关于 Zalcman 猜想和比伯巴赫猜想

Samuel L. Krushkal

Abstract. 著名的 Zalcman 猜想蕴含比伯巴赫猜想，∞其内容是：单位圆盘上的单叶函数 $f(z) = z + \sum a_n z^n$ 的系数满足$|a_n^2 - a_{2n-1}| \leq (n-1)^2$ 对所有 $n > 2$均成立，且等号仅当函数为柯比函数及其旋转时成立。作者利用与 Ahlfors-Schwarz 引理相关的几何论证证明了该猜想在 $n \leq 6$ 时成立，而当 $n \geq 7$时仍未解决。

本文的主要定理指出，这些猜想彼此等价，并通过将上述几何论证与作者提出的一种全新全纯函数极值问题研究方法相结合，同时证明了它们对所有 $n \geq 3$ 均成立。该方法基于将旋转齐次系数泛函提升到普遍 Teichmüller 空间上的 Bers纤维空间。

arXiv:2601.10584v1 [math.CV] 15 Jan 2026

2020年数学主题分类：主要分类：30C50、30C75、30F60；次要分类：30C55、30C62、31A05、32Q45、32L81

关键词和短语：单叶函数，Zalcman 猜想，比伯巴赫猜想，拟共形延拓，Teichm¨uller 空间，Bers同构定理，Banach空间上的全纯函数和多重次调和函数

1. 引言与结果陈述

1.1. Zalcman 猜想。定义在单叶函数类上、依赖于这些函数的泰勒系数的全纯泛函，在复分析的各种几何和物理应用中发挥着重要作用，例如，它们与弦理论以及 Virasoro 代数的全纯扩张有关。这些系数反映了共形映射的基本内在特征。因此，早在一百多年前，估计这些系数就是一个重要问题。

由单叶函数形成的两类一般典范类 S 和 Σ s

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad \text{and} \quad F(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots$$

^定义在圆盘 $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ 和 $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上： $|z| > 1\}$，它们在几何函数论、Teichm¨uller 空间理论及其他领域中发挥着至关重要的作用。

关于这些函数的系数，有若干经典猜想。其中包括比伯巴赫猜想，即在类 S 中，系数估计为 $|a_n| \leq n$；此外还有其他一些著名猜想，它们都能推出比伯巴赫猜想。其中大多数已由 de Branges 定理证明，见 [5], [10], [18]。

日期：2026年1月16日（ZaBiCos.tex）。

20世纪60年代，Lawrence Zalcman 提出了这样的猜想：对于任意 $f \in S$ 以及所有 $n \geq 3$,

$$|a_n^2 - a_{2n-1}| \leq (n-1)^2, \tag{1}$$

等号仅在柯比函数时成立

$$\kappa_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2} = z + \sum_2^\infty n e^{-i(n-1)\theta} z^n, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \tag{2}$$

它将单位圆盘映射到射线的补集上

$$w = -te^{-i\theta}, \quad \frac{1}{4} \leq t \leq \infty.$$

这个卓越的猜想蕴含比伯巴赫猜想。例外情形 $n = 2$较为简单，也略有不同：等式 $|a_2^2 - a_3| = 1$ 对柯比函数$\kappa_\theta(z)$以及奇函数 $\sqrt{\kappa_\theta(z^2)} = z/(1-e^{i\theta}z^2)$成立（注意，$Z_n(f) = a_n^2 - a_{2n-1}$ 中极值函数的存在性可由类 S 关于 $\mathbb{D}$上的局部一致收敛的紧性推出）。

作者通过运用与 Ahlfors-Schwarz 引理及其推广相关的几何论证，证明了 $n = 3$, 4，5，6 中的 Zalcman 猜想； $n \geq 7$中的情形仍未解决。

在论文 [4], [26], 中，这一猜想针对 S的某些特殊子类得到了证明；随后，数位作者考虑了略作推广的 Zalcman 泛函，并推广了他们的结果（参见例如 [32]及其中的参考文献）。Eframidis 和 Vukoti´c 运用著名的海曼定理（关于单个函数系数的渐近增长）证明了 Zalcman 猜想的渐近版本（参见 [7], [10]）。最近，Obradovi´c 和 Tuneski [28] 证明了针对实系数单叶函数的这一猜想。

这一猜想现已在收集函数论研究问题的书籍 [11] 中重新表述（针对 $n \geq 7$）。

1.2. 主要定理。最近，作者在 [19]-[21] 中提出了一种解决各种全纯函数类上的经典系数问题的新方法，这些函数未必是单叶的。该方法基于将由一组满足以下条件的特殊系数所决定的给定多项式（以及更一般的全纯）旋转齐次泛函

$$J(f) = J(a_{m_1}, \ldots, a_{m_s})$$

提升到普遍Teichmüller空间上的Bers纤维空间

$$2 < a_{m_1} < \cdots < a_{m_s} < \infty$$

，并运用Teichmüller空间深刻的解析和几何特征，尤其是带 puncture 的黎曼曲面的Teichmüller空间的Bers同构定理。

例如，由此可以得到比伯巴赫猜想的另一种直接证明，甚至可以证明更强的猜想，这些猜想估计施瓦茨导数、Hardy函数等的泰勒系数。

[19]-[21] 中所采用的论证实质上使用了如下假设：泛函 $J(f)$ 具有强旋转齐次性，即函数在前旋转和后旋转下保持齐次性

$$f(z) \mapsto f_{\alpha,\beta}(z) = e^{i\beta} f(e^{i\alpha} z) \tag{3}$$

（其中 α 和 β 不同于 $[-\pi,\pi)$。然而，Zalcman 泛函 $Z_n(f)$ 仅具有较弱的旋转齐次性（其中 $\beta=-\alpha$）。

本文旨在说明，将上述两种方法结合起来（并作一些必要的修改），即可得到以下定理。该定理同时证明了这两个猜想，并确立了它们之间的等价性。

固定 $n\geq 3$，并在类 S 上考虑系数泛函

$$J_1(f)=\frac{a_n^2-a_{2n-1}}{(n-1)^2},\quad J_2(f)=\frac{a_n}{n}. \tag{4}$$

由次调和泛函控制

$$J_{1,2}(f)=\max\left\{\max_S|J_1(f)|,\ \max_S|J_2(f)|\right\}. \tag{5}$$

定理 1。对于任意函数 $f\in S$ 和任意 $n\geq 3$，都有精确界 $|J_{1,\,2}(f)|\leq 1$，等号成立

$$\max_S|J_1(f)|=\max_S|J_2(f)|=1 \tag{6}$$

仅当函数为柯比函数 *(2)* 及其旋转 $e^{-i\alpha}\kappa_\theta(e^{i\alpha}z)$ 时。

该定理的证明给出界 $J_{1,2}(f)\leq 1$，对所有 $f\in S$ 均成立；当极值函数使 $J_{1,2}$ 达到最大值时，等号成立 $J_{1,2}(f_0)=1$。由 (5) 可知，或者 $\max_S|J_1(f_0)|=1$ 且 $\max_S|J_2(f_0)\leq 1$，或者 $\max_S|J_1(f_0)\leq 1$ 且 $\max_S|J_2(f_0)=1$，或者两个等式 (6) 均成立。无论哪种情况，只有当 $f_0=\kappa_\theta$ 时才可能具有极值性（此时这两个最大值都必须等于 1）。

1.3. Koebe函数的极值性。空间 $\mathcal{T}_m$ 具有一项重要性质，这项性质继承自类 Σ 和 Σ (1)，并继承自类 Σ，且在连接 (1) 下保持不变。这是映射 $F_{\tau,\sigma}$ 的圆对称性，因为对于任意 $F\in\Sigma$，所有函数 $e^{-i\alpha}F(e^{i\alpha}z)$ 也属于此类。定理 1 与 [22] 中确立的关于 Koebe函数极值性的一般结果密切相关；该结果涉及类 S 上的任意旋转齐次多项式泛函 $J(f)=J(a_{m_1},\dots,a_{m_s})$（其中$2<a_{m_1}<\cdots<a_{m_s}<\infty$）。

$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\in S$的系数与其反演$F(z)=1/f(1/z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\dots$之间的关系。它们属于圆盘 $\mathbb{D}^*=\{z\in\mathbb{C}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上单叶 $\widehat{\mathbb{C}}$-$\widehat{\ }$全纯函数类 Σ，其展开式为：$|z|>1\}$ 在这样的展开式下，$\widetilde{\ }$将 $J(f)$变为 Σ上的泛函 $J(F)$，称为与 J相关联的泛函（见下文关系式 (20)）。用 $\Sigma_{\rm af}$ 表示 Σ 中的子集，该子集由函数构成

$$F_{b_0,b_1;t}(z)=z+b_0t+b_1t^2z^{-1}$$

with

$$|b_0|\leq 2,\quad |b_1|\leq 1,\quad |t|\leq 1.$$

这些函数可以仿射延拓$\widehat{F}_{b_0,\ b_1;\ t}(z)=z+b_0t+b_1t^2z$ 到单位圆盘$\mathbb{D}=\{|z|<1\}$ 上（具有常数复伸缩 b_1t^2）。

所述结果如下：

定理 2. 柯比函数 $\kappa_\theta(z)$ 是旋转齐次系数泛函 $J(f)$ 的（唯一）极值函数，当且仅当其伴随泛函 $J(F)$ 满足

$$\max_{\Sigma}|\widetilde{J}(F)|=\max_{f\in S}|\widetilde{J}(F_f)|=\sup_{\Sigma_{\rm af}}|\widetilde{J}(F_{b_0,b_1;t})|.$$

换言之，与 J 泛函 J 相关的最大值 Σ必须在由 $\Sigma_{\rm af}$ 一类函数 $F\in\Sigma$ 构成的特定子集中取得；这些函数容许向圆盘作仿射延拓$\mathbb{D}$。

该定理表明，实际上，使 Koebe函数取得最大值的系数泛函集合相当稀疏。在引出比伯巴赫猜想和 Zalcman 猜想可能的推广的同时，它也描述了这一方向所容许的范围。

请注意，该定理仅涉及 J（f）的弱旋转齐次性 .

2. 插叙：Teichmüller空间

2.1. 首先，我们简要回顾证明定理 1 所需的一些 Teichmüller空间理论结果；详情可见例如 [3], [8], [25]。

这一理论与具有拟共形延拓至 $\mathbb{C}$的单叶函数密切相关。为了保证唯一性、紧致性以及对参数的全纯依赖性等，需要满足三个规范化条件。从技术上说，研究在圆盘 $\mathbb{D}^*$上单叶的函数更为方便。

分别用 S_Q和 Σ_Q表示在单位圆 $\mathbb{S}^1=\{|z|=1\}$ 上具有拟共形延拓（因而可延拓至 $\widehat{\mathbb{C}}$）的函数 $f\in S$ 和 $F\in\Sigma$ 的（稠密）子集。

2.2。通用 Teichmüller 空间 T $=$ Teich($\mathbb{D}$) 是由莫比乌斯映射作商得到的单位圆 $\mathbb{S}^1$ 上拟对称同胚的空间；所有 Teichmüller 空间在**T**中都有其等距副本。

T 上的典范复巴拿赫结构，是通过对**贝尔特拉米系数**（或复拟共形畸变）的球取商来定义的

$$\mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1=\{\mu\in L_\infty(\mathbb{C}):\ \mu|\mathbb{D}^*=0,\ \|\mu\|<1\},$$

令 μ_1，$\mu_2\in$Belt($\mathbb{D}$)$_1$等价，当且仅当相应的拟共形映射 w^{μ_1}，w^{μ_2}（贝尔特拉米方程 $\partial_z w=\mu\partial_z w$ 的解，满足$\mu=\mu_1$，μ_2）在单位圆 $\mathbb{S}^1=\partial\mathbb{D}^*$ 上（因而在 $\mathbb{D}^*$上）重合。这样的 μ 以及相应的映射 w^μ 称为 **T**-等价。等价类 $[w^\mu]_{\mathbf{T}}$ 与 **Schwarzian 导数**一一对应

$$S_w(z)=\left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2\quad(w=w^\mu(z),\ \ z\in\mathbb{D}^*).$$

贝尔特拉米方程 $\partial_z w=\mu\partial_z w$ 满足 $\mu\in$Belt($\mathbb{D}$)$_1$ 以及施瓦茨方程 $S_w(z)=\varphi(z)$（其中 $\varphi\in\mathbf{B}(\mathbb{D}^*)$）的解在圆盘 $\mathbb{D}^*$ 上是共形的，并且只确定到 $\mathbb{C}$的一个莫比乌斯（分式线性）变换。我们将在无穷远点 $z=\infty$处使用水动力学归一化，即令

$$w^\mu(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\dots$$

以及一些额外的归一化条件，例如 $w^\mu(1) = 1$。链式法则

$$S_{F_1\circ F}(z) = (S_{F_1}\circ F)F'(z)^2 + S_F(z).$$

由此得到 Möbius 映射 $w = \gamma(z)$ 满足等式

$$S_{F_1\circ\gamma}(z) = (S_{f_1}\circ\gamma)\gamma'(z)^2, \quad S_{\gamma\circ F}(z) = S_F(z).$$

因此，每个 $S_w(z)$ 都可以视为定义在 $\mathbb{D}^*$ 上的二次微分 $\varphi = S_w(z)dz^2$。给定全纯 φ 时，施瓦茨方程 $S_w(z) = \varphi(z)$ 的解 $w(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 的 Möbius 变换意义下确定。

对于单连通双曲域 $D \subset\!\!\neq \mathbb{C}$ 上的每个局部单叶函数 $w(z)$，其施瓦茨导数属于复 Banach空间 $\mathbf{B}(D)$，该空间由定义在 D 上的双曲有界全纯函数构成，其范数为

$$\|\varphi\|_{\mathbf{B}(D)} = \sup_D \lambda_D^{-2}(z)|\varphi(z)|,$$

其中 $\lambda_D(z)|dz|$ 是 D 上高斯曲率为 -4 的双曲度量；因此，当 $\infty \in D$ 时，$\varphi(z) = O(z^{-4})$。特别地，

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z) = 1/(1-|z|^2), \quad \lambda_{\mathbb{D}^*}(z) = 1/(|z|^2-1).$$

空间 $\mathbf{B}(D)$ 是伯格曼空间 $A_1(D)$ 的对偶空间；后者是由 $L_1(D)$ 上可积全纯函数（二次微分 $\varphi(z)dz^2$）构成的子空间。

施瓦茨导数 $S_{w^\mu}(z)$ 的 $\mu \in \mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1$ 像在空间$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbb{D}^*)$中构成一个有界域，该空间是空间$\mathbf{T}$的模型。它位于球 $\{\|\varphi\|_{\mathbf{B}} < 6\}$ 内，并包含球 $\{\|\varphi\|_{\mathbf{B}} < 2\}$。在此模型中，所有双曲黎曼曲面的 Teichm¨uller 空间都作为复子流形包含在$\mathbf{T}$ 中。

因子化投影 $\phi_{\mathbf{T}}(\mu) = S_{w^\mu} : \mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1 \to \mathbf{T}$是从$L_\infty(\mathbb{D})$到$\mathbf{B}$的全纯映射。该映射是分裂浸没，这意味着 $\phi_{\mathbf{T}}$ 具有局部全纯截面（例如参见 [2], [6], [8]）。

两个方程 $S_w = \varphi$和 $\partial_z w = \mu\partial_{\bar z} w$（分别关于 $\mathbb{D}^*$ 和 $\mathbb{D}$）在 $\mathbb{C}$的莫比乌斯变换意义下唯一确定其^解。

以下来自 [20] 的重要引理，为可拟共形延拓函数提供了一种略有不同的规范化方式，同时也确保了解的唯一性、解对复参数的全纯依赖性等。

引理 1. 对于任意 *Beltrami* 系数 $\mu \in \mathrm{Belt}(\mathbb{D}^*)_1$ 以及任意 $\theta_0 \in [0, 2\pi]$，存在一个位于 $\mathbb{S}^1$ 上的点 $z_0 = e^{i\alpha}$，使得$|e^{i\theta_0} - e^{i\alpha}| < 1$，并且对于任意满足$|e^{i\theta} - e^{i\alpha}| < 1$ 的 θ，方程 $\partial_z w = \mu(z)\partial_{\bar z} w$ 都有唯¯一的同胚解 $w = w^\mu(z)$，该解在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上全纯，并满足

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = e^{i\theta}, \quad w(z_0) = z_0. \tag{7}$$

因此，$w^\mu(z)$ 是共形的，并且在 $\mathbb{D}$ 中没有极点（所以 $w^\mu(z_*) = \infty$ 在某个点 z_* 处满足 $|z_*| \geq 1$）。

特别是，这个引理使得人们可以利用在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中经拟共形方式可延拓的单叶函数 $w(z)$ 来定义 Teichm¨üller 空间，并将其规范化为

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 1, \quad w(1) = 1 \tag{8}$$

并采用更一般的规范化

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = e^{i\theta}, \quad w(1) = 1.$$

所有这类函数在圆盘 $\mathbb{D}$ 内全纯。

作为这个引理的一个简单推论，经过旋转 $w(z) \mapsto e^{i\alpha}w(e^{-i\alpha}z)$，我们得到如下结论

引理 2. 对于任意 $\mu \in \mathrm{Belt}(\mathbb{D}^*)_1$, 任意给定的值 $\theta \in (-\pi, \pi]$ 以及单位圆 $\mathbf{S}^1 = \{|z| = 1\}$上的任意一点 z_0，存在唯一的同胚解 $w = w^\mu(z)$ 满足以下条件：它是方程 $\partial_{\bar z} w = \mu(z)\partial_z w$ 在 $\mathbb{C}$ 上的解

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 1, \quad w(z_0) = e^{i\theta}. \tag{9}$$

此解在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上全纯，因此，$w(z_*) = \infty$ 在某点 z_*处满足 $|z_*| \geq 1$.

注意，对于 $\mu(z) = 0$ （在 $\mathbb{D}^*$ 上几乎处处成立），相应的解 $w^\mu(z)$ 满足$w(0) = 0$, $w'(0) = e^{i\theta}$, $w(1) = 1$，它是椭圆型 Möbius 映射

$$w = \frac{e^{-i\theta}z}{(e^{-i\theta} - 1)z + 1}$$

（固定点为 0 和 1）；当 $\theta = 0$ 时，它等于恒等映射。

2.3。Teichmüller空间 $\mathbf{T}_1 = \mathrm{Teich}(\mathbb{D}_*)$ 的穿孔圆盘 $\mathbb{D}_* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ 的点是 $[\mu]_{\mathbf{T}_1}$ **$\mathbf{T}_1$-等价** Beltrami 系数 $\mu \in \mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1$, 的类，这意味着相应的单位圆盘拟共形自同构 w^μ 在 $\mathbb{D}_*$ 的两个边界分支（单位圆 $\mathbb{S}^1 = \{|z| = 1\}$ 和去心点 $z = 0$）上重合，并且在 $\mathbb{D}\setminus\{0\}$上同伦。这个空间可以赋予典范的复巴拿赫流形复结构，并通过一致化嵌入到$\mathbf{T}$中。

也就是说，圆盘 $\mathbb{D}_*$ 与商空间 $\mathbb{D}/\Gamma$共形等价，其中 Γ 是一个在 $\mathbb{D}$ 上不连续作用的循环抛物型福克斯群，而 $\mathbb{D}^*$。函数 $\mu \in L_\infty(\mathbb{D})$被提升到 $\mathbb{D}$ 上，成为相对于 Γ、在 $\mathbb{D}$ 中的 Beltrami $(-1,1)$-可测形式 $\widetilde{\mu}d\bar z/dz$，即通过 $(\widetilde{\mu} \circ \gamma)\gamma'/\gamma' = \widetilde{\mu},\ \gamma \in \Gamma$，构成巴拿赫空间 $L_\infty(\mathbb{D}, \Gamma)$。

我们将这些 $\widetilde{\mu}$ 按零延拓至 $\mathbb{D}^*$，并考虑 $L_\infty(\mathbb{D}, \Gamma)$ 中的单位球 $\mathrm{Belt}(\mathbb{D}, \Gamma)_1$。相应的施瓦茨导数 $S_{w^{\widetilde{\mu}}|\mathbb{D}^*}$ 属于$\mathbf{T}$。此外，$\mathbf{T}_1$ 与子空间$\mathbf{T}(\Gamma) = \mathbf{T} \cap \mathbf{B}(\Gamma)$典范同构，其中$\mathbf{B}(\Gamma)$由满足 $(\varphi \circ \gamma)(\gamma')^2 = \varphi$ 属于 $\mathbb{D}^*$（对所有 $\gamma \in \Gamma$）的元素 $\varphi \in \mathbf{B}$ 构成。

由于**Bers同构定理**，空间$\mathbf{T}_1$ 与 *Bers*纤维空间双全纯同构

$$\mathcal{F}(\mathbf{T}) = \{(\phi_{\mathbf{T}}(\mu), z) \in \mathbf{T} \times \mathbb{C} :\ \mu \in \mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1,\ z \in w^\mu(\mathbb{D})\}$$

其底空间为泛空间$\mathbf{T}$，全纯投影为 $\pi(\psi, z) = \psi$（见 [3]）。

该纤维空间是$\mathbf{B} \times \mathbb{C}$中的一个有界双曲域，并将区域 $D_\mu = w^\mu(\mathbb{D})$ 的集合表示为以空间$\mathbf{T}$为底的全纯族。对于每个 $z \in \mathbb{D}$，其在$\mathbf{T}_1$ 中的轨道$w^\mu(z)$是以$\mathbf{T}$为底的全纯曲线。

所示的 $\mathbf{T}_1$ 与 $\mathcal{F}(\mathbf{T})$ 之间的同构由包含映射j 诱导：$\mathbb{D}_* \hookrightarrow \mathbb{D}$，该映射通过以下方式忘掉原点处的去心点

$$\mu \mapsto (S_{w^{\mu_1}}, w^{\mu_1}(0)) \quad \text{with} \quad \mu_1 = j_*\mu := (\mu \circ j_0)\overline{j_0'}/j_0', \tag{10}$$

其中，j_0 是 j 到 $\mathbb{D}$的提升。

伯斯定理适用于所有带标记点的双曲黎曼曲面的 Teichm¨uller 空间$\mathbf{T}(X_0 \setminus \{x_0\})$，并且意味着$\mathbf{T}(X_0 \setminus \{x_0\})$与$\mathbf{T}(X_0)$上的伯斯纤维空间 Fib($\mathbf{T}(X_0)$) 双全纯同构。

2.4. 空间 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{T}_1$ 可以由有限维的穿孔球面（零亏格黎曼曲面）的 Teichm¨uller 空间 $\mathbf{T}(0, n)$ 在弱意义下逼近（即在由球面度量$\widehat{}$在 $\mathbb{C}$上诱导的拓扑下逼近）

$$X_{\mathbf{z}} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, z_1 \ldots, z_{n-3}, \infty\}$$

由有序的 n元组 $\mathbf{z} = (0, 1, z_1, \ldots, z_{n-3}, \infty)$ $n > 4$定义，且各 $z_j \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$互不相同（详情参见例如 [19]）。

固定一组 $\mathbf{z}^0 = (0, 1, z_1^0, \ldots, z_{n-3}^0, \infty)$，其中 $z_j^0 \in \mathbb{S}^1$ 定义了空间 $\mathbf{T}(0, n) = \mathbf{T}(X_{\mathbf{z}^0})$ 的基点 $X_{\mathbf{z}^0}$。其点是来自球 $\mathrm{Belt}(\mathbb{C})_1 = \{\mu \in L_\infty(\mathbb{C}) : \|\mu\|_\infty < 1\}$ 的 Beltrami 系数的等价类 $[\mu]$，其等价关系为: $\mu_1 \sim \mu_2$，若相应的拟共形同胚 w^{μ_1}, w^{μ_2}: $X_{\mathbf{a}^0} \to X_{\mathbf{a}}$ 在 $X_{\mathbf{a}^0}$ 上同伦（因此在点 $0, 1, z_1^0, \ldots, z_{n-3}^0, \infty$ 处重合）。这将 $\mathbf{T}(0, n)$ 建模为商空间 $\mathbf{T}(0, n) = \mathrm{Belt}(\mathbb{C})_1/\sim$，其复巴拿赫结构的维数为 $n - 3$，继承自球 $\mathrm{Belt}(\mathbb{C})_1$。

空间 $\mathbf{T}(0, n) = \mathbf{T}(X_{\mathbf{z}^0})$ 的另一种典范模型同样通过一致化得到。曲面 $X_{\mathbf{z}^0}$ 与商空间 U/Γ_0共形等价，其中Γ_0 是一个在 $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}^*$上不连续作用的第一类无挠福克斯群。函数 $\mu \in L_\infty(X_{\mathbf{z}^0})$ 被提升到 $\mathbb{D}$，成为关于 Γ_0 满足下列条件的 $\mathbb{D}$ 上的 Beltrami $(-1,1)$-可测形式 $\widetilde{\mu} dz/dz$

$$(\widetilde{\mu} \circ \gamma)\overline{\gamma'}/\gamma' = \widetilde{\mu}, \ \gamma \in \Gamma_0,$$

并构成巴拿赫空间 $L_\infty(\mathbb{D}, \Gamma_0)$。将这些 $\widetilde{\mu}$ 延拓为在 $\mathbb{D}^*$ 上为零后，$\|\widetilde{\mu}\|_\infty < 1$ 的施瓦茨导数$S_{w^{\widetilde{\mu}}|\mathbb{D}^*}$属于 $\mathbf{T}$，并构成其子空间，该子空间视为群 Γ_0 的**Teichm¨uller space**$\mathbf{T}(\Gamma_0)$。它与空间$\mathbf{T}(X_{\mathbf{z}^0})$典范同构，而且，

$$\mathbf{T}(\Gamma_0) = \mathbf{T} \cap \mathbf{B}(\Gamma_0),$$

其中 $\mathbf{B}(\Gamma_0)$ 是 $\mathbf{B}$ 的一个 $(n - 3)$ 维子空间，由满足 $(\varphi \circ \gamma)(\gamma')^2 = \varphi$ 的元素 $\varphi \in \mathbf{B}$ 组成，其中条件对所有 $\gamma \in \Gamma_0$ 均成立（次数为 -4 的全纯 Γ_0-自守形式）；例如参见 [25]。该空间与次数为 -4 的可积全纯形式空间 $A_1(\mathbb{D}^*, \Gamma_0)$ 具有相同的元素。

这导出了将空间 $\mathbf{T}(X_{\mathbf{z}^0})$ 表示为复欧几里得空间 $\mathbb{C}^{n-3}$ 中的一个有界域。

任意 Teichm¨uller 空间都是一个完备度量空间，其内在 Teichm¨uller 度量由拟共形映射定义。根据 Royden-Gardiner定理，该度量等于由复结构确定的双曲 Kobayashi 度量（例如参见 [6], [8], [29]）。

3. 预备知识与基础几何结果

3.1. 单叶函数的全纯同伦。对于每个 $F(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots \in \Sigma$ 我们定义该函数的一个复同伦

$$F_t(z) = tF\left(\frac{z}{t}\right) = z + b_0 t + b_1 t^2 z^{-1} + b_2 t^3 z^{-2} + \ldots : \ \mathbb{D}^* \times \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}} \tag{11}$$

到恒等映射。然后

$$S_{F_t}(z) = t^{-2} S_F(t^{-1}z)$$

而且，映射 h_F： $t \mapsto S_{F_t}$ 作为函数 $\mathbb{D} \to \mathbf{B}$ 是全纯的（例如参见 [14]）。它确定了同伦圆盘 $\mathbb{D}(F) = \{F_t\}$，该圆盘在 h_F 的非临界点处全纯。这些圆盘叶状分解了集合 Σ_Q。

从 S 出发的相应函数同伦由 $f(z,t) = t^{-1}f(tz) = z + a_2 t + \dots$ 给出；因此 $Z_n(f(\cdot,t)) = t^{2n-2} Z_n(f)$。

同伦函数的拟共形畸变由下述引理估计；该引理是区域和单叶函数的动力学 r^2 性质的特例（参见 [14], [24]）。

引理 3. [14]*(a)* 每个同伦映射 F_t 都存在到整个球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上的 k-拟共形延拓，且满足 $k \le |t|^2$。界 $k(F_t) \le |t|^2$ 是锐的，且仅当映射为

$$F_{b_0,b_1;1}(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1}, \quad |b_1| = 1,$$

其同伦映射

$$F_{b_0,b_1;t}(z) = z + b_0 t + b_1 t^2 z^{-1} \tag{12}$$

具有仿射延拓 $\widehat{F}_{b_0,\ b_1;\ t}(z) = z + b_0 t + b_1 t^2 z$ 到 $\mathbb{D}$。

(b) 若 $F(z) = z + b_0 + b_p z^{-p} + b_{p+1} z^{-(p+1)} + \dots (b_p \ne 0)$ 对某个整数 $p > 1$成立，则延拓的最小拟共形畸变可估计为 $k(F_t) \le |t|^{p+1}$；此界也是锐的。

此引理是文献 [14], [24] 中研究的区域和单叶函数的动力学 r^2-性质的一个特例。

如果 $F \in \Sigma_Q$ 存在一个 k-拟共形延拓，那么其同伦 F_t 的拟共形畸变最佳上界要强得多。此界在此处不会用到。

另请注意，由于 Strebel 框架映射条件 [31], ，极值延拓 $\widehat{F_t}$任意具有 $|t| < 1$ 的同伦函数 F_t 都是 Teichmüller 型的，即其 Beltrami 系数具有如下形式

$$\mu_{\widehat{F}_t}(z) = \tau(t)|\psi(z)|/\psi(z),$$

其中， ψ 是来自 $L_1(\mathbb{D})$ 的全纯函数（且唯一）。

3.2。为满足我们的目的，只需考虑满足以下条件的函数 $f \in S$

$$b_1 = a_2^2 - a_3 \ne 0;$$

此假设等价于 $S_f(0) = \lim_{z \to \infty} z^4 S_{F_f}(z) \ne 0$。这类函数在 S 中构成稠密子集，其施瓦茨导数在空间 $\mathbf{T}$ 中构成稠密子集。

我们将 $F = F_f$ 的每个同伦函数 F_t 分为两部分

$$F_t(z) = z + b_0 t + b_1 t^2 z^{-1} + b_2 t^3 z^{-2} + \dots = F_{b_0,b_1;t}(z) + h(z,t),$$

其中 $F_{b_0,b_1;t}$ 是映射 (12)，满足 $b_0,\ b_1$ 来自 F。当 $|t|$ 充分小时，余项 h 可由 $h(z,t) = O(t^3)$ 估计，并且对所有 $|z| \ge 1$，该估计关于 z 一致成立。

那么， F_t 和$F_{b_0,b_1;t}$ 的施瓦茨导数之间存在如下关系：

$$S_{F_t}(z) = S_{F_{b_0,b_1;t}}(z) + \omega(z,t),$$

其中，余项 ω 由链式法则唯一确定

$$S_{w_1 \circ w}(z) = (S_{w_1} \circ w)(w')^2(z) + S_w(z),$$

并且在 $\mathbf{B}$ 范数下估计为，并且在 $\mathbf{B}$ 范数下估计为

$$\|\omega(\cdot,t)\|_{\mathbf{B}} = O(t^3), \quad t \to 0; \tag{13}$$

对于 $|t| < t_0$，此估计是一致的（例如参见 [2], [13]）。

所有满足 $F_{b_0,\ b_1;\ t}$ 的函数

$$|b_0| \le 2, \quad |b_1| \le 1, \quad |t| \le 1. \tag{14}$$

在圆盘 $\mathbb{D}^*$ 上是单叶的（但可在其中取值为零）；若 $|t| < 1$，则可仿射延拓至 $\mathbb{D}$。对于这类函数，其同伦圆盘 $\mathbb{D}(F) = \{F_t\}$ 与极值圆盘 $\mathbb{D}(\psi) = \{t\mu_0$ 重合：$t \in \mathbb{D}\} \subset \mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1$；因此，泛函 Z_n 对函数 $F_{b_0,\ b_1;\ t}$ 的极值圆盘的作用关于 $t \in \mathbb{D}$ 呈旋转对称。

若数值 b_0 和 b_1 **容许**，则称它们为容许的，即它们是某个属于 Σ_Q 的函数的初始系数（这些数值满足 **(14)**）。所有满足 $|t| < 1$ 的此类 F_t 的集合记为 Σ_{af}。

3.3. 高斯曲率的两种推广。本节接下来的几何结果将用于定理 1 中的 Zalcman 部分。该部分依赖于圆盘上次调和共形度量 $\lambda(z)|dz|$ 的性质（其中 $\lambda(z) \ge 0$），其曲率在 Ahlfors 和 Royden 引入的广义意义下不超过 -4（见 [1], [12], [29]）。

回忆一下，C^2-光滑度量 $\lambda > 0$ 的高斯曲率定义为

$$\kappa_\lambda = -\frac{\mathbb{D}\log\lambda}{\lambda^2},$$

其中 $\mathbb{D}$ 表示拉普拉斯算子 $4\partial\bar{\partial}$。

区域 G 上（或黎曼曲面上）的度量 $\lambda(z)|dz|$ 的曲率在**支撑意义**下小于或等于 K，如果对于每个 $K' > K$ 及每个满足 $\lambda(z_0) > 0$ 的 z_0，都存在一个 C^2-光滑的**支撑度量** $\widehat{\lambda}$，它在 z_0 处支撑 λ（即满足 $\widehat{\lambda}(z_0) = \lambda(z_0)$，并且在 z_0 的某个邻域内有 $\widehat{\lambda}(z) \le \lambda(z)$），且 $\kappa_{\widehat{\lambda}}(z_0) \le K'$，或者等价地，

$$\mathbb{D}\log\lambda \ge -K\lambda^2. \tag{15}$$

度量 λ 在点 z_0 处的曲率至多为 K **势意义下**，如果存在一个圆盘 U，它以 z_0 为中心，且在其中函数

$$\log\lambda + K\,\mathrm{Pot}_U(\lambda^2),$$

其中 Pot_U 表示对数势

$$\mathrm{Pot}_U h = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_U h(\zeta)\log|\zeta - z|\,d\xi\,d\eta \quad (\zeta = \xi + i\eta),$$

是次调和的。由于 $\mathbb{D}\mathrm{Pot}_U h = h$（在广义函数意义下），可以将 U 替换为任意开子集 $V \subset U$，因为函数 $\mathrm{Pot}_U(\lambda^2) - \mathrm{Pot}_V(\lambda^2)$ 在 U 上是调和的。对于一般的次调和度量，不等式 **(15)** 在广义函数意义下也成立。另请注意，在势意义下曲率至多为 $-K$ 这一条件在共形映射下保持不变。

引理 4。[29]如果一个共形度量在支撑意义下的曲率至多为 K，那么它在势意义下的曲率至多为 K。

下面的引理讨论以 $r = |z|$ 为函数的**圆对称**度量。

引理 5。 [18], [29]设 $\lambda(|t|)d|t|$ 是 $\mathbb{D}$ 上的圆对称次调和度量，满足

$$\lambda(r) = mcr^{m-1} + O(r^m) \quad as \quad r \to 0 \quad with \quad 0 < c \le 1 \quad (m = 1, 2, \dots) \tag{16}$$

且该度量在势意义下的曲率不超过 -4 。于是

$$\lambda(r) \ge \frac{mcr^{m-1}}{1 - c^2 r^{2m}}. \tag{17}$$

在 $m = 1$ 的情形下（取 $c \ne 0$），将其应用于 [29], ，估计式 (17) 化为 $\lambda(r) \ge c/(1 - c^2 r^2)$, 其中 $c = (0)$，右端在整个圆盘 $\mathbb{D}$ 上定义了一个在 λ 处具有常数高斯曲率 -4 的支撑共形度量。

满足 (16) 的度量中占主导地位的度量由下述内容给出

引理 6. 设 $\lambda(t)|dt|$ 是圆盘 $\mathbb{D}$ 上的连续共形度量，在原点附近具有增长性质 *(17)*，并且在其非临界点处具有支撑意义下的曲率 -4。那么

$$\lambda(t) \le \lambda_m(t) = \frac{m|t|^{m-1}}{1 - 2t^{2m}} \quad \text{for all} \quad t \in \mathbb{D}.$$

3.3. 由无穷小形式恢复泛函 $Z_n(f)$ 。我们还要提及 Zalcman 泛函的两个重要特征。转而考虑归一化泛函 $Z_n^0 = Z_n / \max_S |Z_n(f)|$，它将 S 映射到单位圆盘，并考察它对无限全纯族 $\mathcal{F}_S = \{f_t(z) = f(z, t)\} \subset S$ 以及对满足 $F_(z, \cdot) = 1/f(1/z, \cdot)$ $t \in \mathbb{D}$ 的 Σ_{af} 的作用。

利用 $f(z, t)$ 的系数 $a_n(t)$ 与 $F_f(z, t)$ 的相应系数 $b_j(t)$ 之间的关系，我们将 Z_n^0 表示为 Σ 上的多项式泛函,

$$Z_n^0(f) = \widetilde{Z}_n^0(F_f) = \widetilde{Z}_n^0(b_0, b_1, \dots, , b_{2n-3}).$$

给定的全纯族确定了全纯映射序列

$$g_m(t) = \widetilde{Z}_n(F_m(\cdot, t)) : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad m = 1, 2, \dots \ (F_m \in \Sigma_{\text{af}}),$$

及其上包络

$$\widehat{g} = \sup_m |g_m(t)| : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

经过上半连续正则化 $\widehat{g}(t) = \limsup g_m(t')$ 后，得到单位圆盘上的对数次调和函数。

这些映射 g_m 将此圆盘 $\lambda_{\mathbb{D}}(z)|dz|$的双曲度量拉回，在 $\mathbb{D}$上生成对数次调和共形度量 $ds = \lambda_{g_m}(t)|dz|$ ，其

$$\lambda_{g_m}(t) = g_m^* \lambda_{\mathbb{D}}(t) = \frac{|g_m'(t)|}{1 - |g_m(t)|^2}$$

在 g_m 的非临界点处具有高斯曲率 -4 。取上包络

$$\lambda_{Z_n^0}(z) = \sup_m \lambda_{g_m}(z) \tag{18}$$

及其上半连续正则化，可在 $\mathbb{D}$ 上得到一个对数次调和度量，其曲率在支撑意义和势意义下均小于或等于 -4 （参见 [18]）。

我们将把上述关于曲率的结果应用于以下值：
$\widetilde{Z}_n$ 关于同伦圆盘；因此，导数必须理解为分布意义下的，因为这些圆盘通常具有临界点。

以下引理来自 [18]，它指出，在极值 Teichm¨uller 圆盘上，可以从泛函Z_n^0 的矩阵 $\lambda_{Z_n^0}$重构该泛函。

引理 7。 在任意极值 *Teichm¨uller* 圆盘 $\mathbb{D}(\psi_0) = \{t|\psi_0|/\psi_0 : \ |t| < 1\} \subset \mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1$, 中，我们有等式

$$\tanh^{-1}[\widetilde{Z}_n^0(F^{r|\psi_0|/\psi_0})] = \int_0^r \lambda_{\widetilde{Z}_n^0}(t)dt$$

对每个 $r < 1$均成立。

特别地，这个引理推出了以下结果，而该结果对于定理 1 中 Zalcman 部分的证明至关重要。

引理 8。 [18] 对于任意 $F(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots \in \Sigma_Q$，我们有下界

$$|\widetilde{Z}_n(F)| \geq \max_{b_0} |\widetilde{Z}_n(F_{b_0,b_1;1})|, \tag{19}$$

其中最大值取遍容许的 b_0 集合。

3.4. 推广。上述引理，尤其是关于通过 Z_n 的无穷小形式恢复 Z_n 的引理 7，对于定理 2 所考虑的泛函也成立，例如，$J(f) = a_n$，其中 $n > 2$。该引理讨论的是按 **T**-等价意义下的极值 Teichmüller 圆盘，即嵌入泛空间 **T** 中的圆盘。

第二系数 a_2 颇具特殊性。它是初始条件 $w(0) = 0, \ w'(0) = 1, \ w''(0) = 2a_2$ 的一部分，这些初始条件确定 Schwarzian 微分方程$S_w = \varphi$ 在给定 φ 时的唯一解，并且与 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的二次微分 $z^{-3}dz^2$ 有内在联系，该微分在无穷远处有一个简单极点。这个微分通过下式表示拟共形变分 $a_2(w^\mu)$:

$$a_2(w^\mu) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}^*} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta^3} d\xi d\eta + O(\|\mu\|_\infty^2), \quad \|\mu\|_\infty \to 0.$$

所述微分仅在穿孔圆盘 $\mathbb{D}^* \setminus \{\infty\}$上全纯，相应的 Teichmüller 圆盘 $\{tz^3/|z|^3\}$ 在空间 $\mathbf{T}_1$, 中是极值的，但在 **T** 中不是。

沿此圆盘的极值拟共形畸变由此去心圆盘的双曲距离估计，该距离大于 $\mathbb{D}^*$ 上的距离。

3.5. 特殊拟共形变形。下述变分引理是 [13] 中构造的一般拟共形变形的一个特例。

引理 9。 设 D 是黎曼球面 $\mathbb{C}$ 上的一个单连通域。假设存在一个具有正二维勒贝格测度的集合 E，以及有限个在 D 中指定的点 z_1、z_2、...、z_m。设非负整数 α_1、α_2、...、α_m 分别赋给 z_1、z_2、...、z_m，使得当 $z_j \in E$ 时有 $\alpha_j = 0$。

那么，对于充分小的 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\varepsilon \in (0, \ \varepsilon_0)$，以及满足条件 $w_{0j} \in D$ 的任意给定数列 w_{sj}、$s = 0$、1、...、α_j、 $j = 1$、2、...、m，

$$|w_{0j} - z_j| \leq \varepsilon, \ \ |w_{1j} - 1| \leq \varepsilon, \ \ |w_{sj}| \leq \varepsilon \ (s = 0, 1, \ldots a_j, \ j = 1, ..., m),$$

存在一个拟共形自同构 h ***of*** D，它在 $D \setminus E$上是共形的，并满足

$$h^{(s)}(z_j) = w_{sj} \quad \textit{for all } s = 0, 1, ..., \alpha_j, \ j = 1, ..., m.$$

此外， h 在 E 上的 ***Beltrami*** 系数 $\mu_h(z) = \partial_z h/\partial_z h$ 满足 $\|\mu_h\|_\infty \le M\varepsilon$。常数 ε_0 和 M 仅取决于集合 D、E 以及向量 $(z_1, ..., z_m)$ 和 $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$。

如果边界 ∂D 是 ***Jordan*** 边界，或是 $C^{l+\alpha}$-光滑的，其中 $0 < \alpha < 1$ 和 $l \ge 1$，我们也可以分别取 $z_j \in \partial D$，使得 $\alpha_j = 0$ 或 $\alpha_j \le l$。

4. 定理 1 的证明

我们分五个步骤完成证明。

步骤 1：函数的重整化。首先，我们引入更一般的单叶函数类，它们将用于证明中。

考虑到引理 2，可以在圆盘 $\mathbb{D}$ 中使用具有如下展开式的单叶函数类 $S_{Q,\theta}(\mathbb{D})$

$$f(z) = e^{i\theta}z + a_2 z^2 + \dots, \quad -\pi \le \theta \le \pi,$$

可拟共形延拓至 $\mathbb{D}^*$，其子类 $S_{z_0,\,\theta}$ 由 $f \in S_{Q,\,\theta}$ 组成，且固定点为 $z_0 \in \mathbb{S}^1$。相应的单叶函数类

$$F(z) = e^{-i\theta}z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots.$$

记作 $\Sigma_{Q,\,\theta}$ 和 $\Sigma_{z_0,\,\theta}$。考虑它们的不交并

$$S^0 = \bigcup_{z_0\in\mathbb{S}^1,\theta\in[-\pi,\pi]} S_{z_0,\theta}, \quad \Sigma^0 = \bigcup_{z_0\in\mathbb{S}^1,\theta\in[-\pi,\pi]} \Sigma_{z_0,\theta},$$

并注意到，在球面上局部一致收敛拓扑下，它们的闭包 S^0, Σ^0 $\mathbb{C}$ 是紧的。

注意，这些族与初始类 S 和 Σ 密切相关，因为每个 $w \in S$ 在 S^0 中都有一个代表元 $\widehat{w}$（不一定唯一），它可由对 w 进行关于原点的旋转 $z \mapsto e^{i\alpha}z$ 的前后复合得到，并满足关系式 $w_{\tau,\,\theta}(z) = e^{-i\theta}w(e^{i\tau}z)$，其中 $\tau = \arg z_0$，且 z_0 是一个点，使得 $w(z_0) = e^{i\theta}$ 是单位圆与区域 $w(\mathbb{D})$ 的边界的公共点。这样的点存在性可由经典的施瓦茨引理推出。

使用这些类代替 S 和 Σ，只需对上述 Teichm¨uller 空间 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{T}_1$ 的定义稍作修改。实际上，这会得到空间 $\mathbf{T}$ 的同一模型。至于空间 $\mathbf{T}_1$，，还必须增加第三个归一化条件，即所有 $F \in \Sigma_{z_0,\theta}$ 都保持点 z_0 不动。这提供了 $\mathbf{T}_1$ 的一个双全纯等价模型。

步骤 2：将泛函全纯提升 $J_1(f)$ 和 $J_2(f)$ 到空间 T 和 $\mathbf{T}_1$。利用 $f(z) \in S_{Q,\theta}$ 的系数 a_n 与反演 $F_f(z) 1/f(1/z)$ 的对应系数 b_j 之间的关系，可得

$$b_0 + e^{2i\theta}a_2 = 0, \quad b_n + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_{n,j} b_{n-j} a_{j+1} + \epsilon_{n+2,0} a_{n+2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中 $\epsilon_{n,j}$ 是 $e^{i\theta}$ 的整幂，依次可得到 a_n 通过 b_j 表示的形式：

$$a_n = (-1)^{n-1}\epsilon_{n-1,0}b_0^{n-1} - (-1)^{n-1}(n-2)\epsilon_{1,n-3}b_1 b_0^{n-3} + \text{lower terms with respect to } b_0. \quad (20)$$

这些关系将初始泛函 $J_1(f^\mu)$ $J_2(f^\mu)$ 转换为 Σ^0 上的系数泛函$\sim J_1(F^\mu)$ $J_2(F^\mu)$，它们取决于相应的系数 b_j。这种依赖关系关于 Beltrami 系数 $\mu_F \in \text{Belt}(\mathbb{D})_1$ 以及施瓦茨导数 S_{F^μ}是全纯的。

所有泛函 J_1， J_2，$J_{1,\ 2}$ 自然地延拓到广义类 S^0 和 Σ^0。

对于任意固定的 θ，函数 $f^\mu \in S^0$和 $F^\mu \in \Sigma^0$的泰勒系数关于 $\mu \in \text{Belt}(\mathbb{D})_1$ 以及作为$\mathbf{B}$中元素的施瓦茨导数 S_{F^μ} 全纯地依赖。这就将原泛函 J_s和 $J_s(F)$ $(s = 1,\ 2)$ 全纯提升为定义在通用 Teichm¨uller 空间 $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ 上的全纯函数，其变量为 $S_F \in \widetilde{\mathbf{T}}$。

我们的下一个目标是将这些泛函提升到覆盖空间 $\widehat{\mathbf{T}}_1$上。为此，我们$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$再次转而考虑泛函 $J_s(\mu) = J_s(F^\mu)$。这一关系将 J_s 提升到球 $\text{Belt}(\mathbb{D})_1$上。

现在我们应用映射 f^μ 的 $\mathbf{T}_1$-等价性，即商映射

$$\phi_{\mathbf{T}_1} :\ \text{Belt}(\mathbb{D})_1 \to \mathbf{T}_1, \quad \mu \to [\mu]_{\mathbf{T}_1},$$

这涉及穿孔圆盘 $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ 上映射 F^μ 的同伦。因此，每个泛函 $J_s(F^\mu)$ 都被推至空间 $\mathbf{T}_1$，上的有界全纯泛函 $\mathcal{J}_s(X_{F^\mu})$，其值域与 J_s 相同。将此泛函记为 $\mathcal{J}_s$。 [1]

利用 Bers同构定理，我们将空间 $\mathbf{T}_1$ =Fib(T) 中的点视为对 X_{F^μ} =$(S_{F^\mu}, F^\mu(0))$，其中 $\mu \in \text{Belt}(\mathbb{D})_1$ 满足 $\mathbf{T}_1$-等价。因此，在空间 Fib $F(\mathbf{T})$ 上可得到对数多重次调和泛函

$$|\mathcal{J}_s(F^\mu,\ t)| = |\mathcal{J}_s(X_{F^\mu})|,\ s = 1, 2;$$

and

$$J_{1,2}(F^\mu, t) = \max\left\{\max_S |J_1(F^\mu, t)|,\ \max_S |J_2((F^\mu, t)|\right\}, \quad t = F^\mu(0). \tag{21}$$

步骤 3：由 $J_{1,2}$ 生成的极大函数的次调和性。泛函 (21) 对任意固定的 $\theta \in [-\pi, \pi]$ 和 $F^\mu \in \Sigma_{Q,\ \theta}$ 生成极大函数

$$u_\theta(t) = \sup_{S_{F^\mu}} |\mathcal{J}_{1,2}(S_{F^\mu}, t)| \tag{22}$$

在 $F^\mu(0)$ 的值域 D_θ 上，取所有对于给定 $t = F^\mu(0) \in D_\alpha$ 容许的 $\mathbf{T}$ $S_{F^\mu} \in$ 的上确界（也就是说，对固定的 t，在对 $(S_{F^\mu}, t) \in$Fib(T) 上取上确界）。

定理 1 的证明中，首要的关键步骤是证明每个函数都继承了 $\mathcal{J}_1$， $\mathcal{J}_2$ 在 t中的次调和性，我们 (22) 将其表述如下:

引理10。由式 *(22)* 定义的每个函数 $u_\theta(t)$，在 $\theta \in [-\pi, \pi]$ 固定时，在圆盘 $\mathbb{D}_4 = \{|t| < 4\}$内的某些区域 D_θ 上都是对数次调和的。

证明。固定 $\theta \in [-\pi, \pi]$，并利用映射$F^\mu \in \Sigma_{Q,\ \theta}$，在 $\mathbb{C}$上的局部一致收敛拓扑下，通过有限维的穿孔球面 Teichmüller 空间对底空间$\mathbf{T}$ （以及同时对空间$\mathbf{T}_1$）作弱逼近。

取点集

$$E = \{e^{\pi si/2^n},\ s = 0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1;\ n = 1, 2, \ldots\}$$

[1]回想一下，为确保施瓦茨导数 $\varphi(h(z))h'(z)^2 = \varphi(z)$在变量的共形变换 h 下具有所需的性质，必须处理二次微分 $\varphi(z)dz^2$ 。这涉及 $\varphi \in \mathbf{B}$ 的等价类：若对某些模为 1 的常数 ϵ_1， ϵ_2 ，有 φ 和 φ_1 满足 $\varphi_1(z) = \epsilon_1\varphi(\epsilon_2 z)$，则二者等价。这种等价关系保持$\mathbf{B}$ 范数和系数模不变。 J_s 的齐次性与$\mathbf{T}$的这种旋转不变性相容。

（它在单位圆上稠密），并考虑穿孔球面

$$X_m = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{e^{\pi si/2^n},\ s = 0, 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}, \quad m = 2^{n+1},$$

及其通用全纯覆盖映射 $g_m : \mathbb{D} \to X_m$ 经 $g_m(0) = 0$, $g'_m(0) > 0$归一化。

从无穷远点到所有点 $e^{\pi si/2^n}$ 的径向裂缝构成L_m 的典范剖分 X_m，并定义单连通曲面 $X'_m = X_m \setminus L_m$。任意覆盖映射 g_m确定一个福克斯群 Γ_m，该群由覆盖变换构成，使 X'_m 一致化，并在两个圆盘 $\mathbb{D}$和 $\mathbb{D}^*$中均不连续作用。

每个这样的群 G_m 在 $\mathbb{D}$中都有一个 Γ_m 的典范（开）基本多边形 P_m，对应于剖分 L_m。它是一个以圆盘原点为中心的正圆形 2^{n+1}边形，并且可以选取为使点 $z = 1$成为其一个顶点。g_m 在 P_m 上的限制是单叶的；随着 $m \to \infty$，这些多边形不断扩展，最终穷尽圆盘 $\mathbb{D}$。

同样，我们在补圆盘 $\overline{\mathbb{D}}^*$ 中取镜像多边形 P^*_m 和覆盖映射 $g^*_m(z) = 1/g_m(1/z)$，它们定义了镜像曲面 X^*_m。

现在，我们用同胚映射 F^{μ_m}来逼近映射 $F^\mu \in \Sigma_{Q,\theta}$，使其在 $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$中具有如下贝尔特拉米系数

$$\mu_m = [g_m]_*\mu := (\mu \circ g_m)\overline{g'_m}/g'_m, \quad n = 1, 2, \dots .$$

每个 F^{μ_m} 仍是 k-拟共形的（其中 $k = \|\mu\|_\infty$），并且与群 Γ_m相容。由于 $m \to \infty$，系数 μ_m 在 $\mathbb{C}$上几乎处处收敛到 μ；因此，映射$\backsim F^{\mu_m}$在球面度量下于 $\mathbb{C}$上一致收敛到 F^μ。

还要注意， μ_m 作为 L_∞的元素全纯地依赖于 μ；因此， $F^{\mu_m}(0)$ 是 $t = F^\mu(0)$ 的全纯函数。

由此可得，贝尔特拉米系数

$$\mu_{h,m} := [g_m]_*\mu_h$$

以及相应的 值 $F^{\mu_{h,\,m}}(0)$ 是变量 $t = F^\mu(0)$ 的全纯函数 .

根据 Hartogs定理，每个满足 $t = F^{\mu_m}(0)$ 的函数 $\mathcal{J}_s(S_{F^{\mu_m}},\ t)$ 都是 $(S_{F^{\mu_m}},\ t) \in \mathcal{F}(\mathbf{T})$ 上的联合全纯函数。

现在，在 $\mathbf{T}(0,\ m)\backslash\{0\}$ 中选取一个可数稠密子集，并将其表示为空间 $\mathbf{B}(\Gamma_m)$ 的子区域

$$E^{(m)} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \dots\}.$$

对于其中任意一点 φ_p，将该点与$\mathbf{B}(\Gamma_m)$ 的原点相连的相应极值 Teich¨uller 圆盘 $\mathbb{D}(\varphi_p)$ 不会与该集合中的其他点相交（这由 Teich¨uller 极值映射的唯一性可知）。还要回顾一下，每个圆盘 $\mathbb{D}(\varphi_p)$ 都由施瓦茨导数 $S_{F^{\tau\mu_{p;m}}}$ 构成，其中 $|\tau| < 1$，并且

$$\mu_{p;m}(z) = |\psi_{p;m}(z)|/\psi_{p;m}(z)$$

具有适当的 $\psi_{p;m} \in A_1(\mathbb{D},\ \Gamma_m)$ $\|\psi_{p;m}\|_1 = 1$。

泛函 $\mathcal{J}_s(S_{F^{\tau\mu_{p;m}}},\ t)$ 在这些圆盘上的限制是关于 $(\tau,\ t)$ 的全纯函数；此外，上述构造保证所有这些限制在某个包含点 $t = 0$ 的公共定义域 $D_m \subset \mathbb{D}_4$ 中关于 t 全纯，条件是 $|\tau| \le k < 1$。我们使用最大公共全纯域；它位于圆盘 $\{|t| < r_0\}$, $r_0 < 4$ 中。对 τ 进行极大化可得对数次调和函数

$$U_{p;m}(t) = \sup_{|\tau|<1} |\mathcal{J}_{1,2}(S_{F^{\tau\mu_{p;m}}}, t)| \quad (t = F^{\mu_{p;m}}(0),\ \ p = 1, 2, \dots)$$

在区域 D_m 中。我们考虑这个序列的上包络

$$u_m(t) = \sup_p \ U_{p;m}(t)$$

在包含原点的某个区域 $D_m \subset \mathbb{D}_4$ 中定义，并取其上半连续正则化

$$u_m(t) = \limsup_{t' \to t} u_m(t'),$$

它不会增大 $\max|\mathcal{J}_{1,\ 2}|$（为简便起见，我们将正则化函数记作与原函数相同的字母）。

对所有 m 重复这一过程，便得到单调递增函数序列$u_m(t)$ 和递增域 D_m，它们穷尽某个区域 $D_\theta = \bigcup_m D_m$，使得每个 u_m 都在 D_m 上次调和，而该序列的极限函数等于函数 (22)。它在区域 D_θ 上有定义且次调和。引理得证。

步骤 4：在 Σ_{af} 上的极值性。上半连续包络

$$u(t) = \sup_\theta u_\theta(t)$$

函数 (22) 在包含原点$t = 0$的某个区域 D_0 内是对数次调和的，但只能给出一个粗略的上界

$$\max_t u(t) > \max_S |J_{1,2}(f)|$$

（与强旋转齐次泛函不同）。对于 $f_\alpha(z) = e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$，弱旋转齐次性 $|J_s(f_\alpha)| = |J_s(f)|$ 意味着所示区域 D_0是半径为某个 $a \le 4$ 的圆盘 $\mathbb{D}_a = \{|t| < a\}$。

我们的下一个目标是求出 $J_{1,\ 2}$ 的最佳上次调和主函数。我们将通过将该泛函限制在集合 Σ_{af} 上，并将其提升到空间 $\mathbf{T}_1$ 的乘积中来实现这一点。

首先，我们研究该集合在底空间 $\mathbf{T}$ 中的像的性质。将此像记为 G_{af}。其结构由以下两个引理描述。第一个引理揭示了全纯函数的覆盖性质与畸变性质之间的内在联系。

引理 11。 [21]设 D 是 $\mathbb{C}$ 的有界子区域，G 是复*Banach*空间 $X = \{\mathbf{x}\}$ 中的一个区域，χ 是从 G 到通用 *Teichmüller* 空间$\mathbf{T}$ $=\mathrm{Teich}(D)$ 的全纯映射，且具有基点 D（将其建模为 $\mathbf{B}(D)$ 的有界子区域）。假设 $\chi(G)$ 是 $\mathbf{T}$ 中有限维或无限维的（路径连通）子流形。

设 $w(z)$ 是施瓦茨微分方程的一个全纯单叶解

$$S_w(z) = \chi(\mathbf{x})$$

在 D 上满足 $w(0) = 0$, $w'(0) = e^{i\theta}$，其中固定 $\theta \in [-\pi, \pi]$ 且 $\mathbf{x} \in G$（因此 $w(z) = e^{i\theta} z + \sum_2^\infty a_n z^n$）。令

$$|a^0_{2,\theta}| = \sup\{|a_2| : \ S_w \in \chi(G)\}, \tag{23}$$

并令 $a^0_{2,\theta} \neq 0$ 和 $w_0(z) = e^{i\theta} z + a^0_2 z^2 + \ldots$ 为极值函数之一。那么：*(a)* 对于每个指定函数 $w(z)$，像域 $w(D)$完全覆盖圆盘$D_{1/(2|a^0_{2,\theta}|)} = \{|w| < 1/(2|a^0_{2,\theta}|)\}$。

对于这组函数及固定的 θ，半径值 $1/(2|a^0_{2,\theta}|)$ 是最佳的；当且仅当 $|a_2| = |a^0_{2,\theta}|$（即，当 w 是极值函数之一时），圆 $\{|w| = 1/(2|a^0_{2,\theta}|)$ 才包含不属于 $w(\mathbb{D})$ 的点。

（*b*）反函数

$$W(\zeta) = 1/w(1/\zeta) = e^{i\theta}\zeta - a^0_2 + b_1\zeta^{-1} + b_2\zeta^{-2} + \dots$$

其中 $\zeta \in D^{-1}$ 映射区域 D^{-1} 到一个边界完全包含于圆盘 $\{|W + a^0_{2,\theta}| \le |a^0_{2,\theta}|\}$。的区域

引理 12。集合 $\Sigma_{\rm af}$ （的像）是空间 $\mathbf{T}$。中的一个三维子域。

这个重要的引理已在 [18], [22]中应用。其证明很简单。对于任意函数 $F_{b^0_0,\ b^0_1,\ t^0}$ 满足 $|b^0_0| < 2$, $|b^0_1| < 1$, $|t^0| < 1$, 在 $\mathbb{C}^3$ 中点 $(b^0_0,\ b^0_1,\ t^0)$ 的某个小邻域 U_0 内，所有满足 $(b_0,\ b_1,\ t) \in U_0$ 的函数 $F_{b_0,\ b_1,\ t}$ 都在 $\mathbb{D}^*$ 上单叶，且存在拟共形延拓。映射 $t \mapsto S_{f_t}$ 关于**B**-范数是全纯的，因此集合 $G_{\rm af}$ 在**T**中是开集。

此外，线段 $[0, t^0]$ 在 $G_{\rm af}$ 中确定一条曲线，将点$F_{b^0_0,b^0_1,t^0}$与**T**的原点相连；因此 $G_{\rm af}$ 是路径连通的。

将 $\Sigma_{\rm af}$ 在Fib(**T**)中的像记为Fib($G_{\rm af}$)；它是Fib(**T**)的一个复四维子流形。泛函 $|J_s(S_{F^\mu}, t)|$ 在该集合上的限制在Fib($\Sigma_{\rm af}$)上是多重次调和的，并且它们类似于步骤 3的极大化蕴含一个(22)型的极大次调和函数$u_{\rm af}(t)$。

~我们现在的目标是求max$_{\Sigma_{\rm af}}|J_{1,2}(F)|$。由于相应的量

$$a_{2,J} := \max_{F_f \in \Sigma_{\rm af}} |a_2(f)|$$

为正，可以应用引理11和引理12。

我们选取一个稠密子序列 $\{\theta_1, \theta_2, \dots\} \subset [-\pi, \pi]$，并在类 S_{θ_j} 和 Σ_{θ_j} 上定义相应的泛~函，以如下方式替换原来的泛函 J_s。给定函数

$$f_a(z) = e^{i\theta_m}z + a_2z^2 + \dots$$

以及相应的

$$F_a(z) = 1/f_a(z) = e^{-i\theta_m}z + b_0 + b_1z^{-1} + \dots, \quad a = e^{i\theta_m},$$

将 $z' = e^{i\theta_m}z$ 视为新的自变量。于是

$$f_a(z') = z' + e^{-2i\theta_m}(z')^2 + \dots, \quad F_a(z') = z' + b_0e^{i\theta_m} + b_1e^{i\theta_m}(z')^{-1} + \dots$$

属于 S_Q 和 Σ_Q （关于变量 z'），并且我们设

$$\widetilde{J}_{1,\theta_m}(F_a) = J_{1,\theta_m}(f_a) = \frac{e^{2inm\theta}a_n^2 - e^{i(2n-1)m\theta}a_{2n-1}}{(n-1)^2}, \quad \widetilde{J}_{2,\theta_m}(F_a) = J_{2,\theta_m}(f_a) = \frac{e^{inm\theta}a_n}{n}.$$

这保留了弱旋转齐次性。

另请注意，每个 $\widetilde{J}_{s,\ \theta_m}(F_a)$ 满足引理 8，将 (19) 替换为不等式 y

$$|\widetilde{J}_s(F_a)| \ge \max_{b_0} |\widetilde{J}_s(F^\theta_{b_0,b_1;1})|,$$

其中

$$F^\theta_{b_0,b_1;t}(z) = e^{i\theta}z + b_0t + b_1t^2z^{-1} \quad \text{with} \quad \theta = \arg a. \tag{24}$$

由上述关系可得

$$\max_{\Sigma_{\theta_j}} |\widetilde{J}_{s,\theta_j}| = \max_{\Sigma} |\widetilde{J}_s| = \max_{S} |J_s|, \tag{25}$$

相应的函数集 $\Sigma_{\mathrm{af},\ \theta_j}$ 也是如此（24）。

现在考虑商空间递增乘积的序列

$$\mathcal{T}_m = \prod_{j=1}^{m} \widehat{\Sigma}_{\theta_j}/\sim = \prod_{j=1}^{m} \{(S_{F_{\theta_j}}, F_{\theta_j}^{\mu_j}(0))\} \ \simeq \mathbf{T}_1 \times \cdots \times \mathbf{T}_1, \tag{26}$$

其中等价关系 ∼仍表示$\mathbf{T}_1$-等价。这里独立选取 Beltrami 系数$\mu_j \in \mathrm{Belt}(\mathbb{D})_1$ 。对于右端（25）中出现的任意 $\mathbf{T}_1$, ，相应的 $F_{\theta_j}^{\mu_j}$ (0) 的取值遍历某个区域 $D_{\alpha_j} \subset \mathbb{C}$，而相应的 $\beta = (\beta_1, \ldots\ldots, \beta_s)$ 贝尔斯同构

$$\beta_j : \{(S_{W_{\theta_j}}, W_{\theta_j}^{\mu_j}(0))\} \to \mathcal{F}(\mathbf{T})$$

确定 是从空间 $\mathcal{T}_m$ 到 m 个空间的乘积 $\mathcal{F}(\mathbf{T}$).

令

$$\mathbf{F}_{\theta^\mu}(0) := (F_{\theta_1}^{\mu_1}(0), \ldots, F_{\theta_m}^{\mu_m}(0)), \quad \mathbf{S}_{\mathbf{F}_{\theta^\mu}} := (S_{F_{\theta_1}}, \ldots, S_{F_{\theta_m}}),$$

考虑全纯映射（向量函数）

$$\mathbf{h}(\mathbf{S}_{\mathbf{F}_\theta}) = (h_1(S_{F_{\theta_1}}), \ldots h_m(S_{F_{\theta_m}})) : \ \widehat{\Sigma}_{\mathrm{af},\theta} := \Sigma_{\mathrm{af},\theta_1} \times \cdots \times \Sigma_{\mathrm{af},\theta_m} \to \mathbb{C}^m, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

with

$$h_j(S_{F_{\theta_j}}) = \widetilde{Z}_{n,\theta_j}(F_a), \quad j = 1, \ldots, m,$$

赋予多圆盘范数

$$\|\mathbf{h}\| = \max_j |h_j|$$

在 $\mathbb{C}^m$上。因此根据（25），

$$\max_{\Sigma_{\mathrm{af}}} \|\mathbf{h}\| = \max_j \max_{\Sigma_{\mathrm{af}}} |h_j(S_{F_{\theta_j}})| = \max_S \ |J_{1,2}(f)|. \tag{27}$$

在此嵌入下，集合 Σ_{af} 的像是 m 个因子 $\mathrm{Fib}\mathcal{I}(G_{\mathrm{af}})$的自由积，其维数为 $4m$。还要注意，将$\mathbf{h}$ 限制在 Σ_{af} 上是一个多项式映射。

现在，我们将步骤 3中的构造同时应用于（26）中相应空间$\mathbf{T}_1$ 上的每个分量 $h(S_{F_{\theta_j}}, t)$，并得到类似于引理 9的结论，即函数

$$u_m(t) = \max\big(|h(S_{F_{\theta_1}}, t)|, \ldots, |h(S_{F_{\theta_m}}, t)|\big)$$

在包含原点 $t = 0$ 的某个区域 D_m 中是次调和的。该区域具有旋转对称性，因此必定是某个半径为 $a_m \le 4$ 的圆盘 $\mathbb{D}_{a_m}$。

这种对称性源于集合 Σ_{af} 的旋转对称性，该对称性被其在空间 $\mathbf{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_m$ 中的像所继承；此外还源于引理 9（如有需要，可将其应用于函数 $F \in \Sigma_Q$ 以及区域 $F(\mathbb{D})$ 中的预先指定集合 E，使其 $F(0)$ 发生变化）。

我们将此引理应用于函数 $F \in \Sigma_Q$，并取区域 $F(\mathbb{D})$ 中的预先指定集合 E，使其 $F(0)$ 发生变化。

每个函数 $u_m(t)$ 都是在其圆盘 $\mathbb{D}_{a_m}$ 上的圆对称函数，因此它们的上包络也是如此

$$u_J(t) = \limsup_{m\to\infty} \widetilde{u}_m(t)$$

（在某个圆盘 $\mathbb{D}_a$， $a>0$ 上）。这个包络满足

$$\max_{\mathbb{D}_a} u_J(t)=\max_S |J_{1,2}(f)|$$

并在边界点 $t=a$ 处达到最大值。

注意到 $\Sigma_{\rm af}$ 的闭包包含这些函数

$$F_\theta(z)=z-2e^{i\theta}+e^{2i\theta}z^{-1}$$

对柯比函数 κ_θ 取倒数，可得半径 a 必须等于 4，这意味着对于 $F^\mu\in\Sigma_{\rm af}$， $F^\mu(0)$ 的值域与圆盘 $\mathbb{D}_4$ 重合。这表明，该区域的边界点只对应于满足 $|a_2|=2$ 的函数 $f(z)$，因此只对应于 $\kappa_\theta(z)$；于是，对于所有满足 $F_f\in\Sigma_{\rm af}$ 的 $f\in S$，我们有如下估计

$$|J_{1,2}(f)|\le |J_{1,2}(\kappa_\theta)|=1. \tag{28}$$

此外，只有当 $f=\kappa_\theta$ 时，左侧才取等号。

步骤 5：整个类 κ_θ 上的极值性 S。还需证明关系式 (28) 对所有 $f\in S$ 也成立。

注意到 Koebe函数的同伦圆盘

$$\mathbb{D}(\kappa_\theta)=\{\kappa_{\theta,t}=t^{-1}\kappa_\theta(tz):\ |t|<1\}$$

在普遍 Teichm¨uller 空间中是测地的，并且泛函 J_1， J_2 在此圆盘上生成一个共形度量，该度量等于单位圆盘的双曲度量（这由第 4 步推出），由渐近估计 (13) 可知，该度量必然在原点处支撑最大无穷小度量$\lambda_{J^0_{1,\,2}}(t)$；该度量沿极值映射 f_0生成（通过将 (19) 分别应用于J_1， J_2），因为 $\lambda_{J^0_{1,\,2}}(0)\le\lambda_{\mathbb{D}}(0)=1$。因此 $f_0=\kappa_\theta$，这证明了 κ_θ 在整个类 S上的极值性。

此外， κ_θ 是 $J_{1,\,2}$ 在 S上的唯一极值映射，因为$\lambda_{J^0_{1,\,2}}(t)$ 支配由全纯映射 $h:\mathbb{D}\to S$ 在相应圆盘 $h(\mathbb{D})\subset S$上确定的所有共形度量，因此，由度量$\lambda_{J^0_{1,\,2}}$ 和 λ_h 生成的相应积分距离，对于任意 $f\in$S 以及任意一对 $(t,\ z)$，必须满足不等式

$$|J^0_{1,2}(f(tz))|\le |J^0_{1,2}(\kappa_\theta(tz))|=(n-1)^2|t|^{2n-2},\quad |t|\le 1,$$

其中，等号（即使对某一对 (t,z) 而言）仅在 $f(z)=\kappa_\theta(z)$ 时成立。至此，定理 1 的证明完成。

References

[1] L. Ahlfors，施瓦茨引理的一个推广，美国数学会汇刊**43**(1938), 359-364.[2]L. Bers，一个具有拟共形映射应用的非标准积分方程，数学学报 **116** (1966), 113-134.[3] L. Bers, *Teichmüller* 空间上的纤维空间，数学学报 **130**(1973),89-126.[4] J. Brown 和 A. Tsao，关于星形函数和典型实函数的 *Zalcman* 猜想，数学杂志 **191**(1986),467-474.[5] L. de Branges，比伯巴赫猜想的一个证明，数学学报**154** (1985),137-152.[6] C.J.Earle、I. Kra 和 S. L.Krushkal, 全纯运动与 *Teichmüller* 空间，美国数学会汇刊 **343** (1994),927-948.[7] I.Eframidis 和 D. Vukoti´c，*Livingston* 型不等式在广义 *Zalcman* 泛函中的应用，数学新闻 **291**(2018), 1502-1513.

[8] F.P. Gardiner 和 N. Lakic，《拟共形 Teichmüller 理论》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000。[9] G.M. Goluzin，《复变函数几何理论》，《数学专著译丛》第26卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1969。[10] W.K.Hayman，《多叶函数》，第2版，剑桥大学出版社，1994。[11] W.K. Hayman 和 E.F. Lingham，《函数论研究问题——五十周年纪念版》，数学问题丛书，施普林格，2019。[12] M. Heins，共形度量的一类，《名古屋数学杂志》21 (1962), 1-60。[13] S. L. Krushkal，《拟共形映射与黎曼曲面》，威利，纽约，1979。[14] S.L. Krushkal，共形映射的延拓与双曲度量，《西伯利亚数学杂志》30 (1989), 730-744。[15] S.L. Krushkal，单叶函数与全纯运动，《数学分析杂志》66 (1995), 253-275。[16] S.L. Krushkal，具有拟共形延拓的单叶函数的精确系数估计，《芬兰科学院学报 A辑 I 数学》20 (1995), 349-357。[17] S.L. Krushkal，具有拟共形延拓的单叶全纯函数（变分方法），载于：《复分析手册：几何函数论》第2卷（R. K¨uhnau 编），爱思唯尔科学出版社，阿姆斯特丹，2005，第165-241页。[18] S.L. Krushkal，初始系数的 Zalcman 猜想证明，《格鲁吉亚数学杂志》17 (2010), 663-681；勘误见19 (2012), 777。[19] S.L. Krushkal，Teichmüller 空间与单叶全纯函数的系数问题，《分析与数学物理》10 (2020), 第4期。https://doi.org/10.1007/s13324- 020-00395-y ¨S.L. Krushkal，关于不消 Hardy 函数的两个系数猜想，I，《数学科学杂志》268 (2) (2022), 199-221。DOI: 10.1007/s10958-022-06192-1 [20] S.L. Krushkal，全纯函数的覆盖定理与系数定理之间的联系，《数学科学杂志》294 (5) (2025), 725-738；《乌克兰数学通报》22 (3) (2025), 394-412。DOI 10.1007/s10958-025-08128-x[21] S.L. Krushkal，Koebe函数的极值性，《公理》14 (12) (2025), 873；https://doi.org/10.3390/axioms14120873[22]S.L. Krushkal 和 R. K¨uhnau，《拟共形映射——新方法与应用》（《数学教材》第54册），Teubner，莱比锡，1983，169页。[24] S.L. Krushkal 和 R. K¨uhnau，圆盘的一个拟共形动力学性质，《数学分析杂志》72 (1997), 93-103。[25] O. Lehto，《单叶函数与 Teichmüller 空间》，施普林格，纽约，1987。¨W. Ma，近凸函数的 Zalcman 猜想，《美国数学会会刊》104 (1988), 741-744。[26] W. Ma，星形函数和典型实函数的广义 Zalcman 猜想，《数学分析与应用杂志》234 (1999), 328–339。[27] M. Obradovi´c 和 N. Tuneski，具有实系数的单叶函数类的若干性质，arXiv: 2112.15449v1 [mathCV], 2021。[29] H.L. Royden，Teichmüller 空间的自同构与等距变换，载于《黎曼曲面理论进展》（《数学年刊研究》第66卷），普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1971，第369-383页。¨H.L. Royden，Ahlfors-Schwarz 引理：等号成立的情形，《数学分析杂志》46 (1986), 261-270。[30] K. Strebel，极值 Teichmüller 映射的存在性，《数学分析杂志》30 (1976), 464-480。[31] D.K. Tomas、N. Tuneski 和 A. Vasudevarao，《单叶函数：入门》，德格鲁伊特，柏林-波士顿，2018。

数学系 ，巴伊兰大学，以色列拉马特甘 *5290002*
及数学系 ，弗吉尼亚大学，美国弗吉尼亚州夏洛茨维尔 *22904-4137*