S_d 可由多项式 P实现，那么 SCP S_{d-1} 可由其导数 P'实现。

因此，要得到所有其不可实现性可由相容对的不可实现性推出的 SCP 列表，就必须加入满足对应 SCP S_4 等于 S^*的 SCP S_5。这些 SCP（除对合 i_m外）为

$$((p_5,n_5),(0,2),(1,2),(1,1),(1,0)),\ (p_5,n_5)=(1,2),\ (1,0),\ (0,3)\ \text{or}\ (0,1).$$

本文证明，对于 $d = 6$，存在一些不可实现的 SCP，而其不可实现性无法从 $d \leq 6$ 的相容对的不可实现性推导出来。

定理1. 对于 $d = 6$，*SCP* $S^\diamond := ((0,2),(2,3),(1,3),(1,2),(1,1),(1,0))$（定义符号模式 $\Sigma_{1,4,2}$）不可实现。

该定理在第 5 节中证明。

备注 1. (1) 应注意，在截断符号组合中

$$S_*^\diamond := ((2,3),(1,3),(1,2),(1,1),(1,0))$$

对 (2，3) 是笛卡儿对，因此 SCP $S_*^\diamond$ 可实现，参见备注 1。

(2) 存在一个符号模式为 $\Sigma_{1,4,2}$ 的不可实现相容对，但它对应另一个相容对。这个相容对是 $(\Sigma_{1,4,2},\ (0,4))$。事实上，相容对 $(\Sigma_{2,4,1},\ (0,4))$ 不可实现，见 (1.4)，且有 $(\Sigma_{1,4,2},\ (0,4)) = i_r((\Sigma_{2,4,1},\ (0,4)))$，参见定义 2 和备注 2。若能找到一个不可实现的 SCP 的例子，使其定义的符号模式不涉及任何不可实现的相容对，那将很有意思。

在下一节中，我们将对问题1和问题2作一些评论。在第3节中，我们将提出一个关于一元多项式的第三个实现问题，并在第4节中通过四次首一多项式空间的几何来阐释这三个问题。

2. Comments

我们用 F_d 表示次数为 d 的 SCP 的数量，用 $E_d(m,n)$ 表示满足 $(p_d,n_d) = (m,n)$ 的次数为 d 的 SCP 的数量。因此

$$F_d = \sum E_d(m,n)\ ,\ \ m,n \in \mathbb{N}\cup 0\ ,\ \ m+n \le d\ ,\ \ d-m-n \in 2(\mathbb{N}\cup 0)\ .$$

量 $E_d(m,n)$ 满足以下递推关系：

$$\begin{aligned} E_d(m,n) \ &= \ \sum E_{d-1}(m-1+\mu, n-1+\nu)\ , && \mu,\nu \in \mathbb{N}\cup 0\ , \\ & m-1+\mu \ge 0\ , && n-1+\nu \ge 0\ , \\ & d-1-(m-1+\mu)-(n-1+\nu) \in 2\mathbb{N}\cup 0\ . \end{aligned}$$

对于 $d=1$，唯一的 SCP 是 (1，0) 和 (0，1)，因此 E_1(1，0) $= E_1$(0，1) $=1$ 和 $F_1 = 2$。利用上述关系可得

$$E_2(2,0) = E_1(1,0) = 1\ , \qquad E_2(0,2) = E_1(0,1) = 1\ ,$$

$$E_2(1,1) = E_1(1,0) + E_1(0,1) = 2\ , \qquad E_2(0,0) = E_1(1,0) + E_1(0,1) = 2\ ,$$

因此 $F_2 = 1+1+2+2 = 6$。类似地，可以验证 $F_3 = 20$、 $F_4 = 82$、 $F_5 = 340$和 $F_6 = 1602$。若将 SCP 按对合 i_m取模，可得数列 $F_d/2$，其数值为 1、3、10、41、170、801、.....(S)。这些数中相邻两项的比值为 3、3.33 .....、4.1、4.14 .....、4.71 .....。

对于后一序列中相邻两项的比值，似乎在 d 的奇数值与紧随其后的偶数值之间，增幅大于反过来的情形（首项 3 对应于 $d=2$）。这可以解释为：在第一种情况下，多项式可能具有的共轭复根对数增加 1；而在第二种情况下，该数保持不变。

我们将序列 (S) 与在 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 作用下相容的二元组（符号模式，相容对）的轨道数序列进行比较：1, 3, 6, 19, 36, 97, ...。显然，序列 (S) 的增长速度快于后一序列。这就是为什么问题 2 的穷尽答案目前仅对 $d \le 5$ 已知，而问题 1 的穷尽答案对 $d \le 8$ 已知。

3. Discriminant sets and hyperbolic polynomials

3.1. 判别式集。为了从几何角度说明问题 1 与问题 2 之间的关系，我们需要引入判别式集这一概念。

定义 3. (1) 在空间 $\mathbb{R}^d \cong Ob_0 \cdots b_{d-1}$ 中，我们用 $D_d = D_d(P)$ 表示使多项式 P（见 (1.1)）具有重实根的 $b^* := (b_0,\ .....,\ b_{d-1})$ 的取值集合。因此，$D_d = \Delta_d^1 \setminus \Delta_d^2$，其中 $\Delta_d^1 = \{\mathrm{Res}(P,\ P') = 0\}$，也就是说，$\Delta_d^1$ 是由多项式 P 和P'之后定义的西尔维斯特矩阵的行列式的零点集，而 Δ_d^2 是使 P 具有重共轭复根对且没有重实根的 b^* 的取值集合。当 $d \le 3$ 时，集合 Δ_d^2 为空；有 $\dim \Delta_d^1 = d-1$ 和 $\dim \Delta_d^2 = d-2$，见 [13, 注 5.1.1]。

（2）我们设定 $D_{d,\ 0} := D_d$，并对 $k \in \mathbb{N}$, $k \le d-1$, $D^0_{d,\ k} := D_{d-k}(P^{(k)})$。因此$D^0_{d,\ k}$是空间 $Ob_k \dots b_{d-1}$ 的子集。我们设定 $D_{d,\ k} := D^0_{d,\ k} \times Ob_0 \dots b_{k-1}$。

考虑集合

$$\tilde{P}_1 := \mathbb{R}^d \setminus (D_d \cup (\cup_{j=0}^{d-1}\{b_j = 0\}))\ .$$

一个相容对可实现，当且仅当集合 P_1 中至少有一个分支由多项式构成，这些多项式定义了该相容对的符号模式。存在一些相容对，对应集合 P_1 的两个或更多~分支，见 [13, 定理 5.32]。

~在问题 2 的背景下， P_1 的对应物是集合

$$\tilde{P}_2 := \mathbb{R}^d \setminus ((\cup_{k=0}^{d-1} D_{d,k}) \cup (\cup_{j=0}^{d-1} \{b_j = 0\})) \, .$$

~其定义涉及的超曲面比集合 P_1 的定义中更多；这也从几何上解释了为何 SCP 的数量多于相容对的数量，见上一节。

3.2. **双曲多项式**。

定义 4。 若实一元多项式的所有根均为实数（分别为互不相同的实数），则称其为双曲的 （分别为严格双曲的）。

对于一个所有系数均非零的双曲多项式，我们考察其根的模（假定彼此不同）在实正半轴上的排列，并标出负根的位置。这定义了一种模的次序。例如：若对于 $d = 8$，正根为 $x_1 < x_2 < x_3$，负根为 $-y_1 < \cdots < -y_5$，其中

$$0 \; < \; y_5 \; < \; y_4 \; < \; x_1 \; < \; y_3 \; < \; x_2 \; < \; y_2 \; < \; y_1 \; < \; x_3 \, ,$$

那么我们就说这些根定义了模数的次序 $NNPNPNNP$，也就是说，字母 P 和 N 表示字符串中正根和负根的模数的相对位置。

定义 5。 (1) 长度为 $d + 1$ 的符号模式定义如下的长度为 d 的变号保持模式： 将每一对连续符号 $+$、$-$ 或 $-$、$+$（分别是 $+$、$+$或 $-$、$-$）对应于字母 c（分别是 p）。因此，只考虑以 $+$开头的符号模式时，符号模式与变号保持模式之间的对应关系是一一对应的。例：对于$d = 7$，符号模式（$+$、$+$、$-$、$-$、$-$、$+$、$-$、$+$）定义了变号保持模式 $pcppccc$。

(2) 若模数次序 Ω 与变号保持模式 π（二者长度均为 d）中的字母 P（分别是 N）的数量，等于 π中的字母 c（分别是 p）的数量，则称 Ω 与该变号保持模式相容 。

(3) 给定一对（变号保持模式、相容的模的次序），或等价地（符号模式、相容的模的次序），若存在一个双曲多项式，其系数（均非零）定义了给定的模式，且其根的模互不相同并定义了给定的次序，则称其可实现。

问题 3。对于给定的次数 d，哪些相容对（模式、模的次序）是可实现的？

定义 6。 (1) 每个变号保持模式都定义了相应的典范模序： 从右向左读取该模式，并将每个字母c（分别为 p）与字母 P（分别为 N）对应起来。例如，变号保持模式 $pcppccc$对应典范序 $PPPNNPN$。

(2) 每一对（模式、对应的典范序）都是相容且可实现的，见 [13, 命题 4.1。1]。对于给定的符号模式或变号保持模式σ，如果唯一可实现的一对是 (σ，Ω)，其中 Ω 是与 σ对应的典范模序，那么 σ 就称为典范符号模式。

定理2（定理4.2.1，见 [13]）。典范符号模式恰好是那些不包含四种连续四个符号构型中任何一种的符号模式

$$(+,+,-,-)\ ,\ (-,-,+,+)\ ,\ (+,-,-,+)\ \text{or}\ (-,+,+,-)\ .$$

（因此，长度为 ≤ 3 的符号模式都不是典范的。）典范符号模式恰好是那些不含孤立变号和孤立符号保持的变号保持模式，即不包含构型 pcp 或 cpc。

根据该定理，符号模式$\Sigma_{1,\ 3,\ 1}$、 $\Sigma_{1,\ 4,\ 1}$、 $\Sigma_{1,\ 5,\ 1}$ 和$\Sigma_{4,\ 1,\ 2}$ 是典范的，而$\Sigma_{2,\ 4,\ 1}$ 不是，见（1.3）和（1.4）。

4. Geometric illustrations

本节讨论四次首一多项式。这是问题1的答案首次不再平凡的次数。在此类多项式构成的空间中，我们研究两个由符号模式 $\Sigma_{1,\ 3,\ 1}$ 和 $\Sigma_{1,\ 2,\ 2}$定义的正交象限中，与给定相容对相对应的区域的几何性质。第一个正交象限是典范的（见定理 2），其选择与问题1和问题3的非平凡答案有关。几何讨论见图1。

4.1. 符号模式为 $d = 4$ 的$\Sigma_{1,\ 3,\ 1}$ 的首一多项式。我们通过四次情形下符号模式为 $\Sigma_{1,\ 3,\ 1}$ 的例子，从几何角度说明问题 1 与问题 3 之间的关系。任何定义此符号模式的多项式 $Q_4 := x^4 + \sum_{j=0}^{3} b_j x^j$ 都可对应于由系数 b_j的符号定义的开正交象限 $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^4$ 中的一个点。

族 Q_4 的判别式集 D_4 将 $\mathcal{R}$ 划分为三个开子集 $\mathcal{R}_i$、$i = 0$、1、2，其中来自集合 $\mathcal{R}_i$ 的多项式恰好有 i对共轭复数对。集合 $\mathcal{R}_1$ 中的所有多项式都有两个正的互异根。这由关于 $d = 4$的问题1的答案可知，见（1.3）或 [9] 和 [1]。集合 $\mathcal{R}_2$ 中的多项式有两个正的互异根和两个负的互异根。

记

$$\mathcal{R}_{i,i+1} := (\overline{\mathcal{R}_i} \cap \overline{\mathcal{R}_{i+1}}) \cap \mathcal{R}\ ,\ i = 0,\ 1\ .$$

定理3。（*1*）来自$\mathcal{R}_{0,\ 1}$ 的多项式有一个二重负根和两个互异正根；来自$\mathcal{R}_{1,\ 2}$ 的多项式有一个二重正根和一对共轭复根。

（*2*）正交象限 $\mathcal{R}$ 是并集 $(\cup_{j=0}^{3}\mathcal{R}_j) \cup \mathcal{R}_{0,\ 1} \cup \mathcal{R}_{1,\ 2}$，其中$\mathcal{R}_{0,\ 1}$ 和$\mathcal{R}_{1,\ 2}$是 $\mathcal{R}$ 中的局部光滑解析超曲面。所有五个集合都是可缩的，且两两不相交。

证明。第（1）部分由集合 $\mathcal{R}_{i,\ i+1}$ 的定义可得。

（2）判别式集 D_4 在 $\mathcal{R}$处处都是局部光滑解析超曲面； [13] 中的定理 5.5.1 对这一事实作了更详细的说明。 D_4 中的一个点对应于恰有一个二重实根的多项式。为了证明这一点

我们首先验证不存在模相等且符号相反的两个根。事实上，若存在这样的根，则多项式的形式为

$$Q_4^* := (x^2 - a^2)(x^2 - fx - g) = x^4 - fx^3 - (g + a^2)x^2 + a^2 fx + a^2 g \ ,$$

$a > 0$, $f > 0$, $g > 0$。 f 和 g 的符号由 x^3 和 Q_4^*(0)的系数符号决定，但这会导致矛盾： x 的系数符号必须为正。

多项式的负根模数介于其正根的模数之间；这可由问题 3 的答案推出。因此，如果 $\mathcal{R}$中的一点沿一条光滑路径从集合 $\mathcal{R}_0$ 进入集合 $\mathcal{R}_1$，那么在穿过判别式集时，两个负根会合并为一对共轭复根。若该点从 $\mathcal{R}_1$ 进入 $\mathcal{R}_2$，那么穿过集合 D_4时，两个正根会合并为第二对共轭复根。因此，集合$\mathcal{R}_{0,\ 1}$ 与$\mathcal{R}_{1,\ 2}$ 不相交。根据集合 $\mathcal{R}_j$ 和$\mathcal{R}_{i,\ i+1}$, $i = 0, 1$ 的定义可知，这五个集合两两不相交。

这三个集合 $\mathcal{R}_i$ 都是可缩的，参见 [12, 定理 1]。集合 $\mathcal{R}_{0,\ 1}$ 可按如下方式参数化:

$$\begin{aligned} Q_4^{*-} &:= (x + a/2)^2(x^2 - fx + g) \\ &= x^4 + (a - f)x^3 + (a^2/4 - af + g)x^2 + (ag - a^2 f/4)x + a^2 g/4 \ , \end{aligned}$$

其中 $a > 0$、 $f > 0$ 和 $0 < g < f^2/4$。符号模式 $\Sigma_{1,\ 3,\ 1}$ 要求满足不等式 $f > a$ 和 $g < af/4$，参见 x^3 和 x的系数。可以观察到，此时

$$a^2/4 - af + g = a(a - f)/4 + (g - af/4) - af/2 < 0 \ ,$$

也就是说，中间系数也是负的，并且

$$\mathcal{R}_{0,1} \ = \ \{ \ (a, f, g) \mid 0 < a \ , \ a < f \ , \ 0 < g < \min(f^2/4, af/4) \ \} \ ,$$

因此 $\mathcal{R}_{0,\ 1}$ 是可缩的。事实上，这个集合纤维化于扇区 $\{0 < a < f\} \subset Oaf$之上，且所有纤维都非空。为参数化 $\mathcal{R}_{1,\ 2}$ ，我们令

$$\begin{aligned} Q_4^{*+} &:= (x - f/2)^2(x^2 + ax + b) \\ &= x^4 + (a - f)x^3 + (f^2/4 - af + b)x^2 + (f^2 a/4 - fb)x + f^2 b/4 \ , \end{aligned}$$

其中 $f > 0$、 $a^2/4 < b$、 $a < f$、 $b > af/4$和 $f^2/4 - af + b < 0$。类似地可得

$$\mathcal{R}_{1,2} \ = \ \{ \ (a, f, b) \mid 0 < a \ , \ a < f \ , \ af/4 < b < af - f^2/4 \ \} \ .$$

不等式 $af/4 < b < af - f^2/4$定义一个区间，当且仅当 $af/4 < af - f^2/4$，也就是说 $f/3 < a$。因此

$$\mathcal{R}_{1,2} \ = \ \{ \ (a, f, b) \mid 0 < f \ , \ f/3 < a < f \ , \ af/4 < b < af - f^2/4 \ \} \ .$$

集合 $\mathcal{R}_{1,2}$ 在空间 Oaf 中的投影是一个扇区，且该集合在此投影上纤维化，纤维为区间。因此，该集合是可缩的。定理得证。□

4.2. 具有符号模式 $d=4$ 的首一多项式 $\Sigma_{1,2,2}$. 我们将 $\mathcal{R}^\dagger$ 称为与符号模式 $\Sigma_{1,2,2}$相对应的 $\mathbb{R}^4\cong Ob_0b_1b_2b_3$ 的正交象限。 $\mathcal{R}^\dagger$ 的子集 $\mathcal{R}_i^\dagger$ 由具有 i 对共轭根的多项式 Q_4 组成。我们设

$$\mathcal{R}_1^\dagger=\mathcal{R}_{1,+}^\dagger\cup\mathcal{R}_{1,-}^\dagger\ ,$$

其中，来自 $\mathcal{R}_{1,+}^\dagger$（分别为 $\mathcal{R}_{1,-}^\dagger$）的多项式有两个正实根（分别有两个负实根）。

命题 2. 集合 $\mathcal{R}^\dagger$ 中的任意多项式都可以表示为

$$T:=(x^2+ax+b)(x^2-fx+g)\ ,\ a>0\ ,\ b>0\ ,\ f>0\ ,\ g>0\ .$$

证明. 我们首先证明，集合 $\mathcal{R}^\dagger$ 中的多项式均不含一对纯虚共轭根。若情况如此，则该多项式将等于

$$(x^2+b)(x^2\pm fx+g)=x^4\pm fx^3+(b+g)x^2\pm bfx+bg\ ,\ b>0\ ,\ f>0\ .$$

根据符号模式 $\Sigma_{1,\,2,\,2}$，g 的符号必须为正。但这样一来，x^2 的系数为正，这就产生了矛盾。

多项式 $T_0:=(x-2)^2(x+1)^2=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ 属于正交象限 $\mathcal{R}^\dagger$。从 T_0出发，可以连续地将其形变为 $\mathcal{R}^\dagger$中的任意其他多项式。这样做会使根的实部连续变化。对于任何根，其实部都不会变为 0。因此，形变过程中的任何多项式都是两个实二次多项式的乘积，其中一个多项式的根的实部为正，另一个多项式的根的实部为负。□

命题 3. *(1)* 集合 $\mathcal{R}_0^\dagger$、$\mathcal{R}_{1,-}^\dagger$、$\mathcal{R}_{1,+}^\dagger$ 和 $\mathcal{R}_2^\dagger$ 均非空且可缩。

(2) $\mathcal{R}^\dagger$ 中的多项式里具有二重正根或负根的子集 $\mathcal{L}_\pm$ 是光滑解析集，其维数为3。

下面我们证明，集合 $\mathcal{L}_+$ 和 $\mathcal{L}_-$ 横截相交。

证明。 第 (1) 部分由关于 $d=4$ 的问题1的答案（见 [13] 中的问题 A）以及 [12,定理 1] 得出。

第 (2) 部分。集合 $\mathcal{L}_+$（分别为 $\mathcal{L}_-$）中的任意多项式都具有如下形式：$L_+:=(x^2+ax+b)(x-f/2)^2$（分别为 $L_-:=(x+a/2)^2(x^2-fx+g)$）。因此

$$L_-=x^4+(a-f)x^3+(g-af+a^2/4)x^2+a(g-af/4)x+a^2g/4\ .$$

因此 $\mathcal{L}_-=\{(a,\ f,\ g)\mid 0<a<f,\ \ g-af+a^2/4<0,\ \ g-af/4>0\}$，即

$$\mathcal{L}_-=\{\,(a,f,g)\mid 0<a<f\ ,\ af/4<g<af-a^2/4\,\}\ .$$

由于 $f/4<f-a/4$（这由 $f>a>0$ 得出），集合 $\mathcal{L}_-$ 纤维化于开扇形 $\{0<a<f\}\subset Oaf$ 上，其纤维为开区间。这就证明了该命题对于集合 $\mathcal{L}_-$ 成立。至于 $\mathcal{L}_+$，可得参数化

$$L_+=x^4+(a-f)x^3+(b-af+f^2/4)x^2+(-f)(b-af/4)x+f^2b/4\ ,$$

因此 $\mathcal{L}_+=\{(a,\ f,\ g)\mid 0<a<f,\ \ 0<b<\min(af-f^2/4,\ af/4)\}$。后一最小值为正当且仅当 $af-f^2/4>0$，即 $a>f/4$。因此

$$\mathcal{L}_+ \;=\; \{\; (a,f,g) \mid f/4 < a < f \;,\; 0 < b < \min(af - f^2/4, af/4) \;\}$$

并且集合 $\mathcal{L}_+$ 在扇区 $\{f/4 < a < f\}$ 上纤维化，纤维为区间。

□

命题4. *(1)* 交集 $\mathcal{M} := \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-$ 在 $\mathcal{R}^\dagger$ 中局部是一个维数为2的光滑解析子集。

(2) 集合 $\mathcal{L}_+$ 与 $\mathcal{L}_-$ 的交集在局部是横截的。

证明。 第(1)部分。事实上，这个交集可以参数化如下:

$$(x-r)^2(x+h)^2 = x^4 + 2(r-h)x^3 + (h^2 - 4rh + r^2)x^2 + 2rh(h-r)x + r^2h^2 \;.$$

当且仅当 $0 < r < h$ 和$h^2 - 4rh + r^2 < 0$时，该多项式定义符号模式$\Sigma_{1,2,2}$ ，即 $0 < r < h < (2+\sqrt{3})r$，这是 Orh中的一个开扇形。

第(2)部分由 [15,“乘积引理”，第 52]页得出。 □

注记2。 (1) 命题4表明，在 $\mathcal{M}$的局部，这些集合

$$\mathcal{M} \;,\; \mathcal{L}_+ \;,\; \mathcal{L}_- \;,\; \mathcal{R}_0^\dagger \;,\; \mathcal{R}_{1,+}^\dagger \;,\; \mathcal{R}_{1,-}^\dagger \text{ and } \mathcal{R}_2^\dagger$$

连在一起与带有 $\mathbb{R}^2$ 的 $\mathbb{R}^2$子集的直积微分同胚

$$\{(0,0)\} \;, \qquad \{(x,0), x \in \mathbb{R}\} \;, \quad \{(0,y), y \in \mathbb{R}\} \;, \quad \{x>0, y>0\} \;,$$

$$\{x>0, y<0\} \;, \quad \{x<0, y>0\} \qquad \text{and} \qquad \{x<0, y<0\}$$

分别。

(2) 系数 x 为零且系数符号为（$+$，$-$，$-$，0，$+$）的多项式集合 $\mathcal{R}^0$ 构成正交象限 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}^\dagger$的公共边界。在此集合中，有以下两个子集及其参数化:

$$\mathcal{R}_{0,1}^0 \;:=\; \overline{\mathcal{R}_{0,1}} \cap \overline{\mathcal{L}_-^\dagger} \;:\; Q_4^{*-}|_{g=af/4} \equiv L_-|_{g=af/4} = 0 \text{ and}$$

$$\mathcal{R}_{1,2}^0 \;:=\; \overline{\mathcal{R}_{1,2}} \cap \overline{\mathcal{L}_+^\dagger} \;:\; Q_4^{*+}|_{b=af/4} \equiv L_+|_{b=af/4} = 0 \;.$$

集合$\mathcal{R}_{0,\,1}^0$ （分别为 $\mathcal{R}_{1,\,2}^0$）是这些集合的公共边界

$$\overline{\mathcal{R}_0} \cap \overline{\mathcal{R}_0^\dagger} \text{ and } \overline{\mathcal{R}_1} \cap \overline{\mathcal{R}_{1,+}^\dagger} \text{ (resp. } \overline{\mathcal{R}_1} \cap \overline{\mathcal{R}_{1,+}^\dagger} \text{ and } \overline{\mathcal{R}_2} \cap \overline{\mathcal{R}_2^\dagger} \text{)} \;.$$

图1示意表示了竖直线 AB右侧的正交象限 $\mathcal{R}$ 和左侧的正交象限 $\mathcal{R}^\dagger$ 。后者这条线表示集合 $\mathcal{R}^0$。数字1-7表示以下区域:

$$1.\; \mathcal{R}_0 \;;\;\; 2.\; \mathcal{R}_1 \;;\;\; 3.\; \mathcal{R}_2 \;;\;\; 4.\; \mathcal{R}_2^\dagger \;;\;\; 5.\; \mathcal{R}_{1,+}^\dagger \;;\;\; 6.\; \mathcal{R}_0^\dagger \;;\;\; 7.\; \mathcal{R}_{1,-}^\dagger \;.$$

交点表示以下集合:

$$A.\; \mathcal{R}_{1,2}^0 \;;\;\; B.\; \mathcal{R}_{0,1}^0 \;;\;\; C.\; \mathcal{M} \;.$$

从这一记号很容易推知图中各弧的含义。图中所示集合的实际维数是在图示维数的基础上加 2 得到的。例如，点 A、 B 和 C 表示维数为 2 的实代数簇。

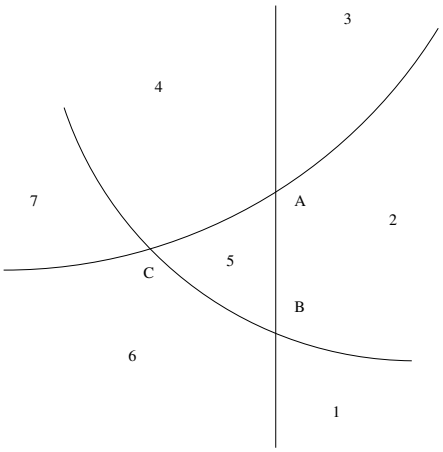

FIGURE 1. 正交象限 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}^{\dagger}$。

5. PROOF OF THEOREM 1

假设 SCP $S^{\diamond}$ 是可实现的。我们记

$$W := (x+1)(x+a)(x+b)(x-f)(x-g)$$

一个严格双曲多项式，实现其子序列 $S_*^{\diamond}$（见备注1），它有负根 $-1 < -a < -b$, 正根为 $f < g$。子序列$S_*^{\diamond}$ 定义了符号模式 $\Sigma_{1,\ 4,\ 1}$，该模式是典范的，因此 $f < b$ 和 $g > 1$，见定理2。由于 $1+a+b-f-g<0$，可得

$$g > 1 + a + (b - f) > 1 + a > 1 > a > b > f\ . \tag{5.6}$$

我们考虑 W 的原函数 $M\ (x) :=\int_{-1}^{x} W\ (t)\ dt$。它有五个临界点和五个临界值，记为 $\ell\ (\xi_j)$，我们假设它们互不相同，其中 $\xi_1 = -1$、$\xi_2 = -a$、.....、$\xi_5 = g$。显然

$$0 = \ell(\xi_1) < \ell(\xi_2) > \ell(\xi_3) < \ell(\xi_4) > \ell(\xi_5)\ .$$

SCP $S^{\diamond}$ 可实现，当且仅当存在一个实数 c，使得 $M + c$恰有两个单负根，且没有其他实根。不可能有 $\ell(\xi_5) > \max(\ell(\xi_1)\ \ell(\xi_3))$，因为在这种情况下，可以选取 c，使得$M + c$ 有四个负根，且没有其他实根。然而，相容对 $(\Sigma_{1,\ 4,\ 1},\ (0,\ 4))$ 不可实现，见 [13, 第 24] 页。

假设不等式

$$\ell(\xi_5) < \min(\ell(\xi_1), \ell(\xi_3)) \tag{5.7}$$

成立时，多项式 $M + c$ 定义了符号模式 $\Sigma_{1,\ 4,\ 2}$，且有两个或四个负根。那么 $M + c$ 也有两个正根，无法实现序列 S。因此，只有在满足以下条件时，$(p_6,\ n_6) = (0,\ 2)$ 才有可能：

$$\min(\ell(\xi_1), \ell(\xi_3)) < \ell(\xi_5) < \max(\ell(\xi_1), \ell(\xi_3))\ .$$

我们证明必然有 (5.7)，这意味着 SCP $S^{\diamond}$ 无法实现。具体而言，我们证明：

$$M(g) < 0 = M(-1) \text{ and } M(g) < M(-b) \ . \tag{5.8}$$

使用计算机代数系统（即 MAPLE）可得

$$\begin{aligned} M(g) &= (g+1)^3 R/60 \ , \\ R &= 10abf - 5abg + 5afg - 3ag^2 + 5bfg - 3bg^2 + 3fg^2 \\ &\quad -2g^3 + 5ab - 5af + 4ag - 5bf + 4bg - 4fg \\ &\quad +3g^2 - 3a - 3b + 3f - 3g + 2 \ . \end{aligned}$$

直接计算可得

$$M(1+a)|_{f=b} = -(2+a)^3 a(a^2 - 3b^2 + a + 1)/12 < 0 \ .$$

该不等式由 $1 > a > a^2 > b^2$ 得出。接下来，我们证明

引理1. 有 $M^{\dagger} := (\partial/\partial g)(M(g)) < 0$ 当 $f = b$, $g \geq 1 + a$ 时成立。因此$M(g)|_{f=b} < 0$ 当 $g \geq 1 + a$ 时成立。

证明。事实上，

$$\begin{aligned} M^{\dagger} &= (g+1)^2 M^*/60 \ , \\ M^* &= 30abf - 20abg + 20afg - 15ag^2 + 20bfg - 15bg^2 + 15fg^2 \\ &\quad -12g^3 + 10ab - 10af + 10ag - 10bf + 10bg - 10fg \\ &\quad +9g^2 - 5a - 5b + 5f - 6g + 3 \ , \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} -M^*|_{g=1+a} &= 35a^2(b-f) + 27a^3 + 47a^2 - 50abf - 10fb \\ &\quad +30a(b-f) + 34a + 10(b-f) + 6 > 0 \ . \end{aligned}$$

该不等式由（5.6）得出。因此 $M^*|_{g=1+a} < 0$和 $M^{\dagger}|_{g=1+a} < 0$。还可以得到

$$\begin{aligned} \partial M^*/\partial g &= -20a(b-f) - 30ag + 20bf - 30g(b-f) \\ &\quad -36g^2 + 10a + 18g - 6 + 10(b-f) < 0 \end{aligned}$$

这由（5.6）推出。因此可得 $M^{\dagger} < 0$ 当 $f = b$、 $g \geq 1 + a$时。 □

˜对于导数 $\tilde{M} := (\partial/\partial f)(M(g))$，可得

$$60\tilde{M} = (g+1)^3(10ab + 5a(g-1) + 5b(g-1) + (3g^2 - 4g + 3)) \ .$$

˜因此， $\tilde{M} > 0$ 因为 $g > 1$，且该二次多项式的判别式为负。因此，对于 $f \leq b$ 且 $g = g_0 \geq 1 + a$ 固定时，量 $M(g)$

在 $f = b$时取最大值。这意味着，对于（f, g） $\in (0, b] \times [1 + a, \infty)$， $M(g) < 0$。该不等式蕴含 $\ell(\xi_5) < \ell(\xi_1)$。

类似地，考虑差

$$M^\diamond := M(g) - M(-b) = -(b+g)^3 V/60 \ , \ \text{where}$$

$$\begin{aligned} V &= 3ab^2 + 5abf - 4abg - 5afg + 3ag^2 - 2b^3 - 3b^2 f \\ &\quad +3b^2 g + 4bfg - 3g^2 b - 3fg^2 + 2g^3 - 5ab - 10fa \\ &\quad +5ga + 3b^2 + 5fb - 4gb - 5gf + 3g^2 \ . \end{aligned}$$

确实，$V|_{g=1+a,\ f=b}$ 具有如下形式

$$5((a-b)^3 + (4a-3b)(a-b) + 4a + 1 - 2ab - 3b) > 0 \ ,$$

见（5.6），因此 $M^\diamond|_{g=1+a,\ f=b} < 0$。可得

$$\begin{aligned} \partial V/\partial g &= -4ab - 5af + 6ag + 3b^2 + 4bf - 6bg \\ &\quad -6fg + 6g^2 + 5a - 4b - 5f + 6g \ , \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \partial V/\partial g|_{g=1+a} &= (12a^2 + 12 - 10ab - 11af) + 3b^2 \\ &\quad +4bf + (29a - 10b - 11f) > 0 \qquad \text{and} \\ \partial^2 V/\partial g^2 &= 6(a-b) + 6(1-f) + 12g > 0 \ . \end{aligned}$$

这意味着 $\partial V/\partial g|_{g \geq 1+a,\ f=b} > 0$, $V|_{g \geq 1+a,\ f=b} > 0$和 $M^\diamond|_{g \geq 1+a,\ f=b} < 0$。接着我们考虑导数

$$\begin{aligned} \partial V/\partial f &= -(b+g)^3 H/60 \ , \\ H &= 5a(b-g) - 3b^2 + 4bg - 3g^2 - 10a + 5(b-g) \ . \end{aligned}$$

由于 $b < g$ 且，因此有 $H < 0$

$$4bg - 3g^2 = g(4b - 3g) \leq g(4b - 3 - 3a) < 0 \ .$$

因此 $\partial V/\partial f > 0$，因为对于固定的 $f \in (0,\ b]$和 $g = g_0 \geq 1 + a$，量 $M^\diamond$在 $f = b$ 时取最大值，所以它在 $(f,\ g) \in (0,\ b] \times [1 + a, \infty)$ 上为负。因此$\ell(\xi_5) < \ell(\xi_3)$。

References

[1] A. Albouy 和 Y. Fu, 《关于笛卡尔符号法则的一些评述》。Elem. Math. 69 (2014), 186–194. [2] F. Cajori, 《用算术方法近似求解一个未知量数值方程之根的历史》, Colo. Coll. Publ. Sci. Ser. 12 (7)(1910) 171-215.[3] H. Cheriha、Y. Gati 和 V. P. Kostov, 《笛卡尔符号法则、罗尔定理与相容对序列》, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 57:2 (2020 165 186 2020 10 1556 012 2020 57 2 1463) - June [4]
DOI: https://doi.org/ . / . . . . D. R. Curtiss, 《笛卡尔符号法则的近期扩展》, 《数学年刊》. 19 (4)(1918) 251-278.

[5] J.-P. de Gua de Malves, 《笛卡尔法则的证明：用于确定没有虚根的方程中正根与负根的数目》, Memoires de Math´ematique et de Physique tir´es des registres de l'Acad´emie Royale des Sciences (1741) 72-96. [6] 《勒内·笛卡尔几何学》, 附第一版影印本, D. E. Smith 和 M.L. Latham 译, 纽约, 多佛出版社, (1954)。 [7] J. Fourier, 《论笛卡尔定理在求根的界限中的应用》, Bulletin des sciences par la Soci´et´e philomatique de Paris (1820)156-165,181- 187; œuvres 2, Gauthier-Villars (1890) 291-309. [8] C. F. Gauss, 《代数定理的证明》, 《纯粹与应用数学杂志》3 (1-4) (1828); Werke 3, 67-70, G¨ottingen (1866). [9] D. J. Grabiner, 《笛卡尔符号法则：另一种构造》, 《美国数学月刊》106 (1999), 854–856. [10] J. L. W. Jensen, 《方程理论研究》, 《数学学报》36 (1913) 181-195.[11] V. P. Kostov, 《关于 $\mathcal{D}$-序列的实现定理》, 《保加利亚科学院院报》, 第 60 卷, 第 12 期 (2007) 1255-1258. [12] V. P. Kostov, 《一元多项式与某些集合的可缩性》, 索非亚大学"圣克莱门特·奥赫里茨基"数学与信息学学院年刊 107 (2020), 79-103. [13] V. P. Kostov.《分析中的一元多项式。双曲多项式、模的次序与笛卡尔符号法则》。 101+VIII p., Walter de Gruyter GmbH 2025 国际标准书号：978-3-11-914355-4, 电子书国际标准书号 (e-ISBN (PDF)): 978-3-11-221885-3, e-ISBN (EPUB): 978 3 11 221912 6, 0938 6572, 10 1515 9783112218853 - [14]

- - - 国际标准连续出版物号 - https://doi.org/ . / E. Laguerre, 《论数值方程理论》, Journal de Mathematiques pures et appliqu´ees 3 (9) (1883) 99-146; œuvres 1, 巴黎(1898) Chelsea, New-York (1972)3-47. [15] I. M´eguerditchian, 《实判别式与双曲多项式的几何》, 博士论文, 雷恩第一大学, Th`ese soutenue le 24.01.1991.[16] B. E. Meserve, 《代数基本概念》, 多佛出版社, 纽约 (1982)。

Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD, France
Email address: vladimir.kostov@unice.fr