arXiv:2601.10614v1 [math.LO] 15 Jan 2026

可测基数上的 Rudin-Keisler 序的有向性

YAIR HAYUT 和 ALEJANDRO POVED A

ABSTRACT. 这篇手稿研究可测基数上的超滤子的 Rudin-Keisler 序。文中证明的主定理如下：给定正则基数 $\lambda \leq \kappa$，以下理论关于 ZFC 是等一致的：

(1) κ 是一个可测基数，且具有 $o(\kappa) = \lambda^+$（分别具有 $o(\kappa) = \kappa$）。(2) 限制在 κ 上的 κ-完备（非主）超滤子集合上的 Rudin-Keisler 序是 λ^+-有向的（分别是 κ^+-有向的）。

本文报告的定理是在将 RK 序的有向性与作者在 λ中引入的-Gluing 性质联系起来之后证明的[HP24]。我们的结果给出了一个目前看来首个处于可测基数层次的紧致性型性质实例，其一致性强度远低于强基数存在这一假设。作为分析的一部分，我们还通过证明在 [Git86] 的模型中 $\aleph_0$-Gluing 性质失败，从而回答了 Gitik 的一个问题；因此，Rudin-Keisler 序甚至不是 $\aleph_1$-有向的。

1. INTRODUCTION

本文关注（不可数）正则基数上 κ-完备非主超滤子的 Rudin-Keisler 序。若集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ 满足： $\mathcal{F}$ 对有限交和超集封闭， $\kappa \in \mathcal{F}$且 $\varnothing \notin \mathcal{F}$，则称其为滤子。若滤子 $\mathcal{U}$在包含关系下极大，则称其为超滤子。若不存在 $\alpha < \kappa$ 使得 $\mathcal{U} = \{A \subseteq \kappa \mid \alpha \in A\}$，则称超滤子 $\mathcal{U}$ 为非主（或自由）超滤子。超滤子由 Riesz [Rie08]和 Ulam [Ula29] 分别独立引入，其存在性（事实上，非主超滤子的存在性）由选择公理保证。超滤子在当代数学的发展中发挥了关键作用。它们出现过的领域不胜枚举，以下仅列举一些具有代表性的领域：集合论 [MS16, Gol22a], 、模型论[MS15, Gol22b], 、拓扑学 [CN12, KV14], 和拉姆齐理论 [Tod07]。本引言中讨论的所有超滤子均假定为非主超滤子。

有趣的是，超滤子还具有其他组合性质，例如完备性。给定一个正则基数 $\lambda \leq \kappa$，超滤子 $\mathcal{U}$ 是 λ-完备的

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E35, 03E55。*Key words and phrases.* Rudin-Keisler 序、超滤子、粘合性质。第一作者感谢以色列科学基金会通过资助项目 1967/21 提供的支持。第二作者的部分研究经费来自西班牙政府资助的项目，项目编号为 PID2023- 147428NB-I00。

如果超滤子中任意一个由 $<\lambda$ 个成员组成的族的交集都属于 $\mathcal{U}$。当然，每个超滤子都是 $\aleph_0$-完备的。然而，令人惊讶的是，数学的标准基础 ZFC[1] 无法证明存在一个具有上述性质的不可数基数 κ 。

不可数基数 κ 称为可测基数，如果它携带一个 κ-完备（非主）超滤子。这类基数由 Ulam 于 20 世纪 30 年代引入，旨在研究经典的*Lebesgue* 测度问题（[Kan09，§1]）。可测基数属于所谓的大基数层级。大基数是一类满足特定性质的“无限”，因而显得“非常大”，[2] 且其存在性无法由 ZFC 证实。可测基数对现代纯数学的发展产生了如此深远的影响，以至于 Kanamori 在其专著[Kan09，§2] 中将其称为大基数理论中最重要的概念。

分类超滤子是一项由来已久的研究计划。在这一领域中，最成功的工具之一是 Rudin-Keisler 序 $\leq_{\mathrm{RK}}$。给定定义在 κ 上的超滤子 $\mathcal{U}_0$ 和 $\mathcal{U}_1$ ，当且仅当存在函数 $\pi\colon\ \kappa \to \kappa$ ，使得 $X \in \mathcal{U}_0 \Leftrightarrow \pi^{-1}(X) \in \mathcal{U}_1$.时，记作 $\mathcal{U}_0 \leq_{\mathrm{RK}} \mathcal{U}_1$ 。Rudin-Keisler 序由 M. E. Rudin 和 J. Keisler 独立引入，A. Blass 在其博士论文中首次对其进行了系统研究[Bla70], ，此后许多学者也对其进行了研究。Rudin-Keisler 序的一个核心特点是，它通过超滤子在该序中的相对位置，为理解超滤子的内在结构提供了框架。例如，选择性（亦称 Ramsey）超滤子就是那些 $\leq_{\mathrm{RK}}$-极小的超滤子。探讨 Rudin-Keisler 序结构的文献相当丰富 [Rud71, CN72, Ket72, Kun72, Bla73, Kan76, Git88, KR18, Gol22a]。

在本手稿中，我们将重点研究 $\leq_{\mathrm{RK}}$ 在 $\mathfrak{U}_\kappa$上的有向性，即 κ上的 κ-完备超滤子的集合：对于正则不可数基数 λ，如果给定任意基数 $\mu < \lambda$ 和超滤子集合 $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha < \mu\} \subseteq \mathfrak{U}_\kappa$ ，都存在另一个超滤子 $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_\kappa$ 使得 $\mathcal{U}_\alpha \leq_{\mathrm{RK}} \mathcal{U}.$ ，则$\langle \mathfrak{U}_\kappa \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$ 是 λ-有向的。注意到，每个 $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_\kappa$ 在 $\leq_{\mathrm{RK}}$中至多有 2^κ多个前驱，因此 $\leq_{\mathrm{RK}}$ 至多是（2^κ）$^+$-有向的。Katˇetov 的一个经典结果表明，将 $\leq_{\mathrm{RK}}$ 限制在整数上的一致超滤子时，它是（$2^{\aleph_0}$）$^+$-有向的。关于这一方向的其他结果可见于 Comfort-Negrepontis 的著作 [CN12]。应当将 $\leq_{\mathrm{RK}}$ 的有向性理解为该序结构中“典范性”或“正则性”的一个指示。

谈到可测基数时，Kunen 的经典定理[Ket72，定理 2。3]以及 Comfort–Negrepontis 独立得到的 [CN72，定理 4。3] 可由（2^κ）$^+$-有向性 $\leq_{\mathrm{RK}}$ 由紧致性的实例推出紧致性；也就是说，如果 κ 是 κ-紧致的，那么 $\langle \mathfrak{U}_\kappa,\ \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$ 是（2^κ）$^+$-有向的。[3] 这并不

[1]也就是说，策梅洛–弗兰克尔公理与选择公理。[2]例如，基数 κ 是 *weakly inaccessible* 当它是一个正则极限基数（即，对于所有 $\lambda^+ < \kappa$ $\lambda < \kappa$）时。这个概念由 Felix Hausdorff 于 1908 年提出（参见 [Kan09，§1]）。[3]回顾一下，不可数基数 κ 称为 κ-紧的，如果每个定义在 κ上的 κ-完备滤子都可以扩张为 κ上的 κ-完备超滤子。

令人意外，因为 $\leq_{\mathrm{RK}}$ 的有向性本身可以被视为紧致性的一种形式：与其扩张任意一个 κ-完备滤子，不如扩张积空间上的一个滤子 $\prod_{\alpha<2^\kappa}\kappa$，且该滤子的每个投影都已经是一个 κ-完备超滤子（见 [Ket72，定理 2。3]）。

紧致性是一种数学现象，指某个结构（广义而言）的局部行为决定其全局性质。集合论中的一条重要研究脉络（例如，[She75、Sil75、MS94、BM14，PRS23、GP25]）长期致力于分类数学各领域中出现的各种紧致性现象。除了一些引人注目的例外，紧致性通常意味着大基数的存在。因此，这一研究计划投入了大量精力，根据这些现象的大基数强度进行分类——也就是说，根据相关大基数在大基数层级中的位置进行分类。

鉴于 $\leq_{\mathrm{RK}}$ 的有向性既是一种“正则性性质”，又是一种“紧致性型性质”，它自然成为一项具有独立研究价值的性质。因此，本项目旨在阐明的一个问题是：

问题。设 λ 是一个正则不可数基数。理论“ZFC $+\langle\mathfrak{U}_\kappa,\leq_{\mathrm{RK}}\rangle$ 是 λ-有向的”具有怎样的一致性强度？

换一种说法：$\langle\mathfrak{U}_\kappa,\ \leq_{\mathrm{RK}}\rangle$ κ-紧基数的有向性是其内在特征，还是存在其他一致性意义上更弱、但仍能推出该性质的大基数？截至目前，尚无一致性强度严格低于 κ-紧致性的大基数被证明能够推出 $\langle\mathfrak{U}_\kappa,\ \leq_{\mathrm{RK}}\rangle$的 $\aleph_1$-有向性。因此，一个自然的猜想是，κ-紧致性（或具有类似强度的大基数）是必要的。然而，我们的主结果否定了这一猜想：

主定理。设 κ 是一个可测基数，$\lambda\leq\kappa$ 是一个基数。那么，以下理论在模 ZFC 的意义下等一致：

（$\aleph$）“$\langle\mathfrak{U}_\kappa,\ \leq_{\mathrm{RK}}\rangle$ 是 λ^+-有向的”（分别为 κ^+-有向的）。（$\beth$）

“κ 是可测基数，且具有 $o(\kappa)=\lambda^+$”（分别为具有 $o(\kappa)=\kappa$）。

上述结果表明，通过远弱于存在强基数这一假设的大基数假设，可以获得高度有向性；而强基数的一致性强度本身也远低于κ-紧基数的一致性强度（例如参见 [Hay19，Git20]）。因此，我们的结果表明，相对较弱的大基数足以构造这样的模型：其中一个可测基数具有强紧致性类性质。据作者所知，这是可测基数层面上具有这一性质的首个紧致性类性质。

我们的**主定理**是在沟通 Rudin-Keisler 序的有向性与一种粘合性质（GP）[HP24]（称为经由超滤子的 GP）之后得到的。更准确地说，我们证明以下定理：

定理。设 κ 是一个可测基数，$\lambda\leq 2^\kappa$ 是一个基数。那么，以下陈述等价：

(1) κ 通过超滤子具有 $<\lambda^+$-GP 。*(2)* κ 通过超滤子具有 λ-GP 。*(3)* $\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$ 是 λ^+-有向的。此外，若 $\lambda \leq \kappa$ ，则上述 *(1)* 和 *(2)* 分别等价于 *(1')* κ 具有 $<\lambda^+$-GP，以及 *(2')* κ 具有 λ-GP。

确立上述事实后，我们将构建所需的集合论工具，以从满足 (⊐) 的模型出发，通过超滤子得到 λ-GP 的相容性。我们的策略在思想上得益于 Gitik [Git86、Git88]以及 Ben-Neria–Unger [BNU17]。基本思路是定义一个非平稳支撑的 Prikry 型强迫迭代，通过一个 κ-完备超滤子，将任意 λ 个 κ- 完备超滤子（不一定是正规超滤子）“ 粘合 ” 起来。为落实这一计划，我们必须发展两项关键技术：（1）粘合偏序（§5）；（2）编码引理（第 6 节）。粘合偏序是对 Gitik [Git86]提出的一种强迫的拓展，我们论证了要获得所需结果，这种拓展不可或缺（§8）。编码引理则能通过在核心模型上、迭代 Prikry 型强迫且采用非平稳支撑的方式，对泛型扩张中所有 κ-完备超滤子作出完整描述，直至 $o(\kappa) = \kappa^{++}$。据我们所知，这是文献中唯一一个完整描述此类 Prikry 型扩张中所有 κ-完备超滤子的结果，因此本身也具有独立的研究价值[4]

我们的证明遵循了 [HP24的思路§6], 遗憾的是，在允许不可数粘合度之后，我们必须处理若干技术障碍（例如引理6.11、6.17 和6.18）。与编码引理类似的结果已出现在Kunen [Kun70], 、Ben-Neria [BN14], Gitik–Kaplan[GK23], Benhamou–Goldberg [BG24] 以及 Ben-Neria–Kaplan [BNK24]的工作中。

本文最后讨论了 Gitik 关于粘合性质的一个问题。在第一作者于 2023 年在耶路撒冷希伯来大学进行了一系列研讨会讲座之后，Gitik 猜想，在他的 [Git86]模型中，通过超滤的 GP 应当成立。我们证明如下结果，这表明，要得到 GP，我们在§5 中构造的粘合偏序集确实是必要的：

定理。在 $\aleph_0$-GP 中，*Gitik* 的模型 [Git86]不成立。特别地，在 *Gitik* 的模型中，*Rudin-Keisler* 序不是 $\aleph_1$-有向的。

本文的结构如下。在§2 中，我们提供相关预备知识，并为后续内容设定符号。在§3 中，我们重新考察 [HP24], 中引入的粘合性质，提出若干新的变体，并探讨它们之间的相互关系。在§4 中，我们证明 $\leq_{\mathrm{RK}}$ 的有向性等价于通过超滤的 GP。第5 节和6 节构成本文的技术核心，随后将在**主定理**中§7中用于证明该定理。在§8中，我们对 Gitik 猜想给出了否定答案。§9 提出若干

[4]测度的类似刻画 *normal* 曾出现在文献中的多项研究里。例如，参见 [FM09、GK23]。

个值得关注的开放问题。我们的符号和术语遵循（我们希望如此）集合论的标准用法。

2. Preliminaries

2.1. **超滤子**。设 U_0, U_1 是超滤子。若存在函数 $\pi\colon \bigcup U_1 \to \bigcup U_0$，使得对于每个集合 $X \subseteq \bigcup U_0$，我们记作 $U_0 \leq_{\mathrm{RK}} U_1$，

$$X \in U_0 \text{ if and only if } \pi^{-1}(X) \in U_1.$$

等价地，存在如前所述的函数 π，使得 $U_0 = \pi_*(U_1)$，其中

$$\pi_*(U_1) := \{X \subseteq \kappa \mid \pi^{-1}(X) \in U_1\}.$$

在上述情况下，我们称 U_0 在 ***Rudin-Keisler*** 意义下低于 U_1。

我们将“$U_0 \leq_{\mathrm{RK}} U_1$ 和 $U_1 \leq_{\mathrm{RK}} U_0$”简写为 $U_0 \equiv_{\mathrm{RK}} U_1$。类似地，$U_0 <_{\mathrm{RK}} U_1$ 表示 $U_0 \leq_{\mathrm{RK}} U_1$ 和 $\neg(U_1 \leq_{\mathrm{RK}} U_0)$。此外，$U_0 \equiv_{\mathrm{RK}} U_1$

关系 $\leq_{\mathrm{RK}}$ 在所有超滤子的类上定义了一个预序——也就是说，它是一个自反且传递的二元关系。反过来，这个关系在模去 $\equiv_{\mathrm{RK}}$ 后，在所有超滤子的类上诱导出一个序。实际使用中，我们会模糊这两种情形之间的区别，并讨论超滤子的 Rudin-Keisler 序。本文将关注不可数基数 κ 上 κ-完备非主超滤子的 Rudin-Keisler 序 $\leq_{\mathrm{RK}}$。接下来，我们用 $\mathfrak{U}_\kappa$. 表示这个集合。由于只有 2^κ 个函数 $f\colon \kappa \to \kappa$，因此 $\mathfrak{U}_\kappa$ 中没有任何元素能有超过 2^κ 个 $\leq_{\mathrm{RK}}$-前驱。对于正则基数 $\lambda \leq (2^\kappa)^+$，我们称 $\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$ 是 λ-有向的，如果对于给定的 $\mu < \lambda$ 和超滤子 $\{U_\alpha \mid \alpha < \mu\} \subseteq \mathfrak{U}_\kappa$，存在另一个超滤子 $U \in \mathfrak{U}_\kappa$，使得 $U_\alpha \leq_{\mathrm{RK}} U$.

给定一个 κ-完备超滤子 U 在 κ 上，我们将 j_U 所诱导的超幂嵌入 $j_U\colon V \to M_U$ 记为 U。反过来，已知嵌入j_U 和序数 $[\mathrm{id}]_U < j_U(\kappa)$，便可通过方程 $U = \{X \subseteq \kappa \mid [\mathrm{id}]_U \in j_U(X)\}$恢复超滤子 U。关于超幂的一般理论，读者可参阅 [Ste16] 或 [Kan09，第 1 章 §5]。

2.2. **强迫**。本手稿采用的主要强迫技术是 Prikry 型强迫。这里我们采用 Gitik 提出的关于 Prikry 型偏序集的视角 [Git10，§6]。具体而言，

定义 2.1. 三元组 $\langle \mathbb{P}, \leq, \leq^* \rangle$ 称为一个***Prikry*** 型强迫，如果

(1) $\leq^* \subseteq \leq$，(2) $\leq^*$ 具有***Prikry*** 性质；也就是说，对于每个 $p \in P$ 以及强迫语言中的一个陈述φ（关于 $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$），存在 $q \leq^* p$ 使得

$$q \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi \text{ or } q \Vdash_{\mathbb{P}} \neg\varphi.$$

当上下文已明确偏序 $\leq^*$时，我们通常会将 $\mathbb{P}$ 称为 Prikry 型。注意，Gitik 的定义足够一般，只需令 $\leq^* := \leq$，便可涵盖任意偏序集。不过，真正的 Prikry 型强迫会满足 $\leq^* \subsetneq \leq$，而且通常直接扩张序 $\leq^*$的闭包性质会优于正则序 $\leq$.

在 [Git86], Gitik 引入了 Prikry 型强迫的 Easton-支撑迭代。本文考察 Ben-Neria 和 Unger 提出的这一构造的修改版本 [BNU17], ，其中迭代采用非平稳支撑。这一修改使我们能够更精细地控制泛型扩张中可用的超滤子类型（例如参见 [HP24、GK23、BNK24]）。

定义 2.2 （非定常支集迭代， [BNU17]）。设 ϱ是一个序数。我们递归地定义一个迭代 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\beta \mid \beta < \alpha \leq \varrho \rangle$ 如下：对于 $\alpha \leq \varrho$ 的成员， $\mathbb{P}_\alpha$ 是序列 $p = \langle \dot{p}_\beta \mid \beta \in \mathrm{supp}(p) \rangle$ ，满足：

（a） $\mathrm{supp}(p) \subseteq \alpha$ 具有非平稳支撑：即， $\mathrm{supp}(p) \cap \beta$ 在 β 中是非平稳的，对于所有不可达基数 $\beta \leq \alpha$均如此。（b）对于每个 $\beta \in \mathrm{supp}(p)$， $p \restriction \beta := \langle \dot{p}_\beta \mid \beta \in \mathrm{supp}(p) \cap \beta \rangle \in \mathbb{P}_\beta$

$$p \restriction \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \text{“} \dot{p}_\beta \in \dot{\mathbb{Q}}_\beta$$

并且，此外，

$$\mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} |\dot{\mathbb{Q}}_\beta| \leq 2^\beta \wedge \langle \dot{\mathbb{Q}}_\beta, \leq_\beta, \leq^*_\beta \rangle \text{ is Prikry-type and } \leq^* \text{ is } \beta\text{-closed”}.$$[5]

令 $p = \langle \dot{p}_\beta \mid \beta \in \mathrm{supp}(p) \rangle$ 和 $q = \langle \dot{q}_\beta \mid \beta \in \mathrm{supp}(q) \rangle$ 为 $\mathbb{P}_\alpha$的元素。当且仅当以下条件成立时，我们写作 $p \leq_\alpha q$ ：

(1) $\mathrm{supp}(p) \supseteq \mathrm{supp}(q)$，(2) $p \restriction \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \dot{p}_\beta \leq_\beta \dot{q}_\beta$，对每个 $\beta \in \mathrm{supp}(q)$；

(3) 存在有限的 $b \subseteq \mathrm{supp}(q)$，使得对所有 $\beta \in \mathrm{supp}(q) \setminus b$

$$p \restriction \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \dot{p}_\beta \leq^*_\beta \dot{q}_\beta.$$

当上文的 b 为空时，Prikry 序 $\leq^*_\alpha$ 定义如下。

有两点评论。关于 (a)：尽管 $p \in \mathbb{P}_\varrho$ 的成员是所涉及的各种偏序集的名称，但请注意，$\mathrm{supp}(p)$ 被假定为基模型中的一个集合。关于 (b)：假设 $|\dot{\mathbb{Q}}_\beta| \leq 2^\beta$ 且 $\langle \mathbb{Q}_\beta, \leq^*_\beta \rangle$ 被强迫为 β-闭，是允许对角化的技术要求。这对于证明 Prikry 性质及其变体至关重要。

关于上述迭代的一个基本定理是 Prikry 性质。Gitik 证明了 Easton-支撑迭代的这一结果 [Git86, §1]；非平稳支撑迭代的相应结果则归功于 Ben-Neria 和 Unger [BNU17, §2]。本文相关的 Prikry 性质变体将在以下引理中给出。（在这两个引理中，假设迭代 $\mathbb{P}_\varrho$ 具有非平稳支撑。）

引理 2.3 （[*BNU*17]）。设 ϱ 是一个极限序数，且 $e\colon \varrho \to V$ 是一个函数，使得对每个 $\alpha < \varrho$， $e(\alpha)$ 都是 $\mathbb{P}_{\alpha+1}$-名称，表示 $\mathbb{P}_\varrho \setminus (\alpha+1)$ 的一个 $\leq^*$-稠密子集。那么，对每个 $p \in \mathbb{P}$ 和 $\nu < \varrho$，存在 $p^* \leq^* p$，使得 $p^* \restriction \nu = p \restriction \nu$ 且 $p^* \restriction \alpha+1 \Vdash_{\mathbb{P}_{\alpha+1}} p^* \restriction \alpha+1 \in e(\alpha)$. □

[5]回想一下， β-闭包表示以下性质：对于 $\mathbb{Q}_\beta$ （满足 $\bar{\gamma} < \beta$）中的每个$\leq^*_\beta$-递减序列 $\langle r_\gamma \mid \gamma < \bar{\gamma} \rangle$，都存在 $r \in \mathbb{Q}_\beta$ 使得 $r \leq^*_\beta r_\gamma$.

引理 2.4 ([BNU17])。 令 $p \in \mathbb{P}_\varrho$， $\nu < \varrho$ 和 $D \subseteq \mathbb{P}_\varrho$ 为一个稠密开集。那么，存在 $p^* \leq^* p$ 和 $\alpha < \varrho$ 使得 $p^* \restriction \nu + 1 = p \restriction \nu + 1$ 且

$$\{r \leq p^* \restriction \alpha \mid r^\frown p^* \setminus \alpha \in D\}$$

在 $p^* \restriction \alpha$. 以下是 $\leq$-稠密的 □

一个直接推论是“名称约化”引理：

˘推论 2.5. 设 σ 是一个 $\mathbb{P}_\varrho$-名称，且 $p \in \mathbb{P}_\varrho$ 满足 $p \Vdash_{\mathbb{P}_\varrho} \sigma \in V$。那么，存在 $p^* \leq^* p$、 $\alpha < \varrho$ 以及一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称 τ，使得 $p^* \Vdash_{\mathbb{P}_\varrho} \sigma = \tau$.

此外，对于每个 $\nu < \varrho$，都可以找到如上所述的 $\alpha \geq \nu$ 和 $p^* \leq^* p$，使得 $p^* \restriction \nu + 1 = p \restriction \nu + 1$.

证明。 设 $D_\sigma := \{q \leq p \mid \exists x (q \Vdash_{\mathbb{P}_\varrho} \sigma = \check{}x)\}$. 。由于这在 p 以下是稠密开集，因此存在 $p^* \leq^* p$ 和 $\alpha < \varrho$，使得 $\{r \leq p^* \restriction \alpha \mid r^\frown p^* \setminus \alpha \in D_\sigma\}$ 在 $p^* \restriction \alpha$. 以下是稠密的。设 A 是 $\mathbb{P}_\alpha$ 中位于 $p^* \restriction \alpha$ 以下且包含于前述集合的一个极大反链。对于每个 $r \in A$，存在 x_r 使得 $r^\frown p^* \setminus \alpha \Vdash_{\mathbb{P}_\varrho} \sigma = \check{}x_r$。令 τ 为根据极大反链 A 混合名称 $\check{}x_r$ 所得到的 $\mathbb{P}_\alpha$-名称。于是，对于每个 $r \in A$， $r^\frown p^* \restriction \alpha \Vdash_{\mathbb{P}_\varrho} \check{}x_r = \tau$。由此很容易推出 $p^* \Vdash_{\mathbb{P}_\varrho} \sigma = \tau$. □

推论 2.6。 设 $p \in \mathbb{P}_\varrho$ 是一个条件， $\nu \leq \bar{\varrho} < \varrho$ 是序数˘，且 σ 是一个 $\mathbb{P}_{\bar{\varrho}}$-名称，满足 $p \restriction \bar{\varrho} \Vdash_{\mathbb{P}_{\bar{\varrho}}} \sigma \in V$. 。那么，存在 $p^* \leq^* p$ 以及一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称 τ，使得 $\alpha < \bar{\varrho}$，并且 $p^* \restriction \nu = p \restriction \nu$ 和 $p^* \restriction \bar{\varrho} \Vdash_{\mathbb{P}_{\bar{\varrho}}} \sigma = \tau$. □

证明与推论2.5中给出的论证完全相同，但需注意 D_σ： $= \{q \leq p \mid \exists x($ $q \restriction \bar{\varrho} \Vdash_{\mathbb{P}_{\bar{\varrho}}} \sigma = \check{}x)\}$. 这一版本的“名称约化引理”将在本文后面派上用场（见引理 6.8）。

如 [HP24] 在本文中，我们还需要“预测”目标泛型扩张中将出现的超滤子。这将通过伍丁的快速函数强迫来实现；更准确地说，我们将使用其非平稳支撑版本，参见 [HP24，§6]：

定义 2.7 （快速函数强迫）。 对于一个不可达基数 κ，我们用 $\mathbb{S}_\kappa$ 表示由偏函数 s: $\kappa \to H(\kappa)$ 组成的偏序集，其中

(1) $\mathrm{dom}(s) \subseteq$ 不可达基数，(2) 对所有 $\beta \in$ 不可达基数 $\cap$ $(\kappa + 1)$，$\mathrm{dom}(s) \cap \beta \in$ 非平稳理想β，(3) s“$\alpha \subseteq \alpha$ 对所有 $\alpha \in \mathrm{dom}(s)$，(4) 且对所有 $\alpha \in \mathrm{dom}\, s$， $s(\alpha) \in H(\alpha^+)$。

$\mathbb{S}_\kappa$ 上的序自然定义为： $s \leq t$ 当且仅当 $s \supseteq t$.

命题 2.8 （ $\mathbb{S}_\kappa$， [HP24，命题 6.2]）。

(1) $\mathbb{S}_\kappa$ 添加一个泛型快速函数 ℓ： $\kappa \to \kappa$。[6] *(2)* $\mathbb{S}_\kappa$ 是 κ^{++}-*cc*，并保留 κ^+。*(3)* 使用 $\mathbb{S}_\kappa$ 进行强迫会保留广义连续统假设。

[6] 具体来说，一个函数 ℓ： $\kappa \to \kappa$ 满足以下条件：对于所有 $x \in H(\kappa^+)^V$，都存在一个嵌入 j： $V[S] \to M$，其临界点为 $\mathrm{crit}(j) = \kappa$， ${}^\kappa M \subseteq M$ 且 $j(\ell)(\kappa) = x$。

(4) 对于每个条件 $s = \{\langle \alpha, s(\alpha)\rangle\} \in \mathbb{S}_\kappa$

$$\mathbb{S}_\kappa / s \simeq \mathbb{S}_\alpha \times \mathbb{S}_\kappa \setminus \alpha,$$

其中 $\mathbb{S}_\alpha$ 是 α^{++}-*cc*，且 $\mathbb{S} \setminus \alpha$ 是 θ_α-闭的（$\theta_\alpha :=$ 不可达基数的最小值 $\setminus \alpha^+$）。*(5)* 若 κ 是可测基数，则通过 $\mathbb{S}_\kappa$ 强迫会保留此性质。□

基本思路是使用快速函数 ℓ: $\kappa \to \kappa$ 来预测待粘合测度的"编码"（见定义 5.1 ）。快速函数 ℓ 还将导出一个自然的 " 序 " $o^\ell(\cdot)$（定义 5.3 ），我们将用它来定义 Git [Git86] 中的 Gitik 强迫的一个变体，从而得到粘合性质。

2.3. **内模型理论**。作为分析的一部分，我们还需要内模型理论中的几个基本概念。第一个是 Mitchell 引入的超滤子之间的一种自然序：

定义 2.9（Mitchell 序）。对于同一基数上的正规超滤子 U 和 W，若 $U \in \mathrm{Ult}(V, W)$，则记作 $U \lhd W$。

这是 Mitchell 的一个定理 [Mit10，§2] 表明 $\lhd$ 是良基的，因此讨论正规测度 U 在 $\lhd$中的秩完全有意义。

定义 2.10。正规测度的 *Mitchell* 序 U （记作$o(U)$）是它在 $\lhd$中的秩；也就是说，$o(U) := \sup\{o(W) + 1 \mid W \lhd U\}$.

类似地，基数的*Mitchell* 序 κ 为

$$o(\kappa) := \sup\{o(U) + 1 \mid U \text{ is a normal measure over } \kappa\}.$$

基数 κ 不是可测基数，当且仅当 $o(\kappa) = 0$。若 $o(\kappa) = 1$ ，则 κ是可测基数，但其上的任意正规测度 U 都集中在 $\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ 不是可测基数$\}$. 。Solovay 指出（见 [Mit10, §2]），$o(\kappa) \leq (2^\kappa)^+$，因此在广义连续统假设下，$o(\kappa) \leq \kappa^{++}$。

另一个相关概念也出自 Mitchel，即相干测度序列。

定义 2.11。相干测度序列是一个函数 $\mathcal{U}$ 满足：

(1) $\mathrm{dom}(\mathcal{U}) = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha < \mathrm{len}(\mathcal{U})$ 以及 $\beta < o^{\mathcal{U}}(\alpha)\}$，其中 $\mathrm{len}(\mathcal{U})$ 是一个基数，且 $o^{\mathcal{U}}$ 是从基数 $\alpha < \mathrm{len}(\mathcal{U})$ 到序数的映射；(2) 如果 $(\alpha, \beta) \in \mathrm{dom}(\mathcal{U})$，则 $\mathcal{U}(\kappa, \beta)$ 是 κ上的正规测度；(3) 对所有 $(\alpha, \beta) \in \mathrm{dom}(\mathcal{U})$，$j_{\mathcal{U}(\alpha,\beta)}(\mathcal{U}) \restriction \alpha + 1 = \mathcal{U} \restriction (\alpha, \beta)$，其中

$$\mathcal{U} \restriction (\alpha, \beta) := \{\mathcal{U}(\gamma, \bar{\beta}) \mid (\gamma < \alpha \wedge \bar{\beta} < o^{\mathcal{U}}(\gamma)) \vee (\gamma = \alpha \wedge \bar{\beta} < \beta)\},$$

$$\text{and } j_{\mathcal{U}(\alpha,\beta)}(\mathcal{U}) \restriction \alpha + 1 := j_{\mathcal{U}(\alpha,\beta)}(\mathcal{U}) \restriction (\alpha + 1, 0).$$

定义 2.12。 传递模型之间的一组初等嵌入 $\langle \iota_{\alpha,\ \beta} \mid \alpha \leq \beta \leq \delta\rangle$称为线性迭代，如果满足以下条件：

(1) $\iota_{\alpha,\ \beta}$: $\mathcal{M}_\alpha \to \mathcal{M}_\beta$ 的 $\mathrm{crit}(\iota_{\alpha,\ \beta})$ 为 $= \mu_\alpha$;

(2) 对所有 $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta$、$\iota_{\beta,\ \gamma} \circ \iota_{\alpha,\ \beta} = \iota_{\alpha,\ \gamma}$;

(3) 对所有 $\alpha \leq \delta$、$\iota_{\alpha,\ \alpha} = \mathrm{id}$；以及 (4) 对每个极限序数 $\gamma \leq \delta$,

$\langle \mathcal{M}_\gamma, \langle \iota_{\alpha,\ \gamma} \mid \alpha < \gamma\rangle\rangle$ 是$\langle \iota_{\alpha,\ \beta} \mid \alpha \leq \beta < \gamma\rangle$的直极限。

线性迭代是一种正规迭代，使用内部测度，条件是：

(5) $\iota_{\alpha,\ \alpha+1}$ 是由测度 $\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$ 在 μ_α上的超幂嵌入；(6) $\langle \mu_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle$ 是一个严格递增序列。

约定 2.13。对于每个 $\alpha \leq \delta$，ι_α 将作为 $\iota_{0,\ \alpha}$的简写。我们常常会稍微不严谨地说 ι_δ 是一次迭代，而不是指序列 $\langle \iota_{\alpha,\ \beta} \mid \alpha \leq \beta \leq \delta \rangle$。

以下技术引理已在 [HP24]中建立：

引理 2.14。设 $\langle \iota_{\alpha,\ \beta} \mid \alpha \leq \beta \leq \delta \rangle$ 是使用正规测度的正规迭代，其临界点为 $\langle \mu_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle$。那么，对于每个集合 $x \in \mathcal{M}_\delta$，存在一个有限正规迭代 $\tilde{\iota}$：$\mathcal{M}_0 \to \mathcal{N}$ 以及一个（因子）嵌入k：$\mathcal{N} \to \mathcal{M}_\delta$，使得 $k \circ \tilde{\iota} = \iota_\delta$ 且 $x \in$ 的值域为(k)。□

在 $\mathcal{K}$ 中，令 κ 为可测基数，且 $S \subseteq \mathbb{S}_\kappa$ 是 $\mathcal{K}$ 上的一个泛型滤子。

引理 2.15. 设 j: $\mathcal{K}[S] \to M$ 是任意的初等嵌入，且 $\iota = j \restriction \mathcal{K}$ 是在 $\mathcal{K}$ 中对测度进行的正规迭代，也就是说 $\langle \iota_{\alpha,\beta} \mid \alpha \leq \beta \leq \delta \rangle$。那么，存在一个迭代 $\langle j_{\alpha,\beta} \mid \alpha \leq \beta \leq \gamma \rangle$，使得每个嵌入 $j_{\alpha,\beta}$ 都提升相应的嵌入 $\iota_{\alpha,\beta}$。□

本文中我们将多次用到所谓的 ***Mitchell*** 覆盖定理，其适用范围截至 $o(\kappa) = \kappa^{++}$ [Mit84]:

定理 2.16. 假设不存在关于“$\exists \alpha (o(\alpha) = \alpha^{++})$”的内模型。那么存在唯一的内模型 $\mathcal{K}$，具有以下性质：

(1) 若 $\mathcal{U}$ 是 κ 上的 $\mathcal{K}$-正规且 κ-完备的 $\mathcal{K}$-超滤子，则 $\mathcal{U} \in \mathcal{K}$。[7] *(2)* 任何非平凡的初等嵌入 j: $\mathcal{K} \to M$ 到传递类 M 中，都是在 $\mathcal{K}$ 中使用正规测度的正规线性迭代。*(3)* 设 $\mathbb{P}$ 是集合大小的强迫，且 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是泛型。那么 $\mathcal{K}^{V[G]} = \mathcal{K}$。*(4)* 若 δ 是奇异强极限基数，则 $\delta^+ = (\delta^+)^{\mathcal{K}}$。

上述模型 $\mathcal{K}$ 就是所谓的向上的核心模型 $o(\kappa) = \kappa^{++}$ 但本文中我们将简称为核心模型。除了上述性质之外，$\mathcal{K}$ 还具有一些其他温和的组合特征——例如，$\mathcal{K} \models$ 广义连续统假设。更多内容请参见 Mitchell 手册章节 [Mit09]。本文不需要核心模型的精确定义。

3. The Gluing Property

本文研究的一项关键性质是粘合性质 [HP24]:

定义 3.1（粘合性质）。设 κ 是一个可测基数，$\alpha \geq \omega$ 是一个序数。若对于每个由 α 个非主 κ-完备超滤子组成的 α-序列 $\langle U_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$（定义在$\kappa$ 上），都存在一个（可定义的）初等嵌入 j: $V \to M$，满足 crit$(j) = \kappa$且 $M^\kappa \subseteq M$，以及一个递增的序数序列 $\langle \eta_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$，使得 κ 具有 α- 粘合性质 （α-GP），则称 κ 具有该性质。

$$U_\beta = \{X \subseteq \kappa \mid \eta_\beta \in j(X)\}.$$[8]

[7] $\mathcal{K}$-正规意味着 $\mathcal{U}$ 相对于每个函数 f: $\kappa \to \kappa$ 在 $\mathcal{K}$中都是正规的。[8] $\eta_\beta \geq \kappa$ 由于 U_β的非主性，因而得出这一结论。

若对于所有 $\beta < \alpha$.， κ 都具有 β-GP，则称 κ 具有 $<\alpha$-GP

记号 3.2。我们经常把序列 $\langle \eta_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ 称为种子，并称 $\langle \eta_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ 和 j 可粘合 $\langle U_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$，如果上述性质成立。

在 [HP24] 中，已经证明强紧基数对所有基数 λ都具有 λ-GP。[9] 通过改进这一论证，我们得以证明 λ-紧基数具有 (2^λ)-GP，但未必具有 $(2^\lambda)^+$-GP。同一篇论文还指出，核心模型 $\mathcal{K}$ 中的强基数可能不具有 $\aleph_0$-GP；然而，通过适当的强迫，可以将强基数变为具有 $\aleph_0$-GP的可测基数。随后又证明，ZFC+“存在一个具有 $\aleph_0$-GP 的可测基数”与理论 ZFC+“$\exists\kappa$(κ 是可测基数，且 $o(\kappa) = \omega_1$)”等一致。

在本手稿中，我们进一步完善分析，证明理论 ZFC+“存在一个具有 $<\lambda^+$-GP 的可测基数 κ”（对基数 $\lambda < \kappa$而言）与 ZFC + “$\exists\kappa$（κ 是可测基数且 o（κ） $= \lambda^+$）”等一致。此外，我们证明 ZFC+“存在一个具有 $<\kappa^+$-GP 的可测基数 κ”与 ZFC + “$\exists\kappa$（κ 是可测基数且 o（κ） $= \kappa$）”等一致。这些内容将在即将到来的第 7 节中讨论。

作为对粘合性质进行一般性分析的一部分，我们将考察这一概念与其若干自然变体之间的关系。

定义 3.3。设 κ 是一个可测基数， $\omega \leq \alpha$ 是一个序数。

(1) κ具有超 α-GP，若其具有 α-GP，且此外可以将定义 3.1中的种子序列 $\langle \eta_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ 取在 M.(2) κ 具有 α-GP，若其通过超滤子具有 α-GP，且有通过 κ-完备超滤子在 $\kappa^{<\kappa}$上的超幂嵌入作为见证。(3) κ 具有弱 α-GP，若定义3.1 的结论成立，但$\langle \eta_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ 不一定递增。

注记 3.4。若 W 是 $\kappa^{<\kappa}$上的 κ-完备超滤子， $\beta < \alpha$ 且 $U_\beta = \{X \subseteq \kappa \mid \eta_\beta \in j_W(X)\}$，那么我们可以假设 $\sup_{\beta<\alpha} \eta_\beta \leq \sup([\mathrm{id}]_W)$。否则，令 W^*:
$= \{Y \subseteq \kappa^{<\kappa} \mid [\mathrm{id}]_W \frown [\mathrm{id}]_{j_W(W)} \in j(Y)\}$，其中 j是复合映射$j_{j_W(W)} \circ j_W$。显然，W^*是一个 κ-完备超滤子，且 $\sup_{\beta<\alpha} \eta_\beta \leq \sup([\mathrm{id}]_{W^*})$，并且它将超滤子 U_β（$\beta < \alpha$）粘合起来。

接下来，我们证明一个结果，以阐明这些概念之间的蕴含关系。

定理 3.5. 设 κ 是一个可测基数， $\omega \leq \alpha < \kappa^{++}$ 是一个序数。那么，以下每个性质都蕴含列表中的下一个性质：

(1) κ具有超 α-GP。*(2)* κ通过超滤子具有 α-GP 。*(3)* κ具有 α-GP。*(4)* κ具有弱 α-GP。

[9]此外， 2^κ通过超滤的 [GP 成立。这是 Kunen 的经典定理的推论，3] 因为他证明了，若 κ 强紧致，则 $\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$ 是（2^κ）$^+$-有向的。结合我们的定理4.1 即可得出该结论。

此外，如果 $\alpha < \kappa^+$，则*(1)–(3)*等价。

证明。 (2) $\Rightarrow$ (3) 和 (3) $\Rightarrow$ (4) 是显然的。此外，如果 $\alpha < \kappa^+$，那么对以粘合嵌入j为目标的模型 M 在 κ-序列下的闭性： $V \to M$ 推出 (3) $\Rightarrow$ (1)。因此，只需证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。

(1) $\Rightarrow$ (2)。设 $\langle U_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ 是 κ-完备超滤子。由于 κ 具有超 α-GP，因此存在一个初等嵌入 j： $V \to M$，以及一个低于 $j(\kappa)$ 的递增序列 $\langle \eta_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$，使得 $\langle \eta_\beta \mid \beta < \alpha\rangle \in M$，并且

$$U_\beta = \{X \subseteq \kappa \mid \eta_\beta \in j(X)\}.$$

由于 $\eta_0 \geq \kappa$，通过在序列$\langle \eta_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ 中（如有必要）额外加入一个元素，我们不妨设 $\eta_0 = \kappa$。

首先，假设 $\alpha \leq \kappa^+$. 。通过规定：当且仅当 X 是$\kappa^{<\kappa}$ 上满足 $\langle \eta_\beta \mid \beta < \alpha\rangle \in j(X)$ 的递增序列的子集时，定义 $X \in W$ 在 $\kappa^{<\kappa}$ 上为超滤子。显然， W 是 κ-完备的，且映射 k: $M_W \to M$ 由 $j_W(f)([\mathrm{id}]_W) \mapsto j(f)([\mathrm{id}]_W)$ 给出，是初等的。此外，k 的临界点大于 κ：为说明 $\kappa \in \mathrm{range}(k)$，注意到$\kappa = j(f_\kappa)([\mathrm{id}]_W)$，其中 f_κ： $\kappa^{<\kappa} \to \kappa$ 是由 $f_\kappa(s) := \min(s)$ 给出的映射。

由于 W 是 κ-完备的， M_W 对其元素构成的 κ-序列封闭。

注意，η_β 也在 k 的值域中；也就是说，对于某个函数 g_β: $\kappa^{<\kappa} \to \kappa$，有 $\eta_\beta = j(g_\beta)([\mathrm{id}]_W)$。事实上，$\eta_\beta$ 由函数表示为

$$g_\beta \colon s \mapsto \text{“The } (c_\beta \circ f_\kappa(s))^{\text{th}}\text{-element of } s\text{”},$$

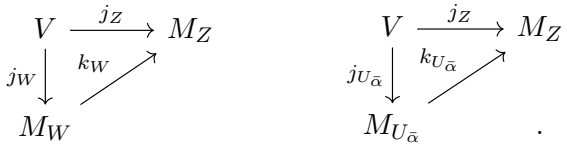
其中，c_β 是表示 β 的典范函数：当 $\beta \in (\kappa,\ \kappa^+)$时取该函数，当 $\beta = \kappa$ 时取恒等映射，当 $\beta < \kappa$时则取值为 β 的常值函数。

因此，对每个 $\beta < \alpha$，都有 $\eta_\beta = k(\bar{\eta}_\beta)$。由初等性可知，对所有 $\beta < \gamma < \alpha$， $\bar{\eta}_\beta < \bar{\eta}_\gamma$。此外，容易验证 $U_\beta = \{X \subseteq \kappa \mid \bar{\eta}_\beta \in j_W(X)\}$.

现在假设 $\alpha \in (\kappa^+,\ \kappa^{++})$，并假定对于所有序数 $\beta < \alpha$，(1) $\Rightarrow$ (2) 均已得到证明。与往常一样，我们区分以下两种情形：

后继情形：假设 $\alpha = \bar{\alpha} + 1$。根据归纳假设， κ具有通过超滤的 $\bar{\alpha}$-GP。因此，存在一个 κ-完备超滤子 W，其定义在$\kappa^{<\kappa}$ 上，超幂为 j： $V \to M_W$，M_W是 κ-闭的，并且存在一个由序数组成的递增序列 $\langle \eta_\beta \mid \beta < \bar{\alpha}\rangle$，使得 $\sup_{\beta<\bar{\alpha}} \eta_\beta \leq \sup([\mathrm{id}]_W)$，且$U_\beta = \{X \subseteq \kappa \mid \eta_\beta \in j_W(X)\}$. 现在，我们考虑乘积超滤子$Z = W \otimes U_{\bar{\alpha}}$，注意到 $\{(s,\ \xi) \in \kappa^{<\kappa} \times \kappa \mid \sup(s) < \xi\} \in Z$.[10]

设 $s^\star, \xi^\star$满足 $[\mathrm{id}]_Z = (s^\star, \xi^\star)$。因此， $k_W(\sup([\mathrm{id}])_W) = \sup(s^\star) < \xi^\star$。考虑自然交换图表



[10]这正是要求 $\sup_{\beta<\bar{\alpha}} \eta_\beta \leq \sup([\mathrm{id}]_W)$ 至关重要的地方。没有这一条件，我们就无法确保存在一个高于先前 η_β. 的 $U_{\bar{\alpha}}$ 种子

对于 $\beta < \bar{\alpha}$，记作 $\sigma_\beta = k_W(\eta_\beta)$。此外，设 $\sigma_{\bar{\alpha}} = \xi^\star$.

断言 3.5.1. j_Z 和 $\langle \sigma_\beta \mid \beta \leq \bar{\alpha} \rangle$ 将序列 $\langle U_\beta \mid \beta \leq \bar{\alpha} \rangle$粘合起来。

断言的证明。 首先，序列 $\langle \sigma_\beta \mid \alpha \leq \bar{\alpha} \rangle$ 是递增的：事实上，对于 $\beta < \bar{\alpha}$ 这一点显然成立，因为 $\langle \eta_\beta \mid \beta < \bar{\alpha} \rangle$ 本来就是递增的。此外，

$$k_W(\eta_\beta) \leq k_W(\sup([\mathrm{id}]_W)) = \sup(s^\star) < \xi^\star = \sigma_{\bar{\alpha}}.$$

其次，对于每个 $X \subseteq \kappa$,

$$X \in U_\beta \Leftrightarrow \eta_\beta \in j_W(X) \Leftrightarrow k_W(\eta_\beta) \in j_Z(X) \Leftrightarrow \sigma_\beta \in j_Z(X),$$

$$X \in U_{\bar{\alpha}} \Leftrightarrow [\mathrm{id}]_{U_{\bar{\alpha}}} \in j_{U_{\bar{\alpha}}}(X) \Leftrightarrow k_{U_{\bar{\alpha}}}([\mathrm{id}]_{U_{\bar{\alpha}}}) \in j_Z(X) \Leftrightarrow \sigma_{\bar{\alpha}} \in j_Z(X).$$

由此便得到了所述断言。 □

由于 Z 同构于 $\kappa^{<\kappa}$ 上的一个 κ-完备超滤子，我们就完成了。

极限情形：现在假设 α 是一个极限序数。设 $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\alpha) \rangle$ 是 α中的一个共尾序列。对于每个 $\xi < \mathrm{cf}(\alpha) (\leq \kappa^+)$，归纳假设允许我们通过 $\kappa^{<\kappa}$上的一个 κ-完备超滤子 W_ξ，粘合超滤子序列 $\langle U_\beta \mid \beta < \alpha_\xi \rangle$ 。由此，对于每个 $\xi < \mathrm{cf}(\alpha)$, 我们得到一个递增种子序列 $\langle \eta^\xi_\beta \mid \beta < \alpha_\xi \rangle$ ，它与 j_{W_ξ} 一起粘合 $\langle U_\beta \mid \beta < \alpha_\xi \rangle$。

设 $\varphi\colon\ \kappa^{<\kappa} \leftrightarrow \kappa$ 是一个双射，并设 $\bar{W}_\xi := \varphi_* W_\xi$. 现在这是 κ上的一个 κ-完备超滤子。因此，由于$\mathrm{cf}(\alpha) \leq \kappa^+$，归纳假设¯允许我们找到 $\kappa^{<\kappa}$ 上的一个超滤子 W^*，它能粘合所有的 W_ξ。

最后，让我们考虑这个交换图

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j_{W^*}} & M_{W^*} \\ {\scriptstyle j_{U_\beta}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle k_\xi} \\ M_{U_\beta} & \xrightarrow[k_{\beta,\xi}]{} & M_{W_\xi}. \end{array}$$

$k_{\beta,\,\xi}$ 是由以下事实诱导的自然嵌入：j_{W_ξ} 将这些 U_β组合起来[11]；¯ ¯

k_ξ 是由以下内容诱导的嵌入：$W_\xi \equiv_{\mathrm{RK}} W_\xi$ 以及 j_{W^*} 将这些 W_ξ组合起来。

记 $\langle \sigma^\xi_\beta \mid \beta < \alpha_\xi \rangle := \langle k_\xi(\eta^\xi_\beta) \mid \beta < \alpha_\xi \rangle$。结果表明,

$$U_\beta = \{X \subseteq \kappa \mid \sigma^\xi_\beta \in j_{W^*}(X)\}$$

对于所有 $\beta < \alpha_\xi$ 和 $\xi < \mathrm{cf}(\alpha)$。

对于每个 $\beta < \alpha$，令 $\eta_\beta := \min_{\xi < \mathrm{cf}(\alpha)} \{\sigma^\xi_\beta \mid \beta < \alpha_\xi\}$。

¯给定序数 $\beta < \bar{\beta} < \alpha$，我们有

$$\eta_\beta = \sigma^{\xi_\beta}_\beta > \sigma^{\xi_\beta}_{\bar{\beta}} \geq \eta_{\bar{\beta}},$$

$$\eta_\beta = \sigma^{\xi_\beta}_\beta = k_\xi(\eta^{\xi_\beta}_\beta) \leq k_\xi(\sup[\mathrm{id}]_{W_\xi}) = \sup([\mathrm{id}]_{W^*}).$$

因此， j_{W^*} 和 $\langle \eta_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ 将超滤子 $\langle U_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$粘合起来 □

[11] I.e., the map $k_{\beta,\xi}$ defined as $k_{\beta,\xi}(f)([\mathrm{id}]_{U_\beta}) := j_{W_\xi}(f)(\eta^\xi_\beta)$.

对于任意序数 $\alpha \geq \omega$，蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) 都成立。稍后我们将证明，若 $\alpha < \kappa^+$，则 (1)–(4) 实际上是等价的。上述定理是精确的，意即若 $\alpha \in \{\kappa^+, \kappa^{++}\}$，则上述蕴含关系不成立。对此的首个证据是下面的命题：

命题 3.6. 超 κ^{++}-GP 蕴含 κ^{++}-GP，但前者并不蕴含通过超滤的 κ^{++}-GP。

证明。第一个断言显然。对于第二个断言，注意到超 κ^{++}-GP 与 $2^\kappa = \kappa^+$ 相容（例如，当 κ 是 κ^{++}-超紧基数时，该性质成立），而通过超滤的 κ^{++}-GP 则蕴含 $2^\kappa \geq \kappa^{++}$：设 $\langle U_\alpha \mid \alpha < \kappa^{++}\rangle$ 是由 κ 上的非主 κ-完备超滤子组成的集合（其中的超滤子不必互异）。根据通过超滤的 κ^{++}-GP，存在一个递增的种子序列 $\langle \eta_\alpha \mid \alpha < \kappa^{++}\rangle$，以及 $\kappa^{<\kappa}$ 上的一个 κ-完备超滤子 W，它们共同粘合出 $\langle U_\alpha \mid \alpha < \kappa^{++}\rangle$。特别地，$\kappa^{++} \leq j_W(\kappa)$。由于 W 是 $\kappa^{<\kappa}$ 上的超滤子，我们推出 $\kappa^{++} \leq |j_W(\kappa)| = 2^\kappa$。□

让我们继续讨论定理3.5的最优性。尽管我们尚未能阐明 κ^+-GP 是否蕴含通过超滤的 κ^+-GP（见第 9 节），但我们可以证明，通过超滤的 κ^+-GP 并不蕴含 super κ^+-GP。为证明这一点，我们将 super κ^+-GP 与通过 κ^+ 上的 κ- 完备超滤子构造的超幂中捕获任意子集的能力联系起来。我们得到的性质略弱于 Habič-Honzik 所考虑的局部捕获性质 $\mathrm{LC}(\kappa, \kappa^+)$，[HH23] 因为我们的见证超滤子 W 可能不是正规的。[12]

命题 3.7。 假设 κ 具有 *super* κ^+-GP 且 $2^\kappa = \kappa^+$。那么，对每个 $a \subseteq \kappa^+$，都存在一个 κ-完备超滤子 W，定义在 κ 上，使得 $a \in \mathrm{Ult}(V, W)$。特别地，如果 κ 具有 *super* κ^+-GP，那么 $o^{\mathcal{K}}(\kappa) \geq (\kappa^{++})^{\mathcal{K}}$。

证明。固定 $a \subseteq \kappa^+$。对每个 $\alpha < \kappa^+$，当且仅当 $\alpha \in a$ 时，我们记作 $\alpha \in^0 a$；否则，记作 $\alpha \in^1 a$.。令 W_0、W_1 为 κ 上互不相同的 κ-完备超滤子，并令 $X_0 \in W_0 \setminus W_1$。定义 $\langle U_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\rangle$：当且仅当 $\alpha \in^i a$ 时取 $U_\alpha = W_i$。根据超 κ^+-GP，存在 $j\colon V \to M$，使得 $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ 且 $M^\kappa \subseteq M$，并存在递增序列 $\langle \eta_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\rangle \in M$，满足$U_\alpha = \{X \subseteq \kappa \mid \eta_\alpha \in j(X)\}$。令 W 为在定理 3.5 的证明中定义的 $\kappa^{<\kappa}$ 上的 κ-完备超滤子，并令 $k\colon M_W \to M$ 为相应的因子嵌入。由于 $\mathrm{crit}(k) \geq (\kappa^{++})^{M_W}$，且每个 $\eta_\alpha \in \mathrm{range}(k)$，我们推得 $\langle k^{-1}(\eta_\alpha) \mid \alpha < \kappa^+\rangle \in M_W$。此外，在引理中我们证明了$\langle k^{-1}(\eta_\alpha) \mid \alpha < \kappa^+\rangle$ 是一个序数递增序列，使得

$$U_\alpha = \{X \subseteq \kappa \mid k^{-1}(\eta_\alpha) \in j_W(X)\}.$$

注意，$a \in M_W$ 在该 $a = \{\alpha < \kappa^+ \mid k^{-1}(\eta_\alpha) \in j_W(X_0)\}$.

由于 W 与 κ 上的一个 κ-完备超滤子同构，因此结论成立。

[12]注意，若将见证超滤子取为非正规超滤子，确实会减弱对大基数的假设。例如，可能存在一个非正规测度 U，其到某个正规测度的 Rudin-Keisler 投影 U_{nor} 属于其超幂。这种情况发生在一个 μ-可测基数上，[Mit79]。

对于后一个断言，假设对于某个 $\beta < \kappa^{++}$，我们有一个 κ 上由 κ-完备（不一定正规）超滤子组成的 $\lhd$-递增序列 $\langle U_\alpha \mid \alpha < \beta \rangle$。由于我们可以将 $\langle U_\alpha \mid \alpha < \beta \rangle$ 编码为 κ^+ 的一个子集（通过 $2^\kappa = \kappa^+$），因此存在一个 κ 上的 κ-完备超滤子 W，使得 $\langle U_\alpha \mid \alpha < \beta \rangle \in M_W$。然而，这还不足以得出 $o(\kappa) = \kappa^{++}$，因为 W 可能不是正规的。

令 $\mathcal{K}$ 为一个满足极大性（即定理 2.16 的子句（1）和（2））以及 Mitchell 序线性的核心模型。例如，在假设不存在具有重叠延拓子的鼠标的情况下，可以取强基数的 Mitchell 核心模型；或者在假设不存在具有 Woodin 基数的内模型的情况下，可以取 Jensen-Steel 核心模型。

我们在核心模型中有如下事实：

断言 3.7.1。假设对每个 $a \subseteq \kappa^+$，都存在一个 κ-完备测度 W，其定义在 κ 上，并且满足 $a \in \mathrm{Ult}(V, W)$ 那么 $o^{\mathcal{K}}(\kappa) \geq (\kappa^{++})^{\mathcal{K}}$。

断言的证明。反设 $o^{\mathcal{K}}(\kappa) = \beta < (\kappa^{++})^{\mathcal{K}}$，从而导出矛盾。令 $\langle U_\gamma \mid \gamma < \beta \rangle$ 为 $\mathcal{K}$ 中所有定义在 κ 上的正规测度构成的序列（按 Mitchell 序排列）。令 $a \subseteq \kappa^+$ 为 V 中的一个集合，用来编码这一测度序列。根据我们的假设，存在一个 κ-完备超滤子 W，使得 $a \in \mathrm{Ult}(V, W) = M_W$。考察 $j_W \restriction \mathcal{K}$：$\mathcal{K} \to \mathcal{K}^{M_W}$。于是，根据极大性，$j_W$ 是 $\mathcal{K}$ 中的延拓子的正规迭代。[13]

由于 j_W 的临界点是 κ，第一步是一个位于 κ 上的延拓子 $E \in \mathcal{K}$，且该延拓子的强度低于迭代的下一个临界点（这可以通过假设不存在重叠延拓子，或利用迭代树中分支的性质来保证）。特别地，$\langle U_\gamma \restriction \gamma < \beta \rangle \in \mathrm{Ult}(\mathcal{K}, E)$。将 E 经由其正规测度 E_κ 作因子分解，并注意到因子映射的临界点是超幂的 $(\kappa^{++})^{\mathcal{K}}$，我们得到 $\langle U_\gamma \mid \gamma < \beta \rangle \in \mathrm{Ult}(\mathcal{K}, E_\kappa)$。但这与以下事实矛盾：$o^{\mathcal{K}}(\kappa) = \beta < (\kappa^{++})^{\mathcal{K}}$. □

这就完成了引理的证明。 □

注记 3.8。上述命题类似于 Mitchell 在[Mit84] 所述的结论：若 κ 是可测基数，且 $2^\kappa = \kappa^{++}$ 那么就有 $o^{\mathcal{K}}(\kappa) = \kappa^{++}$。

推论 3.9. 假设 κ 是强紧致的，且 $2^\kappa = \kappa^+$。那么，存在一个泛型扩张，其中通过超滤子成立 κ^+-GP，但超 κ^+-GP 不成立。此外，在该泛型扩张中，对所有基数 λ，λ-GP 均成立。

证明。用 Magidor 的迭代进行强迫，从 [Mag76] 使 κ 同时成为第一个可测基数和第一个强紧致基数。此迭代保留 $2^\kappa = \kappa^+$。

在泛型扩张中，通过超滤的 κ^+-GP 成立，恰恰是因为 κ 是强紧致的。然而，κ 不可能具有超 κ^+-GP：任意 κ-完备超滤子 U（定义在 κ 上）都可以编码为 κ^+ 的一个子集（即 $2^\kappa = \kappa^+$）

[13]一般而言，这个迭代可能是迭代树中的一条分支，但我们只关心第一步。

因此存在一个 κ-完备超滤子 W 使得 $U \in \mathrm{Ult}(V, W)$（根据命题3.7）。这意味着 κ不是第一个可测基数；因为若它是，Ult(V, W) 就会认为 $j_W(\kappa)$ 是第一个可测基数，但$\kappa < j_W(\kappa)$ 本身在 Ult(V, W) 中是可测基数——这就产生了矛盾。

由于 κ 是强紧致的， λ-GP 对所有 λ都成立。 □

现在我们继续讨论，证明粘合性质的又一个等价刻画——它为粘合超滤子提供了一种规范方法。这将帮助我们在第7 节中，在最佳假设下构造一个满足κ-GP 的模型。这是粘合性质等价于 Rudin-Keisler 序的有向性的第一个迹象：

引理 3.10（超滤子的规范粘合）。设 κ 是一个可测基数，且 $\omega \leq \alpha < \kappa^+$。则以下断言等价：

（*1*） κ具有 α-GP。（*2*）每个由 κ-完备超滤子构成的、定义在 κ 上的序列 $\langle U_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$，都存在一个 κ-完备超滤子 W，定义在 κ^α 的递增序列上（若 $\alpha <\kappa$），或定义在 $\kappa^{<\kappa}$ 上（若 $\kappa \leq \alpha$），使得 $U_\beta \leq_{\mathrm{RK}} W$。此外，若 $\alpha < \kappa$，则见证映射 π_α 就是求值映射 eval_α： $\kappa^{<\kappa} \to \kappa$，

$$\mathrm{eval}_\alpha \colon s \mapsto s(\alpha);$$

否则，见证映射为eval^*_α： $\kappa^{<\kappa} \to \kappa$，定义为

$$\mathrm{eval}^*_\alpha(s) := s(c_\alpha(|\min(s)|)),$$

其中 c_α： $\kappa \to \kappa$ 要么是恒等映射（如果 $\alpha = \kappa$），要么是表示 α 的典范函数（如果 $\kappa < \alpha$）。

证明。（1） $\Rightarrow$ （2）。由于我们假设 $\alpha < \kappa^+$ 该 α-GP of κ 等价于超 α-GP。考察定理 3.5 的证明可知，其中构造的超滤子 W 满足本引理陈述中所描述的性质。

（2） $\Rightarrow$ （1）。令 $\langle U_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ 为一列 κ-完备超滤子，定义在κ上。根据我们的假设，存在一个 κ-完备超滤子 W，它或者定义在 κ^α 上，或者定义在 $\kappa^{<\kappa}$ 上，并且在 $\leq_{\mathrm{RK}}$意义下高于 U_β。令 $\langle \eta_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ 为确定 $[\mathrm{id}]_W$. 的递增序列。我们断言 $U_\beta = \{X \subseteq \kappa \mid \eta_\beta \in j_W($ $X)\}$。

设 $X \subseteq \kappa$。那么， $X \in U_\beta$ 当且仅当 π^{-1}_β “$X \in W$。这等价于 $[\mathrm{id}$ $]_W \in j_W(\pi^{-1}_\beta$ “$X)$ $\Leftrightarrow j_W(\pi_\beta)([\mathrm{id}]_W)$ $\in j_W(X)$ $\Leftrightarrow \eta_\beta \in j_W(X)$. □

接下来我们证明，若 λ 是一个足够紧的基数，且 κ 具有$<\lambda$-粘合性质，则可以逐步推导出 $<\lambda^+$-粘合性质。这将帮助我们计算具有 $<\kappa^+$-粘合性质的基数 κ的确切一致性强度

引理 3.11. 设 κ 和 λ是可测基数。若 κ 具有$<\lambda$-粘合性质，则 κ 具有 $<\lambda^+$-粘合性质。

特别地，如果 κ 具有 $<\kappa$-GP，那么它也具有 $<\kappa^+$-GP。

证明。设 $\langle U_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ 是定义在 κ 上的 κ-完备超滤子，其中 $\gamma < \lambda^+$。设 j: $V \to M$ 是由定义在 λ上的一个 λ-完备超滤子得到的超幂。于是，$\langle j(U_\alpha) \mid \alpha < \gamma\rangle \in M$，并且“$j(\kappa)$ 具有 $<j(\lambda)$-GP”。因此，我们可以找到一个初等嵌入 $i\colon M \to M^*$，以及一个由小于 $i(j(\kappa))$ 的序数组成的递增序列 $\langle \eta_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$，使得超滤子 $j(U_\alpha)$ 可表示为

$$j(U_\alpha) = \{X \in \mathcal{P}^M(j(\kappa)) \mid \eta_\alpha \in i(X)\}.$$

因此，对于每个 $\alpha < \gamma$，我们可以推导出

$$U_\alpha = \{X \in \mathcal{P}(\kappa) \mid \eta_\alpha \in i(j(X))\}.$$

由于 M^* 在 M 中对 $j(\kappa)$-序列封闭，M^* 在 M 中是内部可定义的，并且 M 在 V 中对 κ-序列封闭，因此我们可以推导出 M^* 在 V 中对 κ-序列封闭。这表明 κ 具有 γ-GP，正如所声称的那样。□

最后，在初步分析中请注意，粘合性质显然*prima facie*取决于被粘合的测度集合的序型——这是因为种子序列 $\langle \eta_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$ 必须是递增的。然而，定理 3.5中给出的归纳论证表明，这种依赖只是表面上的：

引理 3.12 (无序型依赖)。 设 κ 是一个可测基数。那么对于所有基数，以下两个陈述等价：

(1) κ 通过超滤子具有 λ-GP 。*(2)* κ 通过超滤子具有 $<\lambda^+$-GP 。

特别地，对于任意序数 γ，以下两项等价：

(1') κ通过超滤子具有 γ-粘合性质；

(2') κ通过超滤子具有 $|\gamma|$-粘合性质 。 □

4. The Gluing Property and the Rudin-Keisler order

本节将证明，通过超滤子得到的粘合性质等价于 κ上的 Rudin-Keisler 序的有向性。

设 κ 是一个可测基数，并用 $\mathfrak{U}_\kappa$ 表示 κ上的所有 κ-完备超滤子的集合。注意，$\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}}\rangle$ 是一个预序集，因此讨论它是否有向是有意义的。本节的主要目标是证明，命题“κ 具有 λ-粘合性质”可以用 $\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}}\rangle$的$\lambda$-有向性来刻画。具体而言，我们证明如下：

定理 4.1 （粘合性质与 Rudin-Keisler 序）。 设 κ 是一个可测基数。那么，对于任意基数 $\lambda \leq 2^\kappa$，以下各项等价：

(1) κ通过超滤子具有 $<\lambda^+$-GP 。*(2)* κ通过超滤子具有 λ-GP 。*(3)* κ通过超滤子具有弱 λ-GP。*(4)* $\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}}\rangle$ 是 λ^+-有向的。

此外，如果 $\lambda \leq \kappa$，*(1)*、*(2)* 和 *(3)* 分别等价于 *(1')* κ具有 $<\lambda^+$-GP，

(2') κ具有 λ-GP。*(3')* κ
具有弱 λ-GP。

这一结果的前身已在 [HP24的引理 2 中得到证明。11] 其中， $\aleph_0$-GP 被刻画为 $\aleph_1$-有向性 $\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$。最近有人提醒我们， [HP24] 发表后，Benhamou–Goldberg 独立地且大约在同一时期发现了类似的事实。

定理*4.1*的证明。(1) $\Leftrightarrow$(2) 是引理3.12 ，而 (2) $\Rightarrow$ (3) 显然。

(3) $\Rightarrow$ (4)：设 $\langle U_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$ 是一个 κ-完备超滤子序列。根据假设，存在一个 κ-完备超滤子 W 以及一个种子序列$\langle \eta_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$ ，使得对每个 $\alpha < \lambda$, $U_\alpha = \{X \subseteq \kappa \mid \eta_\alpha \in j_W(X)\}$。令$\pi_\alpha$： $\kappa^{<\kappa} \to \kappa$满足 $[\pi_\alpha]_W = \eta_\alpha$。这 π_α证明了 $U_\alpha \leq_{\mathrm{RK}} W$。

(4) $\Rightarrow$ (2)。让我们对基数 λ 使用归纳法来论证这一点。

情形 $\lambda = \aleph_0$：令 $\langle U_n \mid n < \omega \rangle$ 为 κ 上的 κ-完备超滤子。对于每个 $n < \omega$，我们通过取乘积来构造 κ^{n+1} 上的辅助超滤子：

$$\bar{U}_n := \bigotimes_{m \leq n} U_m.$$

对于每个 $n < \omega$，令 φ_n: $\kappa^{n+1} \leftrightarrow \kappa$ 为一个双射，并令 $W_n := (\varphi_n)_*(\bar{U}_n)$。

由于 $\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$ 是 $\aleph_0$-有向的，我们可以找到 W^* 和函数 $\pi_n \colon \kappa \to \kappa$，以见证 $W_n \leq_{\mathrm{RK}} W^*$.。对于每个 $n < \omega$，令 $\sigma_n := j_{W^*}(\pi_n)([\mathrm{id}]_{W^*})$。注意， $j_{W^*}(\varphi_n)^{-1}(\sigma_n)$ 是一个低于 $j_{W^*}(\kappa)$ 的序数递增序列 $\langle \eta^n_m \mid m \leq n \rangle$ 。此外，对于每个 $m \leq n$， U_m 可以表示为

$$U_m = \{X \subseteq \kappa \mid \eta^n_m \in j_{W^*}(X)\}.$$

定义 $\eta_m := \min\{\eta^n_m \mid m \leq n < \omega\}$. 显然，对于所有$m < \omega$， $\eta_m < \eta_{m+1}$ 。因此，我们得出结论： κ 具有 $\aleph_0$-GP。

Inductive step: Suppose that $\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$ is λ-directed.

►$_1$ 首先假设 λ 是一个极限基数。令 $\langle U_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$ 为 κ-完备超滤子。根据归纳假设， κ 具有通过超滤的 $<\lambda$-GP。

对于每个 $\omega \leq \alpha < \lambda$ ，利用通过超滤的 α-GP，找到一个定义在 $\kappa^{<\kappa}$ 上的 κ-完备超滤子 W_α 以及一个递增种子序列 $\langle \eta^\alpha_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ ，使得对于所有 $\beta < \alpha$. ，$U_\beta = \{X \subseteq \kappa \mid \eta^\alpha_\beta \in j_{W_\alpha}(X)\}$ 。对于每个 $\alpha < \lambda$，取一个¯ ¯双射 φ: $\kappa^{<\kappa} \leftrightarrow \kappa$ ，并诱导出超滤子 $W_\alpha := \varphi_* W_\alpha$. 。现在这些 W_α都是定义在 κ上的超滤子，因此我们可以利用_的 λ-有向性$\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$来找到一个 $W^* \in \mathfrak{U}_\kappa$，它在 $\leq_{\mathrm{RK}}$意义下大于所有 W_α。

上述讨论得出如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j_{W^*}} & M_{W^*} \\ {\scriptstyle j_{W_\alpha}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle k_\alpha} \\ M_{W_\alpha} & \xrightarrow[\bar{k}_\alpha]{} & M_{\bar{W}_\alpha}. \end{array}$$

¯对于每个 $\beta < \alpha < \lambda$，记 $\sigma^\alpha_\beta := (k_\alpha \circ \bar{k}_\alpha)(\eta^\alpha_\beta)$。由于 $\langle \eta^\alpha_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ 是递增序列，因此 $\langle \sigma^\alpha_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ 也是递增序列。

沿交换图追踪可得

$$U_\beta = \{X \subseteq \kappa \mid \sigma^\alpha_\beta \in j_{W^*}(X)\}.$$

给定 $\beta < \lambda$，上述结论对所有 $\alpha \in (\beta, \lambda)$ 都成立。因此，与之前一样，只需证明可以选取一个递增的序列 $\langle \sigma^{\alpha_\beta}_\beta \mid \beta < \lambda\rangle$。不过，取 $\eta_\beta := \min\{\sigma^\alpha_\beta \mid \beta < \alpha < \omega_1\}$ 即可轻易保证这一点。

►2 假设 λ 是一个后继基数，μ^+。由归纳假设，κ 具有通过超滤的 μ-GP，因而也具有通过超滤的 $<\mu^+$-GP。利用这一点，可以完全按照之前的论证证明 κ 具有 μ^+-GP。□

Kunen [Ket72，定理 2。3] 以及独立地，Comfort–Negrepontis[CN72，定理 4。3] 证明了，如果 κ 是 κ-紧的，那么 $\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}}\rangle$ 是 $(2^\kappa)^+$-有向的，因此它具有通过超滤的 2^κ-GP。这一观察改进了 [HP24，定理 4。2]该定理确立了此类基数具有 2^κ-GP。此外请注意，这意味着一个 κ-紧基数不能构成反例，来反驳我们的猜想：即 κ^+-GP 并不蕴含通过超滤的 κ^+-GP。

5. The Gluing Poset

设定。在本节中，我们假设 κ是一个可测基数，并且 $\mathcal{U} = \langle U(\alpha,\zeta) \mid \alpha \leq \kappa, \zeta < o^{\mathcal{U}}(\alpha)\rangle$ 是一个相干测度序列，满足对所有 $\alpha < \kappa$，都有 $o(\alpha) < \alpha$。

令 $\mathbb{S}$ 为添加快速函数 ℓ：$\kappa \to H(\kappa)$的强迫，其条件是带有非平稳支撑（定义 2.7）的偏函数 s：$\kappa \to H(\kappa)$。下文中，我们将在 $V[S]$ 内进行讨论，其中 $S \subseteq \mathbb{S}$ 是一个V-泛型滤子，而 $\ell := \bigcup S$ 是由此导出的泛型快速函数。对每个$\alpha < \kappa$ 不可达基数，我们用 S_α 表示由S导出的、在 V 上的 $\mathbb{S}_\alpha$-泛型滤子。我们通过对 $\alpha < \kappa$作归纳，定义一个由 Prikry 型强迫 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\beta \mid \beta < \alpha \leq \kappa\rangle$ 组成的非平稳支撑迭代，如下所述。假设 $\mathbb{P}_\alpha$已定义。如果 α 在 V 中不可测，则令 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 为平凡强迫的标准$\mathbb{P}_\alpha$-名称。否则，我们仿照 Gitik 的风格，按 α 的“序”递归定义 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ [Git86]（另见 [BNU17, §4]）。适用于我们目的的“α的序”的精确定义，是 α通常 Mitchell 序的一种变体。为介绍这一概念，我们先回顾[HP24, 定理 6.21]中引入的 α 上测度编码的概念。

定义 5.1（编码）。在 $V[S_\alpha]$ 中，我们称一个五元组

$$c = \langle \vec{\rho}, \vec{\zeta}, \vec{a}, f, g\rangle$$

是关于 上测度的编码 α，如果存在 $n \geq 1$ 使得以下条件成立（使用定义 2.12中的记号）：

(1) $\vec{\rho} = \langle \rho_0, \ldots, \rho_{n-1}\rangle$，其中 ρ_i：$\alpha^i \to (\alpha+1)$ 且 $\rho_0(\langle\rangle) := \alpha$。

(2) $\vec{\zeta} = \langle \zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}\rangle$ 是一个序数序列 $\leq \alpha$。

(3) $\vec{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle$ 是一个函数序列 a_i: $\alpha^i \to H(\alpha^+)$。(4) f: $\alpha^n \to \mathbb{P}_{\alpha\circ}$ (5) g: $\alpha^n \to \alpha_\circ$ (6) 对每个 $i < n$, $\iota_i(\rho_i)(\langle \mu_j \mid j < i\rangle) = \mu_i$, 且 $\zeta_i < o^{\iota_i(\mathcal{U})}(\mu_i)$。

(此处 $\iota_{i,i+1}$: $\mathscr{N}_i \to \mathscr{N}_{i+1} \cong \mathrm{Ult}(\mathscr{N}_i, \iota_i(\mathcal{U})(\mu_i, \zeta_i))$ $\mathscr{N}_0 := V$且 $\iota_0 := \mathrm{id}$.)

(7) 令 ι_n^* 为由 $\langle \bar{a}_i \mid i < n\rangle$确定的 ι_n 到 $V[S_\alpha]$ 的提升，其中$\bar{a}_i = \iota_i(a_i)(\langle \mu_j \mid j < i\rangle)$.[14] 令

$$r = \iota_n^*(f)(\langle \mu_i \mid i < n\rangle),\ \varepsilon = \iota_n^*(g)(\langle \mu_i \mid i < n\rangle),$$

并令 $\dot{U}$ 为该集合在 $V[S_\alpha]$上的 $\mathbb{P}_\alpha$-名称

$$\begin{aligned}\dot{U} \quad = \quad \{\dot{X}_{S_\alpha * \dot{G}_\alpha} \subseteq \alpha \mid \quad & \exists p \in \dot{G}_\alpha\ \exists s \in \iota_n^*(\mathbb{P}_\alpha),\\ & s \leq^*_{\Gamma^{\iota_n}} \iota_n^*(p) \wedge r, s \in \mathscr{N}_n,\\ & \mathscr{N}_n \models s \Vdash_{\iota_n^*(\mathbb{P}_\alpha)} \varepsilon \in \iota_n^*(\dot{X})\}.\end{aligned}$$

那么，事实确实如此。

$$\mathbb{1} \Vdash^{V[S_\alpha]}_{\mathbb{P}_\alpha} \text{“}\dot{U} \text{ is an } \alpha\text{-complete ultrafilter on } \alpha\text{”}.$$

在上述情形下，我们称 $\dot{U}$由 $\langle \vec{\rho}, \vec{\zeta}, \vec{a}, f, g\rangle$编码。为使表述更简洁，我们称 $c = \langle \vec{\rho}, \vec{\zeta}, \vec{a}, f, g\rangle$ 为一个 α-编码，而不称其为 α上的测度编码。

备注 5.2. 注意， α编码 $c = \langle \vec{\rho}, \vec{\zeta}, \vec{a}, f, g\rangle$ 总是属于 $H(\alpha^+)^V$。因此， c 是 $s(\alpha)$ 的一个合法选择，因为它是快速函数强迫 $\mathbb{S}$中的一个条件。还要注意，编码在以下意义下是绝对的：如果 $\mathscr{M} \subseteq V[S_\alpha]$ 是一个 κ-闭内模型，并且其中有 $\mathscr{M} \models$ “c 是一个编码”，那么从 c 解码出的测度在 $V[S_\alpha * G_\alpha]$ 和 $\mathscr{M}[G_\alpha]$中相同。即将给出的编码引理（见引理 6.1）将表明， $V[S_\alpha * G_\alpha]$ 中的每个α-完备超滤子在 α 上都具有一个编码。这将为泛型扩张 $V[S_\alpha * G_\alpha]$.中的 α-完备超滤子（因此也包括不一定正规的超滤子）提供一个完整刻画。

有了编码这一概念后，我们给出可测基数 α 上 Mitchell 序的一种变体。回顾一下， ℓ: $\kappa \to H(\kappa)$ 是固定的。

定义 5.3。 设 Ω 是一个非零序数。若

$$\mathbb{1} \Vdash^{V[S_\alpha]}_{\mathbb{P}_\alpha} \text{“}\ell(\alpha) = \langle \langle c_\beta \mid \beta < \omega^\Omega\rangle, \langle \zeta^\rho_\beta \mid 1 \leq \rho < \Omega \wedge \omega^\rho \cdot \beta < \omega^\Omega\rangle\rangle\text{”},$$

且以下性质成立：

(1) $\langle c_\beta \mid \beta < \omega^\Omega\rangle$ 被强制设为一个由 α编码组成的序列。(2) $\zeta^\rho_\beta < o^V(\alpha)$，并且如果$\iota_\alpha$, ζ^ρ_β: $V \to \mathscr{N}_\alpha$, $\zeta^\rho_\beta \simeq \mathrm{Ult}(V,\ U(\alpha,\ \zeta^\rho_\beta))$, 那么：(a) $\mathscr{N}_\alpha$, $\zeta^\rho_\beta[\iota_\alpha, \zeta^\rho_\beta(S_\alpha)] \models$ “$\mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \vec{c}^{\,\rho}_\beta$ 是 α编码”。

[14] 由引理 2.15 可知，这样的提升存在——它是唯一的，且可在 $V[S_\alpha]$ 中定义。事实上，这样的提升由 ι_n、 $\mathbb{S}_\alpha$-泛型 S_α 以及序列 $\langle \bar{a}_i \mid i < n\rangle \in \prod_{i<n} H(\mu_i^+)^V$确定。这里我们取 $\bar{a}_i$ 为 $\iota_i(a_i)(\langle \mu_j \mid j < i\rangle$。

(b) $\iota_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}(\ell)(\alpha) = \langle \vec{c}^\rho_\beta, \vec{\zeta}^\rho_\beta \rangle$.

(c) $\langle U(\alpha,\zeta) \mid \zeta \in \vec{\zeta}^\rho_\beta \rangle \in \mathscr{N}_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}$.

上面我们使用了以下记号：

- $\vec{c}^\rho_\beta := \langle c_\gamma \mid \gamma \in [\omega^\rho \cdot \beta, \omega^\rho \cdot (\beta+1)) \rangle$.
- $\vec{\zeta}^\rho_\beta := \langle \zeta^\sigma_\gamma \mid 1 \leq \sigma < \rho \wedge \gamma \in [\omega^\sigma \cdot \beta, \omega^\sigma \cdot (\beta+1)) \rangle \rangle$.

我们称 α 具有 ℓ-序 Ω，如果 $o^\ell(\alpha) = \Omega$。同样地，如果对于任意序数 Ω，都有 > 0、$o^\ell(\alpha) = \Omega$ 不成立，我们就称 α 具有ℓ-序 0（记作 $o^\ell(\alpha) = 0$）。

例如，$o^\ell(\alpha) = 1$ 意味着 $\mathbb{P}_\alpha$ 强迫（在 $V[S_\alpha]$ 上）$\ell(\alpha) = \langle c_n \mid n < \omega \rangle$ 是一个 α-编码序列。同样，$o^\ell(\alpha) = 2$ 意味着 $\mathbb{P}_\alpha$强迫（在 $V[S_\alpha]$ 上）$\ell(\alpha) = \langle \langle c_\beta \mid \beta < \omega^2 \rangle, \langle \zeta_\beta \mid \beta < \omega \rangle \rangle$——前者是一个 α-编码序列，后者则见证了

$$\mathscr{N}_{\alpha,\zeta_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta_\beta}(S_\alpha)] \models \text{“}\alpha \text{ has } \iota_{\alpha,\zeta_\beta}(\ell)\text{-order 1”}.$$

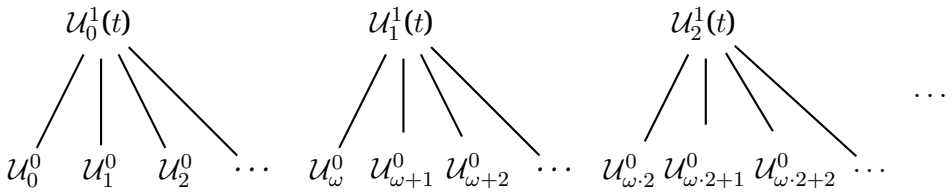


FIGURE 1. $o^\ell(\alpha) = 2$.

图 1 展示了 $o^\ell(\alpha) = 2$的情形。底部的超滤子 $\mathcal{U}^0_\beta$ 是从给定的编码 c_β 中在 $V[S_\alpha * G_\alpha]$ 解码得到的。对于底部每个 ω块测度，V测度 $U(\alpha,\zeta_\beta)$ 在 $V[S_\alpha]$ 中唯一扩张为一个 α完全超滤子 $\mathcal{U}^1_\beta$——请回想，得益于非平稳支撑，这种提升完全由 $\iota_{\alpha,\zeta_\beta}$“$S_\alpha$和 $\iota_{\alpha,\zeta_\beta}(\ell)(\alpha) = \langle \vec{c}^1_\beta, \varnothing \rangle$ 决定（引理 2.15）。我们将把每个 $\mathcal{U}^1_\beta$ 扩张为 $V[S_\alpha * G_\alpha]$ 内部的一个 α完全超滤子 $\mathcal{U}^1_\beta(t)$。与 [Git86], 一样，这些扩张将取决于有限递增序列 t，这些序列适用于相对于测度 $\langle \mathcal{U}^0_{\omega\cdot\beta+m} \mid m < \omega \rangle$ 的树 Prikry 强迫。接着，我们定义一个偏序集 $\mathbb{G}^2_\alpha$，它基于“阶 1”测度 $\mathcal{U}^1_\beta(t)$ 和“阶 0”测度 $\mathcal{U}^0_\beta$。在用 $\mathbb{G}^2_\alpha$ 强迫之后，我们将证明 $\langle \mathcal{U}^0_\beta \mid \beta < \omega^2 \rangle$ 通过一个定义在 α^{ω^2}上的 α完全超滤子粘合起来

注记5.4。我们指出与 Gitik 在 [Git86] 中的设定有两处不同。首先，Gitik 拥有一条相干测度序列 $\mathcal{U}$，一直延伸到 κ，因此每个序都有一个测度。相反，在这里，我们把给定的超滤子想象成 $\mathcal{U}^0_\beta$ 仿佛它们的“Mitchell 序”为 0。第二个更为实质性的差异如下：待粘合的超滤子（即 $\mathcal{U}^0_\beta$）可能并非

正规，因此它们的扩张 $\mathcal{U}^1_\beta(\varnothing)$ 也可能不正规。这是与 Gitik 在 [Git97] 中的迭代的一个关键区别。正规性对于断言 8.2.2 的证明至关重要，而该断言又是证明 $\aleph_0$-GP 不成立（定理 8.1）的关键。

我们迭代的 α 阶段按照 ℓ 对 α 的序定义如下

$$\mathbb{1} \Vdash^{V[S_\alpha]}_{\mathbb{P}_\alpha} \text{“}\dot{\mathbb{Q}}_\alpha = \dot{\mathbb{G}}^{o^\ell(\alpha)}_\alpha\text{”},$$

其中 $\mathbb{G}^{o^\ell}{}_{(\alpha)\alpha}$ 表示粘合偏序集，它将通过对 $o^\ell(\alpha)$ 进行递归来定义。

定义 5.5. 在 $V[S_\alpha]$ 中，若 $o^\ell(\alpha) \in \{0,1\}$，则令

$$\dot{\mathbb{G}}^{o^\ell(\alpha)}_\alpha := \begin{cases} \{\mathbb{1}\}, & \text{if } o^\ell(\alpha) = 0; \\ \mathbb{T}(\langle \dot{\mathcal{U}}_n \mid n < \omega \rangle), & \text{if } o^\ell(\alpha) = 1, \end{cases}$$

其中 $\langle \mathcal{U}_n \mid n < \omega \rangle$ 是标准的 $\mathbb{P}_\alpha$-名称（在 $V[S_\alpha]$ 上），对应于从 $\ell(\alpha)$ $= \langle c_n \mid n < \omega \rangle$. 中提及的每个 α-编码解码得到的 ω-测度序列 c_n

注 5.6. 我们强调，$\mathbb{G}^{o^\ell}{}_{(\alpha)\alpha}$ 的定义不仅取决于 α 的 ℓ-序，还取决于 $\ell(\alpha)$ $_n \mid n < \omega\rangle$ 所携带的信息（即编码）。然而，由于 ℓ 从一开始便已固定，我们将不再强调其对 $\langle \ell(\alpha)$ 的依赖。

当 $o^\ell(\alpha) = 1$, $\mathbb{G}^1_\alpha$ 只是 [常见的树 *Prikry* 强迫HP24 中所用的那种时，定理 6.21]。在 $o^\ell(\alpha) \geq 2$ 的情形下，粘合偏序集的定义是按照 [Git86] 的方式递归得到的。为了让构造更加清晰，我们详细说明 $o^\ell(\alpha) = 3$ 的情形，然后再推广到一般情形。对于每个可测基数 $\bar{\alpha} < \alpha$，我们将闭无界集 $\mathbb{G}^{o^\ell}{}_{(\bar{\alpha})}$ $_\alpha$ 记作 $c_{\bar{\alpha}}$，它在 $V[S_{\bar{\alpha}} * G_{\bar{\alpha}}]$ 上是泛型的。

我们首先引入 ℓ-相容性的概念，它是 Gitik 在 [Git86，§3]: 中提出的相容性概念的自然改编

定义 5.7 (ℓ-相容性)。设 $\rho \leq o^\ell(\alpha)$ 是一个序数。序数递增序列 $t = \langle \alpha_0, \ldots\ldots, \alpha_{k-1} \rangle \in [\alpha]^{<\omega}$ 称为 (ρ, ℓ)-相容的，如果：

(1) t 是空序列，$\varnothing$，当 $\rho = 0$时。(2) 对每个指标 $i < k$，$o^\ell(\alpha_i) < \rho$，(3) 对每个 $0 < i < k$，令 $n_i \leq i$ 表示满足以下条件的第一个指标：对所有 $j \in [n_i, i)$，$o^\ell(\alpha_j) < o^\ell(\alpha_i)$。我们有两个选项：

(a) $n_i < i$: 在这种情况下，我们要求

$$\bigcup_{j \in [n_i, i)} (b_{\alpha_j} \cup \{\alpha_j\}) \sqsubseteq b_{\alpha_i}.$$

(b) $n_i = i$: 那么，我们要求 α_i 上的泛型闭无界集从 α_{i-1} 之后开始：

$$\min(b_{\alpha_i}) > \alpha_{i-1}.^{15}$$

[15]注意，在这种情况下，$o^\ell(\alpha_{i-1}) \geq o^\ell(\alpha_i)$。

为使表述简洁，我们将（ρ, ℓ）-相干序列简称为 ρ-相干序列。注意，当且仅当 t 是一个由小于 α的序数组成的递增序列时， t 才是 1-相干的。

定义 5.8（投影）。设 $t = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \rangle$ 是一个 ρ-相干序列，并且 $\sigma < \rho$。t 到 σ 的投影是如下序列

$$t \restriction \sigma := \langle \alpha_{n_\sigma}, \dots, \alpha_{k-1} \rangle$$

其中 $n_\sigma \leq k$ 是满足对所有 $i \in [n_\sigma, k$ 都有 $o^\ell(\alpha_i) < \sigma$ 的最小指标。

由于我们允许 $n_\sigma = k$，限制 $t \restriction \sigma$ 可能为空。稍加思考便可看出， $t \restriction \sigma$ 是 σ-相干的。

定义 5.9。设 t 是一个 ρ-相干序列。

(1) t, b_t 的*Magidor/Gitik* 泛型序列是 $\bigcup_{i<|t|}(b_{\alpha_i} \cup \{\alpha_i\})$。**(2)** 若序列 $\langle o^\ell(\alpha_i) \mid i < |t| \rangle$ 是 $\leq$-弱递减的，则 t 是极大的。**(3)** 若 $\sigma < \rho$，则 ℓ 中 t 内 σ 阶的序数集合为

$$t_\sigma := \{\alpha \in t \mid o^\ell(\alpha) = \sigma\}.$$

(4) 给定另一个 ρ-相干序列 s，若 t 和 s 产生相同的 Gitik 泛型序列——也就是说， $b_t = b_s$.，则称它们等价

注记5.10。每个 ρ-相干序列都等价于一个极大 ρ-相干序列。思路如下：对每个 $i < |t|$ ，都可以将 t 中的序数块 $b = \langle \alpha_{n_i}, \dots, \alpha_i \rangle$ “压缩”为 $\langle \alpha_i \rangle$ ，同时仍保持 ρ-相容性。关键在于， α_i 携带的 Gitik 序列与 c_b相同。因此，就泛型对象而言，序数 $\langle \alpha_{n_i}, \dots, \alpha_{i-1} \rangle$ 所携带的信息是冗余的。

令 $G_\alpha \subseteq \mathbb{P}_\alpha$ 为 $V[S_\alpha]$上的 $\mathbb{P}_\alpha$-泛型滤子。那么，

$$V[S_\alpha * G_\alpha] \models \text{“}\ell(\alpha) = \langle \langle c_\beta \mid \beta < \omega^3 \rangle, \langle \zeta^1_\beta \mid \beta < \omega^2 \rangle, \langle \zeta^2_\beta \mid \beta < \omega \rangle \rangle\text{”}$$

其中第一个是由 α-编码组成的序列，另外两个是关于 V-测度的序 $U(\alpha, \zeta^\rho_\beta)$ 的序列，并满足以下条件：

(†) $$\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}(S_\alpha) * G_\alpha] \models \text{“}\vec{c}^{\,\rho}_\beta \text{ are } \alpha\text{-codes”},$$

$$\iota_{\alpha,\zeta^1_\gamma}(\ell)(\alpha) = \langle \vec{c}^{\,1}_\gamma, \varnothing \rangle \text{ and } \iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(\ell)(\alpha) = \langle \vec{c}^{\,2}_\beta, \vec{\zeta}^{\,2}_\beta \rangle,$$

并且对所有 $\beta < \omega$., $\langle U(\alpha, \zeta) \mid \zeta \in \vec{\zeta}^{\,1}_\beta \rangle \in \mathscr{N}_{\alpha,\, \zeta^2_\beta}$

(参见定义 5.3 以恢复记号 $\vec{c}^{\,\rho}_\beta$ 和 $\vec{\zeta}^{\,\rho}_\beta$ 。**)**

定义 5.11 (测度**)**。

(1) 对于每个 $\beta < \omega^3$，用 $\mathcal{U}^0_\beta$ 表示从编码 c_β 中（在 $V[S_\alpha * G_\alpha]$ 内）解码得到的 α-完备测度（定义在 α 上）。

(2) 对于每个 $\rho\in\{1,2\}$，并设 β 满足 $\omega^\rho\cdot\beta<\omega^3$，令

$$\mathcal{U}^\rho_\beta:=\{X\subseteq\alpha\mid\alpha\in\iota_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}(X)\},$$

其中 $\iota_{\alpha,\ \zeta^\rho_\beta}:V[S_\alpha]\to\mathscr{N}_{\alpha,\ \zeta^\rho_\beta}[H_\alpha]$ 是由 $U(\alpha,\ \zeta^\rho_\beta)$ 生成的超幂嵌入的唯一（$V[S_\alpha]$-内模型）提升，且满足

$$\iota_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}(\ell)(\alpha)=\langle\vec{c}^{\,\rho}_\beta,\vec{\zeta}^{\,\rho}_\beta\rangle.$$

备注 5.12。由于 $\iota_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}$ 是由正规测度 $U(\alpha,\zeta^\rho_\beta)$ 生成的超幂嵌入，而 $\mathbb{S}_\alpha$ 是一种条件具有非平稳支集的强迫，因此 $\iota_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}$ 的任何提升都完全由 $\iota_{\alpha,\zeta_\beta}$“$S_\alpha$ 和 $\iota_{\alpha,\zeta_\beta}(\ell)(\alpha)$ 决定。此外，可以证明 $\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}(S_\alpha)]$ 是 α-闭的 $V[S_\alpha]$ 内模型——证明这一点需要使用 $\mathbb{S}_\alpha$ ([HP24，命题 6.21.1]) 的融合性质。

需要强调的是，在环境宇宙 $V[S_\alpha*G_\alpha]$ 和内模型 $\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}(S_\alpha)*G_\alpha]$ 中，测度 $\mathcal{U}^0_\beta$'s 的解码方式相同。（这是因为 $\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta^\rho_\beta}(S_\alpha)]$ 是 $V[S_\alpha]$ 的一个 α-闭内模型。）此外，请注意，尽管 $\mathcal{U}^0_\beta$ 是 $V[S_\alpha*G_\alpha]$ 中的测度，它们的伴随对象 $\mathcal{U}^\rho_\beta$'s 却是 $V[S_\alpha]$ 中的测度。因此，在接下来对粘合偏序集 $\mathbb{G}^3_\alpha$ 的递归构造中，我们保持 $\mathcal{U}^0_\beta$ 不变，并将 $\mathcal{U}^\rho_\beta$'s 提升到 $V[S_\alpha*G_\alpha]$。

偏序集 $\mathbb{G}^3_\alpha$ 将被设计为把 $\langle\mathcal{U}^0_\beta\mid\beta<\omega^3\rangle$ 粘合到 α^{ω^3} 上的一个测度。

ℓ-阶 0：对于每个 $\beta<\omega^3$，令 $\mathbb{G}^0_{,\ \alpha^\beta}$为平凡强迫。

ℓ-阶 1：对于每个 $\beta<\omega^2$，定义（在 $V[S_\alpha*G_\alpha]$中） $\mathbb{G}^1_{,\ \alpha^\beta}$如下。

定义 5.13。 $\mathbb{G}^1_{,\ \alpha^\beta}$中的条件是形如 $\langle t,\ T\rangle$ 的有序对，其中 $t\in[\alpha]^{<\omega}$ 是一个 1-相干序列，T 是定义在 $[\alpha]^{<\omega}$ 上的树，并满足以下性质：(1) $\varnothing\in T$ 及每个 $s\in T$ 都是 1-相干的；(2) 对所有 $s\in T$，$t^\frown s$ 都是 1-相干的（即递增的）；(3) 对每个 $s\in T$，$\mathrm{Succ}_T(s)\in\mathcal{U}^0_{\omega\cdot\beta+|t^\frown s|}$。

$\mathbb{G}^1_{,\ \alpha^\beta}$中条件之间的序是自然的。

因此，$\mathbb{G}^1_{,\ \alpha^\beta}$是相对于第 β 块测度的树 Prikry 强迫

$$\langle\mathcal{U}^0_{\omega\cdot\beta+m}\mid m<\omega\rangle.$$

对于每个 1-相干序列 t，我们将 $\mathcal{U}^1_\beta$扩张至 $\mathcal{U}^1_\beta(t)$，使其成为泛型扩张 $V[S_\alpha*G_\alpha]$中的一个测度。为此请注意，我们对 ζ^1_β的选择保证了 $\iota_{\alpha,\ \zeta^1_\beta}(\ell)$-序 α 在 $\mathscr{N}_{\alpha\Vdash\ \zeta^1_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta^1_\beta}(S_\alpha)]$为 1——这一点由 $\vec{c}^{\,1}_\beta$中的编码见证（参见第 †页上的 (22)）。特别地，$\{\nu<\alpha\mid o^\ell(\nu)=1\}\in\mathcal{U}^1_\beta$.

由初等性，$\mathscr{N}_{\alpha,\ \zeta^1_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta^1_\beta}(S_\alpha)*G_\alpha]$认为，迭代的第 α 阶段 $\iota_{\alpha,\ \zeta^1_\beta}(\mathbb{P}_\alpha)$ 恰好是相对于从 $\vec{c}^{\,1}_\beta$ 中的 α-编码解码得到的测度所定义的树 Prikry 强迫。更明确地说，

$$\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^1_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta^1_\beta}(S_\alpha)*G_\alpha]\models\text{“}\mathbb{Q}_\alpha=\mathbb{G}^{1,\beta}_\alpha\text{”}.$$

（$\mathbb{G}^1_{,\ \alpha}{}^{\beta}$与在 $\mathscr{N}_{\alpha,\ \zeta^1_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta^1_\beta}(S_\alpha)\ *G_\alpha]$ 和在 $V[S_\alpha * G_\alpha]$ 中计算的结果相同。）

定义 5.14. 在 $V[S_\alpha * G_\alpha]$ 中，令 $\mathcal{U}^1_\beta(t)$ 为所有满足以下条件的 $\dot{X}_{G_\alpha} \subseteq \alpha$ 的集合：存在 $p \in G_\alpha$ 和 $\langle t, T\rangle \in \mathbb{G}^1_{,\alpha}{}^{\beta}$，使得

$$\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^1_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta^1_\beta}(S_\alpha)] \models \text{“}p^\frown\langle t,T\rangle^\frown\iota_{\alpha,\zeta^1_\beta}(p)\setminus(\alpha+1) \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \alpha \in \iota_{\alpha,\zeta^1_\beta}(\dot{X})\text{”}.$$

下一个事实是显然的：

引理 5.15. 在 $V[S_\alpha * G_\alpha]$ 中，$\mathcal{U}^1_\beta(t)$ 是一个定义在 α 上、扩张 $\mathcal{U}^1_\beta$ 的 α-完备超滤子。此外，$\mathcal{U}^1_\beta(t) \ni \{\nu < \alpha \mid o^\ell(\nu) = 1 \wedge t \sqsubseteq b_\nu\}$. □

接下来，我们证明测度 $\mathcal{U}^1_\beta(t)$ 的一个额外性质；该性质将在证明粘合性质的相容性时发挥作用。

引理 5.16. 设 β、$m < \omega$ 和 $A \in \mathcal{U}^0_{\omega\cdot\beta+m}$。那么，对于每个满足 $|t| = m$ 的 t，

$$\{\nu < \kappa \mid \min(b_\nu)\setminus(\max(t)+1) \in A\} \in \mathcal{U}^1_\beta(t).$$

证明。假设该论题不成立，并令 $p \in G$ 和 T 为其见证。在 $V[S_\alpha * G_\alpha]$中工作，由于 $\mathrm{Succ}_T(\varnothing) \in \mathcal{U}^0_{\omega\cdot\beta+m}$，我们可以将 T缩减为另一个树 T^*，使得 $\mathrm{Succ}_{T^*}(\varnothing) \subseteq A$。必要时，通过延拓 $p \in G$，

$$p \Vdash_{\mathbb{P}_\kappa} \text{“}\langle t, \dot{T}^*\rangle \leq^* \langle t, \dot{T}\rangle\text{”}.$$

于是显然，$p^\frown\langle t,\ T^*\rangle^\frown\iota_{\alpha,\ \zeta^1_\beta}(p)\setminus(\alpha+1)$ 强迫 α属于该集合在 $\iota_{\alpha,\ \zeta^1_\beta}$-像中的元素——这与我们的假设产生矛盾。□

至此完成了 ℓ-阶 1 的粘合偏序集的定义。

<u>ℓ-阶 2：对于每个 $\beta < \omega$，在 $V[S_\alpha * G_\alpha]$中定义偏序集 $\mathbb{G}^2_{,\ \alpha}{}^{\beta}$：</u>

定义 5.17。 $\mathbb{G}^2_{,\ \alpha}{}^{\beta}$中的条件是二元组 $\langle t,\ T\rangle$，其中 $t \in [\alpha]^{<\omega}$是一个 2-相干序列，而 T 是 $[\alpha]^{<\omega}$ 上的一棵树，并满足以下性质：

(1) $\varnothing \in T$ 且每个 $s \in T$ 都是 2-相容的；(2) 对所有 $s \in T$，$t^\frown s$ 都是 2-相容的；(3) 对每个节点 $s \in T$，

$$\mathrm{Succ}_T(s) \in \mathcal{U}^0_{\omega^2\cdot\beta+\omega\cdot|(t^\frown s)_1|+|(t^\frown s)_0|} \cap \mathcal{U}^1_{\omega\cdot\beta+|(t^\frown s)_1|}((t^\frown s)\restriction 1),$$

其中 $(t^\frown s)_i$ 表示 ℓ阶 $t^\frown s$中的序数集合 i.

定义5.18。 给定 $\langle t, T\rangle \in \mathbb{G}^2_{,\alpha}{}^{\beta}$和 $\langle\nu\rangle \in T$，我们用 $\langle t, T\rangle^\frown\langle\nu\rangle$表示有序对 $\langle t^\frown\langle\nu\rangle, T_{\langle\nu\rangle}\rangle$，其中 $T_{\langle\nu\rangle} := \{s \in [\alpha]^{<\omega} \mid \langle\nu\rangle^\frown s \in T\}$.

对于一般的 $\vec{\nu} \in T$，通过显然的递归方式定义 $\langle t, T\rangle^\frown\vec{\nu}$。

注记 5.19。注意，$\langle t^\frown\langle\nu\rangle,\ T_{\langle\nu\rangle}\rangle$ 是 $\mathbb{G}^2_{,\ \alpha}{}^{\beta}$ 中的一个条件

定义 5.20. 对于 $q = \langle t,\ T\rangle$ 和 $q^* = \langle t^*,\ T^*\rangle$ 在 $\mathbb{G}^2_{,\ \alpha}{}^{\beta}$我们称：(1) q 和 q^* 是等价的，当且仅当 t 和 t^* 等价[16] 和 $T = T^*$。

[16]参见定义 5.9。

(2) $q^* \leq^* q$ 当 $t = t^*$ 且 $T^* \subseteq T$ 时。(3) $q^* \leq q$ 当存在 $\vec{\nu} \in T$ 且 $\bar{q}$ 与 $q^\frown\vec{\nu}$ 等价，使得 $q^* \leq^* \bar{q}$。

对于每个 2-相干序列 t，令我们将 $\mathcal{U}^2_\beta$ 延拓为 $\mathcal{U}^2_\beta(t)$。

引理 5.21。$\mathscr{N}_{\alpha,\,\zeta^2_\beta[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha)]} \models$ "α 具有 $\iota_{\alpha,\,\zeta^2_\beta}(\ell)$-序 2"。

特别地，$\iota_{\alpha,\,\zeta^2_\beta}(\mathbb{P}_\alpha)$ 在阶段 α 为偏序集 $\mathbb{G}^{2,\,\beta}_{\alpha}$ 选择

证明。让我们检查定义5.3中的子句。

条款 (1)： 根据我们关于 ζ^2_β 的假设，我们知道 $\mathbb{P}_\alpha$ 强迫（在模型 $\mathscr{N}_{\alpha,\,\zeta^2_\beta[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha)]}$ 上） $\vec{c}^{\,2}_\beta = \langle c_\gamma \mid \gamma \in [\omega^2\cdot\beta, \omega^2\cdot(\beta+1))\rangle$ 是一个由 α-编码组成的序列。

子句 2(a)： 我们必须证明 $\mathscr{N}_{\alpha,\,\zeta^2_\beta[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha)]}$ 认为，对于每个 $\omega\cdot\beta \leq \gamma < \omega\cdot(\beta+1)$,

$$(\otimes) \qquad \mathscr{N}_{\alpha,\zeta^1_\gamma[\iota_{\alpha,\zeta^1_\gamma}(S_\alpha)]} \models \text{“}\mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \text{“}\iota_{\alpha,\zeta^1_\gamma}(\ell)(\alpha) = \vec{c}^{\,1}_\gamma \text{ are } \alpha\text{-codes”}.$$

注意，根据我们的假设 $o^\ell(\alpha) = 3.$，$(\otimes)$ 在 $V[S_\alpha]$ 中成立。问题在于，$(\otimes)$ 在内模型 $\mathscr{N}_{\alpha,\,\zeta^2_\beta[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha)]}$ 中是否也成立。

任取这样的 γ。那么，由 ζ^2_β 的选取可知，$U(\alpha,\ \zeta^1_\gamma) \in \mathscr{N}_{\alpha,\,\zeta^2_\beta}$。回想一下，$\mathcal{U}^1_\gamma$ 是 $U(\alpha,\ \zeta^1_\gamma)$ 的唯一提升，其中泛型对象 $\iota^{\alpha}_{\zeta^1_\gamma}(\ell)$ 在坐标 α 处的值为 $\vec{c}^{\,1}_\gamma$。更严谨地说，集合 $X \in \mathcal{P}(\alpha)^{V[S_\alpha]}$ 属于 $\mathcal{U}^1_\gamma$ 当且仅当存在一个条件 $p \in S_\alpha$，使得

$$\iota_{\alpha,\zeta^1_\gamma}(p) \cup \{\langle \alpha, \vec{c}^{\,1}_\gamma\rangle\} \Vdash_{\iota_{\alpha,\zeta^1_\gamma}(\mathbb{S}_\alpha)} \alpha \in \iota_{\alpha,\zeta^1_\beta}(\dot{X}).$$

由于这一提升由 $\iota_{\alpha,\zeta^1_\gamma}$“$S_\alpha$ 和 $\vec{c}^{\,1}_\gamma$ 唯一确定，且模型 $\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^2_\beta[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha)]}$ 知道这些参数，因此

$$\mathcal{U}^1_\gamma = (\mathcal{U}^1_\gamma)^{\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^2_\beta[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha)]}} \in \mathscr{N}_{\alpha,\zeta^2_\beta[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha)]}.$$

由于 $\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^1_\gamma[\iota_{\alpha,\zeta^1_\gamma}(S_\alpha)]}$ 是由 $\mathcal{U}^1_\gamma$ 得到的超幂，因此在 $\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^2_\beta[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha)]}$ 内部也会以相同方式计算。最后，由于 $(\otimes)$ 在宇宙 $V[S_\alpha]$ 中成立，它在 $\mathscr{N}_{\alpha,\,\zeta^2_\beta[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha)]}$ 中也必定成立，正如所需。

子句 2(b) 和 2(c)： 由第 † 页的方程 (†) 立即可得 22。

由上述所有内容可推知

$$\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^2_\beta[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha)]} \models \text{“}\alpha \text{ has } \iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(\ell)\text{-order } 2\text{”},$$

正如 $\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(\ell)(\alpha) = \langle \vec{c}^{\,2}_\beta, \vec{\zeta}^{\,2}_\beta\rangle$. 所证明的

特别是，$\iota_{\alpha,\,\zeta^2_\beta}(\mathbb{P}_\alpha)$ 在阶段 α 选择偏序集 $\mathbb{G}^2_\alpha$，其计算方式见 $\mathscr{N}_{\alpha,\,\zeta^2_\beta[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha)]}$。这是使用以下内容定义的粘合偏序集：

(1) 从 $\vec{c}^{\,2}_\beta$ 解码出的测度 $\langle \mathcal{U}^0_{\omega^2\cdot\beta+\omega\cdot m+n} \mid n, m < \omega\rangle$。(2) 测度 $\langle \mathcal{U}^1_\gamma \mid \omega\cdot\beta \leq \gamma < \omega\cdot(\beta+1)\rangle$ 的“t-提升”。

注意，每个 $\mathcal{U}^1_\gamma$的“t-提升”都由 $\iota_{\alpha,\zeta^1_\gamma}$“$G_\alpha$ 和 t唯一确定；而且，由于 $\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^2_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha) * G_\alpha]$ 了解所有这些

$$\mathcal{U}^1_\gamma(t) = (\mathcal{U}^1_\gamma(t))^{\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^2_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha)*G_\alpha]}.$$

因此，$\mathbb{G}^2_\alpha$ 按照 $\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^2_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(S_\alpha) * G_\alpha]$ 恰好是偏序集$\mathbb{G}^{2,\beta}_\alpha$如定义 5.17 所述。□

设 $t \in [\alpha]^{<\omega}$ 是 2-相容的。我们如下将 $\mathcal{U}^2_\beta$ 提升到 $\mathcal{U}^2_\beta(t)$：

定义 5.22。在 $V[S_\alpha * G_\alpha]$ 中，令 $\mathcal{U}^2_\beta(t)$ 为所有满足以下条件的 $\dot{X}_{G_\alpha} \subseteq \alpha$ 的集合：存在 $p \in G_\alpha$ 和 $\langle t,\ T\rangle \in \mathbb{G}^{2,\beta}_\alpha$，使得

$$\mathscr{N}_{\alpha,\zeta^2_\beta}[\iota_{\alpha,\zeta^1_\beta}(S_\alpha)] \models \text{“}p^\frown\langle t, T\rangle^\frown \iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(p) \setminus (\alpha+1) \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \alpha \in \iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(\dot{X})\text{”}.$$

引理 5.23。在 $V[S_\alpha * G_\alpha]$ 中，$\mathcal{U}^2_\beta(t)$ 是 α-完备的超滤子，定义在 α 上并且扩张 $\mathcal{U}^2_\beta$。此外，$\mathcal{U}^2_\beta(t) \ni \{\nu < \alpha \mid o^\ell(\nu) = 2 \wedge t \sqsubseteq b_\nu\}$. □

下面是引理 5.16 的类似结果：

引理 5.24. 设 A 是关于 $\mathcal{U}^0_{\omega^2\cdot\beta+\omega\cdot m+n}$ 的一个大集。那么，对于每个满足 $|t_1| = m$ 和 $|t_0| = n$ 的2-相干序列 t，

$$\{\nu < \kappa \mid \min(b_\nu) \setminus (\max(t)+1) \in A\} \in \mathcal{U}^2_\beta(t).$$

证明。证明与引理 5.16 的证明类似：假设引理的结论不成立，并令 p，T 作为其见证。根据定义，

$$\mathrm{Succ}_T(\varnothing) \in \mathcal{U}^0_{\omega^2\cdot\beta+\omega\cdot m+n} \cap \mathcal{U}^1_{\omega\cdot\beta+m}(t\restriction 1).$$

引理 5.16 中的论证表明

$$A^* := \{\nu < \kappa \mid \min(b_\nu) \setminus (\max(t)+1) \in A\} \in \mathcal{U}^1_{\omega\cdot\beta+m}(t\restriction 1).$$

（注意，$t\restriction 1$对应于 ℓ-阶 0 的序数，因此 $|t\restriction 1| = n$。）

若 $S_0 \uplus S_1$ 是按 ℓ-序划分的 $\mathrm{Succ}_T(\varnothing)$ 的一个划分，则我们可以收缩S_0（分别地，S_1），使得 $S_0 \subseteq A$（分别地，$S_1 \subseteq A^*$）。令 T^* 为 T 相应的收缩。显然，$p^\frown\langle t,\ T^*\rangle^\frown\iota_{\alpha,\zeta^2_\beta}(p) \setminus (\alpha+1)$ 强迫与我们最初假设相反的结论。□

ℓ-序 3：现在正是定义所需粘合偏序集 $\mathbb{G}^3_\alpha$ 的时候：

定义 5.25。$\mathbb{G}^3_\alpha$ 中的条件是形如 $\langle t,\ T\rangle$ 的有序对，其中 $t \in [\alpha]^{<\omega}$ 是一个 3-相干序列，T 是定义在 $[\alpha]^{<\omega}$ 上的一棵树，并具有以下性质：

(1) $\varnothing \in T$ 和每个 $s \in T$ 都是 3-相干的；(2) 对所有 $s \in T$，$t^\frown s$ 都是 3-相干的；(3) 对每个节点 $s \in T$，$\mathrm{Succ}_T(s)$ 属于

$$\mathcal{U}^0_{\omega^2\cdot|(t^\frown s)_2|+\omega\cdot|(t^\frown s)_1|+|(t^\frown s)_0|} \cap \mathcal{U}^1_{\omega\cdot|(t^\frown s)_2|+|(t^\frown s)_1|}((t^\frown s)\restriction 1) \cap \mathcal{U}^2_{|(t^\frown s)_2|}((t^\frown s)\restriction 2),$$

其中 $(t^\frown s)_i$ 表示 $t^\frown s$ 中或 ℓ-序 i. 中的序数集合

条件之间的序如定义 5.20中所定义。

至此，我们完成了对 $o^\ell(\alpha)=3$ 时粘合偏序集的描述。现在简要讨论一般情形，即 $o^\ell(\alpha)=\rho<\alpha$。

假设我们已经定义了

$$\langle \mathbb{G}^{\sigma,\beta}_\alpha, \mathcal{U}^\sigma_\beta(t) \mid \sigma<\rho \wedge \omega^\sigma\cdot\beta<\omega^\rho \wedge t\in[\alpha]^{<\omega} \text{ is } \sigma\text{-coherent}\rangle$$

其中

▶ $\mathcal{U}^0_\beta$ 是从 c_β 中解码出的测度，位于 $V[S_\alpha * G_\alpha]$ 中；▶ $\mathcal{U}^\sigma_\beta$ 是由 $\iota_{\alpha,\ \zeta^\sigma_\beta}(\ell)(\alpha)$ $=\langle \vec{c}^{\,\sigma}_\beta,\ \zeta^\sigma_\beta\rangle$. 确定的，将 $U(\alpha,\ \zeta^\sigma_\beta)$ 提升到 $V[S_\alpha]$ 的结果

定义 5.26。 $\mathbb{G}^\rho_\alpha$ 中的条件是形如 $\langle t,\ T\rangle$ 的有序对，其中 $t\in[\alpha]^{<\omega}$ 是一个 ρ-相干序列，T 是 $[\alpha]^{<\omega}$ 上的一棵树，并且满足：

(1) $\varnothing\in T$ 以及每个 $s\in T$ 都是 ρ-相干的；(2) 对所有 $s\in T$，$t^\frown s$ 都是 ρ-相干的；(3) 对每个 $s\in T$，$\mathrm{Succ}_T(s)$ $\in\bigcap_{\sigma<\rho}\mathcal{U}^\sigma_{j_\sigma}((t^\frown s)\restriction\sigma)$，其中

$$j_\sigma := \mathrm{otp}\{\nu\in c_{t^\frown s}\mid o^\ell(\nu)=\sigma\}.$$

序 $\leq$和 $\leq^*$ 与定义 5.20中的相同。

注记 5.27。 任何两个形如 $\langle t、\ T\rangle$、$\langle t、\ S\rangle$ 的条件都是 $\leq^*$-相容的。此外，引理 5.23 和 5.24 的类似结论也适用于 $\mathbb{G}^\rho_\alpha$。

以上完成了对所有可能的ℓ-序的粘合偏序集的定义。因此，我们现在可以给出粘合迭代：

定义 5.28（粘合迭代）。 在 $V[S]$ 中，粘合迭代是非平稳支撑迭代 $\mathbb{P}_\kappa=\lim_{\longrightarrow}\langle\mathbb{P}_\alpha;\dot{\mathbb{Q}}_\alpha\mid\alpha<\kappa\rangle$ 其中

$$V[S_\alpha]\models \text{“}\mathbb{1}\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}\dot{\mathbb{Q}}_\alpha=\dot{\mathbb{G}}^{o^\ell(\alpha)}_\alpha\text{”}$$

对每个可测基数 $\alpha<\kappa$。

在定理 7.1 中，我们将证明，若 $o(\kappa)\leq\kappa$ 是不可数正则基数，那么在 $V[S]$ 上使用粘合迭代进行强迫后，可得到一个模型$V[S][G]$，使其满足 $<o(\kappa)$-GP。该证明的一个关键点是确保每个 κ-完备超滤子（在 κ上）在 $V[S][G]$ 中都存在一个符合定义 5.1含义的编码。这将在后文的§6中证明。

为简化记号，记粘合偏序集为 $\mathbb{G}_\alpha$ $\mathbb{G}^{o^\ell(\alpha)}_\alpha$。

L引理 5.29 (交的存在性)。 假设 $1\leq o^\ell(\alpha)<\alpha$。那么：*(1)* 如果 p、$q\in\mathbb{G}_\alpha$ 是相容条件，那么

$$b_{\mathrm{stem}(p)}\sqsubseteq b_{\mathrm{stem}(q)}\ \textit{or}\ b_{\mathrm{stem}(q)}\sqsubseteq b_{\mathrm{stem}(p)}.$$

(2) 在 $\mathbb{G}_\alpha$ 中存在一个 $\leq^*$-稠密条件集 D，具有以下性质：对于每个 p、$q\in D$，若 p 和 q 是相容条件，且 $b_{\mathrm{stem}(q)}\sqsubseteq b_{\mathrm{stem}(p)}$，则 茎$(p)\setminus(\max($茎$(q))+1)\in T^q$，并且

$$p\wedge q=\langle \mathrm{stem}(p), T^p\cap(T^q)_{\mathrm{stem}(p)\setminus(\max(\mathrm{stem}(q))+1)}\rangle.$$

证明。 (1). 设 $p = \langle t,\ T\rangle$ 和 $q = \langle s,\ S\rangle$ 是 $\mathbb{G}_\alpha$ 中的相容条件。根据定义，存在有限序列 $\vec{\nu} \in T$ 和 $\vec{\eta} \in S$，使得 $t^\frown\vec{\nu}$ 和 $s^\frown\vec{\eta}$ 等价——也就是说，$b_{t^\frown\vec{\nu}} = b_{s^\frown\vec{\eta}}$。例如，假设 $\mathrm{max}(\text{茎}(t)) \geq \mathrm{max}(\text{茎}(s))$。由于 $b_s \sqsubseteq b_{s^\frown\vec{\eta}} = b_{t^\frown\vec{\nu}}$ 和 $b_t \sqsubseteq b_{t^\frown\vec{\nu}}$，必然有 $b_s \sqsubseteq b_t$. 。因此，条款 (1) 得证。

(2). 令 D 为条件 $\langle s,\ S\rangle \in \mathbb{G}_\alpha$ 的集合，其中所有 Prikry/Magidor 序列 b_ν（对于 $\nu \in S$）中的点都属于供给树S；也就是说，我们想考察 $D = \{\langle s, S\rangle \in \mathbb{G}_\alpha \mid \forall \nu \in \bigcup S (b_\nu \subseteq \bigcup S)\}$。

断言 5.29.1. D 是 $\leq^*$-稠密的。

断言的证明。令 $\langle s,\ S\rangle$ 是 $\mathbb{G}_\alpha$ 中的一个。我们想要找到 $\langle s,\ S^*\rangle \leq^* \langle s, S\rangle$，使得 $\bigcup S^* \subseteq \{\nu \in \bigcup S \mid b_\nu \subseteq \bigcup S\}$。为确保这一性质，我们按如下方式归纳地缩小 S 的各层：根据定义，$\mathrm{Succ}_S(\varnothing)$ 属于 $\bigcap_{\sigma<o^\ell(\alpha)} \mathcal{U}^\sigma_{j_\sigma}(s\restriction\sigma)$。由于我们假设 $o^\ell(\alpha) < \alpha$，这个集合可分解为 $\bigcup_{\sigma<o^\ell(\alpha)} S_\sigma$，其中每个 S_σ 都属于 $\mathcal{U}^\sigma_{j_\sigma}(s\restriction\sigma)$，并且集中在满足 $o^\ell(\beta) = \sigma$ 的可测基数 $\beta < \alpha$ 上。

给定 $\sigma < o^\ell(\alpha)$，存在 $p \in G$ 以及一个树的 $\mathbb{P}_\alpha$-名称 $\dot{R}$ 使得

$$p^\frown\langle s\restriction\sigma, \dot{R}\rangle^\frown\iota_{\alpha,\zeta^\sigma_{j_\sigma}}(p)\setminus(\alpha+1) \Vdash \alpha \in \iota_{\alpha,\zeta^\sigma_{j_\sigma}}(\dot{S}_\sigma).$$

在 $V[G]$ 中工作。记 $S\restriction\sigma \subseteq S$ 为 S 的子树，其中要求分裂集属于超滤子 $\langle \mathcal{U}^\rho_{j_\rho}(*) \mid \rho < \sigma\rangle$ 的交集。于是，

$$\langle s\restriction\sigma, \dot{R}_G \cap (S\restriction\sigma)\rangle \leq^*_{\mathbb{G}^\sigma_\alpha} \langle s\restriction\sigma, \dot{R}_G\rangle.$$

令 $r \leq p$ 属于 G，并强迫此条件成立。于是可得

$$r^\frown\langle s\restriction\sigma, \dot{R}_G\cap(S\restriction\sigma)\rangle^\frown\iota_{\alpha,\zeta^\sigma_{j_\sigma}}(r)\setminus(\alpha+1) \Vdash \alpha \in \iota_{\alpha,\zeta^\sigma_{j_\sigma}}(\{\nu \in \bigcup S \mid b_\nu \subseteq \bigcup S\}),$$

因此 $\{\nu \in \bigcup S \mid b_\nu \subseteq \bigcup S\} \in \mathcal{U}^\sigma_{j_\sigma}(s\restriction\sigma)$。由于 σ 是任意选取的

$$\{\nu \in \bigcup S \mid b_\nu \subseteq \bigcup S\} \in \bigcap_{\sigma<o^\ell(\alpha)} \mathcal{U}^\sigma_{j_\sigma}(s\restriction\sigma).$$

因此，我们可以将原来的 $\mathrm{Succ}_S(\varnothing)$ 缩减为此集合，同时仍得到一个 $\bigcap_{\sigma<o^\ell(\alpha)} \mathcal{U}^\sigma_{j_\sigma}(s\restriction\sigma)$-大集。在树的所有层上执行这一过滤后，最终便得到所需的 S^*. □

设 $p,\ q \in D$ 是满足 $b_{\mathrm{stem}(q)} \sqsubseteq b_{\mathrm{stem}(p)}$ 的相容条件。

► 如果 $\mathrm{max}(\mathrm{stem}(p)) = \mathrm{max}(\mathrm{stem}(q))$，那么 $\mathrm{stem}(p)\setminus(\mathrm{max}(\mathrm{stem}(q))+1)$ 为空，因此它属于 T^q。所以必有 $b_{\mathrm{stem}(q)} = b_{\mathrm{stem}(p)}$，从而 $\langle \mathrm{stem}(p)\ T^p \cap T^q\rangle$ 是 p 和 q 的 $\leq$-最大扩张。

► 反设不然。证明 $\mathrm{stem}(p)\setminus(\mathrm{max}(\mathrm{stem}(q))+1) \in T^q$ 将推出 $\langle \mathrm{stem}(p)\ T^p \cap (T^q)_{\mathrm{stem}(p)\setminus(\mathrm{max}(\mathrm{stem}(q))+1)}\rangle$ 是 p 与 q 的交。因此，设 $\langle\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_n\rangle$ 是 $\mathrm{stem}(p)\setminus(\mathrm{max}(\mathrm{stem}(q))+1)$ 的递增枚举。由于 q 与 p 相容，存在 $\vec{\eta} \in T^q$ 使得 $\{\alpha_0,\ldots,\alpha_n\} \subseteq b_t \sqsubseteq b_{s^\frown\vec{\eta}} = b_s \cup \bigcup_{i\leq|\vec{\eta}|} b_{\vec{\eta}(i)}$。对每个 $j \leq n$，存在 $i < |\vec{\eta}|$ 使得 $\alpha_j \in b_{\vec{\eta}(i)}$。然而，$q \in D$，由此得到 $\alpha_j \in b_{\vec{\eta}(i)} \subseteq \bigcup T^q$。综上，$\langle\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_n\rangle \in T^q$，证毕。□

注记 5.30. 在下文中，我们将 $\mathbb{G}_\alpha$ 视为前一引理中确定的 $\leq^*$-稠密集——也就是说，对于其中任意两个相容条件，都存在一个 $\leq$最大下界。

引理 5.31（关于 $\mathbb{G}_\alpha$）。假设 $o^\ell(\alpha) < \alpha$。那么，在泛型扩张 $V[S_\alpha * G_\alpha]$ 中，下列结论成立：

(1) $\mathbb{G}_\alpha$ 是 α^+-*cc*。 *(2)* $\langle \mathbb{G}_\alpha, \leq^* \rangle$ 是 α-闭的。 *(3)* 如果 p、$q \in \mathbb{G}_\alpha$ 相容，则它们有交 $p \wedge q$。 *(4)* $\mathbb{G}_\alpha$ 引入了一个序型为 $\omega^{o^\ell(\alpha)}$ 的闭无界集 $c \subseteq \alpha$。

证明。（1）这由注记5.27得到。

（2）如果 $\langle \langle t,\ T_\beta \rangle \mid \beta < \theta \rangle$ 是一个带有 $\theta < \alpha$ 的 $\leq^*$-递减序列，那么 $\langle t,\ \bigcap_{\beta<\theta} T_\beta \rangle$ 是一个良构条件，同时也是一个 $\leq^*$-下界。

(3) 这就是引理 5.29 的目的。(4) 对所有可测基数 α 满足 $o^\ell(\alpha) = 1$ 的情形，结论显然。我们用归纳法证明一般情形。假设

$\forall \beta < \alpha \forall \sigma < o^\ell(\alpha)$（$o^\ell(\beta) = \sigma \ \rightarrow\ \mathbb{G}^\sigma_\beta$ 向 β添加一个序型为 ω^σ 的闭无界集）。

假设 $o^\ell(\alpha) = \rho + 1$。注意，每个条件 p 都可以扩展为另一个条件 $q = \langle t,\ T \rangle$ 其中所有 $\beta \in t$ 都满足 $o^\ell(\beta) = \rho$。特别地，如果 $G \subseteq \mathbb{G}^{\rho+1}_\alpha$是一个泛型滤子，

$$\{\beta < \alpha \mid \exists \langle t, T \rangle \in G\, (\beta \in t \wedge o^\ell(\beta) = \rho)\}$$

在 α. 中无界

令 $\langle \beta_n \mid n < \omega \rangle$ 为上述集合的递增枚举。由归纳假设可知，每个 β_n 都带有一个序型为 ω^ρ的闭无界集 c_n。由于对每个 $n < \omega$，都存在 $\langle t,\ T \rangle \in G$ 满足 $\beta_n,\ \beta_{n+1} \in t$，由相容性可得 $\beta_n <$min($c_{\beta_{n+1}}$)，因此

$$c = \bigcup_{n<\omega} c_n$$

是 α 上的闭无界集。显然，c 的序型为 $\omega^{\rho+1}$，正如所需。

假设对于某个极限序数 ρ，$o^\ell(\alpha) = \rho$。对于每个序 $\sigma < \rho$，集合

$$D_\sigma := \{\langle \langle \delta \rangle, S \rangle \in \mathbb{G}^\rho_\alpha \mid \exists \sigma^* < \rho\, (\sigma < \sigma_* \wedge o^\ell(\delta) = \sigma_*)\}$$

在 $\mathbb{G}^\rho_\alpha$中稠密。因此，对每个 $\sigma < \rho$，都存在一个条件 $\langle \langle \delta_\sigma \rangle,$ $S_\sigma \rangle \in G \cap D_\sigma$。特别地，$\{\langle \langle \delta_\sigma \rangle, S_\sigma \rangle \mid \sigma < \rho\}$ 是 $\mathbb{G}^\rho_\alpha$中的一组相容条件。因此，必然有 b_{δ_σ} 是 $b_{\delta_{\sigma'}}$ 的初始片段，或反之（由引理5.29）。根据归纳假设，这些 b_{δ_σ} 各自都是 δ_σ 上的闭无界集，序型属于 $[\omega^\sigma, \omega^\rho)$。因此，$\bigcup_{\sigma<\rho} b_{\delta_\sigma}$ 是 α上的闭无界集，序型为 ω^ρ。证明完毕。□

下面的引理可以用即将给出的引理 8.2 证明。

引理 5.32. $\langle \mathbb{G}_\alpha, \lesssim, \leq^* \rangle$ 是一个 *Prikry* 型强迫。 □

6. Characterizing ultrafilters in the gluing extension

本节余下部分中，我们采用以下假设：

($\mathscr{H}$) “V = K” + “There is no inner model for $\exists\alpha\,(o(\alpha)\geq\alpha)$”.[17]

令 $S\subseteq\mathbb{S}$ 在 $\mathcal{K}$ 上为泛型，且 $\mathbb{P}_\kappa=\lim_{\longrightarrow}\langle\mathbb{P}_\alpha,\ \mathbb{G}_\beta\mid\alpha<\beta<\kappa\rangle$ 为第 §5 节的粘合迭代。由于广义连续统假设在 $\mathcal{K}[S]$ 中成立（见 [HP24，命题 6。2]），可知 $|\mathbb{P}_\alpha|\leq 2^\alpha$。此外，根据引理 5.31，粘合偏序集 $\langle\mathbb{G}_\alpha,\ \leq^*\rangle$是 α-闭的，并且任意两个相容条件 $p,\ q$ 都有交 $p\wedge q$.

在 [HP24] 的工作基础上，本节证明粘合迭代 **的编码引理** $\mathbb{P}_\kappa$。该引理完整刻画了泛型扩张 $\mathcal{K}[S*G]$ 中的 κ-完备超滤子，并且对于后续验证粘合性质至关重要（定理 7.1）。

引理 6.1 (编码引理)。 设 $G\subseteq\mathbb{P}_\kappa$ 是 $\mathcal{K}[S]$上的泛型滤子。那么， $\mathcal{K}[S][G]$中存在 κ^+多个 κ-完备超滤子。此外，每个这样的超滤子 $U\in\mathcal{K}[S][G]$ 都具有一个编码，具体来说，存在

(α) $j_U\restriction\mathcal{K}[S]$的一个有限子迭代 $\iota\colon\ \mathcal{K}[S]\to\mathcal{K}^M[\iota(S)]$，($\beta$) 一个序数 $\bar\epsilon<\iota(\kappa)$，满足 $\bar\epsilon\in\mathrm{range}(k)$，

(γ) $r\in\iota(\mathbb{P}_\kappa)$ 具有有限支撑，使得对每个 $p\in G$，存在 $\iota(p)\wedge r$，它们共同具有以下性质：在 $\mathcal{K}[S]$中工作时，对每个 $p\in G$，. $p\Vdash_{\mathbb{P}_\kappa}$ “$X\in U$”当且仅当存在一个条件 $q\in\iota(\mathbb{P}_\kappa)$ 使得

$$(k(q)\in j_U(G),\ q\leq^*\iota(p)\wedge r,\ \mathrm{supp}(q)=\mathrm{supp}(\iota(p)\wedge r),\ q\Vdash_{\iota(\mathbb{P}_\kappa)}\bar\epsilon\in\iota(\dot X)).$$

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{K}[S] & \xrightarrow{j_{\mathcal{U}}\restriction\mathcal{K}[S]} & M_U[j_U(S)]\\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & \nearrow_{k} & \\ \mathcal{K}^{M_{\mathcal{U}}}[\iota(S)] & & \end{array}$$

注记 6.2。 按照定义 5.1中的术语，编码引理断言$\vec{}$ 五元组 $\langle\vec\rho,\ \zeta,\ \vec a,\ f,\ g\rangle$ 按如下方式定义后，是 U在 $\mathcal{K}[S]$中的一个编码。

首先， $\iota^0:=j_U\restriction\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{K}$ 中的有限测度迭代，因此由函数集 $\vec\rho=\langle\rho_0,$ ……， $\rho_{n-1}\rangle$ 和序数 $\vec\zeta=\langle\zeta_0,$ ……， $\zeta_{n-1}\rangle$ 确定，如定义 5.1 所述。特别地，通过规定$\mu_i=\iota^0_i(\rho_i)(\langle\mu_j\mid j<i\rangle)$，可得到 ι^0 的临界点集 $\langle\mu_0,$ ……， $\mu_{n-1}\rangle$。根据引理 2.15， $\iota\colon\mathcal{K}[S]\to\mathcal{K}^M[\iota(S)]$ 是由 S和向量 $\langle\bar a_i,$ ……， $\bar a_{n-1}\rangle\in\prod_{i<n}H(\mu_i^+)^{\mathcal{K}_i}$确定的 ι^0 的唯一提升。这些参数本身可以通过 $\vec a$ 编码为 $\bar a_i=\iota^0_i(a_i)(\langle\mu_j\mid j<i\rangle)$。最后，对于 $\mathcal{K}[S]$中的函数 $f\colon\kappa^n\to\mathbb{P}_\kappa$ 和 $g\colon\kappa^n\to\kappa$， $\bar\epsilon$ 和 r 可分别表示为 $\iota^0(f)(\langle\mu_i\mid i<n\rangle)$和$\iota^0(g)(\langle\mu_i\mid i<n\rangle)$。

[17]本节中的一些技术引理只需较弱的反大基数假设“ 不存在满足 $\exists\alpha(o(\alpha)=\alpha^{++})$ 的内模型”。要确保粘合迭代 $\mathbb{P}_\kappa$ 定义良好，则需要更强假设（$\mathscr{H}$）。

6.1. **初步说明和技术引理。**

设定。 我们的基模型 V 在本节中是 $\mathcal{K}[S]$，由快速函数强迫 $\mathbb{S}$ 得到的泛型扩张。同样，$\mathbb{P}_\kappa$ 表示粘合迭代（定义于 $\mathcal{K}[S]$中），如§5所述。我们固定一个 V-泛型滤子 $G \subseteq \mathbb{P}_\kappa$ 和一个超幂嵌入 $j := j_U : V[G] \to M[H]$，它通过一个 κ-完备（不一定正规）的超滤子得到，该超滤子定义在 κ 中 $V[G]$.

鉴于我们的反大基数假设（（$\mathscr{H}$），见第 30页），$j \restriction \mathcal{K}$ 是一个正规迭代，因此 $j \restriction V$也是如此（由引理 2.15可知）——不过请注意，这些迭代可能是无限的。由引理 2.14可知，对于每个$x \in M$，存在一个有限正规迭代 $\iota : V \to N$，使得 $k \circ \iota = j \restriction V$且 $x \in \mathrm{range}(k)$，其中 $k : N \to M$ 是 ι 与 j 之间的因子映射——也就是说，k 是宇宙为

$$\{j(f)(\mu_0, \dots, \mu_{n-1}) \mid f : \kappa^n \to V\},$$

其中 $\bar{\mu}_0 = k^{-1}(\mu_0) \dots, \bar{\mu}_{n-1} = k^{-1}(\mu_{n-1})$ 是迭代 ι. 的临界点。在这种情况下，我们称迭代 ι 分解 $j \restriction V$。

以上评论表明，可以根据各迭代的临界点在 k 下的像，对分解 $j \restriction V$ 的迭代定义一种自然的序。

定义 6.3. 设若 $\iota : V \to N$和 $\bar{\iota} : V \to N$是分解 $j \restriction V$的迭代，且分别由嵌入 k 和 $\bar{k}$ 见证。那么，我们记作

$$\iota \leq_j \bar{\iota} :\Leftrightarrow k(\mathrm{crit}(\iota)) \subseteq \bar{k}(\mathrm{crit}(\bar{\iota})).$$

这里，$\mathrm{crit}(\iota)$ 和 $\mathrm{crit}(\bar{\iota})$ 分别表示 ι 和 $\bar{\iota}$的临界点。

注 6.4. $\leq_j$ 具有传递性和自反性。在接下来的引理6.11中，我们需要利用某种意义上的稠密性来处理 $\leq_j$序。

定义 6.5. 给定一个有限迭代 $\iota : V \to N$，它通过另一个初等嵌入 $k : N \to M$ 分解 $j \restriction V$，我们定义：

(1) $\Gamma_\iota := \{\iota_{n,m}(\mu_n) \mid n \leq m \leq \ell\}$,

(2) $\mathcal{C}_\iota := \{k(\mu_i) \mid i < n\}$,

其中 $\iota := \langle \iota_{n,\,m} \mid n \leq m \leq \ell \rangle$ 并且，对每个 $n < \ell$，$\mu_n := \mathrm{crit}(\iota_{n,\,n+1})$。

集合 Γ_ι 在分析 [HP24、§6] 中起了关键作用，**由此得出了**编码引理——它在这里也发挥了同样的作用。核心思想是：只有在坐标处，我们才能检测到条件 $r \in \iota(\mathbb{P}_\kappa)$（通过 H 借助 k）映射得到的条件与 j“G 中的条件之间的差异，而这些坐标属于Γ_ι。这些差异出现的序数集合记为 A_ι (见定义 6.9)，我们将证明它包含于 Γ_ι (引理 6.10)。

此外，为了后续研究，我们还需要刻画那些集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{crit}(j)$，使得存在 $\iota : V \to N$ 从而 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\iota$。Gitik–Kaplan 的研究中也出现过与此处给出的类似刻画 [GK23]。

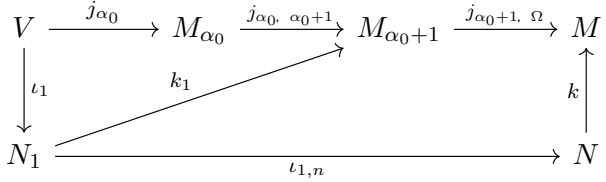
引理 6.6. 设 $\mathcal{C} \subseteq$临界点(j) 是有限的。那么，以下条件等价：*(1)* 存在一个正规有限迭代 ι，使其分解 $j \restriction V$，并且 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\iota$。

(2) 对每个 $\mu \in \mathcal{C}$，如果 $\mathcal{U}$ 是迭代 j 中用于得到临界点 μ 的正规测度（因此 $j = j_{end} \circ j_{\mathcal{U}} \circ j_{begin}$），那么存在 $n < \omega$ 以及一个函数 $g\colon\ [\kappa]^n \to V$ 属于 V，使得

$$\mathcal{U} \in j_{begin}(g)([\mathcal{C} \cap \mu]^n).$$

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2)。 </*style*}假设 对于某个有限正规迭代： 分解 。令： 为因子嵌入，令，……， $\mu_{n-1}\rangle = \langle k(\bar{\mu}_0)$……， $k(\bar{\mu}_{n-1})\rangle$ 为 $\mathcal{C}$ 的递增枚举。

令 $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ 为迭代 $j \restriction V$ 用于达到临界点 μ_0 的测度。由于 $\mu_0 = k(\bar{\mu}_0)$，容易证明交换图



规定 $k_1(\iota_1(f)(\bar{\mu}_0))\colon = j_{\alpha_0+1}(f)(\mu_0)$ 后交换。

Notice that $\mathrm{crit}(\iota_1) = \mathrm{crit}(j) = \kappa$. Thus, $\bar{\mu}_0 = \kappa$ and $k_1(\kappa) = \mu_0$.
令 $\mathcal{V}_1$ 为其超幂嵌入是 ι_1 的测度。给定 $X \subseteq \kappa$, G

$$X \in \mathcal{V}_1 \ \Leftrightarrow\ \kappa \in \iota_1(X) \ \Leftrightarrow\ \mu \in j_{\alpha_0+1}(X) \ \Leftrightarrow\ j_{\alpha_0}(X) \in \mathcal{U}_{\alpha_0}.$$

这表明 j_{α_0}“$\mathcal{V}_1$ 包含在测度 $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ 中。

注意，由于 $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ 的一致性，这意味着 $j_{\alpha_0}(\kappa) = \mu_\circ$

我们断言，由j_{α_0}“$\mathcal{V}_1$ 在 M_{α_0}模 $\subseteq^*$生成的滤子（记作$\mathcal{F}$）[18] 实际上是一个M_{α_0}-超滤子。这表明$j_{\alpha_0}(\mathcal{V}_1) = \mathcal{F} = \mathcal{U}_{\alpha_0}$，从而证实了我们对所讨论的第一个测度所作断言的正确性。

令 $X \in \mathcal{P}^{M_{\alpha_0}}(j_{\alpha_0}(\kappa))$。那么，对于 j 中低于 $j_{\alpha_0}(\kappa)$ 的临界点递增序列，有 $X = j_{\alpha_0}(f)(\mu_0^{\alpha_0}$、……、 $\mu_k^{\alpha_0})$。不失一般性，$f\colon\ [\kappa]^k \to \mathcal{P}(\kappa)$。对每个 $s \in [\kappa]^k$，令 A_s 为 $f(s)$，如果后一个集合是 $\mathcal{V}_1$- 大的；否则，令 $A_s\colon = \kappa \setminus f(s)$。由 $\mathcal{V}_1$ 的正规性，

$$Y := \{\alpha < \kappa \mid \forall s \in [\kappa]^k\, (\max(s) < \alpha \ \Rightarrow\ \alpha \in f(s))\} \in \mathcal{V}_1.$$

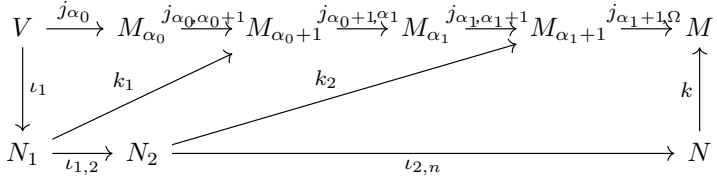
容易验证， $j_{\alpha_0}(Y) \setminus (\mu_k^{\alpha_0} + 1) \subseteq j_{\alpha_0}(A)_{\langle \mu_0^{\alpha_0},\ldots,\mu_k^{\alpha_0}\rangle}$。

由于 $j_{\alpha_0}(Y) \in \mathcal{F}$，我们得出 $j_{\alpha_0}(A)_{\langle \mu_0^{\alpha_0},\ldots,\mu_k^{\alpha_0}\rangle}$ 也属于 $\mathcal{F}$。于是，根据需要，要么 $X \in \mathcal{F}$，要么 $j_{\alpha_0}(\kappa) \setminus X \in \mathcal{F}$。

让我们来说明， $\mathcal{U}_{\alpha_i}$ 中也会出现类似的情况； $\mathcal{U}_{\alpha_i}$ 是 j 用来构造 μ_i 的测度。为避免繁琐的记号，我们专注于 $i = 1$；由于论证与前面相当类似，这里只作简要说明。

[18] Namely, $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}^{M_{\alpha_0}}(j_{\alpha_0}(\kappa)) \mid \exists Y \in \mathcal{V}_1\, (j_{\alpha_0}(Y) \subseteq^* X)\}$.

我们再次得到一个由初等嵌入构成的交换图



在规定 $k_2(\iota_2(f)(\bar{\mu}_0,\ \bar{\mu}_1)) := j_{\alpha_1+1}(f)(\mu_0,\ \mu_1)$ 之后。

我们要证明 $j_{\alpha_0+1,\alpha_1}(k_1(\mathcal{V}_2)) = \mathcal{U}_{\alpha_1}$。这足以验证我们的断言，因为 $\mathcal{V}_2$ 可以表示为 $\mathcal{V}_2 = \iota_1(g)(\bar{\mu}_0)$，因此

$$\mathcal{U}_{\alpha_1} = j_{\alpha_0+1,\alpha_1}(j_{\alpha_0+1}(g)(\mu_0)) = j_{\alpha_1}(g)(\mu_0).$$

完全按照前面的方法推理，可以证明 $(j_{\alpha_0+1,\alpha_1} \circ k_1)$“$\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{U}_{\alpha_1}$. 特别地，$\mu_1 = j_{\alpha_0+1,\alpha_1}(k_1(\bar{\mu}_1))$。我们证明 $(j_{\alpha_0+1,\alpha_1} \circ k_1)\mathcal{V}_2 = \mathcal{U}_{\alpha_1}$.

任取 $X \subseteq \mathcal{P}^{M_{\alpha_1}}(\mu_1)$。那么，$X = j_{\alpha_0+1,\alpha_1}(f)(\mu_0^{\alpha_1}, \ldots, \mu_k^{\alpha_1})$，其中 f: $[k_1(\bar{\mu}_1)]^k \to \mathcal{P}^{M_{\alpha_0+1}}(k_1(\bar{\mu}_1))$ 属于 M_{α_0+1}。对于每个 $s \in [k_1(\bar{\mu}_1)]^k$，令 A_s 为 $f(s)$ 或其补集，具体取决于哪一个是$k_1(\mathcal{V}_2)$-大集。像之前一样，我们定义 $\mathcal{F}$ 和 Y，但将 κ 替换为 $k_1(\bar{\mu}_1)$。接着注意到 $j_{\alpha_0+1,\alpha_1}(Y) \setminus (\mu_k^{\alpha_1}+1) \subseteq j_{\alpha_0+1,\alpha_1}(A)_{\langle \mu_0^{\alpha_1},\ldots,\mu_k^{\alpha_1}\rangle}$，从而得出结论： $X \in \mathcal{F}$ 或其补集属于 $\mathcal{F}$。

(2) $\Rightarrow$ (1)。令 $\langle \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}\rangle$ 为 $\mathcal{C}$的递增枚举。

借用上一个证明中的记号，我们的假设给出$\mathcal{U}_{\alpha_0} = j_{\alpha_0}(\mathcal{V}_1)$，其中 $\mathcal{V}_1$ 是 V中 κ 上的正规测度。特别地，$\mu_0 = j_{\alpha_0}(\kappa)$。令 ι_1: $V \to N_1 \simeq \mathrm{Ult}(V, \mathcal{V}_1)$，并定义 k_1: $N_1 \to M_{\alpha_0+1}$为

$$k_1(\iota_1(f)(\kappa)) := j_{\alpha_0+1}(f)(j_{\alpha_0}(\kappa)).$$

容易看出该映射是初等的。

根据我们的假设，$\mathcal{U}_{\alpha_1}$ 可以表示为 $j_{\alpha_1}(f)(\mu_0)$。因此，

$$\mathcal{U}_{\alpha_1} = j_{\alpha_0+1,\alpha_1}(j_{\alpha_0}(f)(\mu_0)) = j_{\alpha_0+1,\alpha_1}(k_1(\iota_1(g)(\kappa))).$$

令 $\mathcal{V}_2 \in N_1$ 为满足$j_{\alpha_0+1,\alpha_1}(k_1(\mathcal{V}_2)) = \mathcal{U}_{\alpha_1}$的唯一正规测度。特别地， $\mathcal{V}_2$ 的临界点 $\bar{\mu}_1$ 满足 $j_{\alpha_0+1,\alpha_1}(k_1(\bar{\mu}_1)) = \mu_1$。

令 $\iota_{1,2}$: $N_1 \to N_2 \simeq \mathrm{Ult}(N_1, \mathcal{V}_2)$，并定义映射 k_2: $N_2 \to M_{\alpha_1+1}$ by$k_2(\iota_2(f)(\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1)) := j_{\alpha_1+1}(f)(\mu_0, \mu_1)$。显然， k_2 是初等的。

按照这种方式继续下去，我们得到一个类似于前几页中所示的交换图，其中 ι: $V \to N$是各个超幂 ι_i: $N_i \to N_{i+1}$ 的复合，而 k: $N \to M$ 是由下式定义的因子嵌入

$$k(\iota(f)(\bar{\mu}_0, \ldots, \bar{\mu}_{n-1})) := j(f)(\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}).$$

根据构造，显然 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\iota$。 □

为了后续讨论，明确一个条件严格扩展另一个条件的情形将很重要。这引出了下面的一般定义：

定义 6.7。 设 $\mathbb{A}_\kappa = \langle \mathbb{A}_\alpha,\ \mathbb{B}_\beta \mid \beta < \alpha < \kappa\rangle$ 为一个强迫迭代。对于 $p,\ q \in \mathbb{A}_\kappa$ 和 $\Gamma \subseteq \kappa$，若 $q \leq p$ 且

$$\{\alpha < \kappa \mid q \restriction \alpha \Vdash_{\mathbb{A}_\alpha} \dot{p}(\alpha) = \dot{q}(\alpha)\} \subseteq \Gamma.$$

在我们的情形中， $\mathbb{P}_\kappa$ 是粘合偏序集的非平稳支撑迭代。因此，一个典型的条件 $p \in \mathbb{P}_\kappa$ 是一个序列 $\langle p(\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{supp}(p)\rangle$，其中 $p(\alpha)$ 是一个用于条件 $\langle \dot{t}_\alpha,\ \dot{T}_\alpha\rangle$ 的 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，而 $\mathrm{supp}(p)$ 是一个处处非平稳集。由于 $G_\alpha := G \cap \mathbb{P}_\alpha$ 是 V-泛型，我们可以解释 $\dot{t}_\alpha$ 和 $\dot{T}_\alpha$，这种解释会给出一个茎 t_α 和一棵树 T_α。因此，给定 $p \in \mathbb{P}_\kappa$和 $\alpha \in \mathrm{supp}(p)$，我们将记 $\mathrm{stem}(p(\alpha))_{G_\alpha} := (\dot{t}_\alpha)_{G_\alpha}$.

注意，对于 $p,\ q \in \mathbb{P}_\kappa$，若 $q \leq_\Gamma p$，则 $\mathrm{supp}(q) \subseteq \mathrm{supp}(p) \cup \Gamma$。

下面的技术引理稍后会派上用场：

引理 6.8. 以下条件集合 $p \in \mathbb{P}_\kappa$ 在$\mathbb{P}_\kappa$中是 $\leq^*$-稠密的：对于每个 $\beta \in \mathrm{supp}(p)$，都存在 $\beta < \beta$ 和一个$\mathbb{P}_{\bar{\beta}}$-名称 σ，使得

$$p \restriction \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \mathrm{stem}(p(\beta)) = \sigma.$$

证明。 对 κ进行归纳。思路是将标准的融合论证与引理 2.4中描述的稠密开集约化结合起来。

我们的归纳假设如下：

(IH$_\kappa$) 假设 $\gamma + 1 < \kappa$ 且 $p \in \mathbb{P}_\kappa$ 存在 $q \leq^* p$，满足 $q \restriction \gamma = p \restriction \gamma$

¯使得对于每个 $\beta \in \mathrm{supp}(q)$，$\setminus \gamma$ 都存在 $\beta < \beta$ 和一个$\mathbb{P}_{\bar{\beta}}$-名称 σ

$$q \restriction \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \mathrm{stem}(q(\beta)) = \sigma.$$

假设对所有 $\bar{\kappa} < \kappa$，(IH$_{\bar{\kappa}}$) 都成立。我们区分三种情形。

<u>后继情形：</u> <u>假设</u> $\kappa = \bar{\kappa} + 1$。令 $\gamma \leq \bar{\kappa}$ 和 $p \in \mathbb{P}_\kappa$.

▶ 假设 $\gamma = \bar{\kappa}$。那么我们无需做任何处理。

▶ 假设 $\gamma < \bar{\kappa}$。若 $\gamma + 1 = \bar{\kappa}$，则阶段 $\bar{\kappa}$ 的强迫是平凡的——在这种情形下，只需取 $q = p$。否则， $\gamma + 1 < \bar{\kappa}$，我们对 $p \restriction \bar{\kappa}$ 应用归纳假设，从而得到 $\bar{q} \leq^* p \restriction \bar{\kappa}$，使得 $\bar{q} \restriction \gamma = p \restriction \gamma$ 和 $\bar{q}$ 能够见证 (IH$_{\bar{\kappa}}$) 中所示的性质。处理完序数 $\beta < \bar{\kappa}$ 后，我们再处理情形 $\beta = \bar{\kappa}$。这可以通过对条件 $\bar{q}^\frown \dot{p}(\bar{\kappa})$ 应用推论 2.6 来完成。因此，我们得到 $q \leq^* \bar{q}^\frown \dot{p}(\bar{\kappa})$，使得 $q \restriction \bar{\kappa} = \bar{q}$，以及一个 $\mathbb{P}_\beta$- 名称 σ（其中 $\beta < \bar{\kappa}$），使得 $\bar{q} \Vdash_{\mathbb{P}_{\bar{\kappa}}}$ “$\sigma = \mathrm{stem}(\dot{p}(\bar{\kappa}))$”。所求的条件是 $\bar{q}^\frown \dot{p}(\bar{\kappa})$。

<u>奇异情形：</u> <u>令</u> $\gamma < \kappa$ 和 $p \in \mathbb{P}_\kappa$。固定 $\langle \kappa_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\rangle$ 中的一个共尾递增连续序列，使得 κ 满足 γ，$\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa_0$. 应用归纳假设（IH）$_{\kappa_0}$，我们找到 $p_0 \leq^* p \restriction \kappa_0$，使得 $p_0 \restriction \gamma = p \restriction \gamma$且$p_0$ 见证了（IH）中所述的性质$_{\kappa_0}$。令 $p_0^* := p_0^\frown p \restriction [\kappa_0, \kappa)$。

按照这种方式，我们构造一个 $\leq^*$-递减序列

$$\langle p_\xi^* \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\rangle$$

由 $\mathbb{P}_\kappa$ 中的条件组成，使得对于所有 $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$， $p^*_\xi \restriction \kappa_0 = p^*_0 \restriction \kappa_0$。能够构造这个序列的关键原因是， $\mathbb{P}_\kappa \setminus \kappa_0$ 的 $\leq^*$-序的闭合度必定为 $\mathrm{cf}(\kappa)^+$-闭合。（因为 $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa_0$。）

令 p^* 为上述所示序列的一个 $\leq^*$-下界。显然， $p^* \leq^* p$、 $p^* \restriction \gamma = p \restriction \gamma$，且 p^* 证明了 (IH_κ) 中的性质。

正则情形： 我们采用 [BNU17]中给出的标准融合型论证来处理此情形。固定一个序数 $\gamma < \kappa$ 和一个条件 $p \in \mathbb{P}_\kappa$。

令 $C_0 \subseteq \kappa$ 为一个与 $\mathrm{supp}(p)$ 不相交的闭无界集，并令 $\gamma_0 := \min(C_0 \setminus \gamma + 1)$。运用 (IH_{γ_0})，我们找到 $p_0 \leq^* p \restriction \gamma_0$，使得 $p_0 \restriction (\gamma+1) = p \restriction (\gamma+1)$，从而对于每个 $\beta \in \mathrm{supp}(p \restriction \gamma_0) \setminus (\gamma+1)$，茎 $\mathrm{stem}(\dot{p}(\beta))$ 的名称可约化为某个 $\beta < \beta$。最后，令 $p^*_0 := p_0 {}^\frown p \restriction [\gamma_0, \kappa)$。

对 $\eta \leq \kappa$ 进行归纳法，假设我们已经定义了一个序列

$$\langle (p^*_\xi, \gamma_\xi, C_\xi) \mid \xi < \eta \rangle$$

使得对每个 $\sigma < \xi < \eta$，以下性质都成立：

(1) $p^*_\xi \restriction \gamma_\sigma + 1 = p^*_\sigma \restriction \gamma_\sigma + 1$。 (2) $\mathrm{supp}(p^*_\xi) \cap C_\xi = \emptyset$。 (3) $\gamma_\xi \in \bigcap_{\bar{\xi}<\xi} C_{\bar{\xi}}$。 (4) 对所有满足 $\mathrm{supp}(p^*_\xi) \cap (\gamma,\ \gamma_\xi)$ 的 $\beta \in$，存在 $\bar{\beta} < \beta$ 和 $\tau \in V^{\mathbb{P}_{\bar{\beta}}}$，使得

$$p^*_\xi \restriction \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \text{“}\mathrm{stem}(p^*_\xi(\beta)) = \tau\text{”}.$$

在后继阶段 $\xi + 1$，我们完全按照之前的方法进行：取与 $\mathrm{supp}(p^*_\xi)$ 不相交的 $C_{\xi+1} \subseteq C_\xi$，并令 $\gamma_{\xi+1} := \mathrm{sup}(C_{\xi+1} \setminus \gamma_\xi + 1)$。应用 $(\mathrm{IH}_{\gamma_{\xi+1}})$，得到满足 $p_{\xi+1} \restriction \gamma_\xi + 1 = p_\xi \restriction \gamma_\xi + 1$ 且使上述性质 (4) 成立的 $p_{\xi+1} \leq^* p_\xi \restriction \gamma_{\xi+1}$。最后，令 $p^*_{\xi+1} := p_{\xi+1} {}^\frown p \restriction [\gamma_{\xi+1}, \kappa)$。（注意，$\mathrm{supp}(p^*_{\xi+1})$ 处处非平稳 —— 因此，这是 $\mathbb{P}_\kappa$ 中的一个合法条件。）

在极限阶段 $\eta < \kappa$，我们令 C_η 为闭无界集 $\bigcap_{\xi<\eta} C_\xi$ 的极限点，并设 $\gamma_\eta := \mathrm{sup}^{\xi<\eta} \gamma_\xi$。特别地， $\gamma_\eta \in C_\eta$ 且 $\gamma_\eta \notin \bigcup_{\xi<\eta} \mathrm{supp}(p^*_\xi)$。

我们如下合并迄今构造出的条件。首先，设

$$p^*_\eta \restriction \gamma_\eta + 1 := (\bigcup_{\xi<\eta} p^*_\xi \restriction \gamma_\xi)^\frown \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}_{\gamma_\eta}}.$$

由于映射 $\xi \mapsto \gamma_\xi$ 是正规的，因此可得 $\eta \leq \gamma_\eta$。因此，

$$p^*_\eta \restriction \gamma_\eta + 1 \Vdash_{\mathbb{P}_{\gamma_\eta+1}} \text{“}\mathbb{P}_\kappa/\dot{G}_{\gamma_\eta+1} \text{ is } (\gamma_\eta)^+\text{-closed”},$$

这使我们可以取一个名称 $\dot{r}$，作为递减序列 $\langle p^*_\xi \setminus \gamma_\eta + 1 \mid \xi < \eta \rangle$ 的 $\leq^*$-下界。最后，设 $p^*_\eta := (p^*_\eta \restriction \gamma_\eta + 1)^\frown \dot{r}.$。稍加思考便可清楚看出，这是 $\mathbb{P}_\kappa$.中的一个合法条件

最后，如果 $\eta = \kappa$，我们就像之前一样继续。唯一的区别是，现在我们将 C_κ 定义为 $\triangle_{\xi<\kappa} C_\xi$的极限点集。以类似方式构造的序列 p^*_κ构成一个合格条件——也就是说，它具有处处非平稳支撑，这由闭无界集 C_κ所见证。显然， p^*_κ 是 p的一个 $\leq^*$-扩张，见证了 (IH_κ) □ 中的陈述

6.2. **证明编码引理**。 本节将说明如何在一些技术引理的条件下证明**编码引理**；这些技术引理的证明将推迟到下一节。我们的证明紧密遵循 [HP24，§ 6]因此，我们建议读者手边备有 [HP24]。

如同较简单的情形 [HP24]，我们声称，可以通过有限测度迭代中的有限多个“茎”，对任意 κ- 完备超滤子 κ 进行编码。在粘合强迫中，不同的茎可能代表相同的信息。因此，在此语境下比较茎时，我们将认为茎 s 扩展另一个茎 t 当且仅当$b_s \sqsubseteq b_t$。请注意，这些信息可能取决于迭代前面步骤中的泛型信息，因此我们必须谨慎处理。

令 $\iota\colon V \to N$ 为一个分解 $j \restriction V$ 的有限正规迭代。类比于对 [HP24, § 6]，的分析，我们将重点关注满足以下条件的坐标$\alpha \in [\kappa, \iota(\kappa))$：存在 $r \in \iota(\mathbb{P}_\kappa)$ 映射到 M-泛型 H，且 $k(r)(k(\alpha))$ 的茎大于 $j(p)(k(\alpha))$ 的茎，其中 $p \in G$.

定义 6.9。 设 $\iota\colon V \to N$ 是一个有限迭代，它分解嵌入$j \restriction V.$。我们将以下列方式定义的序数集合记为 A_ι：

$$\{\alpha \in [\kappa, \iota(\kappa)) \mid \exists r \in k^{-1}(H)\, \forall p \in G\, (k(r(\alpha))_{H \restriction k(\alpha)} < j(p)(k(\alpha))_{H \restriction k(\alpha)})\}.$$

（这里 $p < q$ 表示 $p \leq q$ 和 $b_{\mathrm{stem}(q)} \sqsubset b_{\mathrm{stem}(q)}$。）

与 [HP24，引理 6.17] 中一样，我们得到以下结果：

引理 6.10。 那么 $A_\iota \subseteq \Gamma_\iota$。特别地， A_ι 是有限的。[19] □

为了证明**编码引理**，我们需要在当前这个更复杂的情形下证明[HP24，引理 6.15]的类似结论：

引理 6.11 （关键断言）。设 $\iota\colon V \to N$ 是一个有限迭代，它分解 $j \restriction V$。那么， ι 可扩张为一个有限迭代 $\iota\colon V \to N$，该扩张由 $k\colon N \to M$ 分解 $j \restriction V$，并且对每个 $\bar{\mu} \in A_\iota$，集合

$$\bar{H}^{\iota,k}_{\bar{\mu}} = \{b_{\mathrm{stem}(k(r(\bar{\mu}))_{H \restriction k(\bar{\mu})})} \mid r \ \textit{witnesses}\ \bar{\mu} \in A_\iota\}$$

有一个 $\sqsubseteq$-极大元素。

这一点的证明将推迟到下一节。假设这一点成立，接下来我们说明如何证明**编码引理**。

由引理6.11，我们可以为 $\leq_j$ 稠密多个有限迭代ι关联： $V \to N$ 分解 $j \restriction V$ 茎名称的有限列表 $\vec{\eta}$：$= \langle \dot{\eta}_\alpha \mid \alpha \in A_\iota \rangle$其中 $b_{k(\dot{\eta}_\alpha)^{H \restriction k(\alpha)}}$ 是 H_α 的 $\sqsubseteq$-极大元素。我们可以假设， $\dot{\eta}_\alpha$由 $\iota(\mathbb{P}_\kappa)_\alpha$ 的最弱条件强制为坐标 α 处的一个茎。

定义 6.12. 我们用 r_ι 表示支撑为 $\mathrm{supp}(r_\iota) = A_\iota$ 的条件，使得 $r_\iota(\alpha)$ 是一个以 $\dot{\eta}_\alpha$ 为茎的极大树的 $\iota(\mathbb{P}_\kappa)_\alpha$- 名称。

[19]关于定义 Γ_ι 参见第31页。

注 6.13. 注意，$r_\iota \in \iota(\mathbb{P}_\kappa)$ 是一个满足 $k(r_\iota) \in H$ 的条件。事实上，在 $M[H]$ 中，$k(r_\iota)$ 是唯一一个具有（有限）支撑$k(A_\iota)$ 的条件，并且对每个 $\alpha \in A_\iota$，$k(r_\iota)(k(\alpha)) = \langle k(\dot\eta_\alpha)^{H\restriction k(\alpha)},\ k(T_\alpha)_{H\restriction k(\alpha)}\rangle$。设 $p \in H$ 是一个强迫这一点的条件。那么必有 $p \le k(r_\iota)$，否则 p 将无法确定由 H 诱导的泛型序列中的那一部分。由 H 的向上封闭性，我们可推出 $k(r_\iota) \in H$.

下面的结果是 [HP24]中的引理 6.18、6.19。它们的证明足够抽象，因此也适用于我们当前更为复杂的迭代：

引理 6.14。设 $\iota\colon V \to N$是一个通过 k分解 $j\restriction V$的有限迭代。对于每个 $q \in k^{-1}(H)$，存在 $p \in G$ 和 $q' \le q$，使得 $q' \le^*_{\Gamma_\iota} \iota(p) \wedge r_\iota$。
特别地，对于每个 $\alpha \notin \Gamma_\iota$，$(\iota(p) \wedge r_\iota)\restriction\alpha \Vdash \iota(p)(\alpha) \le q(\alpha)$。 □

引理 6.15。对于每个 $\epsilon < j(\kappa)$，存在一个有限迭代 $\iota\colon V \to N$，将 $j\restriction V$分解为，使得 $\epsilon \in \operatorname{range}(k)$，并且满足以下条件：
对于每个 $\mathbb{P}_\kappa$-良好的名称 $\dot X$ 对于 κ 的一个子集，

$$M[H] \models \epsilon \in j(\dot X)_H \iff \exists q \in \iota(\mathbb{P}_\kappa)\,(k(q) \in H \wedge q \Vdash_{\iota(\mathbb{P}_\kappa)} k^{-1}(\epsilon) \in \iota(\dot X)).$$

此外，令 r_ι 为定义 *6.12*中的条件，我们可以取 q 使得，对于某个 $p \in G$，$q \le^*_{\Gamma_\iota} \iota(p) \wedge r_\iota$ 且 $\operatorname{supp} q = \operatorname{supp}(\iota(p) \wedge r_\iota)$。 □

由上可得 **编码引理** 成立。证明与 [HP24] 中的证明相同，但（由于证明足够简短）为确保完备性，我们仍将其重述如下：

编码引理（引理 6.1）的证明。设 $\mathcal{U} \in V[G]$ 是 κ 上的一个 κ-完备超滤子，令 $j\colon V[G] \to M[H]$ 为诱导的超幂。根据我们在第 31 页的设定考虑，存在一个有限迭代 $\iota\colon V \to N$，使得 $k \circ \iota = j\restriction V$ 且 $\epsilon := [\mathrm{id}]_{\mathcal{U}}$ 属于 k 的值域。对这些输入应用引理 6.15，并定义 $\mathcal{V}$ 为所有 $X \in \mathcal{P}(\kappa)^{V[G]}$ 的集合，其中存在 $q \in k^{-1}(H)$ 和 $p \in G$ 使得

$$q \le^*_{\Gamma_\iota} (\iota(p) \wedge r_\iota) \quad \text{and} \quad q \Vdash_{\iota(\mathbb{P}_\kappa)} k^{-1}(\epsilon) \in \iota(\dot X).$$

注意，任意两个满足上述条件的条件 q、q' 都存在一个显式的$\le^*_{\Gamma_\iota}$-扩张。特别地，$\mathcal{V}$ 是一个滤子。此外，根据引理6.15的补充部分，$\mathcal{V}$ 包含 κ-完备超滤子 $\mathcal{U}$。因此，$\mathcal{V} = \mathcal{U}$. □

因此，要严谨地证明**编码引理**所缺少的全部内容，就是引理6.11，它涉及极大茎的存在性。

6.3. **证明关键断言**。本节技术性极强，旨在证明引理6.11（又称**关键断言**）。为此，我们将证明任意有限正规迭代 $i\colon V \to N$在对 $j\restriction V$作因子分解后，其临界点在扩张 $M[H]$ 中仍然是正则的（见引理6.18）。

为了证明上述结论，我们需要分析应用因子嵌入 $k\colon N \to M$ 后，$\mu \in \Gamma_\iota$ 的像会去往何处。分析中一个潜在的障碍是，$k\colon N \to M$ 可能不是 N 的内部对象。幸运的是，在我们的反大基数假设下，任何延伸为初等嵌入 $j\colon V[G] \to M[H]$ 的正规迭代$j\colon V \to M$，

$M[H]^\omega \cap V[G] \subseteq M[H]$，都可以完成为某种具有普适性的迭代 $k: N \to M$，而且它在 N 中**是内部可定义的**。N 这个想法最早见于 Gitik 的工作 [Git88]，，其变体在获得相容性结果的下界方面发挥着关键作用。

回想一下，$j: V[G] \to M[H]$ 是由 κ-完备超滤子导出的超幂，定义在 $V[G]$ 中（见**设定**，第31页），因此 $M[H]$ 是 M 的一个泛型扩张，并且在 κ下是 $V[G]$-闭的。在证明**关键断言** 之前，我们将在以下反大基数假设下进行讨论；该假设弱于第$\mathscr{H}$页（）中所隐含的假设：

$(\mathscr{H}^-)$ “There is no inner model of $\exists \alpha\, (o(\alpha) = \alpha^{++})$”.

引理 6.16 (通用迭代)。假设$(\mathscr{H}^-)$ 成立。设 $\iota: \mathcal{K} \to \mathcal{K}^N$是一个分解 $j \restriction \mathcal{K}$ 的有限正规迭代，而 $k: \mathcal{K}^N \to \mathcal{K}^M$ 是一个因子初等嵌入。那么，存在一个内部的正规迭代$\tilde{k}: \mathcal{K}^N \to \tilde{\mathcal{K}}$，其长度为某个序数；并且存在一个初等嵌入 $\ell: \mathcal{K}^M \to \tilde{\mathcal{K}}$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \xrightarrow{j} & \mathcal{K}^M \\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & \overset{k}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle\ell} \\ \mathcal{K}^N & \xrightarrow[\tilde{k}]{} & \tilde{\mathcal{K}}. \end{array}$$

证明。设 $\mathcal{U}$是 $\mathcal{K}^N$中的相干测度序列，且 $\lambda := (\sup k(\Gamma_\iota))^+$。我们以米切尔式方式，在 $\mathcal{K}^N$内部定义迭代 $\tilde{k}$。

我们将记作 $\tilde{M}_\alpha$ 导致 $\mathcal{K}^N$ 的迭代模型 $\tilde{\mathcal{K}}$.

假设根据归纳法，{v1}的子迭代 $\tilde{k}$,

$$\langle \tilde{k}_{\alpha,\beta} : \tilde{M}_\alpha \to \tilde{M}_\beta \mid \alpha \le \beta < \Omega \in \mathrm{Ord} \cup \{\mathrm{Ord}\} \rangle$$

已经定义。照例，我们约定 $\tilde{k}_0 := \mathrm{id}$ 和 $\tilde{M}_0 := \mathcal{K}^N$。将 $k_\alpha(\mathcal{U})(\tilde{\kappa}_\alpha,\ \zeta_\alpha)$ 记为在 M_α 中用于定义 $k_{\alpha,\ \alpha+1}$. 的测度。如果$\beta < \Omega$ 是一个极限序数，那么对每个 $\alpha < \beta$，我们令 $k_{\alpha,\ \beta}$ 为 $\langle k_{\alpha,\ \xi} \mid \alpha \le \xi < \beta \rangle$ 的直极限。否则，β 具有 $\alpha + 1$ 的形式，且有两种情况：

(ℵ)：若 $\mathrm{cf}^{\mathcal{K}^N}(\alpha) \neq \omega$，则我们令（如果存在）$\tilde{\kappa}_\alpha < \tilde{k}_\alpha(\lambda)$ 为 $[\sup_{\xi<\alpha}(\tilde{\kappa}_\xi + 1)$ $k_\alpha(\lambda)$ 中最小的 $\tilde{M}_\alpha$-可测基数，并迭代 $k_\alpha(\mathcal{U})(\tilde{\kappa}_\alpha,\ 0)$。

(ℶ)：如果 $^{\mathcal{K}^N}(\alpha)$ 的共终性 $= \omega$ 那么，如果存在一个 $\tilde{M}_\alpha$-可测基数 ρ，使得在 $[\sup_{\xi<\alpha} \tilde{\kappa}_\xi,\ \tilde{k}_\alpha(\lambda)$ 中，以及一个 Mitchell 序 $\zeta < o^{\tilde{M}_\alpha}(\rho)$，使得集合

$$\{\xi < \alpha \mid \tilde{k}_{\xi,\alpha}(\tilde{\kappa}_\xi) = \rho \text{ and } \tilde{k}_{\xi,\alpha}(\tilde{\zeta}_\xi) = \zeta\}$$

在 α 中有界，我们令 $\tilde{\kappa}_\alpha$ 为 $[\sup_{\xi<\alpha} \tilde{\kappa}_\xi,\ k_\alpha(\lambda)$ 中的第一个 M_α-可测基数，并令 $\zeta_\alpha < o^{\tilde{M}_\alpha}(\rho)$ 为见证这一点的第一个序。然后，我们迭代 $\tilde{k}_\alpha(\mathcal{U})(\tilde{\kappa}_\alpha,\ \tilde{\zeta}_\alpha)$。[20]

(ℷ)：如果 (ℵ) 和 (ℶ) 均不成立，我们规定迭代停止。

[20] If (ℶ) holds because $\{\xi < \alpha \mid \tilde{k}_{\xi,\alpha}(\tilde{\kappa}_\xi) = \rho\}$ is bounded for some ρ, then $\tilde{\zeta}_\alpha = 0$.

断言 6.16.1. 迭代在少于 $(\lambda^+)^{\mathcal{K}^N}$ 个步骤后停止。

断言的证明。这是 Mitchell 提出的一种经典论证，我们在此重述，既为完整起见，也为方便读者。

在 $\mathcal{K}^N$ 中工作。假设迭代在经过 $(\lambda^+)^{\mathcal{K}^N}$ 个步骤后仍未停止。因此，我们已经构造了序列 $\langle(\tilde{\kappa}_\xi, \tilde{\zeta}_\xi) \mid \xi < \lambda^+\rangle$. 令 S 表示 $\mathcal{K}^N$-共尾数为 ω 的序数 $<\lambda^+$。显然，这个集合是平稳的。

对每个 $\alpha \in S$，都存在这样的 $\tilde{\kappa}_\alpha, \zeta_\alpha \in \text{range}(k_{\beta_\alpha,\alpha})$。由 Fodor 引理可知，存在平稳集 $S_0 \subseteq S$ 和 $\beta^* < \lambda^+$，使得对所有 $\alpha \in S_0$，都有 $\beta_\alpha = \beta^*$。类似地，M_{β^*} 中的每个序数 $<k_{\beta^*}(\lambda)$ 都可写成 $\tilde{k}_\beta(f)(\tilde{\kappa}_{\alpha_0}, \ldots, \tilde{\kappa}_{\alpha_{n-1}})$ 的形式，其中某个 $f\colon \tilde{\kappa}_0^n \to \lambda$ 属于 $\mathcal{K}^N$。由于 $\mathcal{K}^N \models$ 广义连续统假设成立，且 λ 是一个大于 $\tilde{\kappa}_0$ 的正则基数，这类函数只有 λ 个，因此，$k_{\beta^*}(\lambda)$ 之下的序数至多有 种可能的表示。

因此，我们找到另一个平稳集 $S_1 \subseteq S_0$ 和序数 ρ，ζ，使得对每个 $\alpha \in S_1$，$\tilde{\kappa}_\alpha = k_{\beta^*,\,\alpha}(\rho)$ 且 $\zeta_\alpha = k_{\beta^*,\,\alpha}(\zeta)$。因此，

$$\tilde{k}_{\alpha,\alpha'}(\tilde{\kappa}_\alpha) = \tilde{\kappa}_{\alpha'} \text{ and } \tilde{k}_{\alpha,\alpha'}(\tilde{\zeta}_\alpha) = \tilde{\zeta}_{\alpha'} \text{ for all } \alpha < \alpha' \text{ in } S_1.$$

这将导致矛盾：事实上，令 α_ω 为 S_1 的第 ω 个元素。由于 $\text{cf}^{\mathcal{K}^N}(\alpha_\omega) = \omega$，我们原本应该命中一个测度，而它不是 $k_{\alpha_n}(\mathcal{U})(\tilde{\kappa}_{\alpha_n}, \zeta_{\alpha_n})$ 的像，其中 $n < \omega$；但上述结果与此矛盾。□

上述结果给出 Ω 序数，从而完全确定了迭代 k。由 Ω 的极大性可知，显然 $\text{cf}^{\mathcal{K}^N}(\Omega) = \omega$。

断言 6.16.2。 对于每个 $\alpha <$Ω 以及一个 M_α-可测基数 $\rho \geq \tilde{\kappa}_\alpha$，迭代 k 中存在一个阶段，$\alpha_* \in (\alpha, \Omega]$，，使得以下条件成立：

$$\begin{cases} \tilde{k}_{\alpha,\beta}(\rho) \geq \tilde{\kappa}_\beta, & \text{if } \beta < \alpha_*; \\ \tilde{k}_{\alpha,\beta}(\rho) < \tilde{\kappa}_\beta, & \text{if } \beta \in [\alpha_*, \Omega). \end{cases}$$[21]

此外，共终性 $^{\mathcal{K}^N}(\alpha_*) = \omega$ 并且对于每个 $\zeta < o^{\tilde{M}_{\alpha_*}}(\tilde{k}_{\alpha,\alpha_*}(\rho))$ 该集合

$$\{\gamma < \alpha_* \mid \gamma \geq \alpha \wedge \tilde{k}_{\gamma,\alpha_*}(\tilde{\kappa}_\gamma) = \tilde{k}_{\alpha,\alpha_*}(\rho) \wedge \tilde{k}_{\gamma,\alpha_*}(\tilde{\zeta}_\gamma) = \zeta\}$$

在 α_* 中无界。

证明。设 $\alpha <$Ω，且 ρ 是一个 M_α-可测基数。

若其存在，令 α_* 为区间 $(\alpha,$Ω$)$ 中满足 $k_{\alpha,\alpha_*}(\rho) < \tilde{\kappa}_{\alpha_*}$ 的最小序数。否则，若该序数不存在，则规定 $\alpha_* :=$Ω。

若 $\alpha_* =$ Ω，则根据我们对 α_* 的选择，该断言成立。因此，我们来假设 $\alpha_* <$ Ω。令 $\beta <$ Ω。若 $\beta < \alpha_*$，则显然有 $k_{\alpha,\beta}(\rho) \geq \tilde{\kappa}_\alpha$。否则，$\beta \geq \alpha_*$，于是我们通过对 $\beta \in [\alpha_*,$Ω$)$ 进行归纳验证，得到

$$\tilde{k}_{\alpha,\alpha_*}(\rho) = \tilde{k}_{\alpha,\beta}(\rho) < \tilde{\kappa}_\beta.$$

对于 $\beta = \alpha_*$，上述结论根据 α_* 的定义显然成立。对于后继序数 $\beta = \beta + 1$，我们结合归纳假设（即 $k_{\alpha,\,\alpha_*}(\rho) = k_{\alpha,\,\bar{\beta}}(\rho) < \tilde{\kappa}_{\bar{\beta}}$）以及这一事实：$k_{\alpha,\,\bar{\beta}}(\rho) = k_{\alpha,\,\beta}(\rho)$（因为 $\text{crit}(k_{\bar{\beta},\,\beta}) = \tilde{\kappa}_{\bar{\beta}}$）。对于极限步骤，我们利用临界点 $\tilde{\kappa}_{\bar{\beta}}$' 递增这一事实。

现在我们来讨论所声称结论的第二部分。

► 为导出矛盾，假设 $\mathrm{cf}^{\mathcal{K}^N}(\alpha_*) \neq \omega$。那么，必有 $\alpha_* < \Omega$。由于迭代尚未停止，$\tilde{\kappa}_{\alpha_*}$ 是区间 $[\sup_{\xi<\alpha_*}(\tilde{\kappa}_\xi + 1),\ k_{\alpha_*}(\lambda))$ 中的第一个 M_{α_*}-可测基数。根据我们对 α_* 的选择以及 $k_{\alpha,\alpha_*}, k_{\alpha,\alpha_*}(\rho)$ 的初等性，它是该区间中的一个 M_{α_*}-可测基数，因此 $\tilde{\kappa}_{\alpha_*} \leq k_{\alpha,\alpha_*}(\rho)$，这与 α_* 的定义矛盾。

► 假设对于某个 Mitchell 序 $\zeta < o^{\tilde{M}_\beta}(\tilde{k}_{\alpha,\alpha_*}(\rho))$

$$\{\gamma < \alpha_* \mid \gamma \geq \alpha \wedge \tilde{k}_{\gamma,\alpha_*}(\tilde{\kappa}_\gamma) = \tilde{k}_{\alpha,\alpha_*}(\rho) \wedge \tilde{k}_{\gamma,\alpha_*}(\tilde{\zeta}_\gamma) = \zeta\}$$

在 α_* 中有界。由于 $k_{\alpha,\alpha_*}(\rho)$ 属于 $[\sup_{\xi<\alpha_*} \tilde{\kappa}_\xi, k_{\alpha_*}(\lambda))$，且在此情形下迭代遵循子句（2），由 $\tilde{\kappa}_{\alpha_*}$ 的极小性可知，$\tilde{\kappa}_{\alpha_*} \leq k_{\beta,\alpha_*}(\rho)$——这与 α_* 的定义矛盾。

□

记录几个事实。虽然我们不会直接使用它们，但它们有助于深入了解迭代 k 的结构：

命题 6.16.3（关于 k的一些有用事实）。

（1）对于满足 $\tilde{\kappa}_\gamma < k_\beta$、$\gamma(\tilde{\kappa}_\beta)$ 的序数 $\beta < \gamma < \Omega$，我们有 $\gamma_* < \beta_*$，其中 γ_*、β_* 与断言 *6.16.2* 中的定义相同，取 $\rho_\beta := \tilde{\kappa}_\beta$ 和 $\rho_\gamma := \tilde{\kappa}_\gamma$。（2）对于一个序数 $\alpha < \Omega$，除非 $\mathrm{cf}^{\mathcal{K}^N}(\alpha) = \omega$ 且集合 $A = \{\beta < \alpha \mid k_{\beta,\alpha}(\tilde{\kappa}_\beta) = \tilde{\kappa}_\alpha\}$ 在 α 中有界，否则 $\tilde{\zeta}_\alpha$ 为 *0*；在这种情况下

$$\tilde{\zeta}_\alpha = \limsup(\{\tilde{k}_{\beta,\alpha}(\tilde{\zeta}_\beta) + 1 \mid \beta \in A\}).$$

断言的证明。（1）。一方面，注意到对每个 $\alpha \in [\gamma, \gamma_*)$，很容易得出 $\gamma_* \leq \beta_*$

$$\tilde{\kappa}_\alpha \leq \tilde{k}_{\gamma,\alpha}(\tilde{\kappa}_\gamma) < \tilde{k}_{\gamma,\alpha}(\tilde{k}_{\beta,\gamma}(\tilde{\kappa}_\beta)) = \tilde{k}_{\beta,\alpha}(\tilde{\kappa}_\beta),$$

根据$k_{\gamma,\ \alpha}$的初等性。另一方面，为了证明等式不可能成立，我们反设 $\gamma_* = \alpha_*$，并注意到，同样的计算表明，对每个 $\alpha \in [\gamma, \gamma_*)$，

$$\tilde{k}_{\alpha,\beta_*}(\tilde{\kappa}_\alpha) < \tilde{k}_{\alpha,\beta_*}(\tilde{k}_{\beta,\alpha}(\tilde{\kappa}_\beta)) = \tilde{k}_{\beta,\beta_*}(\tilde{\kappa}_\beta)$$

并且特别地——不等于它。这与断言6.16.2矛盾。

(2)。由于迭代在阶段 α并未停止，ζ_α 是使下列集合有界的最小 Mitchell序 $\zeta < o^{M_\alpha}(\tilde{\kappa}_\alpha)$：

$$B := \{\beta \in A \mid \tilde{k}_{\beta,\alpha}(\tilde{\zeta}_\beta) = \zeta\}.$$

令 $\beta < \alpha$ 为包含 B 且使Mitchell序 ζ_α 属于值域($k_{\beta,\ \alpha}$)的最小序数。令 ζ 为 ζ_α 在$k_{\beta,\ \alpha}$下的原像。

我们断言，对每个 $\gamma \in A \setminus (\beta + 1)$，都有 $\tilde{k}_{\gamma,\alpha}(\tilde{\zeta}_\gamma) < \zeta_\alpha$。假设情况并非如此。令 $\gamma \in A \setminus (\beta + 1)$ 为满足条件的最小者，使得

$$(*) \qquad \tilde{k}_{\gamma,\alpha}(\tilde{\zeta}_\gamma) \geq \tilde{\zeta}_\alpha.$$

由于 $\gamma \notin B$，必然有 $k_{\gamma,\alpha}(\zeta_\gamma) > \zeta_\alpha = k_{\beta,\alpha}(\zeta)$。因此，

$$\tilde{\zeta}_\gamma > \tilde{k}_{\beta,\gamma}(\bar{\zeta}).$$

由迭代的交换性，且由于 $\gamma \in A$，我们有

$$A \cap \gamma = \{\beta < \gamma \mid \tilde{k}_{\beta,\gamma}(\tilde{\kappa}_\beta) = \tilde{\kappa}_\gamma\}.$$

$A \cap \gamma$ 必须在 γ 中无界；否则，根据归纳假设，ζ_γ 将为 0。由归纳假设，我们得出

$$\tilde{\zeta}_\gamma = \limsup(\{\tilde{k}_{\bar{\gamma},\gamma}(\tilde{\zeta}_{\bar{\gamma}}) + 1 \mid \bar{\gamma} \in A \cap \gamma\}).$$

特别地，存在无界多个 $\bar{\gamma} < \gamma$ 使得

$$\tilde{k}_{\bar{\gamma},\gamma}(\tilde{\zeta}_{\bar{\gamma}}) \geq \tilde{k}_{\beta,\gamma}(\bar{\zeta}).$$

每个这样的序数 $\bar{\gamma}$ 都必须是极限序数（否则，$\zeta_{\bar{\gamma}} = 0$），因此 γ 是极限序数的极限，并且其中共尾多个大于 β。尤其是，$\zeta_{\bar{\gamma}} \geq k_\beta$对于共尾多个$\bar{\gamma}(\zeta$，都有 $\beta < \gamma$。然而，这与以下假设矛盾：γ 是 $A \setminus (\beta+1)$中见证（*）的最小序数。因此，对于余有界多个 $\gamma \in A$，$k_{\gamma,\alpha}(\zeta_\gamma) < \zeta_\alpha$。所以，

$$\tilde{\zeta}_\alpha \geq \limsup(\{\tilde{k}_{\beta,\alpha}(\tilde{\zeta}_\beta) + 1 \mid \beta \in A\}).$$

注意到这个不等式不可能是严格不等式，否则令

$$\bar{\zeta} = \limsup(\{\tilde{k}_{\beta,\alpha}(\tilde{\zeta}_\beta) + 1 \mid \beta \in A\}),$$

我们将得到一个 Mitchell 序 $<_{\zeta_\alpha}$，对于该序，$\{\beta \in A \mid k_{\beta,\alpha}(\zeta_\beta) = \zeta\}$ 在 α中是有界的，这将与（⊐）中所要求的 ζ_α 的极小性矛盾。□

让我们验证可以定义一个商初等嵌入

$$\ell \colon \mathcal{K}^N \to \tilde{\mathcal{K}}.$$

这本质上将是迭代 k 与 k之间的比较映射。

让我们考察迭代 $k\colon\ \mathcal{K}^N \to \mathcal{K}^M$。这是一个正规迭代$\langle k_{\alpha,\beta} \mid \alpha \leq \beta \leq \alpha_* \rangle$，因此可以讨论这样的序对（$\kappa_\alpha$，$\zeta_\alpha$）：$k_\alpha(\mathcal{U})(\kappa_\alpha, \zeta_\alpha)$是在该迭代的 α 阶段命中的测度。

为了定义初等嵌入 $\ell\colon\ \mathcal{K}^M \to \mathcal{K}^M$，我们需要为每个 $\alpha < \alpha_*$ 指定一个序数 $h(\alpha)$，使得下一个方程成立

$$\ell(k(f)(\kappa_{\alpha_0}, \ldots, \kappa_{\alpha_{m-1}})) = \tilde{k}(f)(\tilde{\kappa}_{h(\alpha_0)}, \ldots, \tilde{\kappa}_{h(\alpha_{m-1})}).$$

我们需要证明存在这样的函数 h，使得 ℓ 是初等嵌入；为此，我们递归定义 逼近来构造 ℓ。具体而言，对于每个 $\alpha < \alpha_*$，我们定义一个初等嵌入 $\ell_\alpha\colon\ M_\alpha \to M_{\bar{\alpha}}$

$$(\oplus) \qquad \ell_\alpha(k_\alpha(f)(\kappa_{\beta_0}, \ldots, \kappa_{\beta_{n-1}})) := \tilde{k}_{\bar{\alpha}}(f)(\tilde{\kappa}_{h(\beta_0)}, \ldots, \tilde{\kappa}_{h(\beta_{n-1})}),$$

其中 $\bar{\alpha}$ 定义如下：

$$\bar{\alpha} := \begin{cases} \sup h\text{“}\alpha, & \text{if } \alpha \text{ is limit;} \\ h(\alpha-1)+1, & \text{if } \alpha \text{ is successor.}^{22} \end{cases}$$

最终我们将设定 $\ell := \ell_{\alpha_*}$，从而得到一个交换图

$$(\square) \qquad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{K}^N & \xrightarrow{k_{0,\beta}} & M_\beta & \xrightarrow{k_{\beta,\alpha}} & M_\alpha & \xrightarrow{k_{\alpha,\alpha_*}} & \mathcal{K}^M \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \ell_\beta} & & \downarrow{\scriptstyle \ell_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \ell_{\alpha_*}} \\ \mathcal{K}^N & \xrightarrow{\tilde{k}_{0,\bar{\beta}}} & \tilde{M}_{\bar{\beta}} & \xrightarrow{\tilde{k}_{\bar{\beta},\bar{\alpha}}} & \tilde{M}_{\bar{\alpha}} & \xrightarrow{\tilde{k}_{\bar{\alpha},\bar{\alpha}_*}} & \mathcal{K}^{\tilde{M}}, \end{array}$$

为 $0 \le \beta \le \alpha \le \alpha_*$。

对于每个 $\alpha < \alpha_*$，$h(\alpha)$ 将是使得 $\tilde{\kappa}_\beta = k_{\bar{\alpha},\,\beta}(\ell_\alpha(\kappa_\alpha))$ 且 $\tilde{\zeta}_\beta = k_{\bar{\alpha},\,\beta}(\ell_\alpha(\zeta_\alpha))$ 成立的最小 $\beta \ge \bar{\alpha}$。换言之，我们将证明，对于每个 $\alpha < \alpha_*$，在迭代 k 中总存在一个阶段 $\beta \ge \bar{\alpha}$，使得该阶段使用的测度恰好是 $k_{\bar{\alpha},\,\beta}(\ell_\alpha(k_\alpha(\mathcal{U})(\kappa_\alpha,\ \zeta_\alpha)))$。

假设 ℓ_α 是初等的，上述观察将保证 $\ell_{\alpha+1}$ 如（$\oplus$）中定义的是初等的，并且交换图

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{k_{\alpha,\alpha+1}} & M_{\alpha+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \ell_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \ell_{\alpha+1}} \\ \tilde{M}_{\bar{\alpha}} & \xrightarrow{\tilde{k}_{\bar{\alpha},h(\alpha)+1}} & \tilde{M}_{h(\alpha)+1} \end{array}$$

可交换。在极限阶段 $\alpha \le \alpha_*$，我们将利用归纳假设（“对所有 $\beta < \alpha$，ℓ_β 都是初等的”），并借助关于初等嵌入的直极限的一般事实，得出 ℓ_α 也是初等的。

假设 ℓ_γ 的定义方式是：在每个序数处，$h \restriction \alpha$ 的取值都尽可能小，从而对每个 $\gamma < \alpha$，

$$\tilde{\kappa}_{h(\gamma)} = \tilde{k}_{\bar{\gamma},h(\gamma)}(\ell_\gamma(\kappa_\gamma)) \wedge \tilde{\zeta}_{h(\gamma)} = \tilde{k}_{\bar{\gamma},h(\gamma)}(\ell_\gamma(\zeta_\gamma)).$$

我们将对 $\alpha \le \alpha_*$ 保持以下归纳假设：

(I) 嵌入 $\langle \ell_\gamma \mid \gamma \le \alpha \rangle$ 存在且是初等的，并与 $k_{\gamma,\alpha}$ 及 $k_{\gamma,\bar{\alpha}}$ 构成一个交换系统，如（$\square$）所述。**(II)** $\tilde{\kappa}_{\bar{\alpha}} \le \ell_\alpha(\kappa_\alpha)$。**(III)** 存在一个序数 $h(\alpha) \in (\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_*)$，使得

$$\tilde{\kappa}_{h(\alpha)} = \tilde{k}_{\bar{\alpha},h(\alpha)}(\ell_\alpha(\kappa_\alpha)) \text{ and } \tilde{\zeta}_{h(\alpha)} = \tilde{k}_{\bar{\alpha},h(\alpha)}(\ell_\alpha(\zeta_\alpha)).$$

其中 $\bar{\alpha}_*$ 是应用于 6.16.2 时给出的序数，所依据的是 $\ell_\alpha(\kappa_\alpha)$。

断言 6.16.4。 (I)–(III) 对每个 $\alpha \le \alpha_*$ 都成立。

断言的证明。 我们通过对 $\alpha \le \alpha_*$. 进行归纳法来证明这一点

如上文所述，子句（I）立即由条款（III）推出；为了证明后者，我们将依靠辅助条款（II）。因此，只需证明子句（II）和条款（III）。

条款（II）：

▶ 如果 $\alpha = 0$，那么 $\ell_0(\kappa_0) = \kappa_0 > \tilde{\kappa}_{\bar{0}}$，因为根据定义，$\tilde{\kappa}_{\bar{0}} = 0$.

▶ 如果 $\alpha = \gamma + 1$ 是后继序数，那么根据归纳假设，

$$\tilde{\kappa}_{h(\gamma)} = \tilde{k}_{\bar{\gamma},h(\gamma)}(\ell_\gamma(\kappa_\gamma)) \text{ and } \tilde{\zeta}_{h(\gamma)} = \tilde{k}_{\bar{\gamma},h(\gamma)}(\ell_\gamma(\zeta_\gamma)).$$

因此，我们可以构造一个交换图

$$\begin{array}{ccc} M_\gamma & \xrightarrow{k_{\gamma,\alpha}} & M_\alpha \\ \downarrow{\scriptstyle \ell_\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \ell_\alpha} \\ \tilde{M}_{\bar{\gamma}} & \xrightarrow{\tilde{k}_{\bar{\gamma},\bar{\alpha}}} & \tilde{M}_{\bar{\alpha}} \end{array}$$

˜为 $\ell_\alpha(k_{\gamma,\ \alpha}(f)(\kappa\gamma)) := k_{\bar{\gamma},\ \bar{\alpha}}(f)(\tilde{\kappa}_{h(\gamma)})$。

由于 k 是正规迭代， $\kappa_\gamma < \kappa_\alpha$，因此 $\ell_\gamma(\kappa\gamma) < \ell_\alpha(\kappa_\alpha)$，从而$\ell_\alpha(\kappa_\alpha) > \tilde{\kappa}_{h(\gamma)}$。由初等性， $\ell_\alpha(\kappa_\alpha)$ 是一个 $M_{\bar{\alpha}}$-可测基数，因此˜根据迭代 k 的定义方式（见条款（ℵ）），我们得出

$$\ell_\alpha(\kappa_\alpha) \geq \tilde{\kappa}_{h(\gamma)+1} := \tilde{\kappa}_{\bar{\alpha}}.$$

▶如果 α 是极限序数，那么我们有两种情况：要么 $\mathrm{cf}^{\mathcal{K}}(\alpha) \neq \omega$，要么 $\mathrm{cf}^{\mathcal{K}}(\alpha) = \omega$。

▶▶ 假设 $\mathrm{cf}^{\mathcal{K}^N}(\alpha) \neq \omega$。在这种情况下，迭代 $\tilde{k}$ 已根据第（˜）条款在第 38 页定义，因此 $\tilde{\kappa}_{\bar{\alpha}}$ 是大于或等于 sup $M_{\bar{\alpha}}$的第一个 $_{\beta<\bar{\alpha}}\, \tilde{\kappa}_\beta = \sup_{\beta<\alpha} \tilde{\kappa}_{h(\beta)}$-可测基数。

根据迭代的正规性， $k\, \kappa_\beta < \kappa_\alpha$ 对所有 $\beta < \alpha$ 都成立。借助˜归纳假设，我们可以定义一个满足方程（⊕）的初等嵌入 ℓ_α: $M_\alpha \to M_{\bar{\alpha}}$。因此，对于 $\beta < \alpha$,

$$\ell_\alpha(\kappa_\alpha) > \ell_\alpha(\kappa_\beta) = \ell_\alpha(k_\alpha(\mathrm{id})(\kappa_\beta)) = \tilde{k}_{\bar{\alpha}}(\mathrm{id})(\tilde{\kappa}_{h(\beta)}) = \tilde{\kappa}_{h(\beta)}.$$

˜由此， ℓ_α（κ_α）$\geq$ sup$_{\beta<\alpha}\, \tilde{\kappa}_{h(\beta)}$。由于 ℓ_α（κ_α）是 $M_{\bar{\alpha}}$-可测基数，我们根据 $\tilde{\kappa}_{\bar{\alpha}}$ 的极小性得出结论： $\tilde{\kappa}_{\bar{\alpha}} \leq \ell_\alpha$（$\kappa_\alpha$）。

▶▶假设共终性$^{\mathcal{K}^N}(\alpha) = \omega$。在这种情况下，共终性$^{\mathcal{K}^N}(\bar{\alpha}) = \omega$，并且迭代$k$ 满足第（ℶ）条，见第 38页。我们反设 $\ell_\alpha(\kappa_\alpha) < \tilde{\kappa}_{\bar{\alpha}}$。我们已经证明 $\ell_\alpha(\kappa_\alpha) \geq \sup_{\beta<\alpha} \tilde{\kappa}_\beta$，因此根据 $\tilde{\kappa}_{\bar{\alpha}}$的极小性,

$$A = \{\beta < \bar{\alpha} \mid \tilde{k}_{\beta,\bar{\alpha}}(\tilde{\kappa}_\beta) = \ell_\alpha(\kappa_\alpha) \wedge \tilde{k}_{\beta,\bar{\alpha}}(\tilde{\zeta}_\beta) = \ell_\alpha(\zeta_\alpha)\}$$

在 $\bar{\alpha}$ 中无界。我们将证明这是不可能的。

子断言 6.16.4.1。集合

$$\{\beta < \alpha \mid (k_{\beta,\alpha}(\kappa_\beta) > \kappa_\alpha) \ \ or \ \ (k_{\beta,\alpha}(\kappa_\beta) = \kappa_\alpha \wedge k_{\beta,\alpha}(\zeta_\beta) > \zeta_\alpha)\}$$

在 α 中有界。

子断言的证明。令 $<_{\mathrm{lex}}$ 表示 Ord $\times$Ord 上的字典序。我们断言，对于每个选择 $R \in \{=, >_{\mathrm{lex}}\}$，集合

$$\{\beta < \alpha \mid k_{\beta,\alpha}(\langle \kappa_\beta, \zeta_\beta \rangle) R \langle \kappa_\alpha, \zeta_\alpha \rangle\} \tag{1}$$

在 α 中有界。我们通过反证法证明这一点。

若 R 是 $=$，则我们的假设推出

$$k_\alpha(\mathcal{U})(\kappa_\alpha,\zeta_\alpha)=\{X\in\mathcal{P}^{M_\alpha}(\kappa_\alpha)\mid\langle\kappa_{\beta_n}\mid n<\omega\rangle\subseteq^* X\}.$$

我们声称这是不可能的。由于 $M[H]$ 对 ω-序列是闭的，$V[G]$ 因此 $k_\alpha(\mathcal{U})(\kappa_\alpha,\zeta_\alpha)$ 属于 $M[H]$。我们的反大基数假设[23] 确保 *Mitchell* 覆盖定理 (定理2.16) 在 $M[H]$中适用。由于 $k_\alpha(\mathcal{U})(\kappa_\alpha,\zeta_\alpha)$ 是 $\mathcal{K}^{M[H]}$-正规的，由极大性可知，

$$k_\alpha(\mathcal{U})(\kappa_\alpha,\zeta_\alpha)\cap\mathcal{K}^{M[H]}\in\mathcal{K}^{M[H]}.$$

由 $\mathcal{K}$ 的泛型绝对性，$k_\alpha(\mathcal{U})(\kappa_\alpha,\ \zeta_\alpha)\cap\mathcal{K}^M\in\mathcal{K}^M$.但这是不可能的：一方面，$\mathcal{P}^{M_\alpha}(\kappa_\alpha)=\mathcal{P}^{\mathcal{K}^M}(\kappa_\alpha)$（由于迭代的正规性$k$），因此 $k_\alpha(\mathcal{U})(\kappa_\alpha,\ \zeta_\alpha)\cap\mathcal{K}^M=k_\alpha(\mathcal{U})(\kappa_\alpha,\ \zeta_\alpha)\in\mathcal{K}^M$；另一方面，测度 $k_\alpha(\mathcal{U})(\kappa_\alpha,\ \zeta_\alpha)$ 不属于 $\mathcal{K}^M$，因为根据相容性，一旦它被命中，就不属于 k 中后续的任何超幂。

若 R 是 $>_{\text{lex}}$，类似的论证会导出矛盾：

设 $\langle\beta_n\mid n<\omega\rangle$ 是 α 中的一个共尾序列，其中由（1）所示集合中的序数组成，并且不失一般性地假设，对于所有 n，κ_α，ζ_α 都属于$k_{\beta_n,\ \alpha}$的值域。设 $V_n:=k_{\beta_n}(\mathcal{U})(\bar{\kappa}^n_\alpha,\ \zeta^n_\alpha)$，其中 $\bar{\kappa}^n_\alpha$，ζ^n_α分别是 κ_α 和 ζ_α 经由$k_{\beta_n,\ \alpha}$得到的原像。由于在阶段 β_n，迭代k 命中了测度 $k_{\beta_n}(\mathcal{U})(\kappa_{\beta_n},\ \zeta_{\beta_n})$，且 $\kappa_\beta>\bar{\kappa}^n_\alpha$或 $\kappa_\beta=\bar{\kappa}^n_\alpha$，但$\zeta_{\beta_n}>\bar{\zeta}^n_\alpha$，根据 $k_{\beta_n}(\mathcal{U})$的相容性，$V_n\in M_{\beta_n+1}$，因此 $V_n\in\mathcal{K}^M\subseteq M$.

现在可以常规地验证

$$k_\alpha(\mathcal{U})(\kappa_\alpha,\zeta_\alpha)=\{X\in\mathcal{P}^{M_\alpha}(\kappa_\alpha)\mid\exists n\,\forall m\geq n\,(X\cap\kappa_{\beta_m}\in V_n)\}.$$

但由 σ-闭性可知，$M[H]$ 在 $V[G]$中成立；再由 Mitchell 覆盖定理，我们再次得到 $k_\alpha(\mathcal{U})(\kappa_\alpha,\ \zeta_\alpha)\in\mathcal{K}^M$。这是不可能的。□

子断言 6.16.4.2. 以下 A的超集在 α中有界：

$$B=\{\beta<\bar{\alpha}\mid\tilde{k}_{\beta,\bar{\alpha}}(\tilde{\kappa}_\beta)=\ell_\alpha(\kappa_\alpha)\wedge\tilde{k}_{\beta,\bar{\alpha}}(\tilde{\zeta}_\beta)\geq\ell_\alpha(\zeta_\alpha)\}$$

特别地，A 必定有界。

子断言的证明。 反设 B 在 $\bar{\alpha}$中无界。

利用这一假设，我们将论证

$$C:=\{\gamma<\alpha\mid\tilde{k}_{h(\gamma),\bar{\alpha}}(\tilde{\kappa}_{h(\gamma)})=\ell_\alpha(\kappa_\alpha)\ \wedge\ \tilde{k}_{h(\gamma),\bar{\alpha}}(\tilde{\zeta}_{h(\gamma)})\geq\ell_\alpha(\zeta_\alpha)\}$$

在 α 中无界。结合我们的归纳假设（II），

$$\ell_\alpha(\kappa_\alpha)=\tilde{k}_{\bar{\gamma},\bar{\alpha}}(\ell_\gamma(\kappa_\gamma))\text{ and }\ell_\alpha(\zeta_\alpha)\leq\tilde{k}_{\bar{\gamma},\bar{\alpha}}(\ell_\gamma(\zeta_\gamma))$$

对所有 $\gamma\in C$均成立。根据交换图的交换性（归纳假设的子句（I）），$k_{\gamma,\ \alpha}(\kappa_\gamma)=\kappa_\alpha$ 和 $k_{\gamma,\ \alpha}(\zeta_\gamma)\geq\zeta_\alpha$ 对所有 $\gamma\in C$均成立。这与断言6.16.4.1 相悖，从而得出所需的矛盾。

因此，假设 $B\subseteq\bar{\alpha}$ 是无界的。令 $\beta\in B$。若 $\beta\in$是h的值域，则问题已解决。否则，令 $\gamma<\alpha$ 为满足 $\beta\in[\bar{\gamma},h(\gamma))$的唯一序数。

[23]即：“不存在关于 $\exists\alpha(o(\alpha)=\alpha^{++})$ 的内模型。”

不失一般性， β 使得对应的 γ 大于子论断中有界集合的上确界6.16.4.1。特别是，

$$k_{\gamma,\alpha}(\kappa_\gamma) \leq \kappa_\alpha.$$

注意， $\ell_\gamma(\kappa_\gamma)$ 是一个 $M_{\bar{\gamma}}$-可测基数 $\geq \tilde{\kappa}_{\bar{\gamma}}$，因此根据命题 6.16.2 ，存在 $\bar{\gamma}_* \in (h(\gamma), \Omega]$ ，使得 $k_{\bar{\gamma},\,\delta}(\ell_\gamma(\kappa_\gamma)) \geq \tilde{\kappa}_\delta$ 对所有 $\delta < \bar{\gamma}_*$ 都成立。特别地，

$$\tilde{\kappa}_{h(\gamma)} = \tilde{k}_{\bar{\gamma},h(\gamma)}(\ell_\gamma(\kappa_\gamma)) \geq \tilde{k}_{\beta,h(\gamma)}(\tilde{\kappa}_\beta).$$

此外，等号成立，因为：

$$\ell_\alpha(\kappa_\alpha) = \tilde{k}_{\beta,\bar{\alpha}}(\tilde{\kappa}_\beta) \leq \tilde{k}_{\beta,\bar{\alpha}}(\tilde{k}_{\bar{\gamma},\beta}(\ell_\gamma(\kappa_\gamma))) = \tilde{k}_{\bar{\gamma},\bar{\alpha}}(\ell_\gamma(\kappa_\gamma)) = \ell_\alpha(k_{\gamma,\alpha}(\kappa_\gamma)) \leq \ell_\alpha(\kappa_\alpha).$$

第一个等号成立是因为 $\beta \in B$；第一个不等式成立是因为$\beta < \bar{\gamma}_*$；第三个不等式利用了交换图的交换性，而最后一个不等式则由我们对 γ的选择得到。因此，我们得出

$$\tilde{k}_{h(\gamma),\bar{\alpha}}(\tilde{\kappa}_{h(\gamma)}) = \ell_\alpha(\kappa_\alpha).$$

为便于后续使用，还需注意上述等式推出

$$\tilde{k}_{\bar{\gamma},\beta}(\ell_\gamma(\kappa_\gamma)) = \tilde{\kappa}_\beta. \tag{**}$$

现在，我们要证明 $\tilde{k}_{h(\gamma),\bar{\alpha}}(\zeta_{h(\gamma)}) \geq \ell_\alpha(\zeta_\alpha)$。为此，只需证明 $\zeta_{h(\gamma)} \geq k_{\beta,h(\gamma)}(\zeta_\beta)$（因为 $\beta \in B$）。反设存在矛盾，即$\zeta_{h(\gamma)} < k_{\beta,h(\gamma)}(\zeta_\beta)$。那么 $k_{\bar{\gamma},\beta}(\ell_\gamma(\zeta_\gamma)) < \zeta_\beta$. 由于迭代 $\tilde{k}$ 在阶段 β 尚未停止，因此 $\mathrm{cf}^{\mathcal{K}^N}(\beta) = \omega$[24]，并且存在共终多个 $\delta \in (\bar{\gamma}, \beta)$，使得 $k_{\delta,\beta}(\tilde{\kappa}_\delta) = \tilde{\kappa}_\beta$ 且 $k_{\delta,\beta}(\zeta_\delta) = k_{\bar{\gamma},\beta}(\ell_\gamma(\zeta_\gamma))$。因此，利用上面的 **(**)**，对共终多个 $\delta \in (\bar{\gamma}, \beta)$，

$$\tilde{k}_{\bar{\gamma},\delta}(\ell_\gamma(\kappa_\gamma)) = \tilde{\kappa}_\delta \text{ and } \tilde{k}_{\bar{\gamma},\delta}(\ell_\gamma(\zeta_\gamma)) = \tilde{\zeta}_\delta.$$

然而， $h(\gamma) > \beta$ 是使上述两个等式成立的、大于 $\bar{\gamma}$ 的最小序数，因此与$\zeta_{h(\gamma)} < k_{\beta,\,h(\gamma)}(\zeta_\beta)$. 矛盾□

前一个断言导出矛盾，并完成了（II）的证明。

条款（III）：考察 $M_{\bar{\alpha}}$-可测基数 $\ell_\alpha(\kappa_\alpha)$（根据 $\geq \tilde{\kappa}_{\bar{\alpha}}$，**条款（II）**，它是），并针对它应用断言6.16.2 。这样，我们可以找到一个序数 $\bar{\alpha}_* \in (\bar{\alpha},\, \Omega],$，其共尾数为可数，且 $\mathcal{K}^N$-共尾数；使得集合

$$\{\gamma < \bar{\alpha}_* \mid \gamma \geq \bar{\alpha} \wedge k_{\gamma,\bar{\alpha}_*}(\tilde{\kappa}_\gamma) = k_{\bar{\alpha},\,\bar{\alpha}_*}(\ell_\alpha(\kappa_\alpha)) \wedge k_{\gamma,\,\bar{\alpha}_*}(\zeta_\gamma) = k_{\bar{\alpha},\,\bar{\alpha}_*}(\ell_\alpha(\zeta_\alpha))\}$$

是无界的。令 $h(\alpha)$ 为上述所示集合中大于 $\bar{\alpha}$ 的最小元素，并利用 $k_{h(\alpha),\,\bar{\alpha}_*}$ 的初等性推得

$$\tilde{\kappa}_{h(\alpha)} = \tilde{k}_{\bar{\alpha},h(\alpha)}(\ell_\alpha(\kappa_\alpha)) \text{ and } \tilde{\zeta}_{h(\alpha)} = \tilde{k}_{\bar{\alpha},h(\alpha)}(\ell_\alpha(\zeta_\alpha)).$$

当然， $h(\alpha) < \Omega$，因此我们完成了证明。 □

前一个断言使我们能够构造 $\ell\colon\ \mathcal{K}^M \to \tilde{\mathcal{K}}$ ，从而使交换图可交换。这就完成了该引理的证明。□

[24]参见断言 6.16.3（2）。

引理 6.17。 假设 ($\mathscr{H}^{-}$) 成立。令 $\iota\colon\ V \to N$ 为一个分解 $j \restriction V$的有限迭代，并假设 ι 是正规的。令 $k\colon\ N \to M$ 为因子初等嵌入。那么，对于每个 $\mu \in \Gamma_\iota$，我们有 k"$\mu \subseteq \mu$。

证明。 由于我们要为 k 在序数上的取值给出上界，只需考察它在核心模型 $\mathcal{K}$上的限制。将引理 6.16 应用于 $j \restriction \mathcal{K}, \iota \restriction \mathcal{K}$和 $k \restriction \mathcal{K}^N$，我们得到一个 $\mathcal{K}^N$-内部的正规迭代 $\tilde{k}\colon \mathcal{K}^N \to \tilde{\mathcal{K}}$使得

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \xrightarrow{j} & \mathcal{K}^M \\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & \overset{k}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle\ell} \\ \mathcal{K}^N & \xrightarrow[\tilde{k}]{} & \tilde{\mathcal{K}} \end{array}$$

与之交换。为了给 $\gamma < \mu \in \Gamma_\iota$ 时的 $k(\gamma)$ 取值定界，我们为可能更大的值 $k(\gamma)$ 定界。因此，我们将证明，对于每个 $\mu \in \Gamma_\iota$，k"$\mu \subseteq \mu$.

固定 $\mu \in \Gamma_\iota$。对于每个 $\tilde{\kappa}_0 \leq \alpha < \mu$，我们证明 $\tilde{k}(\alpha) < (\alpha^{+3})^{\mathcal{K}^N}$. 。由于 $\tilde{k}$ 是 $\mathcal{K}^N$ 的内部对象，且 μ 是 $\mathcal{K}^N$-可测的，我们得出 $\tilde{k}(\alpha) < \mu$. 。为导出矛盾，假设存在某个 $\alpha < \mu$，使得 $\tilde{k}(\alpha) \geq (\alpha^{+3})^{\mathcal{K}^N}$.

由于长度为 μ 的正规测度构成的线性迭代良基，因此 $\mathcal{K}^N$ 无法映射到 α 那么高。~在接下来的论证中，我们将关注 $\langle (\tilde{\kappa}_\beta, \zeta_\beta) \mid \beta \in S \rangle$，其中 S 是序数集合 $< (\alpha^{+3})^{\mathcal{K}^N}$，其中具有 $\mathcal{K}^N$-共尾数 ω. 回想一下，~这些是 k 在 $\mathcal{K}^N$-共尾数 ω的极限阶段所命中的临界点/Mitchell 序 6.16.1 中的论证来导出矛盾。

对每个 $\beta \in S$，令 $f_\beta\colon [\tilde{\kappa}_0]^n \to (\tilde{\kappa}_0 + 1)$，$g_\beta\colon [\tilde{\kappa}_0]^n \to \tilde{\kappa}_0$ 以及生成元 $\tilde{\kappa}_{\beta_0}$、……、$\tilde{\kappa}_{\beta_{n_\beta - 1}} < \tilde{\kappa}_\beta$ 分别表示 $\tilde{\kappa}_\beta$ 和 ζ_β。也就是说，

$$\tilde{\kappa}_\beta = k_\beta(f_\beta)(\tilde{\kappa}_{\beta_0}, \ldots, \tilde{\kappa}_{\beta_{n_\beta - 1}}),^{25}$$

$$\tilde{\zeta}_\beta = k_\beta(g_\beta)(\tilde{\kappa}_{\beta_0}, \ldots, \tilde{\kappa}_{\beta_{n_\beta - 1}}).$$

显然，$\tilde{\kappa}_\beta \leq \alpha$ 否则，α 就不会在后续阶段中被移动。

上述内容自然导出函数 $F\colon\ S \to (H_{|\alpha|^{++}})^{\mathcal{K}^N}$，其定义如下：

$$\beta \mapsto \langle f_\beta, g_\beta, \langle \tilde{\kappa}_{\beta_0}, \ldots, \tilde{\kappa}_{\beta_{n-1}} \rangle \rangle.$$

这是良定义的：这样的函数至多有 $(\tilde{\kappa}_0^+)^{\mathcal{K}^N}$ 个，且 $(\tilde{\kappa}_0^+)^{\mathcal{K}^N} \leq |\alpha|^{+\mathcal{K}^N}$；由于 $\mathcal{K} \models$ "不存在 $\exists \theta\, (o(\theta) = \theta^{++})$ 的内模型"，由初等性可知，在 $\mathcal{K}^N$ 及其超幂 $\tilde{M}_\beta$. 中也同样如此。

令 $S_0 \subseteq S$ 为一个平稳集，使得函数 F 为常值；设其值为 $\langle f^*, g^*, \langle \kappa_0^*, \ldots \ldots \kappa_{n^*-1}^* \rangle \rangle$. 由此可知，对每个属于 S_0 的 $\beta < \gamma$，

$$\tilde{k}_{\beta,\gamma}(\tilde{\kappa}_\beta) = \tilde{\kappa}_\gamma \text{ and } \tilde{k}_{\beta,\gamma}(\tilde{\zeta}_\beta) = \tilde{\zeta}_\gamma.$$

根据断言6.16.1的相同推理，这就产生了矛盾。 □

[25]请回想，我们始终假设 $\tilde{\kappa}_\beta \leq \tilde{k}_\beta(\tilde{\kappa}_0)$，因此上述内容是有意义的。

我们还需要以下关于这些有限正规迭代的临界点正则性的观察 ι: $V \to N$ 它们分解 $j \restriction V$。我们强调，这一观察适用于任意 Prikry 型强迫的非定常支集迭代 $\mathbb{P}_\kappa$，如定义2.2所述。特别是，该引理并非专门针对§5中的粘合迭代。因此，较弱的反大基数假设（$\mathscr{H}^-$）已足够。

引理 6.18. 假设($\mathscr{H}^-$) 成立。设 $\iota\colon V \to N$ 是一个有限正规迭代，分解 $j \restriction V$ 和 $\mu \in \Gamma_\iota$。那么， μ 在 $M[H]$中是正则的。[26]

证明。 设 $\iota\colon V \to N$和 $\mu \in \Gamma_\iota$如上。显然， μ在 N中是正则的。

断言 6.18.1。 $M \models$“μ 是正则的”。

断言的证明。反设不然。设 $a \in M$ 是 μ 的一个共尾子集，其序型为 $<\mu$。设 $\iota'\colon V \to N'$ 是一个有限正规迭代，它扩展 ι，分解 j，且对某个 $b \in N'$ 有 $a = k'(b)$。（这里， $k'\colon N' \to M$表示使得 $j = k' \circ \iota'$成立的分解嵌入。）由引理 6.17，k'” $\mu \subseteq \mu$，因此 $b \in N'$必定在 μ中共尾，且 otp $b < \mu$: 事实上，假设 $b \subseteq \mu$ 在 μ中有界。由于 $N' \models$ “μ 是正则的”（因为 $\mu \in \Gamma_\iota \subseteq \Gamma_{\iota'}$），必有 $\sigma := \sup(b) < \mu$。于是 $k'(\sigma) < \mu$。因此，由于 $k'(b)$无界，存在 $\alpha \in k'(b)$ 使得 $k'(\sigma) < \alpha$。由 k' 的初等性，存在 $\alpha \in b$ 使得 $\sigma < \alpha$，这不可能。

上述结果表明， b 是 N'中 μ 为奇异基数的见证，但这不可能，因为 μ 是 $\Gamma_{\iota'}$. □的成员

断言 6.18.2. $M[H] \models$ “μ 是正则的”。

断言的证明。首先，注意到 $N \models$ “ $\mathrm{cf}(\mu) > \kappa^+$”且 $N \models$ “$|\mathbb{P}| \leq \kappa^+$”。因此， $N[G] \models$ “ $\mathrm{cf}(\mu) \geq \kappa^+$”。根据 [BNU17，推论 2 中类似融合的论证，$\mathbb{P}_\kappa$ Prikry 型强迫的非平稳支撑迭代不会改变共尾数为 $\geq\kappa$的基数的共尾数。由于 N 在 V中对 κ-序列封闭， $\mathrm{cf}^V(\mu) \geq \kappa^+$，所以 $V[G] \models$ “ $\mathrm{cf}(\mu) \geq \kappa^+$”。

现在，假设 $M[H] \models$“μ是奇异的”。由于 $M[H] \subseteq V[G]$， μ 在 $M[H]$中的共尾数$\exists\alpha(o(\alpha) = \alpha^{++}$必定不可数”。现在我们使用如下假设：不存在满足“$\exists\alpha(o(\alpha) = \alpha^{++})$”的内模型。由于 μ 在 M中正则，特别是在 $\mathcal{K}^M$中正则，而在 $M[H]$中是奇异的，因此根据 Mitchell 覆盖定理 [Mit09，定理 2，6] 存在一个弱普里克里–马吉多尔集 $C \subseteq \mu$，它位于 $M[H]$ 且由 $\mathcal{K}^M$-正则基数组成。[27]

由于映射 $k\colon N \to M$ 的临界点高于 ω_1， 且 k“$\mu \subseteq \mu$，集合

$$D = \{\alpha < \mu \mid k(\alpha) = \alpha\}$$

是一个 ω-闭无界集。因此，存在一个 $\mathcal{K}^M$-正则基数 $\alpha \geq \kappa^+$，使得 $k(\alpha) = \alpha$，并且

$$(**) \qquad \mathrm{cf}^{M[H]}(\alpha) = \mathrm{cf}^{V[G]}(\alpha) = \omega.$$

[26]提醒读者，根据第 31 j页的**设定**， $V[G] \to M[H]$ 是由 κ-完备超滤子在 κ.上构造的 $V[G]$-内超幂。回想一下， $C \subseteq \mu$ 是一个 *Prikry–Magidor set*，当且仅当 $|C| < \mu$，并且对于 μ 上的每个 $D \in \mathcal{K}^M$ 闭无界集，集合 $D \setminus C$ 在 μ中有界。

现在进入最后阶段。由 k 的初等性可知， $\mathcal{K}^N \models$ “α 是正则的”。由于嵌入 $\iota\colon V \to N$ 是 $\iota \restriction \mathcal{K}\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}^N$ 的提升，而后者是使用来自 $\mathcal{K}$ 的测度进行的有限正规迭代，因此 α 的 $\mathcal{K}^N$-正则性意味着 $\mathcal{K} \models$ “$\mathrm{cf}(\alpha) \geq \kappa^+$”。现在回想一下， V 是在对 $\mathcal{K}$ 使用快速函数强迫 $\mathbb{S}_\kappa$ 进行强迫之后得到的，因此也就是在使用一个保持共尾数的偏序集进行强迫之后得到的。因此， $V \models$ “$\mathrm{cf}(\alpha) \geq \kappa^+$”。最后， $V[G]$ 是通过 Prikry 型强迫的非平稳支撑迭代 $\mathbb{P}_\kappa$ 得到的 V 的泛型扩张。上文提到，这个迭代不会改变共尾数为 $\geq \kappa$ 的基数的共尾数。因此， $V[G] \models$ “$\mathrm{cf}(\alpha) \geq \kappa^+$”。然而，这与 (**) 中列出的方程矛盾。□

上述内容完成了对 $M[H] \models$ “μ 是正则的”这一命题的证明，其中 $\mu \in \Gamma_\iota$. □

备注 6.19。 请注意，前面的论证在任何时候都没有用到 $\mathbb{P}_\kappa$ 是粘合迭代。换言之，该论证足够一般，可应用于定义 2.2 中的任意非平稳支撑 Prikry 型强迫迭代。

现在我们可以证明关于极大茎存在性的**关键引理**（引理 6.11）。由于该引理依赖于粘合迭代的具体定义，这次我们必须假设更强的反大基数假设（$\mathscr{H}$）。

引理 *6.11* 的证明。 为导出矛盾，假设该引理不成立。这意味着存在一个有限迭代 $\iota_0\colon V \to N_0$以及 $\bar{\mu} \in A_{\iota_0}$ ，使得对于每个 $\leq_j$-扩张 ι_0 ，将其扩张为有限迭代$\iota\colon V \to N$，并通过 $j \restriction V$ 对 $k\colon N \to M$ 进行分解后，集合

$$\bar{H}^{\iota,k}_{\bar{\mu}} := \{b_{\mathrm{stem}(k(r(\bar{\mu}))_{H \restriction k(\bar{\mu})})} \mid r \text{ witnesses } \bar{\mu} \in A_\iota\}$$

不含有 $\sqsubseteq$-极大元。

令 $\bar{\mu}$ 为这些序数中的第一个，并令 $\iota\colon V \to N$ 为一个 $\leq_j$-扩张，它扩张了那个有问题的 ι_0 ，使得 $\bar{\mu} \in k^{-1}$“$\mathcal{C}_\iota$.[28] 在证明中，我们记 $\mu := k(\bar{\mu})$。

出于技术原因（在证明断言 6.19.2时这些原因将显而易见），我们假设 $\mathbb{P}_\kappa$ 确实是引理 $\leq^*$-稠密偏序集 2.4。

由于 $\bar{\mu} \in \Gamma_\iota$，根据引理 6.18，在强迫迭代 $j(\mathbb{P}_\kappa)$ 的第 $\bar{\mu}$ 步，该偏序集不会使 $\bar{\mu}$变为奇异基数。然而， μ 在 M 中是可测基数，因此在 $M[H]$ 中会变为奇异基数（依据我们的反大基数假设（$\mathscr{H}$）以及迭代的设计 $j(\mathbb{P}_\kappa)$）。这带来如下推论：

命题 6.19.1。 $b_\mu \cap \bar{\mu}$ 是 $\bar{\mu}$的有界子集。

断言的证明。 论证大致隐藏在引理 6.18的证明中，但既然篇幅足够短，我们就把它写出来：反设 $b_\mu \cap \bar{\mu}$ 在 $\bar{\mu}$中无界。那么这是 $\bar{\mu}$ 中的一个闭无界集，由M-正则基数组成。由于 $\bar{\mu}$ 是 N-正则的，因此其 $V[G]$共尾数为 $\geq \kappa^+$，且 $\mathrm{crit}(k) \geq \omega_1$，集合 $\{\alpha < \bar{\mu} \mid k(\alpha) = \alpha\}$是一个 ω-闭无界集，位于 $\bar{\mu}$上。因此，

[28] 回想一下， $\mathcal{C}_\iota = \{k(\bar{\mu}_i) \mid \bar{\mu}_i \in \text{临界点}(\iota)\}$

存在一个 M-正则基数 $\alpha < \bar{\mu}$，使得 $k(\alpha) = \alpha$ 且共终性$^{M[H]}(\alpha) = \omega$。根据初等性，α是 N-正则的。因此，由于 $\iota\colon V \to N$是有限迭代，故共终性$^{V[G]}(\alpha) \geq (\kappa^+)^{V[G]}$，由此得到所需的矛盾。□

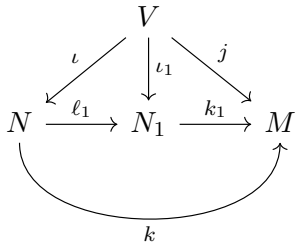
根据前一个断言，存在 $\langle t, T\rangle$属于 H 的 μ-分量，且满足$C \cap \bar{\mu} = b_t$。令 $t = \langle \delta_0, \ldots, \delta_{n-1}\rangle$为相应的茎。由于 $\delta_i < \mu \in$crit(j)，这些序数都由 μ 以下的临界点表示；即，

$$\delta_i = j(f_i)(\mu_0^i, \ldots, \mu_{k_i}^i)$$

对于某个函数 $f_i\colon [\kappa]^{k_i} \to V$，且 $\langle \mu_0^i, \ldots \mu_{k_i}^i\rangle \in \mu^{<\omega}$。

仿照引理 6.6 的论证，我们得到一个有限正规迭代 $\iota_1\colon V \to N_1$，通过 j 经由 $k_1\colon N_1 \to M$进行分解，使得 $\mathcal{C}_{\iota_1} = \mathcal{C}_\iota \cup \{\mu_l^i \mid i < n, l < k_i\}$.特别地，$\delta_i \in \mathrm{range}(k_1)$ 对所有 $i < n$ 都成立。设 $k_1(\delta_i) = \delta_i$ 对于 $i < n$。

由此，我们得到一个扩展的嵌入交换图



通过规定 $\ell_1(\iota(f)(k^{-1}\text{“}\mathcal{C}_\iota)) := \iota_1(\hat{}f)(k_1^{-1}\text{“}\mathcal{C}_{\iota_1})$，其中 $\hat{}f\colon [\kappa]^{|\mathcal{C}_{\iota_1}|} \to V$是由 $f(\xi_0, \ldots\ldots, \xi_{|\mathcal{C}_\iota|-1}, \ldots\ldots, \xi_{|\mathcal{C}_{\iota_1}|-1}) := f(\xi_0, \ldots\ldots, \xi_{|\mathcal{C}_\iota|-1})$。定义的函数$\hat{}$。

注意，$\ell_1(\bar{\mu}) = \bar{\mu}$，因此 $k_0(\bar{\mu}) = k_1(\bar{\mu}) = \mu$。

上述内容确保，在 N_1 中，$\langle \delta_0, \ldots\ldots, \delta_{n-1}\rangle$ 是 $\mathbb{G}_{\bar{\mu}}^{N_1}$ 中一个条件的茎，该条件通过新的因子嵌入 $k_1\colon N_1 \to M$ 映射到 H。事实上，一个见证条件可以是例如这对 $\langle s, S\rangle$，其中 $_s := \langle \delta_0, \ldots\ldots, \delta_{n-1}\rangle$，且 S是 $\bar{\mu}$ 上使 $\langle s, S\rangle$ 成为条件的最弱树。当然，$k_1(\langle s, S\rangle) \geq \langle t, T\rangle \in H$，因此 $\langle s, S\rangle \in k_1^{-1}(H)$。

命题 6.19.2。 $\bar{H}^{\iota_1, k_1}_{\bar{\mu}}$有一个 $\sqsubseteq$-极大元。

断言的证明。 我们断言

$$b_{\mathrm{stem}(k_1(s)(k_1(\bar{\mu})))_{H \restriction k_1(\mu)}} = b_{\langle \delta_0, \ldots, \delta_{n-1}\rangle}$$

是这样的 $\sqsubseteq$-极大元。

一方面，我们已经论证了 $\langle s, S\rangle \in k_1^{-1}(H)$，但对于所有 $p \in G$，它是否满足 $j(p)(k_1(\bar{\mu})) < k_1(s)(k_1(\bar{\mu}))$? 因此，$b_{\mathrm{stem}(k_1(s)(k_1(\bar{\mu})))^{H \restriction k_1(\mu)}}$ 是定义 $\bar{H}^{\iota_1, k_1}_{\bar{\mu}}$的并集的一部分。

令 r 见证 $\bar{\mu} \in A_{\iota_1}$。那么，$k_1(r) \in H$。

令 $\delta < \bar{\mu}$ 为一个序数，使得

$$r \restriction \bar{\mu} \Vdash^N_{\iota(\mathbb{P}_\kappa)_{\bar{\mu}}} \text{“}\mathrm{stem}(r(\bar{\mu})) \subseteq \check{\delta}\text{”}.$$

这样的序数存在，因为 $r \restriction \bar{\mu}$ 强迫一个 $\iota(\mathbb{P}_\kappa)\eta$-名称（带有 $\eta < \bar{\mu}$）等于 $\mathrm{stem}(\dot{r}(\bar{\mu}))$（由引理 2.4），而这是可测基数 $\bar{\mu}$ 的一个有界子集。特别地，$k_1(r)^\frown\langle\mu \Vdash^M_{j(\mathbb{P}_\kappa)_\mu}$ “$\mathrm{stem}(k_1(\dot{r})(\mu)) \subseteq \bar{\mu}$”，因为 $\bar{\mu} \in \Gamma_\iota \subseteq \Gamma_{\iota_1}$，并且引理 6.17 保证这些序数是因子嵌入 $k_1 \colon V \to N_1$ 的闭包点。由于 $k_1(r) \in H$，$b_{\mathrm{stem}(k_1(\dot{r})(\mu)))_{H\restriction\mu}} \subseteq b_\mu \cap \bar{\mu} = b_{\langle\delta_0,\ldots,\delta_{n-1}\rangle}$，证毕。□

请注意，这一断言导出了所需的矛盾。事实上，我们最初假设 $\bar{\mu}$ 满足：不存在任何 $\leq_j$-扩张 ι of ι_0 能使 $\bar{H}^{\iota^*}_{\bar{\mu}}$ k^* 拥有一个 $\sqsubset$-极大元，然而 ι_1 却证明了相反的结论。□

引理 6.11 的证明**编码引理**现已完成。

7. The κ-directednnes of $\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}}\rangle$ from optimal assumptions

接下来是本文的主定理：

定理 7.1 ($V = \mathcal{K}$)。假设 κ 是一个可测基数，且

$$\omega_1 \leq \mathrm{cf}(o(\kappa)) = o(\kappa) \leq \kappa.$$

并且不存在满足 $o(\alpha) \geq \min\{\alpha, o(\kappa)\}$ 的可测基数 $\alpha < \kappa$。

那么，在一个保基数的泛型扩张中，κ 具有 $<o(\kappa)$-GP。

证明。令 $\mathcal{U} = \langle U(\alpha,\zeta) \mid \alpha \leq \kappa, \zeta < o^{\mathcal{U}}(\alpha)\rangle$ 表示 $\mathcal{K}$ 中唯一的相干测度序列。令 $G \subseteq \mathbb{P}_\kappa$ 是在 $\mathcal{K}[S]$ 上的泛型，且 $\mathcal{K}[S]$ 是通过 §5 定义的粘合迭代。假设 $\langle \mathcal{U}_\beta \mid \beta < \omega^\Omega\rangle \in \mathcal{K}[S * G]$ 是 κ 上的一列 κ-完备测度，且 $\Omega < o(\kappa)$ 是一个序数。利用引理 3.10，我们证明这列测度可以通过 κ^Ω 上的一个测度粘合起来——特别是，Ω-粘合性质将成立。

鉴于我们的反大基数假设（即，不存在可测的$\alpha < \kappa$ 满足 $o(\alpha) \geq \alpha$），我们可以援引**编码引理**（引理 6.1），从而得出存在一列编码 $\langle c_\beta \mid \beta < \omega^\Omega\rangle \in H_{(\kappa^+)^{\mathcal{K}}}$，其中每个 c_β 都对相应的超滤子进行编码 $\mathcal{U}_\beta$。（参见定义5.1。）

对于每个 ℓ-序 $1 \leq \rho < \Omega \leq \kappa$ 以及满足 $\omega^\rho \cdot \beta < \omega^\Omega$ 的 β，我们记

$$\vec{c}^{\,\rho}_\beta := \langle c_\gamma \mid \gamma \in [\omega^\rho \cdot \beta, \omega^\rho \cdot (\beta+1))\rangle,$$

$$\vec{\zeta}^{\,\rho}_\beta := \langle \zeta^\sigma_\gamma \mid 1 \leq \sigma < \rho \wedge \gamma \in [\omega^\sigma \cdot \beta, \omega^\sigma \cdot (\beta+1))\rangle.$$

取 $\zeta^1_\beta < o^{\mathcal{U}}(\kappa) = o(\kappa)$ 为一个大于编码 $c_\gamma \in \vec{c}^{\,1}_\beta$ 中提及的所有序数的序数。由于 $o(\kappa)$ 的正则性，以及对所有可测基数 $\alpha < \kappa$ 都有 $o(\alpha) < o(\kappa)$，这样的选择是可能的。一般而言，对于每个 $1 \leq \rho < \Omega$ 以及满足 $\omega^\rho \cdot \beta < \omega^\Omega$ 的每个 β，我们令 $\zeta^\rho_\beta \in (\sup \vec{\zeta}^{\,\rho}_\beta, o(\kappa))$。

仿照 [HP24 定理 6.21]，我们可以将$\iota_{\kappa,\zeta^\rho_\beta}$ 提升至

$$\iota_{\kappa,\zeta^\rho_\beta} \colon \mathcal{K}[S] \to \mathscr{N}_{\kappa,\zeta^\rho_\beta}[\iota_{\kappa,\zeta^\rho_\beta}(S)]$$

以一种方式$\iota_{\kappa,\ \zeta^\rho_\beta}(\ell)(\kappa)=\langle\vec{c}^{\ \rho}_\beta,\ \vec{\zeta}^{\rho}_\beta\rangle$. 此外，仿照 [HP24，断言 6.21。2]，

$$\mathscr{N}_{\kappa,\zeta^\rho_\beta}[\iota_{\kappa,\zeta^\rho_\beta}(S)*G]\models\text{“}\vec{c}^{\ \rho}_\beta\text{ is a sequence of }\kappa\text{-codes”}.$$

由于 $\Omega<o(\kappa)$ 且后者是一个正则基数，我们可以令 $\zeta_*<o(\kappa)$ 大于 $\sup\{\zeta^\rho_\beta\mid 1\le\rho<\Omega\ \wedge\ \omega^\rho\cdot\beta<\omega^\Omega\}$。与之前一样，我们可以将超幂嵌入 $\iota_{\kappa,\ \zeta_*}$ 提升到 $\iota_{\kappa,\ \zeta_*}\colon\mathcal{K}[S]\to\mathscr{N}_{\kappa,\ \zeta_*}[\iota_{\kappa,\zeta_*}(S)]$，使得

$$\iota_{\kappa,\zeta_*}(\ell)(\kappa)=\langle\langle c_\beta\mid\beta<\omega^\Omega\rangle,\langle\zeta^\rho_\beta\mid 1\le\rho<\Omega\wedge\omega^\rho\cdot\beta<\omega^\Omega\rangle\rangle.$$

另请注意，$U(\kappa,\ \zeta^\rho_\beta)$ 的序列属于 $\mathscr{N}_{\kappa,\ \zeta_*}$，因为后一个模型对 κ-序列和 $\omega^\Omega\le\kappa$ 封闭。结合上述内容，我们推断 $o^\ell(\kappa)=\Omega$ 在 $\mathscr{N}_{\kappa,\ \zeta_*}[\iota_{\kappa,\zeta_*}(S)]$ 中成立（见引理5.21）。因此，阶段 κ 的迭代 $\iota_{\kappa,\ \zeta_*}(\mathbb{P}_\kappa)$ 选择了粘合偏序集 $\mathbb{G}^\Omega_\kappa$。（请注意，在 $\mathscr{N}_{\kappa,\ \zeta_*}[\iota_{\kappa,\zeta_*}(S)*G]$ 中以及在$\mathcal{K}[S*G]$ 中，$\mathbb{G}^\Omega_\kappa$ 的计算方式相同，因为前一个模型包含了用于定义 $\mathbb{G}^\Omega_\kappa$ 的测度。）

如下定义粘合测度 $\mathcal{W}$。

对于每个 $X\subseteq\kappa^\Omega\in\mathcal{K}[S*G]$，当且仅当存在 $p\in G$ 和一个以树为对象的 $\mathbb{P}_\kappa$-名称 $\dot{T}$，使得 $p\Vdash_{\mathbb{P}_\kappa}\text{“}\langle\varnothing,\ \dot{T}\rangle\in\dot{\mathbb{G}}^\Omega_\kappa\text{”}$时，$X$ 属于 $\mathcal{W}$，并且

$$\mathscr{N}_{\kappa,\zeta_*}[\iota_{\kappa,\zeta_*}(S)]\models\text{“}p^\frown\langle\varnothing,T\rangle^\frown\iota_{\kappa,\zeta_*}(p)\setminus(\kappa+1)\Vdash_{\mathbb{P}_\kappa}\dot{c}_\kappa\in\iota_{\kappa,\zeta_*}(\dot{X})\text{”},$$

其中 $\dot{c}_\kappa$ 是由 $\mathbb{G}^\Omega_\kappa$ 添加的泛型序列的标准名称。

容易验证，$\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{K}[S*G]$ 中的一个 κ-完备超滤子。

我们将利用引理 3.10 中给出的 Ω-粘合性质的刻画，证明 $\mathcal{W}$ 粘合离开序列 $\langle\mathcal{U}_\beta\mid\beta<\omega^\Omega\rangle$.

设 $X\in\mathcal{W}$ 并固定 $\beta<\omega^\Omega$。反设

$$Y:=\{s(\beta)\mid s\in X\}\notin\mathcal{U}_\beta.$$

令 $p\in G$ 为一个条件，强迫“eval$_\beta$“$X=Y\notin\mathcal{U}_\beta$”。

由于 $X\in\mathcal{W}$，必要时延伸 p 后，我们可以假设

$$\mathscr{N}_{\kappa,\zeta_*}[\iota_{\kappa,\zeta_*}(S)]\models\text{“}p^\frown\langle\varnothing,T\rangle^\frown\iota_{\kappa,\zeta_*}(p)\setminus(\kappa+1)\Vdash_{\mathbb{P}_\kappa}\dot{c}_\kappa\in\iota_{\kappa,\zeta_*}(\dot{X})\text{”}.$$

特别地，

$$\mathscr{N}_{\kappa,\zeta_*}[\iota_{\kappa,\zeta_*}(S)]\models\text{“}p^\frown\langle\varnothing,T\rangle^\frown\iota_{\kappa,\zeta_*}(p)\setminus(\kappa+1)\Vdash_{\mathbb{P}_\kappa}\dot{c}_\kappa(\beta)\in\iota_{\kappa,\zeta_*}(\dot{Y})\cap\kappa\text{”}.$$

（这里用到了这样一个事实：$\iota_{\kappa,\ \zeta_*}(\beta)=\beta$，这在 $\beta<\kappa=\mathrm{crit}(\iota_{\kappa,\ \zeta_*})$ 时成立。）

命题 7.1.1。存在 $p\in G$ 使得 $\iota_{\kappa,\ \zeta_*}(p)\Vdash_{\iota_{\kappa,\ \zeta_*}(\mathbb{P}_\kappa)}\iota_{\kappa,\ \zeta_*}(Y)\cap\kappa=Y$。

证明。为使表述更简洁，将嵌入$\iota_{\kappa,\ \zeta_*}$ 记作 ι.

设 $g\subseteq\mathbb{G}^\Omega_\kappa$是关于 $V[G]$的泛型。在 $V[G*g]$中工作时，对每个 $\alpha<\kappa$，我们考察以下集合：

$$D_\alpha:=\{q\in\iota(\mathbb{P}_\kappa)/G*g\mid q\Vdash_{\iota(\mathbb{P}_\kappa)/G*g}\alpha\in\check{Y}\leftrightarrow\alpha\in\iota(\dot{Y})_{G*g}\}.$$

注意，对于所有 $\alpha<\kappa$，D_α 是 $\iota(\mathbb{P}_\kappa)/G*g$ 的 $\le^*$-稠密开子集。

令 $d_\alpha\colon \kappa \to V$ 是表示 D_α 的函数；也就是说， $D_\alpha = \iota(d_\alpha)(\kappa)^{G*g}$。注意，我们可以假设而不失一般性， $d_\alpha(\eta)$ 是 $\mathbb{P}_\kappa/G_{\eta+1}$ 的一个 $\leq^*$-稠密开子集的 $\mathbb{P}_{\eta+1}$-名称。

我们的目标是证明以下集合是 $\leq^*$-稠密的：

$$E = \{p \in \mathbb{P}_\kappa \mid \exists C \in \mathrm{Cub}_\kappa \wedge \forall \eta \in C\,(p{\restriction}\eta{+}1 \Vdash_{\mathbb{P}_{\eta+1}} \text{“}p{\restriction}[\eta{+}1,\kappa) \in \textstyle\bigcap_{\delta<\eta} d_\delta(\eta)\text{”})\}.$$

如果情况如此，那么任意 $p \in E \cap G$ 都将满足 $\iota(p) \Vdash_{\iota(\mathbb{P}_\kappa)} Y = \iota(Y) \cap \kappa$.

因此，固定 $p \in \mathbb{P}_\kappa$。我们通过一个融合论证定义一个三元组序列$\langle \langle p_\delta, \nu_\delta, C_\delta\rangle \mid \delta < \kappa\rangle$，如下所示。利用相对于 $\nu_0 := 0$ 的强 Prikry 性质以及函数 d_0，我们找到 $p_0 \leq^* p$、 $p_0 {\restriction} \nu_0 + 1 = p {\restriction} \nu_0 + 1$ 和一个闭无界集 $C_0 \subseteq \kappa$ （我们可以假设 $C_0 \cap \mathrm{supp}(p_0) = \emptyset$），使得

$$p_0 {\restriction} \eta + 1 \Vdash_{\mathbb{P}_{\eta+1}} p_0 {\restriction} [\eta+1, \kappa) \in d_0(\eta),$$

对所有 $\eta \in C_0$.

Suppose that $\langle \langle p_\eta, \nu_\eta, C_\eta\rangle \mid \eta < \delta\rangle$ has been defined.

► 情况 $\delta = \delta + 1$: 在这种情况下，我们照前面的方法进行。更具体地说，我们针对 $\nu_\delta := \min(C_{\bar\delta} \setminus \nu_{\bar\delta} + 1)$ 调用强 Prikry 性质，并使用函数 d_δ，从而找到 $p_\delta \leq^* p_{\bar\delta}$ 和一个闭无界集 $C_\delta \subseteq C_{\bar\delta}$，使得

- $C_\delta \cap \text{支撑}(p_\delta) = \emptyset$,
- $p_\delta {\restriction} \nu_\delta + 1 = p_{\bar\delta} {\restriction} \nu_\delta + 1$,
- 以及对所有 $\eta \in C_\delta$., $p_\delta {\restriction} \eta + 1 \Vdash_{\mathbb{P}_{\eta+1}}$ “$p_\delta {\restriction} [\eta+1, \kappa) \in d_\delta(\eta)$”

► 情形 δ 极限序数: 在此情形下，我们约定 $\nu_\delta = \text{上确界}_{\eta<\delta}\, \nu_\eta$ 并取

$$\bar p_\delta {\restriction} \nu_\delta + 1 = \textstyle\bigcup_{\eta<\delta} p_\eta {\restriction} \nu_\eta + 1$$

以及 $\bar p_\delta {\restriction} [\nu_\delta + 1, \kappa)$ 序列 $p_\eta {\restriction} [\nu_\eta + 1, \kappa)$的 $\leq^*$-下界。令 $\bar p_\delta$ 为 $\bar p_\delta {\restriction} \nu_\delta + 1 {}^\frown p_\delta {\restriction} [\nu_{\delta+1}, \kappa)$。注意， $\bar p_\delta$ 是$\iota(\mathbb{P}_\kappa)$中的一个合法条件（即， $\bar p_\delta$ 的支撑处处非平稳），这一点由闭无界集 $C_\delta := \bigcap_{\bar\delta<\delta} C_{\bar\delta}$. 见证。现在，针对序数 ν_δ、函数 d_δ 和条件 $\bar p_\delta$，应用强 Prikry 性质，从而找到 $p_\delta \leq^* \bar p_\delta$ 以及一个闭无界集 $C_\delta \subseteq \bigcap_{\alpha<\delta} C_\alpha$，使其具有上述性质。

这样，我们得到一个序列 $\langle \langle p_\delta, \nu_\delta, C_\delta\rangle \mid \delta < \kappa\rangle$。现在令

$$p^* := \textstyle\bigcup_{\delta<\kappa} p_\delta {\restriction} \nu_\delta + 1,\ C^* := C(\nu) \cap \triangle_{\delta<\kappa} C_\delta,$$

其中 $C(\nu)$ 是 ν 的闭包点所构成的闭无界集： $\delta \mapsto \nu_\delta$.

我们断言 $p^* \in E$，闭无界集 C^* 可作为见证。
令 $\eta \in C$。那么， $\eta = \sup^{\delta<\eta} \nu_\delta$ 且 $\eta \in \bigcap_{\delta<\eta} C_\delta$。由此我们推得，

$$p^* {\restriction} \eta + 1 \Vdash_{\mathbb{P}_{\eta+1}} p^* {\restriction} [\eta+1, \kappa) \leq^* p_\delta {\restriction} [\eta+1, \kappa) \in d_\delta(\eta)$$

对所有 $\delta < \eta.$，由 $d_\delta(\eta)$ 的开性，我们最终推得

$$p^* {\restriction} \eta + 1 \Vdash_{\mathbb{P}_{\eta+1}} p^* {\restriction} [\eta+1, \kappa) \in \textstyle\bigcap_{\delta<\eta} d_\delta(\eta),$$

对所有 $\eta \in C$。由此， $p^* \leq^* p$ 属于 E。 □

设 $\vec{\rho}=\langle\rho_i\mid i\le k\rangle$ 是一个递减序列，其元素为序数，满足 $\rho_k=0$；再设 $\vec{n}=\langle n_i\mid i\le k\rangle$ 是一个非负整数序列，使得 $\beta=\sum_{i=0}^{k}\omega^{\rho_i}\cdot n_i$。

在 $\mathcal{K}[S*G]$ 中，我们用 $\mathcal{T}(\vec{\rho},\ \vec{n})$ 表示由 Ω相干序列 $t\in T$ 组成的序数集合，其中恰好有 n_i 个序数具有 ℓ-序 ρ_i，且对于 σ 而言，在 range($\vec{\rho}$) 之外没有具有 ℓ-序 σ 的序数。更正式地说，t 满足

$$|t_\sigma|:=\begin{cases}n_i, & \text{if } \sigma=\rho_i;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对于每个这样的 $t\in\mathcal{T}(\vec{\rho},\ \vec{n})$，$\mathbb{G}^{\Omega}_{\kappa}$ 的定义要求

$$\mathrm{Succ}_T(t)\in\bigcap\nolimits_{\rho<\Omega}\mathcal{U}^{\rho}_{j_\rho}(t\restriction\rho)\subseteq\bigcap\nolimits_{i\le k}\mathcal{U}^{\rho_i}_{j_{\rho_i}}(t\restriction\rho_i)$$[29]

其中，j_{ρ_i} 是在从 t 生成的 Gitik/Magidor泛型序列中，具有 ℓ-序 ρ_i 的序数集合的序型；也就是说，

$$j_{\rho_i}:=\mathrm{otp}\{\nu\in c_t\mid o^{\ell}(\nu)=\rho_i\}.$$

我们可以如下显式计算 j_{ρ_i}：

$$j_{\rho_0}:=n_0\text{ and }j_{\rho_{i+1}}:=\omega^{\rho_i-\rho_{i+1}}\cdot j_{\rho_i}+n_{i+1}.$$

我们来定义一个与 Y 不相交 的 Ω树 $T^*\subseteq T$。具体做法是遍历 T 的各层：对于 $n\le n^\star:=(\sum_{i\le k}n_i)$，规定

$$\mathrm{Lev}_n(T)=\mathrm{Lev}_n(T^*).$$

对于每个 $t\in\mathcal{T}(\vec{\rho},\ \vec{n})$，令 $\biguplus_{i<\Omega}S^{\rho}_t$ 按照 ℓ-序成为 $\mathrm{Succ}_T(t)$ 的一个划分。由于 Y 是 $\mathcal{U}_\beta$-小的，$S^0_t\cap(\kappa\setminus Y)\in\mathcal{U}_\beta$，并且

$$\bar{S}^{\rho}_t:=\{\nu\in S^{\rho}_t\mid\min(b_\nu\setminus(\max(t\restriction\rho)+1))\in(\kappa\setminus Y)\}\in\mathcal{U}^{\rho}_{j_\rho}(t\restriction\rho).$$

对于每个 $t\in\mathcal{T}(\vec{\rho},\ \vec{n})$，定义

$$\mathrm{Succ}_{T^*}(t):=(S^0_t\cap(\kappa\setminus Y))\cup\bigcup\nolimits_{\rho>0}\bar{S}^{\rho}_t.$$

一般来说，我们约定

$$\mathrm{Lev}_{n^\star}(T^*):=(\bigcup\nolimits_{t\notin\mathcal{T}(\vec{\rho},\vec{n})}\mathrm{Succ}_T(t))\cup(\bigcup\nolimits_{t\in\mathcal{T}(\vec{\rho},\vec{n})}\mathrm{Succ}_{T^*}(s)).$$

T^* 的其他层通过复制 T 中高于 $\mathrm{Lev}_{n^\star}(T^*)$ 的节点得到。

By extending $p\in G$, $\mathscr{N}_{\kappa,\zeta_*}[\iota_{\kappa,\zeta_*}(S)]\models$ "$p\Vdash_{\mathbb{P}_\kappa}\langle\varnothing,\dot{T}^*\rangle\le^*\langle\varnothing,\dot{T}\rangle$". So,

$$\mathscr{N}_{\kappa,\zeta_*}[\iota_{\kappa,\zeta_*}(S)]\models\text{"}p^\frown\langle\varnothing,T^*\rangle^\frown\iota_{\kappa,\zeta_*}(p)\setminus(\kappa+1)\Vdash_{\mathbb{P}_\kappa}\dot{c}_\kappa(\beta)\in\dot{Y}\text{"}.$$

但事实上，$p^\frown\langle\varnothing,\ T^*\rangle^\frown\iota_{\kappa,\ \zeta_*}(p)\setminus(\kappa+1)$ 强迫相反的结论。矛盾。 □

推论 7.2。设 κ 是一个可测基数，λ 是满足 $\lambda\le\kappa$ 的基数。以下理论在模 ZFC意义下等一致：

(1) κ *has the* $<\lambda^+$*-gluing property.*

(2) $o(\kappa)=\begin{cases}\lambda^+, & \text{if } \lambda<\kappa;\\ \kappa, & \text{if } \lambda=\kappa.\end{cases}$

[29]按照惯例 $\mathcal{U}^{\rho_k}_{j_k}(\varnothing)=\mathcal{U}_{j_k}$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2). 若 $\lambda < \kappa$ 则 [HP24，定理 71]（另见 [HP24，注 72]）中的论证可得 $o^{\mathcal{K}}(\kappa) \geq \lambda^+$。若 $\kappa = \lambda$ 则同样的论证可得 $o^{\mathcal{K}}(\kappa) \geq \kappa$。这就证明了 (1) $\Rightarrow$ (2)。

(2) $\Rightarrow$ (1). 这恰好是定理 7.1 在 $\lambda < \kappa$ 时的结论。若 $\lambda = \kappa$，则定理 7.1 会产生一个泛型扩张，在其中 κ 具有 $<\kappa$-GP，而引理3.11 则意味着在同一个模型中 κ具有 $<\kappa^+$-GP。□

前一个推论与定理4.1 结合可得：

推论 7.3。设 κ 是一个可测基数，$\lambda < \kappa$ 是一个基数。以下理论在ZFC下等一致：

(1) $\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$ 是 λ^+-有向的。*(2)* "(κ 是可测基数，且 $o(\kappa) = \lambda^+$)"。

此外，以下理论在ZFC下等一致：

(1) $\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$ 是 κ^+有向的。*(2)* "(κ 是可测基数，且具有 $o(\kappa) = \kappa^+$)"。

让我们通过为存在一个对每个 λ都具有-GP 的基数给出一个上界来结束本节 λ。该论证本质上归功于 Gitik（[Git93，定理 2。1]），但作如下修正—— κ 不假定为κ-紧的（如 Gitik 最初所做的那样），而是一个"粘合基数"。

定理 7.4。设 κ 对每个基数 λ都具有 λ-GP 。那么，存在一个含有强基数的内模型。

证明。反设不存在含有强基数的内模型。令 $\mathcal{K}$ 为相应的 Mitchell-Steel 核心模型。根据核心模型定理（见 [Mit95，Sch06]），任意非平凡初等嵌入 j: $V \to M$ 在 $\mathcal{K}$上的限制都是延拓子的正规迭代。特别地，这也适用于满足 ${}^{\omega_1}M \cap V \subseteq M$的初等嵌入。

根据 Gitik 的 [Git93，定理 1。1], 在迭代中 $j \restriction \mathcal{K}$ 没有任何延拓子被使用超过 ω_1次。特别是，这些嵌入下的像

$$\mathcal{I}_\kappa := \{j(\kappa) \mid j : V \to M,\ \mathrm{crit}(j) = \kappa,\ M^{\omega_1} \cap V \subseteq M\}$$

构成一个集合。令 $\lambda := \sup(\mathcal{I}_\kappa)$。

回到 V，κ 具有 λ^+-GP。[30] 因此，给定 κ 上的任意 κ-完备超滤子，都存在一个初等嵌入 j: $V \to M$，其 crit(j) 为 $= \kappa$，且${}^{\kappa}M \cap V \subseteq M$，并存在一个递增的序数序列 $\langle \eta_\alpha \mid \alpha < \lambda^+ \rangle$，使得 $U = \{X \subseteq \kappa \mid \eta_\alpha \in j(X)\}$。因此，$j(\kappa) > \lambda^+$ ——矛盾。□

8. The failure of the Gluing Property in Gitik's model

在 [HP24] 中，我们证明了：如果 $o(\kappa) = \omega_1$ 且宇宙是截至 $o(\kappa)$ 的核心模型 $= \kappa^{++}$，那么在对树 Prikry 强迫进行非平稳支撑迭代后，κ具有 $\aleph_0$-GP。鉴于此，自然可以预期，$\aleph_1$-GP 的相容性将需要进行如下强迫：

[30]这正是必须修正 Gitik 原始假设之处。事实上，与 κ-紧致性相容的是，它不满足 $(2^\kappa)^+$-GP [HP24]。

对 Gitik 的偏序集进行非平稳支撑迭代 $\mathbb{P}(\alpha,\ o(\alpha))$，从 [Git86]开始 [。在第一作者于希伯来大学进行了一系列研讨会讲座之后，Gitik 建议，GP 应当在他的 [Git86] 模型中成立。本节将证明，$\aleph_0$-GP 在 Gitik 的模型中不成立。这表明，要构造一个在可测基数以下具有任意粘合程度的模型，第 §5 节中引入的粘合偏序是必需的 κ.

在本节中，我们假设 κ 是一个可测基数，并且

$$\mathcal{U} = \langle \mathcal{U}_{\alpha,\beta} \mid \alpha \leq \kappa,\ \beta < o^{\mathcal{U}}(\alpha) \rangle$$

是一个正规测度相干序列，其中 $o^{\mathcal{U}}(\kappa) < \kappa.$ 。如通常所记，

$$\mathrm{dom}_1(\mathcal{U}) := \{\alpha \leq \kappa \mid \exists \beta < o^{\mathcal{U}}(\alpha)\ (\mathcal{U}_{\alpha,\beta} \in \mathcal{U})\}.$$

我们将记 $\mathbb{P}^{\mathrm{E}}(\mathcal{U})$（分别记作 $\mathbb{P}^{\mathrm{NS}}(\mathcal{U})$）Gitik 的 Easton 支持迭代[Git86]（分别为 [BNU17] 中所考虑的非平稳支撑版本）。

本节的主定理如下：

定理 8.1。假设 $V = \mathcal{K}$，且不存在关于“$\exists \alpha (o(\alpha) = \alpha^{++})$”的内模型。设 κ 是一个可测基数，并且存在 $o(\kappa) < \kappa$，由相干序列 $\mathcal{U}$ 见证。令 $\mathbb{P} \in \{\mathbb{P}^{\mathrm{E}}(\mathcal{U})\ \mathbb{P}^{\mathrm{NS}}(\mathcal{U})\}$。于是，

$$\mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\check{\kappa} \textit{ does not have the } \check{\omega}\text{-GP”}.$$

特别地，$\langle \mathfrak{U}_\kappa, \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$ 不是 $\aleph_1$-有向的。

回想一下，$\mathbb{P}$ 只会在可测基数 $\alpha \in \mathrm{dom}_1(\mathcal{U})$处非平凡地强迫；对于这些可测基数，$\mathbb{P}$，$\mathbb{P}(\alpha, o^{\mathcal{U}}(\alpha))$ 的第 α阶段会引入一个泛型闭无界集 $b_\alpha \subseteq \alpha$，其序型 $\mathrm{otp}(b_\alpha)$ 为 $= \omega^{o^{\mathcal{U}}(\alpha)}$。此外，对每个 Mahlo$\eta \leq \kappa$，$\eta$ 上的每个 $V[\mathbb{P}_\eta]$-闭无界集都包含 η上的一个 V-闭无界集：当$\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\mathrm{E}}(\mathcal{U})$时，这显然成立（由 $\mathbb{P}_\eta$的 η-链条件）。在非平稳支撑$\mathbb{P}^{\mathrm{NS}}(\mathcal{U})$的背景下，Ben-Neria–Unger 在 [BNU17 的推论 3.7]中证明了这一点。

接下来是 Gitik 的偏序集 $\mathbb{Q}_\eta$的强 Prikry 引理：$= \mathbb{P}(\eta,\ o^{\mathcal{U}}(\eta))$。

引理 8.2。设 $o^{\mathcal{U}}(\eta) < \eta.$ 。令 $p \in \mathbb{Q}_\eta$ 和 $D \subseteq \mathbb{Q}_\eta$ 为稠密开集。那么，存在一个直接扩张 $q \leq^* p$ 以及一个有限 *Mitchell* 序序列 $\vec{\alpha} \in o^{\mathcal{U}}(\eta)^{<\omega}$，使得对每个满足$\langle o^{\mathcal{U}}(s(i)) \mid i < |s| \rangle = \vec{\alpha}$的序列 $s \in T^p$，$q^\frown s \in D$。

证明。令 $p = \langle t, T \rangle$和 D如上所述。设 $o := o^{\mathcal{U}}(\eta)$。论证分为持续 ω步的归纳过程，在此过程中，将原树 T细化为某个 T_ω，使得 $\langle t, T_\omega \rangle$ 具有所需的性质。

下面描述归纳法的第一步。对每个 $\alpha < o$ 定义

$$X^0_\alpha := \{\delta \in \mathrm{Succ}_{T,\alpha}(\varnothing) \mid \exists S\, (\langle t^\frown \langle \delta \rangle, S \rangle \leq \langle t, T \rangle \wedge \langle t^\frown \langle \delta \rangle, S \rangle \in D)\}$$

和 $X^1_\alpha := \mathrm{Succ}_{T,\ \alpha}(\varnothing) \setminus X^0_\alpha$.

令 $i_\alpha \in \{0, 1\}$ 为唯一满足 $X^{i_\alpha}_\alpha \in \mathcal{U}_{\eta,\alpha}(\varnothing).$ 的指标。令 T_1 为一棵树，其 $\varnothing \in T_1$ 的第一层为 $\mathrm{Succ}_{T_1}(\varnothing) := \bigcup_{\alpha<o} X^{i_\alpha}_\alpha$，并且对每个

$\delta \in \mathrm{Succ}_{T_1,\alpha}(\varnothing)$ 子树 $(T_1)_{\langle\delta\rangle}$ 定义如下：

$$(T_1)_{\langle\delta\rangle} := \begin{cases} S, & i_\alpha = 0; \\ T_{\langle\delta\rangle} & i_\alpha = 1, \end{cases}$$

是见证树之一。

该过程得到一个条件 $\langle t,\ T_1\rangle \leq^* \langle t,\ T\rangle$

接下来我们描述 $\langle t,\ T_3\rangle$ 的构造，假设 $\langle t,\ T_2\rangle$ 已给出 n.

（其中包含为一般的 $n < \omega$. 构造 $\langle t,\ T_{n+1}\rangle$ 的主要思路）

固定序 $\alpha,\ \beta,\ \gamma < o$。对于每个 $\delta_0 \in \mathrm{Succ}_{T_2,\ \alpha}(\varnothing)$、$\delta_1 \in \mathrm{Succ}_{T_2,\ \beta}(\langle\delta_0\rangle)$ 和 $\delta_2 \in \mathrm{Succ}_{T_2,\ \gamma}(\langle\delta_0,\ \delta_1\rangle)$，以及一个序 $\varepsilon < o$，定义 $X^0_\varepsilon(\langle\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2\rangle)$ 如下：

$\{\eta \in \mathrm{Succ}_{T_2,\varepsilon}(\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2\rangle) \mid \exists S(\langle t^\frown\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2,\eta\rangle, S\rangle \leq \langle t, T\rangle \wedge \langle t^\frown\vec{\delta}^\frown\langle\eta\rangle, S\rangle \in D)\}$.类似地，$X^1_\varepsilon(\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2\rangle) := \mathrm{Succ}_{T_2,\varepsilon}(\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2\rangle) \setminus X^0_\varepsilon(\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2\rangle)$。

令 $i_\varepsilon(\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2\rangle) \in \{0,1\}$ 为满足以下条件的唯一指标 i

$$X^i_\varepsilon(\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2\rangle) \in \mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}(t^\frown\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2\rangle \restriction \varepsilon).$$

考虑函数

$$\varphi_\gamma(\langle\delta_0,\delta_1\rangle)\colon \delta \in \mathrm{Succ}_{T_2,\gamma}(\langle\delta_0,\delta_1\rangle) \mapsto \langle i_\varepsilon(\langle\delta_0,\delta_1,\delta\rangle) \mid \varepsilon < o\rangle \in \{0,1\}^o.$$

根据 η-完备性，$\mathcal{U}_{\eta,\gamma}(t^\frown\langle\delta_0,\delta_1\rangle\restriction\gamma)$，我们找到一个大集 $X_\gamma(\langle\delta_0,\delta_1\rangle)$，使得上面的函数在其上恒为值 $\langle i_{\gamma,\varepsilon}(\langle\delta_0,\delta_1\rangle) \mid \varepsilon < o\rangle$。（注意，这个值不再依赖于 δ，而是依赖于固定的序 γ。）

我们可以对该函数重复这一过程

$$\varphi_{\beta,\gamma}(\langle\delta_0\rangle)\colon \delta \in \mathrm{Succ}_{T_2,\beta}(\langle\delta_0\rangle) \mapsto \langle i_{\gamma,\varepsilon}(\langle\delta_0,\delta\rangle) \mid \varepsilon < o\rangle \in \{0,1\}^o,$$

从而得到一个大集 $X_{\beta,\ \gamma}(\langle\delta_0\rangle)$，在该集合上函数取常值 $\langle i_{\beta,\ \gamma,\ \varepsilon}(\langle\delta_0\rangle) \mid \varepsilon < o\rangle$。对

$$\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}\colon \delta \in \mathrm{Succ}_{T_2,\alpha}(\varnothing) \mapsto \langle i_{\beta,\gamma,\varepsilon}(\langle\delta\rangle) \mid \varepsilon < o\rangle \in \{0,1\}^o$$

我们得到 $X_{\alpha,\ \beta,\ \gamma} \in \mathcal{U}_{\eta,\ \alpha}(t \restriction \alpha)$，其中函数取常值 $\langle i_{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varepsilon} \mid \varepsilon < o\rangle$。此时，指标 $i_\varepsilon(\langle\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2\rangle)$ 的值只依赖于 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$—— $\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2$. 的序

现在定义树 T_3。我们规定 $\varnothing \in T_3$，并且

- 对于每个 $\alpha < o$，$\mathrm{Succ}_{T_3,\ \alpha}(\varnothing) = \bigcap_{\beta,\ \gamma<o} X_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}$。[31]
- 对于每个 $\langle\delta_0\rangle \in T_3$ 和 $\beta < o$，$\mathrm{Succ}_{T_3,\ \beta}(\langle\delta_0\rangle) = \bigcap_{\gamma<o} X_{\beta,\ \gamma}(\langle\delta_0\rangle)$。
- 对于每个 $\langle\delta_0,\ \delta_1\rangle \in T_3$ 和 $\gamma < o$，$\mathrm{Succ}_{T_3,\ \gamma}(\langle\delta_0,\ \delta_1\rangle) = X_\gamma(\langle\delta_0,\ \delta_1\rangle)$。
- 对于每个 $\langle\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2\rangle \in T_3$ 和 $\varepsilon < o$，$\mathrm{Succ}_{T_3,\ \varepsilon}(\langle\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2\rangle) = X^i_\varepsilon(\langle\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2\rangle)$，其中 $i = i_\varepsilon(\langle\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2\rangle)$。
- 对于每个 $\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2,\eta\rangle \in T_3$ 定义

$$(T_3)_{\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2,\eta\rangle} := \begin{cases} S, & \text{if } i_{o^{\mathcal{U}}(\eta)}(\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2\rangle) = 0; \\ (T_2)_{\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2,\eta\rangle}, & \text{if } i_{o^{\mathcal{U}}(\eta)}(\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2\rangle) = 1, \end{cases}$$

其中 S 是一棵见证 $\eta \in X^0_{o^{\mathcal{U}}(\eta)}(\langle\delta_0,\delta_1,\delta_2\rangle)$.

[31] 注意，由于超滤子的完备性，这个是 $\mathcal{U}_{\eta,\alpha}(\varnothing)$-大，因为 $o < \eta$。

显然，$\langle t, T_3\rangle$ 是一个条件，而 $\langle t, T_3\rangle \leq^* \langle t, T\rangle$.

一般而言，我们按照前述步骤定义一个 $\leq^*$-递减序列 $\langle \langle t,\ T_n\rangle \mid n<\omega\rangle$，其元素为条件，并取 $T_\omega := \bigcap_{n<\omega} T_n$. 。所求的条件是 $q = \langle t,\ T_\omega\rangle$，而序数序列 $\vec{\alpha} \in o^{\mathcal{U}}(\eta)$ 如下确定：由稠密性可知，存在 $\langle s,\ S\rangle \leq \langle t,\ T_\omega\rangle$，属于 D。因此，存在 $\langle \delta_0^*,\ \ldots,\ \delta_{n-1}^*\rangle \in T_\omega$，使得 $\langle s,\ S\rangle$ 等价于 $\langle t^\frown\langle \delta_0^*,\ \ldots,\ \delta_{n-1}^*\rangle,\ S\rangle$.。由于 $\langle t^\frown\langle \delta_0^*,\ \ldots,\ \delta_{n-1}^*\rangle,\ S\rangle \leq^* \langle s,\ S\rangle$，由开性可得，$\langle t^\frown\langle \delta_0^*,\ \ldots,\ \delta_{n-1}^*\rangle,\ S\rangle \in D$。

令 $\langle \alpha_i \mid i<n\rangle := \langle o^{\mathcal{U}}(\delta_i^*) \mid i<n\rangle$。我们断言，对于每个序数序列 $\langle \delta_0, \ldots, \delta_{n-1}\rangle \in T_\omega$，满足对每个 $i<n$，$o^{\mathcal{U}}(\delta_i) = \alpha_i$,

$$q^\frown\langle \delta_0, \ldots, \delta_{n-1}\rangle = \langle t^\frown\langle \delta_0, \ldots, \delta_{n-1}\rangle, (T_\omega)_{\langle \delta_0,\ldots,\delta_{n-1}\rangle}\rangle \in D.$$

为了更清楚地说明这一论证，假设 $n=4$。因此，我们有$\langle \delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3\rangle \in T_\omega \subseteq T_3$. 根据 T_3的定义，$\delta_0 \in \bigcap_{\beta,\gamma<o} X_{\alpha_0,\beta,\gamma} \subseteq X_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\delta_1} \in X_{\alpha_1,\alpha_2}(\langle \delta_0\rangle)$ 和 $\delta_2 \in X_{\alpha_2}(\langle \delta_0, \delta_1\rangle)$。由这些集合的选取方式可知，$i_{\alpha_3}(\langle \delta_0, \delta_1, \delta_2\rangle) = i_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} = i_{\alpha_3}(\langle \delta_0^*, \delta_1^*, \delta_2^*\rangle)$。注意，由于 $\delta_3^* \in X^0_{\alpha_3}(\langle \delta_0^*, \delta_1^*, \delta_2^*\rangle)$，必然有 $i_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} = 0$. 。特别是，

$$(T_\omega)_{\langle \delta_0,\delta_1,\delta_2,\delta_3\rangle} \subseteq (T_3)_{\langle \delta_0,\delta_1,\delta_2,\delta_3\rangle} = S$$

是 $\delta_3 \in X^0_{\alpha_3}(\langle \delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2\rangle)$ 的见证树。因此，

$$\langle t^\frown\langle \delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3\rangle, (T_\omega)_{\langle \delta_0,\delta_1,\delta_2,\delta_3\rangle}\rangle \in D.$$

这就完成了强 Prikry 引理的证明。 □

现在正是证明 GP 失败的时候：

定理 *8.1* 的证明。 由于我们假设 $V = \mathcal{K}$，相干序列

$$\mathcal{U} = \langle \mathcal{U}_{\alpha,\beta} \mid \alpha \leq \kappa,\ \beta < o^{\mathcal{U}}(\kappa)\rangle$$

对所有 $\alpha \leq \kappa$，都提及了 $\mathcal{K}$ 中所有的 α-完备正规超滤子。

令 $G \subseteq \mathbb{P}$ 在 V上是泛型。根据 Gitik 的分析 [Git86]（或 [BNU17]），在 $V[G]$ 中有一个由 κ- 完备超滤子构成的集合，它们定义在 κ 之上，

$$\{\mathcal{U}_{\kappa,1}(t) \mid t \in [\kappa]^{<\omega} \cap V \ \wedge\ t \text{ is 1-coherent}\},$$

每一个都具有以下三个性质：

(ℵ) $\mathcal{U}_{\kappa,\ 1}(t)$ 扩张 $\mathcal{U}_{\kappa,\ 1}$。(⊐)

$\{\alpha < \kappa \mid t \sqsubseteq b_\alpha\} \in \mathcal{U}_{\kappa,\ 1}(t)$。(⊐) $\mathcal{U}_{\kappa,\ 1}(t)$ 包含

闭无界滤子 $\mathrm{Cub}_\kappa^{V[G]}$。

(关于 (⊐)：如果 $\mathbb{P} = \mathbb{P}^E(\mathcal{U})$，则结合 κ-cc 性质、$\mathbb{P}^E(\mathcal{U})$ 的正规性、$\mathcal{U}_{\kappa,\ 1}$ 以及条款 (1) 即可推出。如果 $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\mathrm{NS}}(\mathcal{U})$，则将 κ-cc 性质替换为 [BNU17 中证明的上述关于闭无界集的事实，即推论 3。7]。)

设 $\{\alpha_n \mid n<\omega\}$ 是 V 中位于 κ 以下的互异不可达基数集合。因此，$\{\mathcal{U}_{\kappa,1}(\langle \alpha_n\rangle) \mid n<\omega\}$ 由集中于 V-可测基数 α（满足 $o^{\mathcal{U}}(\alpha) = 1$）上的 κ-完备超滤子组成，其关联的 Prikry 序列 b_α 以 V-不可达基数 α_n 开始。对于每个 $n<\omega$，记

$$\mathcal{U}_n := \mathcal{U}_{\kappa,1}(\langle \alpha_n\rangle).$$

我们断言，在 $V[G]$ 中，$\langle \mathcal{U}_n \mid n < \omega \rangle$ 无法粘合。

反设结论不成立，并设 $j\colon V[G] \to M$ 是一个临界点为j的初等嵌入 $= \kappa$，且 $M^\kappa \subseteq M$，并且 $\langle \eta_n \mid n < \omega \rangle$ 是一个序数递增序列，使得 $\mathcal{U}_n = \{X \subseteq \kappa \mid \eta_n \in j(X)\}$。根据我们的反大基数假设以及核心模型定理 2.16，其限制

$$j \restriction \mathcal{K}\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}^M$$

是通过正规测度进行的正规迭代。因此，$j \restriction \mathcal{K}$ 是一个由初等嵌入构成的有向系统的直极限

$$\langle \iota_{\alpha,\beta}\colon \mathcal{K}_\alpha \to \mathcal{K}_\beta \mid \alpha \leq \beta \leq \delta \rangle.$$

设 $\iota := \iota_{0,\,\delta}$，并令 $H \subseteq \iota(\mathbb{P})$ 为一个 $\mathcal{K}^M$-泛型滤子，使得 $M = \mathcal{K}^M[H]$.

注意，η_n 是迭代 ι – 的强生成元，也就是说，对所有 $C \in \mathrm{Cub}_\kappa^{\mathcal{K}}$，都有 $\eta_n \in \iota(C)$：事实上，$\mathrm{Cub}_\kappa^{\mathcal{K}} \subseteq \mathrm{Cub}_\kappa^{V[G]} \subseteq \mathcal{U}_n$，且 η_n“粘合”了 $\mathcal{U}_n$。

令 $\eta_\omega := \sup_{n<\omega} \eta_n$。显然，$\eta_\omega$ 也是 ι 的强生成元。

断言 8.2.1。

(1) 存在 $\alpha < \delta$，使得 $\eta_\omega = \iota_\alpha(\kappa)$，且 临界点$(\iota_{\alpha,\delta}) = \iota_\alpha(\kappa)$。*(2)* η_ω是一个 $\mathcal{K}^M$-可测基数，且 $o^{\mathcal{U}}(\eta_\omega) < \eta_\omega$（因此，它是迭代 $\iota(\mathbb{P}) \in \mathcal{K}^M$的一个非平凡强迫阶段）。

断言的证明。(1)。这已在 [HP24，断言 7.1.2、7.1。7]中确立。

(2)。在 [HP24] 中，我们证明了 η_ω 是迭代 $j \restriction \mathcal{K}$的某个阶段的临界点，因此 $\mathcal{K}^M$-不可达基数。此外，$M^\omega \subseteq M$，故共终性$^M(\eta_\omega) = \omega < \eta_\omega$。结合反大基数假设与 Mitchell 覆盖定理，我们推得 η_ω 是一个 $\mathcal{K}^M$-可测基数。□

在 M（即在 $\mathcal{K}^M[H]$）中，我们令 b_{η_ω} 为泛型 H 在阶段 η_ω. 引入的 Magidor 序列。若我们证明 $\langle \eta_n \mid n < \omega \rangle$ 最终包含于 b_{η_ω}，就能得到所需的矛盾：假设存在某个 $n^* < \omega$，且对每个 $n \geq n^*$，都有 $\eta_n \in b_{\eta_\omega}$。首先，由 $o^{\mathcal{K}^M}(\eta_\omega)$-相容性可得，$b_{\eta_n} \sqsubseteq b_{\eta_\omega}$。其次，这些 η_n 都将相应的测度 $\mathcal{U}_n$ 拼接起来，从而得到 $\eta_n \in j(\{\alpha < \kappa \mid \langle \alpha_n \rangle \sqsubseteq b_\alpha\})$，等价地说，$\langle \alpha_n \rangle \sqsubseteq b_{\eta_n}$。不过请注意，这是不可能的，因为这将意味着对于所有 $n \geq n^*$，b_{η_ω} 的第一个成员都是 α_n，然而我们假设这些序数彼此不同。

因此，我们只需证明 $\langle \eta_n \mid n < \omega \rangle$ 最终包含于 Magidor 序列 b_{η_ω}.。这一结论的直觉依据来自关于普里克里强迫 $\mathbb{Q}$ 的一个著名事实：若 $Q \subseteq \mathbb{Q}$ 是泛型，且 $A \in V[Q]$ 是 κ 的子集，并且几乎包含于每个 $C \in \mathrm{Cub}_\kappa^V$ 中，那么 A 必定最终包含于由 Q 诱导的普里克里序列中。

我们将证明 $\langle \eta_n \mid n < \omega \rangle$ 完全包含于 b_{η_ω}。

断言 8.2.2. 假设 $p \in \iota(\mathbb{P})_{\eta_\omega+1}$，并且 $\dot{\alpha}$ 是一个 $\iota(\mathbb{P})_{\eta_\omega+1}$-名称，使得

$$p \Vdash_{\iota(\mathbb{P})_{\eta_\omega+1}} \dot{\alpha} < \check{\eta}_\omega \wedge \dot{\alpha} \notin \dot{b}_{\eta_\omega}.$$

[32]注意 crit$(j) = \kappa > \alpha_n$. 的用法

那么，存在 $q \leq p$、$i < \omega$ 以及一个 $\iota(\mathbb{P})_{\eta_\omega}$-名称 $\dot{g}$：$\eta_\omega^i \to \eta_\omega$，使得

$$q \Vdash_{\iota(\mathbb{P})_{\eta_\omega+1}} \exists x \in (\dot{b}_{\eta_\omega} \cap \dot{\alpha})^i\, (\dot{g}(x) = \dot{\alpha}).$$

断言的证明。设 $K \subseteq \iota(\mathbb{P})_{\eta_\omega}$ 是 $\mathcal{K}^M$ 上关于 $p \restriction \eta_\omega \in K$ 的泛型。论证余下部分所用的基模型是 $\mathcal{K}^M[K]$。设 $p := (\dot{p}_{\eta_\omega})_K$.

为简化记号，设 $p = \langle \varnothing,\ T^p \rangle$.

在基模型中，阶段 η_ω 的强迫（记作 $\mathbb{Q}$）具有强 Prikry 性质。因此，存在 $q_0 \leq^* p$ 和一个序数序列 $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \rangle$，使得对于每个 $\vec{\gamma} = \langle \gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1} \rangle$，若 $o^{\mathcal{U}}(\gamma_i) = \alpha_i$，则 $q_0{}^\frown\vec{\gamma}$ 决定 $\dot{\alpha}$。特别地，存在一个函数 $f\colon [\eta_\omega]^n \to \eta_\omega$，使得对于每个由序数构成且具有 $o^{\iota(\mathcal{U})}$-序 $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \rangle$ 的序列 $\vec{\gamma} = \langle \gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1} \rangle \in T^{q_0}$，$q_0{}^\frown\vec{\gamma} \Vdash \check{f}(\vec{\gamma}) = \dot{\alpha}$。由于 $q_0{}^\frown\vec{\gamma} \Vdash \dot{\alpha} \notin \dot{b}_{\eta_\omega}$，必有

$$f(\vec{\gamma}) \in (0, \gamma_0) \cup (\gamma_0, \gamma_1) \cup \cdots \cup (\gamma_{n-1}, \eta_\omega).$$

对于每个 $\vec{\gamma} \in T^{q_0}$，如前所述，记 $i_{\vec{\gamma}} \in \{0, \ldots, n\}$ 为满足下列条件的唯一指标i $(\vec{\gamma})\ \in (\vec{\gamma}(i-1)\ \vec{\gamma}(i))$。利用这些超滤子的完备性，可以仿照引理8.2 构造一棵“大”的子树 $S \subseteq \mathrm{Lev}_n(T$，使映射 $\vec{\gamma} \mapsto i_{\vec{\gamma}}$ 恒等于 $i :=i(\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_{n-1})$。

对于每个满足 $\vec{\gamma}{}^\frown\langle\gamma\rangle \in S$（其中某个 γ 满足该条件）的 $\vec{\gamma}$，函数

$$f_{\vec{\gamma}}\colon \gamma \mapsto f(\vec{\gamma}{}^\frown\langle\gamma\rangle) \in \gamma_i$$

仅凭测度的 η_ω-完备性，该函数在一个 $\mathcal{U}_{\eta_\omega,\alpha_n}(\vec{\gamma} \restriction \alpha_n)$-大集上就是常值函数。重复这一论证，我们可以将 S 缩小为 S^*，使得对于每个 $\langle \gamma_0,\ \ldots,\ \gamma_{n-1} \rangle \in S^*$，$f(\langle \gamma_0,\ \ldots,\ \gamma_{n-1} \rangle)$ 的取值仅取决于 $\langle \gamma_0,\ \ldots,\ \gamma_i \rangle$。令 $g\colon \eta_\omega^{i+1} \to \eta_\omega$ 为此函数，并且（为简化记号）仍用 T^{q_0}. 表示细化后的树

我们来证明，可以消除对 $\langle \gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1} \rangle$ 的 i 次坐标的依赖。如果 $o^{\mathcal{U}}(\gamma_i) = 0$，那么由于超滤子 $\mathcal{U}_{\eta_\omega,0}(\varnothing)$ 的正规性，这一点显然成立。因此，假设 $o^{\mathcal{U}}(\gamma_i) \neq 0$。

子断言 8.2.2.1. 对于上述每个 $\langle \gamma_0, \ldots, \gamma_{i-1} \rangle$，映射

$$\pi_{\langle \gamma_0,\ldots,\gamma_{i-1}\rangle}\colon \gamma \mapsto \min\{\mu \in b_\gamma \mid \mu > g(\langle \gamma_0, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma \rangle),\ o^{\mathcal{U}}(\mu) = 0\}$$

定义了一个从 $\mathcal{U}_{\eta_\omega,\alpha_i}(\langle \gamma_0, \ldots, \gamma_{i-1} \rangle \restriction \alpha_i)$ 到 $\mathcal{U}_{\eta_\omega,0}(\varnothing)$ 的 ***Rudin-Keisler*** 投影。

断言的证明。超滤子的定义取决于 $\mathbb{P}$ 的支撑。我们假设 $\mathbb{P}$ 具有 Easton 支撑。（另一种情况类似。）

令 $X \in \mathcal{U}_{\eta_\omega,\ 0}(\varnothing)$ 且 $Y \in \mathcal{U}_{\eta_\omega,\ \alpha_i}(\langle \gamma_0,\ \ldots,\ \gamma_{i-1} \rangle \restriction \alpha_i)$。

只需证明 $Y \cap \pi^{-1}_{\langle \gamma_0\ ,\ \ldots,\ \gamma_{i-1}\rangle} X$ 非空。

根据定义，存在 $p \in K$，一个名称 $\dot{\Upsilon}$ 和 $\alpha < \kappa^+$，使得

$$p^\frown\{\langle \langle \gamma_0, \ldots, \gamma_{i-1} \rangle \restriction \alpha_i, \dot{\Upsilon} \rangle\}^\frown r_\alpha \Vdash \kappa \in j_{\mathcal{U}_{\eta_\omega,\alpha_i}}(\dot{Y}).$$

考虑

$$X^* := \{\beta \in \mathrm{Succ}_{T^*,0}(\varnothing) \mid \beta \in X \wedge \beta > j_{\mathcal{U}_{\eta_\omega,\alpha_i}}(g)(\langle \gamma_0, \ldots, \gamma_{i-1}, \kappa \rangle)\}.$$

根据一致性，这个集合是 $\mathcal{U}_{\eta_\omega,0}(\varnothing)$-大。因此，存在一棵树 $\Upsilon' \subseteq \Upsilon_K$，使得 $\mathrm{Succ}_{\Upsilon',0}(\varnothing) \subseteq X^*$。令 $q \leq p$ 属于 K 强迫此性质。那么，

$$q^\frown\{\langle\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1}\rangle \restriction \alpha_i, \dot{\Upsilon}'\rangle\}^\frown r_\alpha \Vdash \kappa \in j_{\mathcal{U}_{\eta_\omega,\alpha_i}}(\dot{Y})$$

以及

$$q^\frown\{\langle\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1}\rangle \restriction \alpha_i, \dot{\Upsilon}'\rangle\}^\frown r_\alpha \Vdash j_{\mathcal{U}_{\eta_\omega,\alpha_i}}(\pi_{\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1}\rangle})(\kappa) \in j_{\mathcal{U}_{\eta_\omega,\alpha_i}}(\dot{X}),$$

由于我们对 X^*. 的选择

So, $Y \cap \pi^{-1}_{\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1}\rangle} X \in \mathcal{U}_{\eta_\omega,\alpha_i}(\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1}\rangle \restriction \alpha_i)$ and we are done. □

现在我们按如下方式进行。对于每个 $\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}\rangle \in T^{q_0}$ 带有序$\langle\alpha_0, \dots\dots, \alpha_{i-1}\rangle$，令 $X(\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}\rangle)$ 为 $\mathrm{Succ}_{T^{q_0,\ \alpha_i}}(\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}\rangle)$ 在 $\pi_{\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}\rangle}$ 下的像。根据上述断言，$X(\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}\rangle) \in \mathcal{U}_{\eta_\omega,\ 0}(\varnothing)$。

显然，映射 $h_{\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}\rangle}\colon X(\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}\rangle) \to \eta_\omega$ 定义为

$$h_{\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1}\rangle}\colon \pi_{\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1}\rangle}(\gamma) \mapsto g(\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1},\gamma\rangle)$$

是回归的。由$\mathcal{U}_{\eta_\omega,\ 0}(\varnothing)$的正规性，我们可找到一个大集

$$Y(\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1}\rangle) \subseteq X(\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1}\rangle)$$

其中$h_{\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}\rangle}$为常数——例如，其值为 $g(\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}\rangle)$。

因此，$\pi^{-1}_{\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}\rangle} Y(\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}\rangle)$是一个$\mathcal{U}_{\eta_\omega,\ \alpha_i}(\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}\rangle \restriction \alpha_i)$-大集，其中函数 $g(\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}, \bullet\rangle)$为常数，且取值为$g(\langle\gamma_0, \dots\dots, \gamma_{i-1}\rangle)$。

利用上述内容，很容易定义一个条件 $q \leq^* q_0$，使得

$$q^\frown\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{n-1}\rangle \Vdash_{\mathbb{Q}_{\eta_\omega}} \dot{\alpha} = g(\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1}\rangle)$$

对所有具有序 $\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{n-1}\rangle \in T^q$ 的 $\langle\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}\rangle$。

稍加思考，读者便会明白，由上可得

$$q \Vdash_{\mathbb{Q}_{\eta_\omega}} \text{“}\exists x \in (\dot{b}_{\eta_\omega} \cap \dot{\alpha})^i\ \check{g}(x) = \dot{\alpha}\text{”}.$$

由于这在 $\mathcal{K}^M[K]$中成立，因此存在 $p^* \leq p \restriction \eta_\omega$，在 K中强迫它。于是，$p^*{}^\frown\dot{q}$以及一个名称 $\dot{g}$，使得 $\dot{g}_K = g$ 满足断言8.2.2的性质。□

现在在 M（即在 $\mathcal{K}^M[H]$）中进行。为完成证明，我们证明：

断言 8.2.3。$\langle\eta_n \mid n < \omega\rangle$ 包含于 b_{η_ω}中。

断言的证明。反设 $n < \omega$ 使得 $\eta_n \notin b_{\eta_\omega}$。应用前一个断言，可找到一个函数 g_n: $\eta_\omega^{i_n} \to \eta_\omega$在$\mathcal{K}^M[H \restriction \eta_\omega]$ 中，以及 $x_n \in (b_{\eta_\omega} \cap \eta_n)^{i_n}$，使得 $g_n(x_n) = \eta_n$。因此，

$$\eta_n \in g_n[\eta_n^{i_n}].$$

令 $C_n := \{\alpha < \eta_\omega \mid \forall x \in [\alpha]^{i_n}\ g_n(x) < \alpha\}$。显然，$C_n$ 是模型 $\mathcal{K}^M[H \restriction \eta_\omega]$中 η_ω 上的闭无界集。令 $C := \bigcap_{n<\omega} C_n$。根据迭代 $\iota(\mathbb{P})_{\eta_\omega}$ 的性质，存在 $\mathcal{K}^M$ 中的闭无界集 $D \subseteq \eta_\omega$，使得 $D \subseteq C$。于是，存在 $E \in \mathrm{Cub}^{\mathcal{K}}_\kappa$，使得 $\iota(E) \subseteq^* D \subseteq C$：为此，令 $h\colon \eta_\omega \to \eta_\omega$ 为一个函数，其闭包点都包含于 D。由于该迭代

$\iota = j \restriction \mathcal{K}$ 是正规的， $h = \iota(g)(\zeta_0, \ldots\ldots, \zeta_{n-1})$ 对于 $\zeta_0, \ldots\ldots, \zeta_{n-1} < \eta_\omega$ 成立。令 E 为 g 的闭包点。由此可得 $\iota(E) \setminus \zeta_{n-1} \subseteq D \subseteq C$。

由于每个 η_n 都是强生成元，因此 $\eta_n \in \iota(E) \subseteq C_n$。但请注意，这与上一段的结论矛盾；我们在那里证明了，对于某个 $x_n \in [\eta_n]^{i_n}$. □， $\eta_n = g_n(x_n)$

以上完成了该定理的证明。 □

9. Open problems

我们以几个开放问题结束本文。鉴于我们目前的技术和理解，最容易探讨的问题似乎是：

问题 1. 是否存在超滤子，使得 κ^+-GP 蕴含 κ^+-GP ？

我们猜想答案是否定的。

假设 $2^\kappa = \kappa^+$，Kunen [Ket72，定理 2。3] (或 Comfort–Negrepontis[CN72，定理 4。3]) 与定理4.1 结合表明 κ-紧基数具有通过超滤的 κ^+-GP。然而，其最优一致性强度很可能弱得多。因此，我们提出：

问题 2。 在 ZFC 下，以下命题的一致性强度是多少：

(1)“存在一个可测基数 κ，具有 κ^+-GP”。*(2)*“存在一个可测基数 κ，具有通过超滤的 κ^+-GP ”。

问题 3。 理论ZFC+“存在一个可测基数 κ，具有对所有基数 λ 都成立的 λ-GP ”的一致性强度是多少？

在定理 7.4 中，我们（借助 Gitik 的一个论证）证明了上述配置相容性的下界是存在一个强基数。我们猜想这就是其确切的一致性强度。

References

[BG24] Tom Benhamou 和 Gabriel Goldberg。《Magidor 迭代在超滤子理论中的应用》。 *arXiv preprint arXiv:2412.09683*，2024。[Bla70] Andreas Blass。 *Orderings of ultrafilters*。博士论文，哈佛大学，1970。[Bla73] Andreas Blass。《P 点的 Rudin-Keisler 序》。 *Transactions of the American Mathematical Society* 179 145 166, 1973 ，：–。[BM14] Joan Bagaria 和 Menachem Magidor。群根与强紧致基数。 *Transactions of the American Mathematical Society* 366 4 1857 1877, ， （）：–。[BN14] 2014 Omer Ben-Neria。在核心模型下进行 Magidor 迭代强迫，低于 0¶ *Archive* 。 ， （）：–。[BNK24] *for Mathematical Logic* 53 3 367 384, 2014 Omer Ben-Neria 和 Eyal Kaplan。连续统假设出现关键性失败的 Kunen 类模型。 *arXiv preprint arXiv:2412.05493*，2024。[BNU17] Omer Ben-Neria 和 Spencer Unger。共尾性的齐性改变及其在 HOD 中的应用。 *Journal of Mathematical Logic*，17(02):1750007，2017。[CN72] W Comfort 和 S Negrepontis。关于大振荡族。 *Fundamenta Mathematicae* 75 3 275 290, 1972 ， （）：–。[CN12] William Wistar Comfort 和 Stylianos Negrepontis。 *The theory of ultrafilters*，第211卷。施普林格科学与商业媒体，2012。

[FM09] Sy-David Friedman 和 Menachem Magidor。正规测度的数量。*The Journal of Symbolic Logic*, 74(3):1069–1080，2009。[Git86] Moti Gitik。改变共尾性与非平稳理想。*Israel Journal of Mathematics* 56 3 280 314, 1986 ，（）：–。[Git88]

Moti Gitik。关于超滤子的 Mitchell 序与 Rudin-Kiesler 序。*Annals of Pure and Applied Logic* 39 2 175 197, 1988 ，（）：–。[Git93]

Moti Gitik。关于违反连续统假设的可测基数。*Annals of Pure and Applied Logic* 63 3 227 240, 1993 ，（）：–。[Git97]

Moti Gitik。关于非平稳理想 I 的一些结果。*Israel Journal of Mathematics* 99 175 188, 1997 ，：–。[Git10] Moti Gitik。Prikry 型强迫。载于 *Handbook of Set Theory. Vols. 1*，第2、3卷，第1351–1447页。施普林格，多德雷赫特，2010。[Git20] Moti Gitik。关于 κ-紧基数。*Israel Journal of Mathematics*，237(1):457–483，2020。[GK23] Moti Gitik 和 Eyal Kaplan。Prikry 强迫的非平稳支撑迭代，以及超幂嵌入在基模型上的限制。*Annals of Pure and Applied Logic* 174 1 103164, 2023 ，（）：。[Gol22a]

Gabriel Goldberg。*The Ultrapower Axiom*，第10卷。Walter de Gruyter GmbH & Co KG，2022。[Gol22b] Isaac Goldbring。*Ultrafilters throughout mathematics*，第220卷。美国数学会，2022。[GP25] Gabriel Goldberg 和 Alejandro Poveda。HOD 中的紧致性现象。13:e118，2025。[Hay19] Yair Hayut。部分强紧致性与平方原理。*Fundamenta Mathematicae*，246 193 204，2019：–。[HH23] Miha E Habič 和 Radek Honzík。通过正规超幂捕获序数集。*Annals of Pure and Applied Logic*，174(6):103261，2023。[HP24] Yair Hayut 和 Alejandro Poveda。粘合性质。*Journal of Mathematical Logic* 0 0 2450030, 2024 ，（）：。[Kan76] A. Kanamori。可测基数上的超滤子。*Annals of Mathematical Logic* 10 3 315 356, 1976 ，（）：–。[Kan09] Akihiro Kanamori。*The higher infinite*。《施普林格数学专著》。施普林格出版社，柏林，第2版，2009。集合论中的大基数：从起源谈起，2003年版的平装重印本。[Ket72] Jussi Ketonen。强紧致性及其他基数罪。*Annals of Mathematical Logic* 5 1 47 76, 1972 ，（）：–。[KR18] Borisa Kuzeljevic 和 Dilip Raghavan。P 点的长链。*Journal of Mathematical Logic* 18 01 1850004, 2018 ，（）：。[Kun70] Kenneth Kunen。迭代超幂在集合论中的一些应用。*Annals of Mathematical Logic* 1 2 179 227, 1970 ，（）：–。[Kun72] Kenneth Kunen。超滤子与独立集。*Transactions of the American Mathematical Society* 172 299 306, 1972 ，：–。[KV14] Kenneth Kunen 和 Jerry Vaughan。*Handbook of set-theoretic topology*。爱思唯尔，2014。[Mag76] Menachem Magidor。第一个强紧致基数有多大？或者，对身份危机的研究。*Annals of Mathematical Logic*，10(1):33–57，1976。[Mit79] William Mitchell。超可测基数。载于 *Logic Colloquium '78 (Mons, 1978)* 97 *Stud. Logic Found. Math.* 303 316 ，第 卷，共 ，页码–。北荷兰，阿姆斯特丹-纽约，1979。[Mit84] William J Mitchell。测度序列的核心模型。I。载于 *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 95, 229 260 ，第 卷，页码–。剑桥大学出版社，1984。

[Mit95] William Mitchell。伍丁基数以下的核心模型。载于 Dag Prawitz、Brian Skyrms 和 Dag Westerst˚ahl 编， *Logic, Methodology and Philosophy of Science IX* 134 *Studies in Logic and the Foundations of*，卷 of，页 –。 *Mathematics* 157 175 1995 爱思唯尔，。[Mit09] William J Mitchell。覆盖引理。载于 *Handbook of set theory*，页 1497–1594。施普林格，2009。[Mit10] William J. Mitchell。内模型理论入门。载于 *Handbook of Set Theory*，页 1449–1495。施普林格，2010。[MS94] Menachem Magidor 和 Saharon Shelah。何时几乎自由意味着自由？（对于群、横截集等）。 *Journal of the American Mathematical Society*，页 769–830，1994。[MS15] Maryanthe Malliaris 和 Saharon Shelah。从模型论视角构造正则超滤子。 *Transactions of the American Mathematical Society* 367 11 8139 8173, 2015 ，（）：–。[MS16] Maryanthe Malliaris 和 Saharon Shelah。模型论、集合论和一般拓扑学中的共尾谱定理。*Society* 29 1 237 297, 2016 *Journal of the American Mathematical* ，（）：–。[PRS23] Alejandro Poveda、Assaf Rinot 和 Dima Sinapova。Sigma-Prikry 强迫 III：降至 $\aleph_\omega$。 *Adv. Math.*，435（A 部分），2023。[Rie08] Frigyes Riez。连续性概念与抽象集合论。载于 *gresso Internazionale del Matematici Roma* 2, 1908 *Atti del IV Con* ，，卷。[Rud71] Mary Ellen Rudin。 $\beta\mathbb{N}$ *Transactions of the Amer-* 中类型上的偏序。，页 –。[Sch06] Ralf Schindler。核心模型的迭代。 *The Journal of Symbolic Logic*，71 1 241 251，2006（）：–。[She75] Saharon Shelah。关于奇异基数、自由代数、怀特黑德问题和横截集的紧致性定理。 *Israel Journal of Mathematics*，21(4):319–349，1975。[Sil75] Jack Silver。关于奇异基数问题。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vols 1* 265 268 ，页 –。施普林格，多德雷赫特，1975。[Ste16] John Steel。迭代超幂简介。 *Forcing Iterated Ultra-* ，， *powers and Turing Degrees. Lecture Notes Series. Institute for Mathematical* ，：–。[Tod *Sciences. National University of Singapore* 29 123 174, 2016 07] Stevo Todorcevic。 *Walks on ordinals and their characteristics*。施普林格，2007。[Ula 29] Stanis-law Ulam。关于集合函数。 *Fundamenta Mathematicae*，14 1 231 233，1929 （）：–。

(HAYUT) Einstein Institute of Mathematics, Hebrew University of Jerusalem, Givat-Ram, 91904, Jerusalem, Israel, https://math.huji.ac.il/~yairhayut/. *Email address*: yair.hayut@mail.huji.ac.il

(POVEDA) Universitat de Barcelona, Departament de Matemàtiques i Informàtica, Barcelona 08007 Catalonia Spain ,„ https://alejandropovedaruzafa.com/.*Email address*: alejandro.poveda@ub.edu