arXiv:2601.10613v1 [math.RA] 15 Jan 2026

左对称代数簇的马尔采夫分类

A. Ryskeldin 和 B. Sartayev*

摘要。本文研究左对称代数簇中的三类子簇。我们证明，这些子簇与一些众所周知的簇自然相关，例如交替代数、结合对称代数和 Zinbiel代数。对于交替代数簇和结合对称代数簇中的某些子簇，我们显式构造了相应自由代数的基。随后，我们在这些代数上定义交换子运算和反交换子运算，并推导出这些运算在所有不超过 4 的次数中满足的一系列恒等式。

1. 引言

左对称代数（也称为前李代数）这一类代数起源于微分几何和变形理论 [8, 15, 22]。回顾一下，左对称代数是一个向量空间 A，其上带有一个双线性乘积 $(a,\ b) \mapsto ab$，使得其结合子

$$(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$$

关于前两个自变量是对称的，即

$$(a,b,c) = (b,a,c)$$

对所有 a、b和$c \in A$。

本文基于 Malcev 的分类研究三类左对称代数。如 [17]所示，三次不变关系空间分解为以下各项之和

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2,$$

其中 $\mathfrak{L}_1 := \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{D}_1$，且这些子空间由以下多项式关系定义：

$$\mathfrak{A}_1:\ (ab)c + (ba)c + (ac)b + (ca)b + (bc)a + (cb)a = 0, \tag{1}$$

$$\mathfrak{B}_1:\ (ab)c - (ba)c - (ac)b + (ca)b + (bc)a - (cb)a = 0, \tag{2}$$

$$\mathfrak{C}_1:\ \begin{cases} (ab)c + (ba)c - (bc)a - (cb)a = 0, \\ (ac)b + (ca)b - (cb)a - (bc)a = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\mathfrak{D}_1:\ \begin{cases} (ab)c + (ac)b - (cb)a - (ca)b = 0, \\ (ab)c + (ac)b - (bc)a - (ba)c = 0. \end{cases} \tag{4}$$

类似地，定义 $\mathfrak{L}_2 := \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{D}_2$，其关系与右范数括号形式下的关系相同。我们用 $\mathcal{LS}_{3_i}$ 表示满足恒等式 $\mathfrak{Z}_i$ 的左对称代数簇，其中 $\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$、$\mathfrak{C}$、$\mathfrak{D}$ 和 $i = 1,\ 2$。交替、结合代数簇的马尔采夫分类已有研究，参见 [4, 16, 20]。[16] 指出，在结合情形下，通过 Koszul对偶计算从马尔采夫分类得到的运算子恰好是交错、结合对称和 $(-1,\ 1)$ 运算子。关于这些运算子重要性的更多结果，参见 [6, 7, 12, 13, 14, 19]。

2020 数学学科分类。 17A30、17A50、16R10。关键词。 左对称代数、运算子、自由代数。

*通讯作者：Bauyrzhan Sartayev（baurjai@gmail.com）。

我们将研究范围限定在以下代数簇

$$\mathcal{LS}_{\mathcal{A}_1}, \mathcal{LS}_{\mathcal{B}_1} \text{ and } \mathcal{LS}_{\mathcal{A}_2}.$$

无需单独考虑 $\mathcal{LS}_{\mathcal{B}_2}$ ，因为它与 $\mathcal{LS}_{\mathcal{B}_1}$相同。此外，我们将看到，簇 $\mathcal{LS}_{\mathcal{A}_1}$、 $\mathcal{LS}_{\mathcal{B}_1}$ 和 $\mathcal{LS}_{\mathcal{A}_2}$ 两两不同。

对于所研究的每个簇 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{Z}_i}$ ，我们按照[9]的意义确定其 Koszul 对偶算子。随后，我们描述交换子和反交换子运算所满足的所有次数不超过 4 的多项式恒等式。此外，我们为得到的每个 Koszul 对偶算子构造一个显式的基。由于左对称算子的 Koszul 对偶是一个 perm 算子（带有左交换恒等式的结合算子），对于 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{Z}_i}$ 和 $\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{Z}_i}$ ，我们描述如下图:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{LS} & \longleftrightarrow & \mathcal{P}erm \\ \cup & & \cap \\ \mathcal{LS}_{\mathfrak{Z}_i} & \longleftrightarrow & \mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{Z}_i} \\ & & \cap \\ & & \mathcal{A} \end{array} \tag{5}$$

Artin 定理指出，由两个元素生成的每个交错代数都是结合的，即二元结合代数簇与交错代数簇 [23]相同。此外， [14] 证明，二元 perm 代数簇（记作 $\mathcal{P}erm_2$）与满足一个额外三次恒等式的交错代数簇相同，该恒等式为

$$a(bc) + a(cb) = b(ac) + c(ab).$$

在 $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{A}_2$的情形下，结果表明运算子 $\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{Z}_i}$ 是交替的，并满足一个额外的三次恒等式。此外，在 $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{A}_1$的情形下，这个额外恒等式仍然是左交换的。根据一般观察，我们得到

$$\mathcal{P}erm \subset \mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{A}_1} \subset \mathcal{P}erm_2.$$

虽然这一点并非显而易见，但直接计算表明

$$\mathcal{P}erm \subset \mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{A}_2} \subset \mathcal{P}erm_2.$$

此外，我们将看到

$$\mathcal{P}erm \subset \mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{B}_1} \not\subset \mathcal{P}erm_2.$$

为了计算 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{Z}_i}$的 Koszul 对偶算子，我们需要代数 $\mathcal{LS}\langle a,\ b,\ c\rangle$的三次多线性基。我们采用以下重写规则:

$$a(bc) = (ab)c - (ba)c + b(ac),$$
$$a(cb) = (ac)b - (ca)b + c(ab)$$

and

$$b(ca) = (bc)a - (cb)a + c(ba).$$

让我们按照 [18]计算 $\mathcal{LS}$ 的极化；本文将始终使用这一构造。

命题 1. $\mathcal{LS}\langle X\rangle$ 的极化为

$$[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0 \tag{6}$$

and

$$\{\{a,b\},c\} = -\{[a,b],c\} - 2\{[a,c],b\} + [\{a,b\},c] - [[a,c],b] + \{a,\{b,c\}\} - \{a,[b,c]\} + [a,\{b,c\}]. \tag{7}$$

证明. 首先，我们将 $\mathcal{LS}$ 的每个恒等式改写为以下交换子和反交换子的形式：

$$ab = 1/2([a,b] + \{a,b\}).$$

我们定义关于运算 $[\cdot,\cdot]$ 和 $\{\cdot,\cdot\}$ 的单项式上的一个序如下：

- $[[\cdot,\cdot],\cdot] > [\{\cdot,\cdot\},\cdot] > \{[\cdot,\cdot],\cdot\} > \{\{\cdot,\cdot\},\cdot\}$;
- the remaining monomials are ordered by lexicographical order;

设 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{LS}$ 中的一组关系，以 $[\cdot,\cdot]$ 和 $\{\cdot,\cdot\}$ 表示，即有

$$\begin{aligned}(ab)c - a(bc) + b(ac) - (ba)c = 1/4([[a,b],c] + [\{a,b\},c] + \{[a,b],c\} + \{\{a,b\},c\}\\ + [[b,c],a] - \{[b,c],a\} + [\{b,c\},a] - \{\{b,c\},a\}\\ + [[a,b],c] - [\{a,b\},c] + \{[a,b],c\} - \{\{a,b\},c\}\\ - [[a,c],b] + \{[a,c],b\} - [\{a,c\},b] + \{\{a,c\},b\}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ac)b - a(cb) - (ca)b + c(ab) = 1/4([[a,c],b] + [\{a,c\},b] + \{[a,c],b\} + \{\{a,c\},b\}\\ - [[b,c],a] + \{[b,c],a\} + [\{b,c\},a] - \{\{b,c\},a\}\\ + [[a,c],b] - [\{a,c\},b] + \{[a,c],b\} - \{\{a,c\},b\}\\ - [[a,b],c] + \{[a,b],c\} - [\{a,b\},c] + \{\{a,b\},c\})),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(bc)a - b(ca) - (cb)a + c(ba) = 1/4([[b,c],a] + [\{b,c\},a] + \{[b,c],a\} + \{\{b,c\},a\}\\ - [[a,c],b] + \{[a,c],b\} + [\{a,c\},b] - \{\{a,c\},b\}\\ + [[b,c],a] - [\{b,c\},a] + \{[b,c],a\} - \{\{b,c\},a\}\\ + [[a,b],c] - \{[a,b],c\} - [\{a,b\},c] + \{\{a,b\},c\}).\end{aligned}$$

对于集合 $\mathcal{R}$，我们构造矩阵 $[\mathcal{R}]$，按照给定的顺序将恒等式表示为行向量。

$$\begin{pmatrix} 2/4 & -1/4 & 1/4 & 0 & -1/4 & 1/4 & 2/4 & 1/4 & -1/4 & 0 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 2/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 2/4 & -1/4 & 1/4 & 0 & -1/4 & 1/4 & 2/4 & 1/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

应用 Gr¨obner 基理论后，矩阵 $[\mathcal{R}]$ 可以化为阶梯形，并得到结果。□

由于由二次和三次恒等式定义的代数簇 Var 与相应的二次运算子之间存在一一对应关系，本文将对这两个对象使用相同的术语。我们考虑定义在特征为 0 的域 K 上的所有代数。

2. $\mathfrak{A}_1$-左对称代数

本节中，我们考虑簇 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_1}$ 中的代数。下面计算 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_1}$ 的对偶运算子。$S \otimes U$ 的李可容许条件给出了运算子$\mathcal{LS}$ (!) $\mathfrak{A}_1$ 的定义恒等式，其中 S 是来自 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_1}$的代数。因此，我们有

$$\begin{aligned}[[a\otimes u, b\otimes v], c\otimes w] = (ab)c\otimes(uv)w - (ba)c\otimes(vu)w - c(ab)\otimes w(uv) + c(ba)\otimes w(vu) =\\ (-(ba)c-(ac)b-(ca)b-(bc)a-(cb)a)\otimes(uv)w - (ba)c\otimes(vu)w - c(ab)\otimes w(uv) + c(ba)\otimes w(vu),\end{aligned}$$

$$[[b\otimes v, c\otimes w], a\otimes u] = (bc)a\otimes(vw)u - (cb)a\otimes(wv)u - a(bc)\otimes u(vw) + a(cb)\otimes u(wv) = (bc)a\otimes(vw)u - (cb)a\otimes(wv)u - (-2(ba)c - (ac)b - (ca)b - (bc)a - (cb)a + b(ac))\otimes u(vw) + ((ac)b - (ca)b + c(ab))\otimes u(wv)$$

and

$$[[c\otimes w, a\otimes u], b\otimes v] = (ca)b\otimes(wu)v - (ac)b\otimes(uw)v - b(ca)\otimes v(wu) + b(ac)\otimes v(uw) = (ca)b\otimes(wu)v - (ac)b\otimes(uw)v - ((bc)a - (cb)a + c(ba))\otimes v(wu) + b(ac)\otimes v(uw).$$

这 些张量左侧相同元素之和得到以下结果 t:

命题 2 . 运算子 $\mathcal{LS}^{(!)}\mathfrak{A}_1$ 是满足左交换恒等式的交替运算子。

命题 3. $\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_1}\langle X\rangle$ 的极化由 *(6)*、*(7)* 以及

$$\{a,\{b,c\}\} = \{[a,b],c\} + \{[a,c],b\} - 3/2[\{a,b\},c] - 3/2[\{a,c\},b] + 3/2[[a,c],b] - 1/3[a,\{b,c\}] + 1/3[a,[b,c]].$$

证明. 证明与命题 1 类似。 □

此外，通过直接计算，我们得到以下结果:

定理 1. 代数 $\mathcal{LS}^{(-)}_{\mathfrak{A}_1}\langle X\rangle$ 的所有次数不超过 4 的恒等式，都可由反交换恒等式和雅可比恒等式推出。

定理 2. 代数 $\mathcal{LS}^{(+)}_{\mathfrak{A}_1}\langle X\rangle$ 的所有次数不超过 4 的恒等式，都可由交换恒等式推出。

令 $\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{A}_1}\langle X\rangle$为簇 $\mathcal{LS}^{(!)}\mathfrak{A}_1$ 的自由代数。

引理 1. 在代数 $\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{A}_1}\langle X\rangle$ 中，以下恒等式成立:

$$((ba)c)d = ((ac)b)d,$$

$$(((ab)c)d)e = (((ac)b)d)e$$

and

$$(((ab)c)d)e = (((ab)d)c)e.$$

Proof. 可以借助计算机代数软件程序 Albert [1] 证明。 □

令 $\mathfrak{A}^{(!)}_1(i)$ 为一个集合，对每个 i 定义如下:

$$\mathfrak{A}^{(!)}_1(1) = \{x_{k_1}\},\ \mathfrak{A}^{(!)}_1(2) = \{x_{k_1}x_{k_2}\},$$

$$\mathfrak{A}^{(!)}_1(3) = \{(x_{l_1}x_{l_2})x_{l_3}, (x_{l_1}x_{l_3})x_{l_2}, (x_{l_2}x_{l_1})x_{l_3}, x_{l_3}(x_{l_2}x_{l_1}),\},$$

$\mathfrak{A}^{(!)}_1(4) = \{((x_{s_1}x_{s_2})x_{s_3})x_{s_4},\ ((x_{s_1}x_{s_2})x_{s_4})x_{s_3},\ ((x_{s_1}x_{s_3})x_{s_4})x_{s_2},\ ((x_{s_2}x_{s_1})x_{s_3})x_{s_4},\ ((x_{s_2}x_{s_3})x_{s_4})x_{s_1}\}$和

$$\mathfrak{A}^{(!)}_1(n) = \{((\cdots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\cdots)x_{i_{n-1}})x_{i_n}\},$$

其中 $l_1\le l_2\le l_3$、$s_1\le s_2\le s_3\le s_4$、$i_1\le i_2\le\cdots\le i_{n-1}$ 和 $n\ge 5$。此外，我们定义

$$\overline{\mathfrak{A}^{(!)}}_1 = \bigcup_{i\ge 1}\mathfrak{A}^{(!)}_1(i)$$

定理 3. 集合 $\mathfrak{A}^{(!)}_1$ 是代数 $\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{A}_1}\langle X\rangle$的一组基。

证明。 首先，我们证明集合 $\mathfrak{A}^{((!))}{}_1$ 张成 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_1}\langle X\rangle$。对于次数不超过 4 的情况，可以通过软件程序（例如 Albert [1]）验证该结果。左交替恒等式和左交换恒等式给出

$$a(bc) = 1/2((ba)c + (ab)c),$$

也就是说， $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_1}\langle X\rangle$ 中的每个单项式都可以写成左范式单项式的线性组合。引理 1 中的恒等式为左范式单项式中除外部生成元之外的所有生成元规定了一个次序，也就是说，

$$((\cdots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\cdots)x_{i_{n-1}})x_{i_n} = ((\cdots((x_{\sigma(i_1)}x_{\sigma(i_2)})x_{\sigma(i_3)})\cdots)x_{\sigma(i_{n-1})})x_{i_n},$$

其中 $\sigma \in S_{n-1}$。

为证明集合 $\mathfrak{A}^{((!))}{}_1$ 的线性无关性，我们构造带有基 $\mathfrak{A}^{((!))}{}_1$ 的代数 $A_1\langle X\rangle$ 的乘法表，并证明该代数 $A_1\langle X\rangle$ 属于簇 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_1}\langle X\rangle$。对于不超过 4 次的情形，我们在 $A_1\langle X\rangle$ 中定义乘法，使其符合 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_1}\langle X\rangle$ 的定义恒等式。从 5 次开始，乘法定义如下：

$$\begin{aligned}((((\cdots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\cdots)x_{i_{n-1}})x_{i_n})(((\cdots((x_{j_1}x_{j_2})x_{j_3})\cdots)x_{j_{m-1}})x_{j_m}) = \\ ((\cdots((x_{k_1}x_{k_2})x_{k_3})\cdots)x_{k_{n+m-1}})x_{j_m}, \quad (8)\end{aligned}$$

其中 $\{k_1, k_2, \ldots, k_{n+m-1}\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}\}$ 和 $k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_{n+m-1}$。还需验证代数 $A_1\langle X\rangle$ 满足左交替、右交替和左交换恒等式。

Let

$$a = ((\cdots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\cdots)x_{i_{n-1}})x_{i_n}, \quad b = ((\cdots((y_{j_1}y_{j_2})y_{j_3})\cdots)y_{j_{m-1}})y_{j_m},$$
$$c = ((\cdots((z_{k_1}z_{k_2})z_{k_3})\cdots)z_{k_{t-1}})z_{k_t}$$

$A_1\langle X\rangle$ 的基 $\mathfrak{A}^{(!)}{}_1$ 中的任意左括号化单项式。我们验证以下恒等式在 $A_1\langle X\rangle$ 中成立：

$$(aa)b = a(ab), \qquad (ab)b = a(bb), \qquad a(bc) = a(bc).$$

根据 (8)，恒等式 $(aa)b = a(ab)$ 两边都可以写成一个左范式单项式，其最右侧的生成元为 y_{j_m}，其余生成元均已按序排列。因此，这两个表达式相同。出于同样的原因，我们还得到等式 $(ab)b = a(bb)$ 和 $a(bc) = a(bc)$。

□

对于运算子 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_1}$，我们有

$$\text{维数}(\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_1}(1)) = 1,\ \dim(\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_1}(2)) = 2,\ \dim(\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_1}(3)) = 4,\ \dim(\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_1}(4)) = 5,$$

and

$$\dim(\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{A}_1}(n)) = n,$$

where $n \ge 5$。此外，使用计算机代数系统 Albert [1], 我们得到

n	1	2	3	4	5	6
$\dim(\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_1})(n)$	1	2	8	45	314	2499

如上所述，代数 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_1}\langle X\rangle$ 满足恒等式

$$a(bc) = \frac{1}{2}\big((ba)c + (ab)c\big).$$

因此，簇 $\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{A}_1}$ 可以表示为

$$\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{A}_1} = \mathcal{A}lt \cap \delta\text{-}\mathcal{Z}inb,$$

也就是说， $\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{A}_1}$ 是交错代数簇与 δ-Zinbiel代数簇的交，其中$\delta = \frac{1}{2}$。关于Zinbiel代数的最新结果，请参见 [2, 10, 11]。

在图（5）中，当 $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{A}_1$时，簇 $\mathcal{A}$ 可以取为交错代数簇或$_1$ $_2$-Zinbiel代数簇。我们的计算表明，在次数不超过 4 时，代数类 $\mathcal{LS}^{(-)}_{\mathfrak{Z}_i}$ 和 $\mathcal{LS}^{(+)}_{\mathfrak{Z}_i}$ 分别与李代数类和交换代数类一致。

3. $\mathfrak{B}_1$-左对称代数

本节中，我们考虑来自 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{B}_1}$簇的代数。让我们计算 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{B}_1}$的对偶运算子。 $S \otimes U$ 的李可容许条件给出了运算子$\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{B}_1}$ 的定义恒等式，其中 S 是来自 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{B}_1}$的代数。因此，我们有

$$[[a\otimes u, b\otimes v], c\otimes w] = (ab)c\otimes (uv)w - (ba)c\otimes (vu)w - c(ab)\otimes w(uv) + c(ba)\otimes w(vu) = ((ba)c + (ac)b - (ca)b - (bc)a + (cb)a)\otimes (uv)w - (ba)c\otimes (vu)w - c(ab)\otimes w(uv) + c(ba)\otimes w(vu),$$

$$[[b\otimes v, c\otimes w], a\otimes u] = (bc)a\otimes (vw)u - (cb)a\otimes (wv)u - a(bc)\otimes u(vw) + a(cb)\otimes u(wv) = (bc)a\otimes (vw)u - (cb)a\otimes (wv)u - ((ac)b - (ca)b - (bc)a + (cb)a + b(ac))\otimes u(vw) + ((ac)b - (ca)b + c(ab))\otimes u(wv)$$

and

$$[[c\otimes w, a\otimes u], b\otimes v] = (ca)b\otimes (wu)v - (ac)b\otimes (uw)v - b(ca)\otimes v(wu) + b(ac)\otimes v(uw) = (ca)b\otimes (wu)v - (ac)b\otimes (uw)v - ((bc)a - (cb)a + c(ba))\otimes v(wu) + b(ac)\otimes v(uw).$$

将张量左侧相同元素相加，得到以下结果:

命题4。 运算子 $\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{B}_1}$ 是具有左交换恒等式的结合对称拟群。

此外，通过直接计算，我们得到以下结果:

定理4。 代数 $\mathcal{LS}^{(-)}_{\mathfrak{B}_1}\langle X\rangle$ 中次数不超过4 的所有恒等式均可由反交换性和雅可比恒等式推出。

定理5. 代数 $\mathcal{LS}^{(+)}_{\mathfrak{B}_1}\langle X\rangle$ 中次数不超过4 的所有恒等式都可由交换律推出。

命题5. $\mathcal{LS}_{\mathfrak{B}_1}\langle X\rangle$ 的极化由 *(6)*、*(7)* 和

$$\{[a,b],c\} + \{[b,c],a\} + \{[c,a],b\} = 0.$$

证明. 证明与命题 1 类似。 □

令 $\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{B}_1}\langle X\rangle$ 为簇 $\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{B}_1}$ 的自由代数。

引理 2. 在代数 $\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{B}_1}\langle X\rangle$ 中，以下恒等式成立:

$$((ab)c)d = ((ac)b)d, \tag{9}$$

$$d(c(ab)) = 2d((ab)c) + ((ac)d)b - 2((ab)d)c, \tag{10}$$

$$d((ac)b) = d((ab)c) + ((ac)d)b - ((ab)d)c \tag{11}$$

and

$$c((ad)b) = d((ac)b). \tag{12}$$

*Pr*糟糕。 可以使用计算机代数软件程序 Albert [1] 证明这一点。 □

令 $\mathfrak{B}_1^{(!)}(i)$ 为一个集合，对每个 i，其定义如下：

$$\mathfrak{B}_1^{(!)}(1)=\{x_{k_1}\},\ \mathfrak{B}_1^{(!)}(2)=\{x_{k_1}x_{k_2}\},$$

and

$$\mathfrak{B}_1^{(!)}(n)=\{((\cdots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\cdots)x_{i_{n-1}})x_{i_n},\ x_{j_n}((\cdots((x_{j_1}x_{j_2})x_{j_3})\cdots)x_{j_{n-1}})\},$$

其中 $i_1\le i_2\le\cdots\le i_{n-1}$、$j_1\le j_2\le\cdots\le j_{n-1}\le j_n$ 和 $n\ge 3$。此外，我们定义

$$\overline{\mathfrak{B}^{(!)}}_1=\bigcup_{i\ge 1}\mathfrak{B}_1^{(!)}(i)$$

定理 6. 集合 $\mathfrak{B}^{(!)}{}_1$ 是运算子 $\mathcal{LS}^{(!)}\mathfrak{B}_1$ 的一组基。

证明。与前面一样，我们首先证明集合 $\overline{\mathfrak{B}^{(!)}{}_1}$ 张成 $\mathcal{LS}^{(!)}\mathfrak{B}_1$。对于次数不超过 3 的情形，结论显然。左对称恒等式和左交换恒等式给出

$$(ab)c=(ba)c. \tag{13}$$

左对称恒等式和右对称恒等式允许我们将 $\mathcal{LS}^{(!)}\mathfrak{B}_1$ 中的每个单项式改写为单项式的线性组合

$$\mathcal{O}_{x_{i_1}}\cdots\mathcal{O}_{x_{i_{n-1}}}x_j,$$

其中 $\mathcal{O}$ 是左乘或右乘算子，即 $\mathcal{R}_xy=yx$ 和 $\mathcal{L}_xy=xy$。对于单项式$\mathcal{O}_{x_{i_1}}\cdots\mathcal{O}_{x_{i_{n-1}}}x_j$，我们考虑两种情况：

情形1：对于 $\mathcal{O}_{x_{i_1}}\ldots\mathcal{O}_{x_{i_{n-1}}}x_j$，我们考虑 $\mathcal{O}_{x_{i_1}}=\mathcal{R}_{x_{i_1}}$ 的情形。由 (13)，有

$$\mathcal{R}_{x_{i_1}}\mathcal{O}_{x_{i_2}}x_j=(\mathcal{O}_{x_{i_2}}x_j)x_{i_1}=(\mathcal{L}_{x_{i_2}}x_j)x_{i_1}=(\mathcal{R}_{x_{i_2}}x_j)x_{i_1},$$

一般情形下，

$$\mathcal{R}_{x_{i_1}}\mathcal{O}_{x_{i_2}}\cdots\mathcal{O}_{x_{i_{n-1}}}x_j=(\mathcal{R}_{x_{i_2}}\cdots\mathcal{R}_{x_{i_{n-1}}}x_j)x_{i_1}=((\cdots(x_jx_{i_{n-1}})\cdots)x_{i_2})x_{i_1}.$$

由 (9) 和 (13)，生成元 x_j、$x_{i_{n-1}}$、.....、x_{i_2} 可以进行排序，即

$$((\cdots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\cdots)x_{i_{n-1}})x_{i_n}=((\cdots((x_{\sigma(i_1)}x_{\sigma(i_2)})x_{\sigma(i_3)})\cdots)x_{\sigma(i_{n-1})})x_{i_n},$$

其中 $\sigma\in S_{n-1}$。所得单项式属于集合 $\overline{\mathfrak{B}^{(!)}{}_1}$。

情形2：对于 $\mathcal{O}_{x_{i_1}}\ldots\mathcal{O}_{x_{i_{n-1}}}x_j$，我们考虑 $\mathcal{O}_{x_{i_1}}=\mathcal{L}_{x_{i_1}}$ 的情形。根据前一种情形，我们只需考虑如下形式的单项式

$$\mathcal{L}_{x_{i_1}}\cdots\mathcal{L}_{x_{i_t}}\mathcal{R}_{x_{i_{t+1}}}\cdots\mathcal{R}_{x_{i_{n-1}}}x_j=x_{i_1}(\cdots(x_{i_t}((\cdots(x_jx_{i_{n-1}})\cdots)x_{i_{t+1}}))\cdots). \tag{14}$$

我们用 $\equiv$ 表示两个单项式模左范式单项式相等，即由 (10) 可得

$$d(c(ab))\equiv 2d((ab)c).$$

现在，我们旨在证明，对于任意 t，形式（14）的单项式都可以写成含有 $t=1$ 和左范式单项式的单项式之和。如果 $t=2$，则

$$\mathcal{L}_{x_{i_1}}\mathcal{L}_{x_{i_2}}\mathcal{R}_{x_{i_{t+1}}}\cdots\mathcal{R}_{x_{i_{n-1}}}x_j=x_{i_1}(x_{i_2}((\cdots(x_jx_{i_{n-1}})\cdots)x_{i_{t+1}}))\equiv^{(10)}$$
$$2x_{i_1}(((\cdots(x_jx_{i_{n-1}})\cdots)x_{i_{t+1}})x_{i_2}).$$

我们从 t 开始进行归纳。对于 $t=k$，有

$$x_{i_1}(\cdots(x_{i_{t-1}}(x_{i_t}((\cdots(x_jx_{i_{n-1}})\cdots)x_{i_{t+1}})))\cdots)=^{(10)}$$
$$2x_{i_1}(\cdots(x_{i_{t-1}}(((\cdots(x_jx_{i_{n-1}})\cdots)x_{i_{t+1}})x_{i_t}))\cdots)+x_{i_1}(\cdots((((\cdots(x_jx_{i_{n-1}})\cdots)x_{i_{t-1}})x_{i_t})x_{i_{t+1}})\cdots)$$
$$-2x_{i_1}(\cdots((((\cdots(x_jx_{i_{n-1}})\cdots)x_{i_{t-1}})x_{i_{t+1}})x_{i_t})\cdots),$$

对于所得结果，我们使用归纳假设。

根据情形1，我们可以将生成元排序为 x_{j_1}，x_{j_2}，...，$x_{j_{n-2}}$

$$x_{j_n}(((\cdots((x_{j_1}x_{j_2})x_{j_3})\cdots)x_{j_{n-2}})x_{j_{n-1}}).$$

恒等式 (11) 允许按模对 $x_{j_{n-2}}$ 和 $x_{j_{n-1}}$ 进行排序，即，

$$d((ac)b) \equiv d((ab)c),$$

而恒等式 (12) 将 x_{j_n} 与其他生成元排序。

为证明集合 $\mathfrak{B}^{(!)}{}_1$的线性无关性，我们证明由左对称、右对称、左交换恒等式以及恒等式 (9)、(10)、(11)、(12)、(13) 定义的重写规则的合成都是平凡的。计算过程很直接，也可以使用计算机软件 [3]完成这些繁琐的计算。□

注 1. 事实上，集合 $\mathfrak{B}^{(!)}{}_1$ 构成代数 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{B}_1}\langle X\rangle$的一组基。然而，显式构造一个具有完整乘法表、并满足簇 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{B}_1}$ 所有定义恒等式的代数 $B_1\langle X\rangle$，将会繁琐得不合理。

对于运算子 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{B}_1}$，我们有

$$\dim(\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{B}_1}(1)) = 1, \ \dim(\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{B}_1}(2)) = 2,,$$

and

$$\dim(\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{B}_1}(n)) = n+1,$$

其中 $n \geq 3$。此外，使用计算机代数系统 Albert [1],，我们得到

n	1	2	3	4	5	6
$\dim(\mathcal{LS}_{\mathfrak{B}_1})(n)$	1	2	8	45	314	2533

在图 (5) 中，对于 $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{B}_1$ 的情形，簇 $\mathcal{A}$ 可以取为结合对称代数簇或左交换代数簇，即簇 $\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{B}_1}$ 正是结合对称代数簇与左交换代数簇的交。我们的计算表明，至四次为止，代数类 $\mathcal{LS}^{(-)}_{\mathfrak{Z}_i}$ 和 $\mathcal{LS}^{(+)}_{\mathfrak{Z}_i}$ 分别与李代数类和交换代数类一致。

4. $\mathfrak{A}_2$-左对称代数

本节中，我们考虑簇 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2}$ 中的代数。下面计算 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2}$ 的对偶运算子。 $S \otimes U$ 的李可容许条件给出了运算子 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_2}$ 的定义恒等式，其中 S 是来自 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2}$ 的代数。因此，我们有

$$\begin{aligned}[[a\otimes u, b\otimes v], c\otimes w] = (ab)c\otimes(uv)w - (ba)c\otimes(vu)w - c(ab)\otimes w(uv) + c(ba)\otimes w(vu) = \\ ((ba)c - (ac)b + (ca)b - (bc)a + (cb)a - 2b(ac) - 2c(ab) - 2c(ba))\otimes(uv)w \\ - (ba)c\otimes(vu)w - c(ab)\otimes w(uv) + c(ba)\otimes w(vu),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[[b\otimes v, c\otimes w], a\otimes u] = (bc)a\otimes(vw)u - (cb)a\otimes(wv)u - a(bc)\otimes u(vw) + a(cb)\otimes u(wv) = \\ (bc)a\otimes(vw)u - (cb)a\otimes(wv)u - (-(ac)b + (ca)b - (bc)a + (cb)a - b(ac) - 2c(ab) - 2c(ba))\otimes u(vw) \\ + ((ac)b - (ca)b + c(ab))\otimes u(wv)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}[[c\otimes w, a\otimes u], b\otimes v] = (ca)b\otimes(wu)v - (ac)b\otimes(uw)v - b(ca)\otimes v(wu) + b(ac)\otimes v(uw) = \\ (ca)b\otimes(wu)v - (ac)b\otimes(uw)v - ((bc)a - (cb)a + c(ba))\otimes v(wu) + b(ac)\otimes v(uw).\end{aligned}$$

将张量左侧相同元素相加，可得到以下结果：

P命题6。 运算子 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_2}$ 是带有恒等式的交替运算子

$$(ab)c = (ba)c$$

命题7。 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2}\langle X\rangle$ 的极化由式（6）、（7）和

$$\{a,\{b,c\}\}=\{[a,b],c\}+\{[a,c],b\}+[\{b,c\},a]+2/3[[a,c],b]+1/3[a,[b,c]].$$

证明。 证明与命题 1 类似。 □

此外，通过直接计算，我们得到以下结果：

定理7。 代数 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2}^{(-)}\langle X\rangle$ 的所有次数不超过 4 的恒等式都可由反交换律和雅可比恒等式推出。

定理8。 代数 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2}^{(+)}\langle X\rangle$ 的所有次数不超过 4 的恒等式都可由交换律和以下恒等式推出：

$$\begin{aligned}&\{a,\{b,\{c,d\}\}\}+\{a,\{c,\{b,d\}\}\}+\{a,\{d,\{b,c\}\}\}+\{b,\{a,\{c,d\}\}\}\\&\quad+\{c,\{a,\{b,d\}\}\}+\{d,\{a,\{b,c\}\}\}+\{b,\{c,\{a,d\}\}\}+\{b,\{d,\{a,c\}\}\}\\&\quad+\{c,\{b,\{a,d\}\}\}+\{d,\{b,\{a,c\}\}\}+\{c,\{d,\{a,b\}\}\}+\{d,\{c,\{a,b\}\}\}\\&\qquad-\{\{a,d\},\{b,c\}\}-\{\{a,c\},\{b,d\}\}-\{\{a,b\},\{c,d\}\}=0.\end{aligned}$$

设 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_2}\langle X\rangle$ 是簇 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_2}$ 的自由代数。

引理 3. 在代数 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_2}\langle X\rangle$ 中，以下恒等式成立：

$$((ab)c)d=((ac)b)d, \tag{15}$$

$$d((ab)c)=((ab)d)c, \tag{16}$$

and

$$d(c(ab))=((ac)d)b, \tag{17}$$

*Pr*证明。 可以利用计算机代数软件程序 Albert [1]证明这一点。 □

设 $\mathfrak{A}_2^{(!)}(i)$ 是一个集合，对每个 i，其定义如下：

$$\mathfrak{A}_2^{(!)}(1)=\{x_{k_1}\},\ \mathfrak{A}_2^{(!)}(2)=\{x_{k_1}x_{k_2}\},$$

$$\mathfrak{A}_2^{(!)}(3)=\{(x_{l_1}x_{l_2})x_{l_3},(x_{l_1}x_{l_3})x_{l_2},x_{l_3}(x_{l_1}x_{l_2}),x_{l_3}(x_{l_2}x_{l_1})\}$$

and

$$\mathfrak{A}_2^{(!)}(n)=\{((\cdots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\cdots)x_{i_{n-1}})x_{i_n},$$

其中 $l_1\le l_2\le l_3$、$i_1\le i_2\le\cdots\le i_{n-1}$ 和 $n\ge 4$。此外，我们定义

$$\overline{\mathfrak{A}^{(!)}}_2=\bigcup_{i\ge 1}\mathfrak{A}_2^{(!)}(i)$$

定理 9. 集合 $\mathfrak{A}^{(!)}{}_2$ 是代数 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_2}\langle X\rangle$ 的一组基。

证明。 首先，我们证明集合 $\mathfrak{A}^{(!)}{}_2$ 张成 $\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_2}\langle X\rangle$。对于次数不超过 3 的情形，可以通过软件程序（如 Albert [1]）验证。从次数 4 开始，利用归纳假设和引理 3 中的恒等式可得，$\mathcal{LS}^{(!)}{}_{\mathfrak{A}_2}\langle X\rangle$ 中的任意单项式都可以写成左括号化单项式之和，即

$$\begin{aligned}&(((\cdots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\cdots)x_{i_{n-1}})x_{i_n})(((\cdots((x_{j_1}x_{j_2})x_{j_3})\cdots)x_{j_{m-1}})x_{j_m})=^{(16)}\\&\qquad(((\cdots((x_{j_1}x_{j_2})x_{j_3})\cdots)x_{j_{m-1}})(((\cdots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\cdots)x_{i_{n-1}})x_{i_n}))x_{j_m},\end{aligned}$$

并继续使用归纳假设。

此外，引理 3 中的恒等式以及 $(ab)c=(ba)c$ 为左嵌套单项式中的所有生成元（外部生成元除外）确定了一种排列，即，

$$((\cdots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\cdots)x_{i_{n-1}})x_{i_n}=((\cdots((x_{\sigma(i_1)}x_{\sigma(i_2)})x_{\sigma(i_3)})\cdots)x_{\sigma(i_{n-1})})x_{i_n},$$

其中 $\sigma \in S_{n-1}$。

为证明集合 $\mathfrak{A}^{(!)}{}_2$ 的线性无关性，我们构造代数 $A_2\langle X\rangle$ 的乘法表，其基为 $\mathfrak{A}^{(!)}{}_2$，并证明这样的代数 $A_2\langle X\rangle$ 属于簇 $\mathcal{LS}^{(!)}\mathfrak{A}_2$。对于三次以内的情形，我们在 $A_2\langle X\rangle$ 中定义乘法，使其符合 $\mathcal{LS}^{(!)}\mathfrak{A}_2\langle X\rangle$ 的定义恒等式。从四次开始，乘法定义如下：

$$(((\cdots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\cdots)x_{i_{n-1}})x_{i_n})(((\cdots((x_{j_1}x_{j_2})x_{j_3})\cdots)x_{j_{m-1}})x_{j_m}) = \\ ((\cdots((x_{k_1}x_{k_2})x_{k_3})\cdots)x_{k_{n+m-1}})x_{k_{jm}},$$

其中 $\{k_1, k_2, \ldots, k_{n+m-1}\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}\}$ 和 $k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_{n+m-1}$。接下来需要验证，代数 $A_2\langle X\rangle$ 满足簇 $\mathcal{LS}^{(!)}\mathfrak{A}_2$ 的定义恒等式。令

$$a = ((\cdots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\cdots)x_{i_{n-1}})x_{i_n}, \quad b = ((\cdots((y_{j_1}y_{j_2})y_{j_3})\cdots)y_{j_{m-1}})y_{j_m},$$

$$c = ((\cdots((z_{k_1}z_{k_2})z_{k_3})\cdots)z_{k_{t-1}})z_{k_t}$$

是 $A_2\langle X\rangle$ 的基 $\mathfrak{A}^{(!)}{}_2$ 中任意的左括号化单项式。我们验证以下恒等式在 $A_2\langle X\rangle$ 中成立：

$$(aa)b = a(ab), \qquad (ab)b = a(bb), \qquad (ab)c = (ba)c.$$

根据 (8)，恒等式 $(aa)b = a(ab)$ 两边都可写成一个最右侧生成元为 y_{j_m}、其余生成元均按序排列的左括号化单项式。因此，这两个表达式相同。出于同样的理由，我们还得到等式 $(ab)b = a(bb)$ 和 $(ab)c = (ba)c$。□

对于运算子 $\mathcal{LS}^{(!)}\mathfrak{A}_2$，我们有

$$\dim(\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2}{}^{(!)}(1)) = 1, \ \dim(\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2}{}^{(!)}(2)) = 2, \ \dim(\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2}{}^{(!)}(3)) = 4,$$

and

$$\dim(\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2}{}^{(!)}(n)) = n,$$

where $n \ge 4$。此外，使用计算机代数系统 Albert [1], ，我们得到

n	1	2	3	4	5	6
$\dim(\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2})(n)$	1	2	8	44	285	1959

在图 (5) 中，当 $\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{A}_2$ 时，簇 $\mathcal{A}$ 可以取为交错代数簇，或左中心为交换子的代数簇；也就是说，簇$\mathcal{LS}^{(!)}\mathfrak{A}_2$ 恰为交错代数簇与左中心为交换子的代数簇的交。带有左中心的类似代数曾在[5, 21]中研究过。我们的计算表明，在次数不超过 4 时，代数类 $\mathcal{LS}^{(-)}_{\mathfrak{Z}_i}$ 和 $\mathcal{LS}^{(+)}_{\mathfrak{Z}_i}$ 与李代数类和带有如下形式附加恒等式的交换代数类相同

$$\sum_{i_3<i_4}\{x_{i_1}, \{x_{i_2}, \{x_{i_3}, x_{i_4}\}\}\} - \sum_{i_1<i_2, i_3<i_4, i_2<i_4}\{\{x_{i_1}, x_{i_2}\}, \{x_{i_3}, x_{i_4}\}\} = 0, \tag{18}$$

分别。

从下表可以看出，代数 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2}\langle X\rangle$与另外两个代数都不同构。根据次数为 6 的 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_1}\langle X\rangle$ 和 $\mathcal{LS}_{\mathfrak{B}_1}\langle X\rangle$ 的维数可知，这些代数不同构。

让我们在下表中总结一些已获得的结果：

类型对偶 $\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{Z}_i}$ 运算子	维数 运算子至 次数 5	交换子 （最高次数为 4）	反交换子 （最高次数为 4）
$\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_1}$ 交替和 $\frac{1}{2}$-Zinbiel	维数($\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_1}$): 1, 2, 8, 45, 314 维数($\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{A}_1}$): 1, 2, 4, 5, 5	李代数	交换代数
$\mathcal{LS}_{\mathfrak{B}_1}$ 结合对称 and 左交换	dim($\mathcal{LS}_{\mathfrak{B}_1}$): 1, 2, 8, 45, 314 dim($\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{B}_1}$): 1, 2, 4, 5, 6	李代数	交换代数
$\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2}$ 交替与左中心 is 交换子	dim($\mathcal{LS}_{\mathfrak{A}_2}$): 1, 2, 8, 44, 285 dim($\mathcal{LS}^{(!)}_{\mathfrak{A}_2}$): 1, 2, 4, 4, 5	李代数	交换 al- 代数 with an 额外的 四次恒等式，即（18）

参考文献

[1] Albert 版本 4.0M6；https://web.osu.cz/∼Zusmanovich/soft/albert/[2] S. Bouarroudj、F. Mashurov，《关于 Zinbiel 与 Tortkara 超代数》，巴西数学学会通报，2025年，56(3)，49。[3] V. Dotsenko、W. Heijltjes，《运算子的 Gröbner 基》，http://irma.math.unistra.fr/dotsenko/operads.html，2019年。[4] Y. Duisenbay、B. Sartayev、A. Tekebay，《3-幂零交错、前 Lie 与结合对称运算子》，2024年，《哈萨克数学杂志》，24(4)，3751。https://doi.org/10.70474/41eaqa09[5] A. S. Dzhumadildaev，《自由 Leibniz 代数的 Jordan 元素与左中心》，《数学科学电子研究简报》，18，2011年，31-49。[6] A. S. Dzhumadil'daev、B. K. Zhakhayev、S. A. Abdykassymova，《结合对称运算子》，《数学通讯》，2022年，30(1)，175-190。[7] A. Dzhumadi´ldaev、P. Zusmanovich，《交替运算子不是 Koszul 的》，《实验数学》，2011年，20(2)，138-144。[8] M. Gerstenhaber，《结合环的上同调结构》，《数学年刊》，1963年，78，267-288。[9] V. Ginzburg、M. Kapranov，《运算子的 Koszul 对偶》，《杜克数学杂志》，76，1994年，1，203–272。[10] N. Ismailov、F. Mashurov、N. Smadyarov，《单元与二元 Zinbiel 代数的定义恒等式》，《代数及其应用杂志》，2023年，22(8)，2350165。[11] P. Kolesnikov、F. Mashurov、B. Sartayev，《关于前 Novikov 代数与导出 Zinbiel 簇》，《对称性、可积性与几何：方法与应用》(SIGMA)，2024年，20，17。[12] I. Kaygorodov，《非结合代数结构：分类与结构》，《数学通讯》，2024年，32(3)，1-62。[13] I. Kaygorodov、M. Khrypchenko、P. P´aez-Guill´an，《非结合代数的几何分类：综述》，《数学通讯》，2024年，32(2 特刊)，185-284。[14] A. Kunanbayev、B. Sartayev，《二元 perm 代数与交错代数》，《代数通讯》，54，2026年，299-307。[15] J.-L. Koszul，《有界齐性域与仿射变换群轨道》，《法国数学学会通报》，1961年，89，515-533。[16]A. Kunanbayev、B. Sartayev，《结合代数簇的4型子簇》，2025年，https://arxiv.org/abs/2506.02471。[17] A. I. Mal'cev，《由恒等式定义的代数》（俄文），《数学文集新辑》，26(68)，1950年，19–33。[18] M. Markl、E. Remm，《包含 Poisson 代数及其他李可容许代数的单运算代数》，《代数杂志》，299(1)，2006年，171–189。[19] S. Pchelintsev，《定义某一右交替代数簇的恒等式》，《数学札记》，20(2)，1976年，651–659。[20]A. Ydyrys、B. Sartayev，《结合代数的 Mal'cev 型子簇中的自由代数》，2025年，https://arxiv.org/abs/2510.04181。[21] B. Sartayev、A. Ydyrys，《运算子的自由积与若干运算子的 Gröbner 基》，《2023年第17届电子学、计算机与计算国际会议论文集》，ICECCO 2023，2023年。[22] E. B. Vinberg，《齐性锥》，《苏联数学文献》，1960年，1，787-790。

[23] K. A. Zhevlakov、A. M. Slin'ko、I. P. Shestakov、A. I.Shirshov，《近似结合环》，Harry F. Smith 由俄文译出。纯粹与应用数学，第104卷。学术出版社 [哈考特·布雷斯·约万诺维奇出版社], 纽约—伦敦，1982年。xi+371 页。

哈萨克斯坦卡斯克连SDU大学电子邮件地址：
ryskeldin@gmail.com

哈萨克斯坦阿拉木图纳尔霍兹大学和哈萨克斯坦卡斯克连SDU大学电子邮件地址：
baurjai@gmail.com