arXiv:2601.10602v1 [math.FA] 15 Jan 2026

双曲多项式的舒尔–霍恩型不等式

Teng Zhang

摘要。我们为对称双曲多项式建立了一种舒尔–霍恩型不等式。由此可立即解决 Nam Q. Le 关于双曲多项式哈达玛型不等式的猜想。我们的论证基于舒尔–霍恩定理、伯克霍夫定理以及关于双曲锥的 Gårding 凹性定理。除了特征值层面外，我们还在双曲锥上发展了一种对称化原理：若一个双曲多项式在某个有限群作用下保持不变，则其在相应雷诺算子（群平均）作用下的取值会增大。将此原理应用于 Blekherman 等人引入的线性主子式多项式的符号翻转对称性，可简洁地证明半正定稳定 lpm 多项式的双曲菲舍尔–哈达玛不等式。

1. 引言

令 $\mathbb{S}_n$ 表示所有 $n\times n$ 实对称矩阵的集合。对于 $A=(a_{ij})\in\mathbb{S}_n$，我们记作

$$\lambda(A)=(\lambda_1(A),\dots,\lambda_n(A))$$

A 的特征值列表，以及

$$\operatorname{diag}(A)=(a_{11},\dots,a_{nn})$$

其对角线元素组成的向量。我们还令 $\mathbf{1}=(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n$。

对于 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ 和 $1\le k\le n$，我们将

$$S_k(\lambda):=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}$$

记为第 k 个基本对称函数，并约定 $S_0(\lambda)=1$。当 $A\in\mathbb{S}_n$ 时，我们记 $S_k(A):=S_k(\lambda(A))$。

1.1. Gårding 锥与 k-正矩阵。

我们定义开、对称、凸的

$$\Gamma_k(n):=\{\lambda\in\mathbb{R}^n:\ S_j(\lambda)>0\text{ for all }1\le j\le k\}.$$

$\Gamma_k(n)$ 的凸性是 Gårding 双曲多项式理论的标准推论；参见 [15,例 5.2]。

定义 1.1 (k-正矩阵 [15, 定义 1.1])。矩阵 $A\in\mathbb{S}_n$ 称为 k-正，若 $\lambda(A)\in\Gamma_k(n)$。

经典的 Hadamard 行列式不等式 [12, 第 505 页，定理 7.8.1] 可表述如下。

定理 1.2 (Hadamard)。设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{S}_n$ 为 n-正矩阵。那么

$$S_n(A)\ \le\ S_n(\operatorname{diag}(A)).$$

此外，当且仅当 A 是对角的时，等号成立。

2020 数学主题分类。15A42（主类），26C10，13A50。关键词和短语。Schur–Horn 定理，双曲多项式，主序，Hadamard 不等式，线性主子式多项式。

Hadamard 不等式已在许多方向上得到推广和改进；例如参见[3, 4, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20]及其中的参考文献。

Le [15, 注记 1.2 和定理 1.3]为 k-正矩阵建立了哈达玛型不等式。

定理 1.3 (Le)**.** 设 $1 \le k \le n$，且 $A \in \mathbb{S}_n$ 为 k-正。则

$$S_k(\lambda(A)) \;\le\; S_k(\mathrm{diag}(A)).$$

此外，当且仅当 A为对角矩阵时，等号成立。

1.2. **横跨偏微分方程、组合学与优化的双曲性**。 双曲多项式诞生于偏微分方程的解析研究：在奠基性工作中， [6], Gårding 将双曲性确立为线性常系数偏微分方程柯西问题适定性背后的代数特征。从概念层面看，相关的双曲锥刻画了一种与实根性和凸性相容的优先“正性”概念；另可参见现代综述 [1, 9]。

在非线性分析与几何中，这些锥又作为全非线性方程（如 k-Hessian 算子）的自然椭圆性区域出现，其中 Gårding 锥 $\Gamma_k(n)$控制可容许海森矩阵及先验估计；参见文献 [14, 15]中的研究纲领。在组合学与概率论中，实稳定（等价地，齐次双曲）多项式刻画了强形式的负相关与交错，已成为谱图论和随机过程中的核心工具；例如参见 [3]。在优化中，双曲锥催生了双曲规划，为半定规划提供了极具拓展性的推广；有关几何和凸分析的观点，参见 [1, 9] 。

本文聚焦于主序与双曲锥上的凹性之间的相互作用：双曲多项式的 次数阶幂的凹性，结合置换不变性，在双曲锥上导出舒尔–霍恩 型原理。

1.3. **双曲多项式与双曲锥**。 我们简要回顾双曲性的概念；有关详细内容，请参见 Gårding [7] 以及 Harvey–Lawson [9] 的综述。

定义 1.4 (a-双曲多项式)。 设 P 是 $\mathbb{R}^n$上的次数为k 的齐次实系数多项式。给定方向 $a \in \mathbb{R}^n$，如果 P关于 a 是双曲的（或称为 a-双曲的），则称其具有该性质；也就是说， $P(a) > 0$，并且对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，一元多项式 $t \mapsto P(ta+x)$ 仅有实零点。

等价地，对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，都可以因式分解为

$$P(ta + x) \;=\; P(a)\prod_{i=1}^{k}\big(t + \lambda_i(P; a, x)\big) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

其中，实数 $\lambda_i(P;\ a,\ x)$ 称为 a-特征值 。

定义 1.5 （双曲锥）。 设 P 是次数为 k 的 a-双曲多项式。与之对应的双曲（Gårding）锥为

$$\Gamma(P; a) \;:=\; \big\{x \in \mathbb{R}^n :\ \lambda_i(P; a, x) > 0 \text{ for all } i = 1, \dots, k\big\}.$$

加丁基本定理表明， $\Gamma(P;\ a)$ 是一个非空开凸锥；此外，双曲方向的选择在同一锥内无关紧要：若 $b \in\Gamma(P;\ a)$，则 P 关于 b 也为双曲的，并且 $\Gamma(P;\ b) = \Gamma(P;\ a)$；参见 [7, 定理 2]和 [1, 定理 2.5 及事实 2.7]。

全文中我们固定方向 $a = \mathbf{1}$，并记

$$\Gamma(P) \;:=\; \Gamma(P; \mathbf{1})$$

对于相应的双曲锥。

1.4. 关于对称双曲多项式的 Le 猜想。 以下猜想由 Le 在双曲多项式的背景下提出；参见 [15, 猜想 5.5]。

猜想 1.6 (Le)。设 P 是$\mathbb{R}^n$ 上的一个 k 次齐次实对称多项式，且关于**1**是双曲的。设 $A \in \mathbb{S}_n$ ，并假设 $\lambda(A) \in \Gamma(P)$。那么$\mathrm{diag}(A) \in \Gamma(P)$ 并且

$$P(\mathrm{diag}(A)) \;\geq\; P(\lambda(A)).$$

这里的“对称”是指在坐标置换下保持不变；见下文定义 2.7。该猜想可视为 Hadamard 不等式（定理 1.2）的双曲类比。

取 $P = S_k$ 可得到一个基本例子。等价地，对于 $A \in \mathbb{S}_n$ ，可以通过以下关系隐式定义$P_k(A)$

$$\det(tI_n + A) \;=\; \sum_{k=0}^{n} t^{n-k} P_k(A) \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{1.1}$$

因此 $P_k(A) = S_k(\lambda(A))$。此外，

$$\Gamma(P_k) \;=\; \big\{A \in \mathbb{S}_n :\; \lambda(A) \in \Gamma_k(n)\big\}; \tag{1.2}$$

见 [15, 例 5.2] 和 [14, 式 (2.10)]。由于 $\Gamma(P_k)$ 是凸的，(1.2) 立即推出 k-正矩阵的集合是凸的。

对于这些 P_k，猜想 1.6 得出了 Le 关于 k-正定矩阵的 Hadamard 型不等式。我们的目标是结合 Gårding 凹性与经典主序理论，全面证明猜想 1.6，适用于任意 对称双曲P。

注 1.7。 对于一般（非正规）矩阵，对角与谱之间不存在舒尔–霍恩主序关系，因此，猜想 1.6 中的对称（或厄米）假设对于下文的论证至关重要。

1.5. 主要结果。 从主序理论的角度看，我们主要不等式的逻辑核心是经典结论：对称凹函数是舒尔凹的（Hardy–Littlewood–Pólya [10], Marshall–Olkin–Arnold [18]；另见 [2, 21]）。如果已知 $P^{1/k}$ 在某个凸集上是凹且置换不变的，那么 Jensen 不等式和比尔霍夫定理便可立即推出其舒尔凹性。

本文旨在指出，在双曲情形下，这些假设在双曲锥上自然成立，并将由此得到的单调性归纳为双曲锥上的舒尔–霍恩型原理。具体而言：

- 我们提出了 $\Gamma(P)$ 的主序闭包：若 $y \in \Gamma(P)$ 且 $x \prec y$，则自动有$x \in \Gamma(P)$。这使得舒尔凹性可应用于“锥值”问题（这也正是猜想 1.6 所需要的）。
- 我们证明，若 P 关于**1**对称且为双曲的，则 $P^{1/k}$ 在 $\Gamma(P)$ 上是凹的（Gårding），并且相对于 $\Gamma(P)$ 上的主序是 Schur 凹的。一旦将双曲舒尔凹性原理表述为这种锥论形式，猜想 1.6 便可直接由舒尔–霍恩定理推出。
- 最后，我们提出一个针对双曲锥上一般有限群作用的配套对称化原理（Reynolds 平均），并将其应用于线性主子式多项式的符号翻转对称性 [3]。这一视角解释了为何 Fischer–Hadamard 型夹逼不等式本质上是一种凹性与对称性现象。

结构安排。在第2节中，我们陈述主要的结构性结果：双曲版的舒尔凹性，并将其表述为定理 2.10。由此可直接得到推论定理 2.12，从而解决猜想 1.6。在第 3 节中，我们展示同一原理如何充当“结果生成器”：任意经典的特征值主序关系都可立即推广为任意对称双曲多项式所满足的不等式（推论3.2–3.7）。我们还提出双曲锥上的一般群平均单调性原理（定理3.10），并用它重新推导出半正定稳定线性主子式多项式的 Fischer–Hadamard 不等式（定理 3.14）。

2. 双曲锥上的舒尔–霍恩原理

本节将阐述双曲舒尔凹性原理，并由此推导出猜想 1.6。我们先回顾主序理论中的一些标准概念，参见 [18,第1–3] 章，以及 [2, 第 2] 章或 [21, 第 10]章。

2.1. **主序与双随机矩阵**。

定义2.1 （主序）. 给定 $x, y \in \mathbb{R}^n$，令 $x^{\downarrow}$ （分别为 $y^{\downarrow}$）表示将 x （分别将 y）的各项按非增序排列后得到的向量。若 x 被y主化，记作 $x \prec y$，则称

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \le \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}, \qquad k = 1, \dots, n-1,$$

并且等式对 $k = n$也成立。

定义2.2 （双随机矩阵）。 双随机矩阵 是一个方阵，其元素均非负，且每行和每列的元素之和都等于 1。

以下是一个经典刻画；参见例如 [2, 定理 II.1.10] 或 [21, 定理 10.8]。

引理2.3。 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$。那么 $x \prec y$ 当且仅当 $x = Dy$ 对某个双随机矩阵 D成立。

我们还回顾舒尔–霍恩定理和比尔霍夫定理；参见例如[2, 第 22 页，练习 II.1.12] 以及 [21, 第 159 页，定理 5.21]。

引理 2.4 （舒尔–霍恩）。 设 $A \in \mathbb{S}_n$。那么

$$\operatorname{diag}(A) \ \prec \ \lambda(A).$$

等价地，存在一个双随机矩阵 S，使得 $\operatorname{diag}(A) = S\,\lambda(A)$。

引理 2.5 (比尔霍夫**)**。 每个双随机矩阵都是置换矩阵的凸组合。

现在我们记录加丁不等式的一个便捷形式；参见 Güler [8, 定理 3.1 和引理 3.1]。

引理 2.6 (Gårding 凹性**)**。 设 P 是一个次数为 k 、关于**1**双曲的齐次多项式，并令 $\Gamma(P) = \Gamma(P; \mathbf{1})$ 为其（开）双曲锥。那么：

(i) $\Gamma(P)$ 是一个非空开凸锥。(ii) 映射 $x \mapsto P(x)^{1/k}$ 在 $\Gamma(P)$上是凹的。

2.2. **对称性与置换不变性**。 令 $\mathfrak{S}_n$ 表示 $[n]=\{1,\dots,n\}$ 上的对称群，即 $[n]$ 的所有置换所构成的集合。

定义 2.7 (对称多项式)。 多项式 $P\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 若满足 $P(\sigma x)=P(x)$ 对所有置换 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ 及所有 $x\in\mathbb{R}^n$均成立，则称其为对称的。

定理 2.8 (置换不变性)。 若 P 是关于1对称且双曲的，则 $\Gamma(P)$ 在坐标置换下保持不变：若 $x\in\Gamma(P)$ 且 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$，则$\sigma x\in\Gamma(P)$。

证明。 固定 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ 和 $x\in\mathbb{R}^n$。由于 $\sigma\mathbf{1}=\mathbf{1}$ 且 P是对称的，我们有

$$P(\sigma x+t\mathbf{1})=P(\sigma x+t\sigma\mathbf{1})=P(\sigma(x+t\mathbf{1}))=P(x+t\mathbf{1}).$$

因此，一元多项式 $t\mapsto P(x+t\mathbf{1})$ 和 $t\mapsto P(\sigma x+t\mathbf{1})$ 相同，所以它们的根集相同。等价地， x 和 σx的1-特征值多重集相同。因此$x\in\Gamma(P)\iff\sigma x\in\Gamma(P)$。□

2.3. **在 $\Gamma(P)$ 上的舒尔凹性**。 现在，我们介绍舒尔凹函数的定义，参见例如 [18,第 80 页，定义 A.1]。

定义 2.9 （舒尔凹函数）。 定义在 $\mathbb{R}^n$ 的子集上的实值函数 ϕ 称为舒尔凹的，如果

$$x\prec y\quad\Longrightarrow\quad\phi(x)\geq\phi(y).$$

定理 2.10 （双曲舒尔凹性）。 设 $P\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是对称的，并且关于 $\mathbf{1}$ 双曲，次数为 k。则：

（i）主序闭包：若 $y\in\Gamma(P)$ 且 $x\prec y$，则 $x\in\Gamma(P)$。（ii）舒尔凹性：映射 $f(x):=P(x)^{1/k}$ 在 $\Gamma(P)$ 上是舒尔凹的，即，若 $x,y\in\Gamma(P)$ 且 $x\prec y$，则特别地， $P(x)\geq P(y)$。

$$P(x)^{1/k}\ \geq\ P(y)^{1/k}.$$

证明。 假设 $x\prec y$。根据引理2.3，存在一个双随机矩阵 D 使得$x=Dy$。根据引理 2.5，我们可以写成

$$D=\sum_{m=1}^{N}\alpha_m\Pi_m$$

其中 $\alpha_m\geq 0$、 $\sum_{m=1}^{N}\alpha_m=1$以及置换矩阵 Π_m。因此

$$x=\sum_{m=1}^{N}\alpha_m\Pi_m y.$$

（*i*）主序闭包。如果 $y\in\Gamma(P)$，那么根据定理 2.8，每个 $\Pi_m y$也属于 $\Gamma(P)$。由引理 2.6(i)中 $\Gamma(P)$ 的凸性，我们得出 $x\in\Gamma(P)$。

（*ii*）舒尔凹性。 定义 $f(x):=P(x)^{1/k}$于 $\Gamma(P)$ 上。根据引理 2.6(ii)， f是凹函数，并且由 P 的对称性，对于所有 m，有 $f(\Pi_m y)=f(y)$。因此

$$f(x)=f\left(\sum_{m=1}^{N}\alpha_m\Pi_m y\right)\ \geq\ \sum_{m=1}^{N}\alpha_m f(\Pi_m y)=\sum_{m=1}^{N}\alpha_m f(y)=f(y).$$

最后请注意， $P>0$在 $\Gamma(P)$ 上（事实上，对于 $z\in\Gamma(P)$，有 $P(z)=P(\mathbf{1})\prod_{i=1}^{k}\lambda_i(P;\mathbf{1},z)$，且所有因子均为 >0），因此将两边提升到 k 次幂可得 $P(x)\geq P(y)$。□

注记 2.11（闭锥版本）。由于 $\Gamma(P)$ 是一个开锥，且 P 连续，上述结论可延伸至闭包。更准确地说，若 $y \in \Gamma(P)$ 且 $x \prec y$，则 $x \in \Gamma(P)$ 且 $P(x) \geq P(y)$。

事实上，固定 $\varepsilon > 0$。利用

$$P\big(t\mathbf{1} + (y + \varepsilon\mathbf{1})\big) = P\big((t+\varepsilon)\mathbf{1} + y\big),$$

1-特征值满足 $\lambda_i(P; \mathbf{1}, y + \varepsilon\mathbf{1}) = \lambda_i(P; \mathbf{1}, y) + \varepsilon$。因此，当$y \in \Gamma(P)$时，$y + \varepsilon\mathbf{1} \in \Gamma(P)$。

此外，主序具有平移不变性：若 $x \prec y$，则 $x + \varepsilon\mathbf{1} \prec y + \varepsilon\mathbf{1}$（因为重排不受影响，且每个部分和都增加 $k\varepsilon$）。因此，定理 2.10 适用于 $x + \varepsilon\mathbf{1}$ 和 $y + \varepsilon\mathbf{1}$；令 $\varepsilon \downarrow 0$ 即可得出结论。

2.4. **对角元与谱：猜想 1.6 的证明**。

定理 2.12。设 $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 关于**1**是对称的双曲的，次数为 k。设 $A \in \mathbb{S}_n$ 满足 $\lambda(A) \in \Gamma(P)$。那么：

(i) $\mathrm{diag}(A) \in \Gamma(P)$; (ii) $P(\mathrm{diag}(A)) \geq P(\lambda(A))$.

证明。由 Schur–Horn 定理（引理 2.4），有 $\mathrm{diag}(A) \prec \lambda(A)$。由于 $\lambda(A) \in \Gamma(P)$，由定理 2.10(i) 可得断言 (i)，进而由定理 2.10(ii) 得到 $P(\mathrm{diag}(A)) \geq P(\lambda(A))$。□

因此猜想 1.6 成立。取 (1.1) 中定义的 $P = P_k$，可得 Le 关于 k-正矩阵的 Hadamard 型不等式，从而重新得到定理 1.3。取 $P = S_n$，则可重新得到 Hadamard 行列式不等式（定理 1.2）。

注记 2.13（边界情形）。根据注记 2.11，只要假设 $\lambda(A) \in \Gamma(P)$，定理 2.12 仍然成立。这通常是矩阵应用中的自然表述，因为“正性”锥通常取为闭锥（例如，Hadamard/Fischer 不等式中的半正定锥）。

2.5. **正交共轭的对角的极小极大原理**。固定 $A \in \mathbb{S}_n$ 满足$\lambda(A) \in \Gamma(P)$ 并考虑对角的集合

$$\mathcal{D}(A) := \{\mathrm{diag}(UAU^\top) : U \in O(n)\}.$$

Schur–Horn 定理将 $\mathcal{D}(A)$ 确认为置换多胞体 $\mathrm{conv}\{\sigma\lambda(A) : \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$; 例如参见 [21, 定理 10.8]。

推论 2.14 (置换多胞体上的对角极值元)。设 P 是关于 $\mathbf{1}$ 对称双曲的，且 $A \in \mathbb{S}_n$ 满足 $\lambda(A) \in \Gamma(P)$。那么对每个 $U \in O(n)$,

$$P(\lambda(A)) \;\leq\; P(\mathrm{diag}(UAU^\top)) \;\leq\; P\left(\frac{\mathrm{tr}\,A}{n}\mathbf{1}\right).$$

此外，当 U 对角化 A 时，左侧不等式取等。

证明。该 左侧不等式是将定理 2.12 应用于 $UAU^\top$ 得到的，其谱等于 $\lambda(A$).

对于右侧不等式，注意在总和固定为 s 的向量中，常向量 $(s/n)\mathbf{1}$ 被每个其他此类向量主化。特别地,

$$\frac{\mathrm{tr}\,A}{n}\mathbf{1} \;\prec\; \mathrm{diag}(UAU^\top).$$

由定理 2.12(i) 可得 $\operatorname{diag}(UAU^\top) \in \Gamma(P)$，进而由定理 2.10(i)（主序闭包）推出 $\operatorname{tr}_n^A \mathbf{1} \in \Gamma(P)$。现在由定理 2.10(ii) 得到

$$P\left(\frac{\operatorname{tr} A}{n}\mathbf{1}\right) \;\geq\; P(\operatorname{diag}(UAU^\top)).$$

□

2.6. **严格凹性下的刚性**。 Schur 凹性不等式通常是严格的，但严格性取决于 $\Gamma(P)$ 的几何性质，以及 $P^{1/k}$ 是否严格凹。我们给出一个简单的刚性判据。

命题 2.15 （假设严格凹性时的严格性）。 设 P 是关于 $\mathbf{1}$ 的 k 次对称双曲多项式，并假设 $f := P^{1/k}$ 在 $\Gamma(P)$ 上严格凹。如果 $x, y \in \Gamma(P)$ 满足 $x \prec y$，且 x 不是 y 的置换，那么

$$P(x) \;>\; P(y).$$

特别地，如果 $A \in \mathbb{S}_n$ 满足 $\lambda(A) \in \Gamma(P)$，且 $\operatorname{diag}(A)$ 不是 $\lambda(A)$ 的置换，那么 $P(\operatorname{diag}(A)) > P(\lambda(A))$。

证明。 与定理 2.10 的证明一样，设 $x = \sum_{m=1}^N \alpha_m \Pi_m y$ 可写为 $\alpha_m > 0, \sum_m \alpha_m = 1$ 与置换 Π_m。若 x 不是 y 的置换，则至少有两个带正权重出现的点 $\Pi_m y$ 彼此不同，因此 x 是 $\Gamma(P)$ 中不同点的非平凡凸组合。由严格凹性可得

$$f(x) = f\left(\sum_{m=1}^N \alpha_m \Pi_m y\right) \;>\; \sum_{m=1}^N \alpha_m f(\Pi_m y) = f(y),$$

并取 k 次幂，得到 $P(x) > P(y)$。

对于矩阵表述，使用 $\operatorname{diag}(A) \prec \lambda(A)$（引理 2.4）。 □

注 2.16。 对于 $P = S_n$，正定锥上 $\det^{1/n}$ 的严格凹性蕴含熟知的严格 Hadamard 不等式，除非 A 是对角的。对于一般的双曲多项式，严格凹性是一项额外假设，并且与 P 的非退化性质有关；关于严格双曲性及相关凸性现象的讨论，见 [9] 。

3. 应用与进一步讨论

本节汇集了两类推论。首先，定理 2.10 起到“从主序到双曲性”的传递原则的作用：任何特征值主序关系都能立即导出适用于任意 对称双曲多项式的不等式。其次，我们阐述一种互补的对称化 机制，它作用于双曲锥，并且适用范围超出特征值情形；特别地，它为 [3] 中针对 PSD 稳定线性主子式多项式建立的双曲菲舍尔–哈达玛不等式给出了简洁证明。

3.1. **将特征值主序提升为双曲不等式**。 在本小节中，我们固定一个次数为k的对称双曲多项式 $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ （相对于$\mathbf{1}$）。每当遇到两个显式构造的向量之间的主序关系 $x \prec y$ 时，只要 $y \in \Gamma(P)$成立，定理 2.10便立即给出不等式 $P(x) \geq P(y)$。

命题 3.1 (主序传递原理)。 设 $x, y \in \mathbb{R}^m$ 满足 $x \prec y$。若 $y \in \Gamma(P)$，则 $x \in \Gamma(P)$ 且 $\underline{P(x)} \geq P(y)$。此外，将 $\Gamma(P)$ 替换为 $\Gamma(P)$时，结论同样成立。

*Pro*关于。 这恰好是定理 2.10 和注记 2.11 在维数 m. □

现在我们列举矩阵分析中的若干标准特征值主序关系，并说明命题 3.1 如何将它们转化为双曲不等式。（我们的目标并非面面俱到，而是展示这种“一行式”转换机制的广泛适用性。）

3.2. **Fan 型和 Schur 型不等式。**

推论 *3.2*（厄米部分）。设 A 是一个 $n\times n$ 复矩阵，其特征值为 $\lambda(A)=(\lambda_1(A),\dots,\lambda_n(A))$，并令 $\Re\lambda(A)=(\Re\lambda_1(A),\dots,\Re\lambda_n(A))$。令 $\mathcal{H}(A)=(A+A^*)/2$ 表示 A 的厄米部分。若 $\lambda(\mathcal{H}(A))\in\Gamma(P)$，则

$$\Re\lambda(A)\in\Gamma(P)\quad and\quad P(\Re\lambda(A))\ \geq\ P(\lambda(\mathcal{H}(A))).$$

证明。 Fan 定理 [12, 定理 10.28] 断言

$$\Re\lambda(A)\ \prec\ \lambda(\mathcal{H}(A)).$$

应用命题 3.1。 □

推论 3.3（正规矩阵对角线的实部）。设 $A=(a_{ij})$ 为一个 $n\times n$ 正规矩阵，并令 $d(A)=(a_{11},\dots,a_{nn})$。若 $\Re\lambda(A)\in\Gamma(P)$，则

$$\Re d(A)\in\Gamma(P)\quad and\quad P(\Re d(A))\ \geq\ P(\Re\lambda(A)).$$

证明。 [12, 第 10 节4] 中的练习 7 表明

$$\Re d(A)\ \prec\ \Re\lambda(A).$$

应用命题 3.1。 □

推论 3.4 (秩一扰动**)**。设 $A\in\mathbb{S}_n$，并令 x 为任意复数 n行向量。令 $B=A+x^*x$。若 $\lambda(B)\in\Gamma(P)$，则

$$P(\lambda(B))\ \geq\ P\big(\lambda_1(A)+\|x\|^2,\lambda_2(A),\dots,\lambda_n(A)\big).$$

证明。 [12, 第 10 节4] 中的练习 3 表明

$$\lambda(B)\ \prec\ \big(\lambda_1(A)+\|x\|^2,\lambda_2(A),\dots,\lambda_n(A)\big).$$

应用命题 3.1。 □

推论 3.5 (半正定矩阵之和**)**。设 A、B 为 $n\times n$ 个半正定矩阵。考虑 $2n$-向量

$$u=(\lambda(A+B),0,\dots,0),\qquad v=(\lambda(A),\lambda(B)).$$

设 $P:\ \mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ 关于 **1** 是对称双曲的。若 $v\in\Gamma(P)$，则 $u\in\Gamma(P)$ 和$P(u)\geq P(v)$。

证明。 [12, 第 10 节4] 中的练习 14 指出

$$(\lambda(A+B),0)\ \prec\ (\lambda(A),\lambda(B)).$$

应用命题 3.1。 □

推论 3.6（和与差的特征值）。设 $A,\ B\in\mathbb{S}_n$。

(i) *If* $\lambda(A+B)\in\Gamma(P)$, *then*

$$P(\lambda(A+B))\ \geq\ P\big(\lambda(A)+\lambda(B)\big),$$

其中，求和是按分量进行的。

(ii) 若 $\lambda(A-B)\in\Gamma(P)$，则

$$P\big(\lambda(A)-\lambda(B)\big)\ \geq\ P(\lambda(A-B)).$$

证明。Fan 不等式 [12,定理 10.21 和 10.22] 断言

$$\lambda(A+B) \prec \lambda(A)+\lambda(B), \qquad \lambda(A)-\lambda(B) \prec \lambda(A-B).$$

应用命题 3.1。 □

3.3. **压缩与分块运算**。

推论 3.7 (主块对角子矩阵**).** 设 A 是一个分块如下的 $n \times n$ 厄米矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

设 $B = A_{11} \oplus A_{22}$。如果 $\lambda(A) \in \Gamma(P)$，那么

$$(\lambda(A_{11}), \lambda(A_{22})) \in \Gamma(P) \quad and \quad P(\lambda(A_{11}), \lambda(A_{22})) \geq P(\lambda(A)).$$

证明。 [12, 第 10 节4] 中的练习 2 表明， $\lambda(B) = (\lambda(A_{11}) \ \lambda(A_{22}))$，且 $\lambda(B) \prec \lambda(A)$。应用命题 3.1。□

注记 3.8 （矩阵层面上的对称化观点）。 许多压缩操作（块对角投影、对角投影，以及到 $*$-子代数上的条件期望）都可以表示为酉共轭的凸组合。因此，它们都是下文第 3.4 小节所阐述的群平均原理的具体实例。

3.4. **双曲锥上的对称化原理**。 上述证明都是同一几何现象的具体体现：对称性凸化 能够提高凹不变泛函的值。现在我们给出这一原理的一种表述，稍后将把它应用于线性主子式多项式。

定义 3.9 （雷诺算子， [5]）。 设 V 为一个实向量空间， G为在线性意义下作用于 V上的有限群。雷诺算子 （或群平均）是线性映射

$$\mathcal{R}_G : V \to V, \qquad \mathcal{R}_G(x) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot x.$$

定理 3.10 （双曲对称化原理）。 设 V 为一个实向量空间，且$\mathcal{P} : V \to \mathbb{R}$ 是一个次数为 k 的齐次多项式，它关于某个$e \in V$是双曲的，其双曲锥为 Γ（$\mathcal{P}$； e）。假设有限群 G 在线性意义下作用于 V，使得

(i) $g \cdot e = e$ 对所有 $g \in G$; (ii) $\mathcal{P}(g \cdot x) = \mathcal{P}$
(x) 对所有 $g \in G$ 以及所有 $x \in V$。

那么，对于每个 $x \in \Gamma(\mathcal{P}; e)$,

(a) $g \cdot x \in \Gamma(\mathcal{P};\, e)$ 对所有 $g \in G$，且 $\mathcal{R}_G(x) \in \Gamma(\mathcal{P}; e)$; (b) $\mathcal{P}(\mathcal{R}_G(x)) \geq \mathcal{P}(x)$。等价地，凹函数 $\mathcal{P}^{1/k}$ 在 $\Gamma(\mathcal{P}; e)$上经由 G 对称化时是单调的。

证明。 固定 $g \in G$ 和 $x \in V$。由于 $g \cdot e = e$ 和 $\mathcal{P}$ 是 G-不变的，我们有

$$\mathcal{P}(g \cdot x + te) = \mathcal{P}(g \cdot x + t\, g \cdot e) = \mathcal{P}\big(g \cdot (x + te)\big) = \mathcal{P}(x + te).$$

因此，一元多项式 $t \mapsto \mathcal{P}(x + te)$ 和 $t \mapsto \mathcal{P}(g \cdot x + te)$ 具有相同的根。特别地， $x \in \Gamma(\mathcal{P}; e)$ 当且仅当 $g \cdot x \in \Gamma(\mathcal{P}; e)$。这证明了 $\Gamma(\mathcal{P};\ e)$ 的 G-不变性。

由于 $\Gamma(\mathcal{P}; e)$ 是凸且开集（根据 Gårding 理论；参见 [7, 1]），并且每个 $g \cdot x$ 都属于$\Gamma(\mathcal{P};\ e)$，平均值 $\mathcal{R}_G(x)$ 也属于 $\Gamma(\mathcal{P}; e)$。这证明了 (a)。

对于 (b)，令 $f := \mathcal{P}^{1/k}$ 在 $\Gamma(\mathcal{P}; e)$ 上。根据 Gårding 凹性， f 在 $\Gamma(\mathcal{P}; e)$ 上是凹函数；又由于 $\mathcal{P}$ 在G下不变，对所有 $g \in G$，我们有 $f(g \cdot x) = f(x)$。因此，由 Jensen 不等式可得

$$f(\mathcal{R}_G(x)) = f\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \cdot x\right) \;\geq\; \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g \cdot x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(x) = f(x).$$

将两边提升到 k 次方，得到 $\mathcal{P}(\mathcal{R}_G(x)) \geq \mathcal{P}(x)$。 □

注3.11。 定理3.10可视为定理 2.10在群论上的一种映射。在特征值情形中， G 所起的作用由全对称群承担，而“对称化”对应于置换的凸组合（双随机矩阵）。在 [3], 的矩阵子式情形中，相关的对称性并非坐标置换，而是符号翻转共轭，由此得到 Fischer–Hadamard 型压缩 映射。

3.5. 线性主子式多项式的夹逼不等式。 现在，我们将说明，上述对称化原理如何以简洁且富有概念性的形式，重新推导 Blekherman 等人 [3] 关于线性主子式多项式 （lpm 多项式）研究中的一条关键不等式。

线性主子式多项式与符号对称性。 设 X为一个由不定元构成的 $n \times n$ 对称矩阵。对于 $J \subseteq [n]$, 令 X_J 表示由 J索引的主子矩阵。一个***lpm* 多项式** 是有限个线性组合

$$\mathcal{P}(X) \;:=\; \sum_{J\subseteq[n]} c_J \det(X_J).$$

当 $\mathcal{P}$ 是半正定稳定的（等价地，关于单位矩阵是双曲的）时，其双曲性锥 $H(\mathcal{P})$ 可自然地替代半正定锥，并支持丰富的行列式不等式；参见 [3]。

令 $\mathcal{D}_n := \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\}$ 为对角符号矩阵群。它通过共轭作用于 $\mathbb{S}_n$, $A \mapsto DAD$。

引理 3.12 （lpm 多项式的符号翻转不变性）。 每个 ***lpm* 多项式** $\mathcal{P}$ 在对角符号翻转共轭下保持不变:

$$\mathcal{P}(DAD) = \mathcal{P}(A) \qquad \textit{for all } A \in \mathbb{S}_n \textit{ and all } D \in \mathcal{D}_n.$$

因此，若 $\mathcal{P}$ 关于 I_n 是双曲的，则 $H(\mathcal{P})$ 在 $A \mapsto DAD$ 下保持不变。

证明。 只需验证每个主子式的不变性。固定 $J \subseteq [n]$。记 D_J 为 D 在 J 所对应坐标上的限制，我们有

$$(DAD)_J = D_J\, A_J\, D_J.$$

因此

$$\det((DAD)_J) = \det(D_J A_J D_J) = \det(D_J)^2 \det(A_J) = \det(A_J),$$

因为 $\det(D_J) \in \{\pm 1\}$。由系数 c_J 的线性性可得 $\mathcal{P}(DAD) = \mathcal{P}(A)$。

对于锥不变性，注意到 $DI_nD = I_n$。因此，对每个 $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}(DAD + tI_n) = \mathcal{P}\big(D(A + tI_n)D\big) = \mathcal{P}(A + tI_n),$$

因此，一元根集相同，且在 $H(\mathcal{P})$ 中的隶属关系在 $A \mapsto DAD$ 下保持不变。 □

作为雷诺算子的分块压缩。设 $\Pi = \{S_1, \dots, S_m\}$ 是 $[n]$的一个划分。记$\pi_\Pi : \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n$ 为分块对角压缩 （正交投影）；当 i 和 j 属于 Π中的不同块时，将 $A_{ij} = 0$置为零。等价地，$\pi_\Pi(A)$ 是一个分块对角矩阵，其对角块为 A_{S_ℓ}。

定义子群

$$\mathcal{D}_\Pi := \Big\{ \mathrm{diag}\big(\varepsilon_1 \mathbf{1}_{S_1}, \dots, \varepsilon_m \mathbf{1}_{S_m}\big) : \varepsilon_\ell \in \{\pm 1\} \Big\} \subseteq \mathcal{D}_n,$$

其元素按块翻转符号。

引理 3.13 （压缩是群平均）。 对于每个 $A \in \mathbb{S}_n$,

$$\pi_\Pi(A) = \mathcal{R}_{\mathcal{D}_\Pi}(A) = \frac{1}{|\mathcal{D}_\Pi|} \sum_{D \in \mathcal{D}_\Pi} DAD.$$

证明。 令 $A = (a_{ij})$。对于固定的一对 $(i,\ j)$, DAD 的 $(i,\ j)$ 项等于 $d_i d_j a_{ij}$。如果 i 和 j 属于 Π 的同一块，那么对于每个 $D \in \mathcal{D}_\Pi$, $d_i = d_j$ ，因此 $d_i d_j = 1$ ，且平均保留了 a_{ij}。如果 i 和 j 属于不同的块，那么当 D 遍历 $\mathcal{D}_\Pi$ 时， $d_i d_j$ 取值 ± 1 的次数相同，因此平均值为 0。于是，平均矩阵的各项与 $\pi_\Pi(A)$ 相同。□

利用凹性与对称性得到双曲 *Fischer–Hadamard* 不等式。 现在，我们可以根据 [3, 定理 2.4], 推导出半正定稳定 lpm 多项式的双曲 Fischer–Hadamard 不等式。

定理 3.14 (lpm 多项式的双曲 Fischer–Hadamard 不等式)。 设 $\mathcal{P}$ 是一个次数为 k 的齐次半正定稳定 *lpm* 多项式，定义在 $\mathbb{S}_n$ 上（因此关于 I_n 是双曲的），且 Π 是 $[n]$ 的一个划分。那么对于每个 $A \in H(\mathcal{P})$,

$$\pi_\Pi(A) \in H(\mathcal{P}) \qquad and \qquad \mathcal{P}(\pi_\Pi(A)) \ \geq \ \mathcal{P}(A).$$

证明。 根据引理 3.12， $\mathcal{P}$ 及其双曲锥 $H(\mathcal{P})$ 对所有 $D \in \mathcal{D}_\Pi$ 在 $A \mapsto DAD$ 作用下均保持不变。特别地，当 $A \in H(\mathcal{P})$ 时， $DAD \in H(\mathcal{P})$。由于 $H(\mathcal{P})$ 是凸的，且 $\pi_\Pi(A)$ 是轨道的平均值（引理 3.13），因此得到 $\pi_\Pi(A) \in H(\mathcal{P})$。

现在将定理 3.10 应用于向量空间 $V = \mathbb{S}_n$、多项式 $\mathcal{P}$ （关于 I_n 是双曲的）以及通过共轭作用的群 $G = \mathcal{D}_\Pi$ 。由此可得

$$\mathcal{P}(\pi_\Pi(A)) = \mathcal{P}(\mathcal{R}_{\mathcal{D}_\Pi}(A)) \ \geq \ \mathcal{P}(A).$$

□

推论 3.15 （lpm 多项式的双曲 Hadamard 不等式）。 在定理 *3.14* 中，取 $\Pi = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$。则 $\pi_\Pi(A) = \mathrm{diag}(A)$ （对角压缩），且

$$\mathcal{P}(\mathrm{diag}(A)) \ \geq \ \mathcal{P}(A) \qquad for\ all\ A \in H(\mathcal{P}).$$

注 3.16。 上述论证提炼出一个最小机制： （*i*）对称群作用下的不变性， （*ii*）双曲锥的凸性，（*iii*）*Gårding* 凹性。在 [3], 稳定性框架下证明了 Fischer–Hadamard 型不等式，并辅以更强的行列式不等式（包括双曲 Koteljanskii 型不等式）；这些结果借助稳定性保持算子和负相关技术得以建立。我们的证明并非要取代那些更深层的工具，而是要阐明：从本质上说，Fischer–Hadamard 方向是一种凹性与对称性现象。

致谢

Teng Zhang 获得中国国家留学基金管理委员会、博士生青年科技人才托举工程（中国科学技术协会）以及西安交通大学中央高校基本科研业务费的资助（项目编号：xzy022024045）。

参考文献

[1] H. H. Bauschke、O. Güler、A. S. Lewis 和 H. S. Sendov，双曲多项式与凸分析，《加拿大数学杂志》53 (3) (2001), 470–488. [2] R. Bhatia，《矩阵分析》，《数学研究生教材》第 169 卷，施普林格出版社，纽约，1997. [3] G. Blekherman、M. Kummer、R. Sanyal、K. Shu 和 S. Sun，线性主子式多项式：双曲行列式不等式与谱包含，《国际数学研究论文集》2023, no. 24, 21346– 21380.[4] P. Braun 和 H. S. Sendov，关于 Hadamard-Fischer 不等式、容斥公式与二分图，《线性代数及其应用》668 (2023), 64–92. [5] H. Derksen 和 G. Kemper，《计算不变量理论》，第 2 版，《数学科学百科全书》第 130 卷，施普林格，海德堡，2015. [6] L. Gårding，具有常系数的线性双曲偏微分方程，《数学学报》85 (1951), 1–62. [7] L. Gårding，双曲多项式的一个不等式，《数学与力学杂志》8 (1959), no. 6, 957–965. [8] O. Güler，凸规划中的双曲多项式与内点法，《数学运筹研究》22 (1997), no. 2, 350–377. [9] F. R. Harvey 和 H. B. Lawson, Jr.，Gårding 双曲多项式理论，《纯粹与应用数学通讯》66 (2013), no. 7, 1102–1128. [10] G. H. Hardy、J. E. Littlewood 和 G. Pólya，《不等式》，第 2 版，剑桥大学出版社，剑桥，1952.[11] C. J. Hillar 和 A. Wibisono，对称对角占优正矩阵的 Hadamard 型下界，《线性代数及其应用》472 (2015), 135–141. [12] R. A. Horn 和 C. R. Johnson，《矩阵分析》，第 2 版，剑桥大学出版社，剑桥，2013. [13] K. L. Lange，Hadamard 行列式不等式，《美国数学月刊》121 (2014), no. 3, 258–259. [14] N. Q. Le，Hessian 特征值的谱刻画与近似方案，《伊比利亚美洲数学杂志》38 (2022), no. 5, 1473–1500. [15] N. Q. Le，k-正矩阵的 Hadamard 型不等式，《线性代数及其应用》635 (2022), 159–170. [16] M. Lin，分块 Hadamard 积的一个 Oppenheim 型不等式，《线性代数及其应用》452 (2014), 1–6.[17] M. Lin 和 G. J. Sinnamon，重新探讨 Hadamard 行列式不等式的强化形式，《线性代数及其应用》606 (2020), 192–200. [18] A. W. Marshall、I. Olkin 和 B. C. Arnold，《不等式：主序理论及其应用》，第 2 版，《施普林格统计学丛书》，施普林格，纽约，2011. [19] M. Różański、R. Wituła 和 E. Hetmaniok，Hadamard 不等式的更精细形式，《线性代数及其应用》532 (2017), 500–511. [20] A. Yamada，Oppenheim–Schur 不等式与再生核希尔伯特空间，《算子与矩阵》18 (2024), no. 3, 711–733. [21] F. Zhang，《矩阵理论：基本结果与技巧》，第 2 版，《大学教材丛书》，施普林格，纽约，2011.

西安交通大学数学与统计学院，中华人民共和国西安 710049电子邮箱: teng.zhang@stu.xjtu.edu.cn