星形图上逆斯图姆-刘维尔问题的一致稳定性

Chitorkin E.E.、Bondarenko N.P.

摘要。 本文研究星形图上斯图姆-刘维尔算子的逆谱问题，即根据谱数据或若干组谱恢复势函数。本文证明了这些逆问题在整个图上的一致稳定性。

关键词： 逆谱问题；斯图姆-刘维尔方程；一致稳定性；星形图。

美国数学学会数学主题分类（2020年）： 34A55 34B0734B09 34B2434L40

arXiv:2601.10652v1 [math.SP] 15 Jan 2026

1 引言

考虑星形图 G，它由顶点 $\{v_j\}_{j=0}^m$ $(m \geq 1)$ 和长度为 π 的边$\{e_j\}_{j=1}^m$ 构成。每条边 e_j 都连接边界顶点 v_j 与内部顶点 v_0。我们将每条边 e_j 视为由相应变量 $x_j \in [0, \pi]$参数化的线段。取值 $x_j = 0$ 对应顶点 v_j，而 $x_j = \pi$ 对应 v_0。

在本文 中，我们考虑图 G 上的如下斯图姆–刘维尔问题 $L = L(\mathbf{q})$:

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in (0, \pi), \quad j = \overline{1, m} \tag{1.1}$$

$$y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{1.2}$$

$$y_j(\pi) = y_1(\pi), \quad j = \overline{2, m}, \tag{1.3}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j'(\pi) = 0, \tag{1.4}$$

其中，$\mathbf{q} = [q_1(x_1) \dots, q_m(x_m)]$ 是一个实值势函数向量，属于 $L_2(0, \pi)$ 类； λ 为谱参数。

关于区间上斯图姆–刘维尔算子的反谱问题理论已得到最为深入的发展，相关内容见若干专著 [1–4] 及其他参考文献。对于度量图上的微分算子（通常称为量子图），它们可用于模拟空间网络中的波动力学；由于其在经典力学与量子力学、有机化学、纳米技术、波导理论及各类工程应用中的重要性，相关文献十分丰富 [5, 6]。后续研究从多种谱数据 [7–9]出发，确立了在任意树（无圈的图）上恢复斯图姆–刘维尔势函数的唯一性结果。谱映射方法 [9]为树图以及后来的任意紧图提供了构造性的重构程序 [10]。关于量子图逆谱理论的综合综述见 [11–13] 及近期专著 [14, 15]。

尽管图上的逆谱问题在唯一性和重构方面已得到广泛研究，但稳定性受到的关注却少得多，目前仅有针对特定图结构的零散结果。值得一提的是，有限区间上逆斯图姆-刘维尔问题的一致稳定性已在 [16, 17] 中得到证明。紧致星形图上的逆斯图姆–刘维尔问题以矩阵形式进行了研究，

并证明了其稳定性 [18, 19]。具有一般自伴边界条件的半直线逆散射问题的稳定性结果 [20] 可直接应用于具有无限射线的星形图。此外，度量图上的一个非局部泛函微分算子的一致稳定性也已得到证明 [21], ，尽管这类非局部算子与局部微分算子存在根本差异，需要采用不同的分析方法。在套索形图和树上，也分别于 [22, 23] 和 [24] 中证明了一致稳定性。

迄今为止，对于任意结构图上的微分算子反问题稳定性分析，尚缺乏一个通用框架。尽管如此，近期用于重构图上斯图姆–刘维尔算子的数值方法 [25–27] 在计算实验中展现出良好的效果，这间接表明相应反问题具有稳定性，并推动了进一步的解析研究。

本文旨在证明关于 (1.1)–(1.4) 的两个反谱问题的一致稳定性。与先前关于一致稳定性的研究 [22–24] 不同，我们采用了不同类型的谱数据。具体而言，我们考虑根据 (i) m 谱、(ii) 特征值和权数重构势函数。我们的方法基于谱映射方法 [2, 9, 18, 22]，以及根据零点恢复解析函数的一致稳定性；后者已在 [28]中得到证明。

本文结构如下。首先，在第 2 节中，我们介绍记号并陈述主要定理。接着，在第 3 节中，我们证明给定特征值集合时的一致稳定性定理。最后，在第 4 节中，我们证明给定特征值和权数时的一致稳定性定理。

2 主要结果

在本 节中，我们给出一些记号，并表述本文的主要定理 r.

首先，定义问题 L的特征函数 $\Delta(\lambda)$，其零点与该问题的特征值重合。在 [29] 中证明了

$$\Delta(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} S_k'(\pi, \lambda) \prod_{j=1, j\neq k}^{m} S_j(\pi, \lambda),$$

其中， $S_j(x, \lambda)$是方程（1.1）的第 j个方程的解，满足初始条件$S_j(0, \lambda) = 0$、 $S_j'(0, \lambda) = 1$。

由于 [29], 问题（1.1）—（1.4）的 Λ 谱π是由特征值$\{\lambda_{nk}\}_{n\geq 1\ k=1,m,}$组成的可数集。为简单起见，我们假设对于任意 $k = 1, m$， $\int q_j(x_j)\, dx_j = 0$ 。于是，对特征值$\{\overline{\lambda_{nk}}\}_{n\geq 1,\, k=1,m}$进行适当编号（按重数计数）后，有如下渐近关系： —

$$\rho_{nk} = \sqrt{\lambda_{nk}} = n + \frac{\kappa_{nk}}{n\pi}, \tag{2.1}$$

$$\rho_{nm} = \sqrt{\lambda_{nm}} = n - \frac{1}{2} + \frac{\kappa_{nm}}{n\pi}, \tag{2.2}$$

其中 $n \geq 1$, $k = \overline{1, m-1}$, $\{\kappa_{nk}\} \in l_2$。

对于 $j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$，用 Λ_j表示与 (1.1)– (1.4) 类似的问题的谱，但在第 j 个顶点处改变边界条件： $y_j'(0) = 0$。谱 Λ_j 是由特征值构成的可数集，它们与相应特征函数的零点重合

函数

$$\Delta_j(\lambda)=\left(C_j(x,\lambda)\prod_{n=1,n\neq j}^{m}S_n(x,\lambda)\right)'\Big|_{x=\pi},$$

其中，$C_j(x,\lambda)$ 是满足初始条件$C_j(0,\lambda)=1$、$C_j'(0,\lambda)=0$的第 j 个方程 (1.1) 的解。注意，谱 Λ_j 是特征值的可数集 $\{\theta_{nkj}^2\}_{n\geq 1,\ k=1,\ m}$（按重数计），可根据其渐近行为编号（见 [30]）：

$$\theta_{nkj}=n+\frac{\xi_{nkj}}{n\pi},$$
$$\theta_{n,m-1,j}=n-1+\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{\xi_{n,m-1,j}}{n\pi},$$
$$\theta_{nmj}=n-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{\xi_{nmj}}{n\pi},$$

其中 $n\geq 1$、$k=1,\overline{m-2}$、$j=1,\overline{m-1}$、$\{\xi_{nkj}\}\in l_2$。

我们研究以下逆谱问题。

反问题 2.1。给定 Λ，Λ_j，$j=1,\ m-\overline{1,\ 求}\ q_j(x)$，$j=1,\ m$。

关于反问题 2.1 的唯一性定理及其构造性求解过程已在 [9]中得到。本文着重研究反问题 2.1 的一致稳定性。引入两个问题 $L^{(1)}=L(\mathbf{q}^{(1)})$ 和 $L^{(2)}=L(\mathbf{q}^{(2)})$。我们约定，若对象 γ 与问题 L 相关，则 $\gamma^{(\nu)}$ 是与问题 $L^{(\nu)}$ ($\nu=1,$ 2) 相关的类似对象。

引入集合 $\mathbf{P}_Q:=\left\{\mathbf{q}:\sum_{i=1}^{m}\|q_j(x)\|_{L_2(0,\pi)}\leq Q\right\}$, $Q>0$。下文中，我们用 $C(Q)$ 表示仅依赖于 Q 的各种正常数。

我们的重要 结果是以下关于反问题 2 一致稳定性的定理。 1:

定理 2.2. 设 $Q>0$ 和 $\boldsymbol{q}^{(1)},\boldsymbol{q}^{(2)}\in \boldsymbol{P}_Q$。则

$$\sum_{j=1}^{m}\|q_j^{(1)}(x)-q_j^{(2)}(x)\|_{L_2(0,\pi)}\leq C(Q)\tilde{\delta},\tag{2.3}$$

$$where\ \delta=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}|n(\rho_{nk}^{(1)}-\rho_{nk}^{(2)})|^2+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}|n(\theta_{nkj}^{(1)}-\theta_{nkj}^{(2)})|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

根据 [9], ，对于每个 $s=1,m$ ，韦伊尔解 $\Phi_s(x,\lambda)$ 是满足方程 (1.1)、条件 (1.3)-(1.4) 以及以下边界条件的向量 $[\Phi_{js}(x,\lambda)]_{j=1}^m$：

$$\Phi_{ss}(0,\lambda)=1,\quad \Phi_{js}(0,\lambda)=0,\quad j=\overline{1,m}\setminus s.$$

问题 L 的 Weyl函数定义为

$$M_j(\lambda)=\Phi_{jj}'(0,\lambda).$$

Weyl函数在 λ 上是亚纯的，其极点与特征值$\{\lambda_{nk}\}$重合。将所谓的权数 α_{nkj} 定义为以下留数：

$$\alpha_{nkj}=-\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nk}}M_j(\lambda).$$

由 [31, 定理 3.1] 可知，所有 $\alpha_{nkj} \geq 0$。当出现重特征值 $\lambda_{n_1k_1} = \lambda_{n_2k_2} = \cdots = \lambda_{n_rk_r}$ 时，我们有 $\alpha_{n_1k_1j} = \alpha_{n_2k_2j} = \cdots = \alpha_{n_rk_rj}$。将这个权数拆分为 r 个非负数：$\alpha_{n_1k_1j} = \sum_{i=1}^{r} \beta_{n_ik_ij}$。于是，它们满足以下渐近行为（见 [32]）：

$$\sum_{k=1}^{m-1} \beta_{nkj} = \frac{2n^2}{m\pi}\Big(m - 1 + \frac{\varkappa_{nj}^0}{n}\Big),$$

$$\beta_{nmj} = \frac{\Big(n - \frac{1}{2}\Big)^2}{m\pi}\Big(2 + \frac{\varkappa_{nj}^1}{n}\Big),$$

其中 $n \geq 1$、$j = 1, \overline{m}$ 以及 $\{\varkappa_{nj}^i\} \in l_2$、$i = 0, 1$。

然后，我们可以引入以下反问题。

逆问题　　引理 2.3。给定谱数据 $\{\lambda_{nk}, \beta_{nkj}\}_{n\geq 1,\ k=1,\ m,\ \ j=1,\overline{m}}$，求 $q_j(x)$、$j = 1, \overline{m}$.

我们的下一个重要结果是关于逆问题 2.3 的一致稳定性的以下定理：

定理 2.4。设 $Q > 0$ 且 $q^{(1)}$、$q^{(2)} \in P_Q$。则

$$\sum_{j=1}^{m} \|q_j^{(1)}(x) - q_j^{(2)}(x)\|_{L_2(0,\pi)} \leq C(Q)\tilde{\delta},$$

$where\ \tilde{\delta} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}(n\delta_{nk})^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \delta_{nk} = |\rho_{nk}^{(1)} - \rho_{nk}^{(2)}| + n^{-2}\sum_{j=1}^{m}|\beta_{nkj}^{(1)} - \beta_{nkj}^{(2)}|.$

注意，与重特征值相关的权数的分拆应选择为使数值 δ 最小。

3 基于谱集的反问题一致稳定性

本节证明定理 2.2，即基于谱集的反问题一致稳定性。首先，我们得到特征函数的核函数及一些附加函数的估计。然后，利用傅里叶系数得到势函数所需的估计。

命题 3.1 ([2])。设 $\mathbf{q} \in \mathbf{P}_Q$。则对于 $j = \overline{1,m}$，有以下关系：

$$S_j(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\int_0^x K_j(x,t)\cos\rho t\, dt, \tag{3.1}$$

$$S_j'(x,\lambda) = \cos\rho x + \frac{1}{\rho}\int_0^x N_j(x,t)\sin\rho t\, dt,$$

其中 $K_j(x,\cdot)$、$N_j(x,\cdot) \in L_2(0,x)$。此外，$\|K_j(x,\cdot)\|_{L_2(0,x)} \leq C(Q)$，$\|N_j(x,\cdot)\|_{L_2(0,x)} \leq C(Q)$，其中 $j = \overline{1,m}$、$x \in (0,T_j]$。

回想一下， $\Delta(\lambda)$ 是问题 (1.1)-(1.4) 的特征函数，而 $\Delta_j(\lambda)$ 是形式相同、但第 j 个顶点处的边界条件发生变化的问题的特征函数： $y_j'(0) = 0$。

For $T > 0$，用 $PW(T)$ 表示具有以下形式的 Paley-Wiener 函数类

$$\mathcal{F}(\rho) = \int_{-T}^{T} f(t)e^{i\rho t}\,dt, \quad f \in L_2(-T, T).$$

引理 3.2 (推论 3.3 来自 [22])。 以下表示成立

$$\Delta(\lambda) = \frac{m\sin^{m-1}\rho\pi\cos\rho\pi}{\rho^{m-1}} + \frac{F(\rho)}{\rho^m},$$
$$\Delta_k(\lambda) = \frac{\sin^{m-2}\rho\pi(m\cos^2\rho\pi - 1)}{\rho^{m-2}} + \frac{F_k(\rho)}{\rho^{m-1}},$$

其中 F、 $F_k \in PW(m\pi)$、 $k = \overline{1、\ m-1}$。

引入两个问题 $L^{(1)}$ 和 $L^{(2)}$，使得 $\mathbf{q}^{(j)} \in \mathbf{P}_Q$、 $j = 1,2$。

引理 3.3。 以下估计成立：

$$\|F^{(1)}(\rho) - F^{(2)}(\rho)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le C(Q)\delta, \quad \|F_k^{(1)}(\rho) - F_k^{(2)}(\rho)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le C(Q)\delta, \quad k = \overline{1, m-1}.$$

证明。 将 $\Delta(\lambda)$ 的完整谱分成 m 个子序列 $\{\lambda_{nk}\}_{n\ge1}$、 $k = 1,\ m$。对于每个子序列，我们都可以构造一个具有以下形式的函数 $\theta_k(\lambda)$（参见 [2, 注释 1.1.2]）：

$$\theta_k(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sin\rho\pi}{\rho} + \dfrac{f_k(\rho)}{\rho^2} = \pi\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{nk} - \lambda}{n^2}, & k = \overline{1, m-1}, \\ \cos\rho\pi + \dfrac{f_m(\rho)}{\rho} = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{nm} - \lambda}{(n - \frac{1}{2})^2}, & k = m, \end{cases}$$

其中 $f_k \in PW(\pi)$, $k = 1, \overline{\ m}$。

接下来，对于每个函数 $\rho\theta_k(\lambda)$，我们可以应用 [28] 中的定理 7，并得到 t

$$\|f_k^{(1)} - f_k^{(2)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \le C_r\|\{n(\rho_{nk}^{(1)} - \rho_{nk}^{(2)})\}_{n\ge1}\|_{l_2},$$

其中，渐近行为 (2.1) 和 (2.2) 的余项满足 $\|\{\kappa_{nk}^{(i)}\}\|_{l_2} \le r$, $i = 1,\ 2$，且常数 C_r 仅取决于 r。

接下来，我们将函数 $\Delta(\lambda)$ 作如下变换：

$$\Delta(\lambda) = \pi^{m-1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{nm} - \lambda}{(n - \frac{1}{2})^2}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{\lambda_{nk} - \lambda}{n^2} = \prod_{k=1}^{m}\theta_k(\lambda).$$

最后，取其差：

$$\Delta^{(1)}(\lambda) - \Delta^{(2)}(\lambda) = \sum_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{j-1}\theta_k^{(1)}(\lambda)(\theta_j^{(1)}(\lambda) - \theta_j^{(2)}(\lambda))\prod_{k=j+1}^{m}\theta_j^{(2)}(\lambda),$$

then

$$\|F^{(1)}(\rho) - F^{(2)}(\rho)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le C_r\delta.$$

由于所有 $\{\kappa_{nk}\}_{n\ge1}$, $k = \overline{1,\ } m$ 都依赖于势函数 $\mathbf{q}$，而势函数有界于常数 Q，因此我们可以说， $C_r = C(Q)$。由此可得出关于 $F^{(1)}(\rho) - F_{(2)}(\rho)$ 的结论。关于 $F_{(1)\,k}(\rho) - F_{(2)\,k}(\rho)$ 的估计可用类似方法证明。

□

首先，我们需要证明谱已知的顶点处势函数所满足的所需估计。 [22] 中针对带圈的图证明了类似的定理。但假设环边的长度等于零，我们便可转而考虑边数比原图少1的无圈星形图。

引理 3.4 (来自定理 2.3 [22])。 设 $Q > 0$ 为固定值。那么，对于任意 $\boldsymbol{q}^{(1)}, \boldsymbol{q}^{(2)} \in \boldsymbol{P}_Q$，有

$$\|q_k^{(1)} - q_k^{(2)}\|_{L_2(0,\pi)} \le C(Q)\Big(\|\rho^m(\Delta^{(1)} - \Delta^{(2)})(\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|\rho^{m-1}(\Delta_k^{(1)} - \Delta_k^{(2)})(\rho^2)\|_{L_2(\mathbb{R})} \Big),$$

对于 $k = \overline{1, m-1}$。

结合引理 3.3 和 3.4，可得 $k = 1, m-1$ 的估计 (2.3)。接下来只需证明 $k = \overline{m}$ 的估计。

引入以下函数:

$$\Delta^{\Pi}(\lambda) = \prod_{n=1}^{m-1} S_n(\pi, \lambda),$$

$$\Delta_1^{\Pi}(\lambda) = C_1(\pi, \lambda) \prod_{n=2}^{m-1} S_n(\pi, \lambda),$$

$$\Delta^{K}(\lambda) = \sum_{j=1}^{m-1} S_j'(\pi, \lambda) \prod_{n=1, n\ne j}^{m-1} S_n(\pi, \lambda),$$

$$\Delta^{K}(\lambda) = C_1'(\pi, \lambda) \prod_{n=2}^{m-1} S_n(\pi, \lambda) + \sum_{j=2}^{m-1} C_1(\pi, \lambda) S_j'(\pi, \lambda) \prod_{n=2, n\ne j}^{m-1} S_n(\pi, \lambda).$$

记 $p := (m-1)\pi$。

引理 3.5 (来自推论 3.3 [22])。 以下关系成立

$$\Delta^{\Pi}(\lambda) = \frac{\sin^{m-1}\rho\pi}{\rho^{m-1}} + \frac{1}{\rho^m} \int_{-p}^{p} f(t) e^{-i\rho t}\, dt,$$

$$\Delta_1^{\Pi}(\lambda) = \frac{\sin^{m-2}\rho\pi \cos\rho\pi}{\rho^{m-2}} + \frac{1}{\rho^{m-1}} \int_{-p}^{p} f_1(t) e^{-i\rho t}\, dt, \tag{3.2}$$

$$\Delta^{K}(\lambda) = \frac{(m-1)\sin^{m-2}\rho\pi \cos\rho\pi}{\rho^{m-2}} + \frac{1}{\rho^{m-1}} \int_{-p}^{p} g(t) e^{-i\rho t}\, dt,$$

$$\Delta_1^{K}(\lambda) = -\frac{\sin^{m-1}\rho\pi}{\rho^{m-3}} + \frac{(m-2)\sin^{m-3}\rho\pi \cos^2\rho\pi}{\rho^{m-3}} + \frac{1}{\rho^{m-2}} \int_{-p}^{p} g_1(t) e^{-i\rho t}\, dt,$$

其中 $f(t)$ $f_1(t)$ $g(t)$ $g_1(t)$ $\in L_2(-p, p)$。

对于函数 $\rho^m\Delta^{\Pi}(\lambda)$、 $\rho^{m-1}\Delta_1^{\Pi}(\lambda)$、 $\rho^{m-1}\Delta^{K}(\lambda)$、 $\rho^{m-2}\Delta_1^{K}(\lambda)$，我们可以得到以下引理。

引理 3.6（推论 3.5，出自 [22]）。以下估计成立：

$$\|f^{(1)}(t)-f^{(2)}(t)\|_{L_2(-p,p)}\le C(Q)\sum_{n=1}^{m-1}\|q_n^{(1)}-q_n^{(2)}\|_{L_2(0,\pi)},$$
$$\|f_1^{(1)}(t)-f_1^{(2)}(t)\|_{L_2(-p,p)}\le C(Q)\sum_{n=1}^{m-1}\|q_n^{(1)}-q_n^{(2)}\|_{L_2(0,\pi)},$$
$$\|g^{(1)}(t)-g^{(2)}(t)\|_{L_2(-p,p)}\le C(Q)\sum_{n=1}^{m-1}\|q_n^{(1)}-q_n^{(2)}\|_{L_2(0,\pi)},$$
$$\|g_1^{(1)}(t)-g_1^{(2)}(t)\|_{L_2(-p,p)}\le C(Q)\sum_{n=1}^{m-1}\|q_n^{(1)}-q_n^{(2)}\|_{L_2(0,\pi)}.$$

结合引理 3.6 的估计与已证明的 $k=1,m-1$ 的 (2.3)，可得

$$\begin{aligned}
&\|f^{(1)}(t)-f^{(2)}(t)\|_{L_2(-p,p)}\le C(Q)\delta,\\
&\|f_1^{(1)}(t)-f_1^{(2)}(t)\|_{L_2(-p,p)}\le C(Q)\delta,\\
&\|g^{(1)}(t)-g^{(2)}(t)\|_{L_2(-p,p)}\le C(Q)\delta,\\
&\|g_1^{(1)}(t)-g_1^{(2)}(t)\|_{L_2(-p,p)}\le C(Q)\delta.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

注意

$$\Delta(\lambda)=\Delta^K(\lambda)S_m(\pi,\lambda)+\Delta^\Pi(\lambda)S'_m(\pi,\lambda),$$
$$\Delta_1(\lambda)=\Delta_1^K(\lambda)S_m(\pi,\lambda)+\Delta_1^\Pi(\lambda)S'_m(\pi,\lambda).$$

然后，经过简单计算可得

$$S_m(\pi,\lambda)=\frac{\Delta(\lambda)\Delta_1^\Pi(\lambda)-\Delta_1(\lambda)\Delta^\Pi(\lambda)}{B(\lambda)},\tag{3.4}$$
$$S'_m(\pi,\lambda)=\frac{\Delta_1(\lambda)\Delta^K(\lambda)-\Delta(\lambda)\Delta_1^K(\lambda)}{B(\lambda)}=-S_m(\pi,\lambda)\sum_{j=2}^{m-1}\frac{S'_j(\pi,\lambda)}{S_j(\pi,\lambda)},$$

其中 $B(\lambda)=\prod_{k=2}^{m-1}S_k^2(\pi,\lambda)$。

我们将函数 $S_m(\pi,\lambda)$ 和 $S'_m(\pi,\lambda)$ 转换为命题 3.1 中定义的核 $K_m(\pi,t)$ 和 $N_m(\pi,t)$。为此，固定数值 $\nu_n=n+i\alpha,\ \alpha>0,\ n\in\mathbb{Z}$，并定义$\mu_n=\nu_n^2$。那么，$\{e^{-i\nu_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $L_2(-\pi,\pi)$ 中的 Riesz 基。引入傅里叶系数

$$\hat{k}_n=\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{K}(t)e^{-i\nu_n t}\,dt=\mu_n S_m(\pi,\mu_n)-\nu_n\sin\nu_n\pi,\quad \mathcal{K}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}K_m(\pi,t),\ t\ge 0,\\ \dfrac{1}{2}K_m(\pi,-t),\ t<0,\end{cases}$$

由 Riesz 基性质可知

$$c\|\{\hat{k}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{l_2}\le\|K_m(\pi,t)\|_{L_2(0,\pi)}\le C\|\{\hat{k}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{l_2},\tag{3.5}$$

其中，正数常量 c和 C 仅依赖于 α。

类似地，定义

$$\hat{h}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{N}(t) e^{-i\nu_n t}\, dt = \nu_n(S_m'(\pi,\mu_n) - \cos\nu_n\pi), \quad \mathcal{N}(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2i} N_m(\pi,t), \ t \geq 0, \\ \dfrac{1}{2i} N_m(\pi,-t), \ t < 0. \end{cases}$$

引理 3.7. 以下关系对 $n \in \mathbb{Z}$ 成立：

$$\|\{\hat{k}_n^{(1)} - \hat{k}_n^{(2)}\}\|_{l_2} \leq C(Q)\delta, \tag{3.6}$$

$$\|\{\hat{h}_n^{(1)} - \hat{h}_n^{(2)}\}\|_{l_2} \leq C(Q)\delta. \tag{3.7}$$

证明. 考虑差值

$$\hat{k}_n^{(1)} - \hat{k}_n^{(2)} = \mu_n(S_m^{(1)}(\pi,\mu_n) - S_m^{(2)}(\pi,\mu_n)).$$

记 $J(\mu_n) = \Delta(\mu_n)\Delta_1^{\Pi}(\mu_n) - \Delta_1(\mu_n)\Delta^{\Pi}(\mu_n)$ 和 $\check{}\gamma = \gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}$。利用 (3.4)，得到

$$\hat{k}_n^{(1)} - \hat{k}_n^{(2)} = \frac{\mu_n \check{B}(\mu_n) J(\mu_n)}{B^{(1)}(\mu_n) B^{(2)}(\mu_n)} + \frac{\mu_n \check{J}(\mu_n)}{B^{(2)}(\mu_n)}. \tag{3.8}$$

下面估计该差值中的各元素。

1. $\left|B^{(2)}(\mu_n)\right|$。由于 $|\sin\nu_n\pi| \geq C(Q)$，因此 $\left|S_k^{(2)}(\mu_n,\ \pi)\right| \geq C(Q)|\nu_n|^{-1}$。利用此估计，我们转而考察$|B^{(2)}(\mu_n)| \geq C(Q)|\nu_n|^{4-2m}$。

2. $\|\{\nu_n^{2m-3}\check{}B(\mu_n)\}\|_{l_2}$。
值 $\check{}B(\mu_n)$ 可表示为：

$$\check{B}(\mu_n) = \sum_{j=2}^{m-1}\prod_{k=2}^{j-1}\left(S_k^{(1)}(\mu_n,\pi)\right)^2\left(S_j^{(1)}(\mu_n,\pi) - S_j^{(2)}(\mu_n,\pi)\right) \times \left(S_j^{(1)}(\mu_n,\pi) + S_j^{(2)}(\mu_n,\pi)\right)\prod_{k=j+1}^{m-1}\left(S_k^{(2)}(\mu_n,\pi)\right)^2.$$

然后，利用（3.1）可得：

$$|\check{B}(\mu_n)| \leq |\nu_n|^{3-2m}\sum_{j=2}^{m-1}\left|\int_0^{\pi}\left(K_j^{(1)}(\pi,t) - K_j^{(2)}(\pi,t)\right)\cos\nu_n t\, dt\right|, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

注意，

$$\left\|\left\{\int_0^{\pi}\left(K_j^{(1)}(\pi,t) - K_j^{(2)}(\pi,t)\right)\cos\nu_n t\, dt\right\}_{n\in\mathbb{Z}}\right\|_{l_2} \leq C\|K_j^{(1)} - K_j^{(2)}\|_{L_2(0,\pi)} \leq C(Q)\|q_j^{(1)} - q_j^{(2)}\|_{L_2(0,\pi)}, \quad j = \overline{2, m-1},$$

根据 [33] 中的公式 (22)。考虑到 $j = 2,\ m-1$ 估计，我们得到 $\|\{\nu_n^{2m-3}\check{}B(\mu_n)\}\|_{l_2} \leq C(Q)\delta$。

3. $|\Delta_1^{\Pi(2)}(\nu_n^2)|$。估计 $|\Delta_1^{\Pi(2)}(\nu_n^2)| \le C(Q)|\nu_n|^{1-m}$ 由 (3.2) 得出。

4. $\|\{\nu_n^{m-1\check{}}\Delta_1^{\Pi}(\nu_n^2)\}\|_{l_2}$ 利用（3.2）可以得到：

$$\Delta_1^{\Pi(1)}(\mu_n) - \Delta_1^{\Pi(2)}(\mu_n) = \frac{1}{\rho^{m-1}} \int_{-p}^{p} (f_1^{(1)}(t) - f_1^{(2)}(t)) e^{-i\nu_n t}\, dt,$$

因此，将估计 3.3 与 $\{e^{-i\nu_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 的 Riesz 基性质结合起来可得

$$\|\{\nu_n^{m-1}\check{\Delta}_1^{\Pi}(\nu_n^2)\}\|_{l_2} \le C(Q)\delta.$$

我们还可以得到其他估计 $|\Delta^{\Pi(2)}(\nu_n^2)| \le C(Q)|\nu_n|^{-m}$，$\|\{\nu_n^{m\check{}}\Delta^{\Pi}(\nu_n^2)\}\|_{l_2} \le C(Q)\delta$,$|\Delta^{(1)}(\nu_n^2)| \le C(Q)|\nu_n|^{-m}$，$\|\{\nu_n^{m-1\check{}}\Delta(\nu_n^2)\}\|_{l_2} \le C(Q)\delta$，$|\Delta_1^{(1)}(\nu_n^2)| \le C(Q)|\nu_n|^{1-m}$，$\|\{\nu_n^{m-1\check{}}\Delta_1(\nu_n^2)\}\|_{l_2} \le C(Q)\delta$ 同理可得。将这些估计代入（3.8），即可得到（3.6）。类似地可证明估计（3.7）。 □

现在，我们可以完成定理 2.2 的证明了。关系 (3.5) 和 (3.8) 联合推出

$$\|K_m^{(1)}(\pi,t) - K_m^{(2)}(\pi,t)\|_{L_2(0,\pi)} \le C(Q)\delta. \tag{3.9}$$

同理，我们可以得到

$$\|N_m^{(1)}(\pi,t) - N_m^{(2)}(\pi,t)\|_{L_2(0,\pi)} \le C(Q)\delta. \tag{3.10}$$

考虑从所谓的柯西数据$\{K_m(\pi,\ t)\ N_m(\pi,\ t)\}$恢复势函数 q_m 的反问题。显然，该问题等价于由两组谱确定的经典 Borg 反问题（例如，参见 [2]）。从柯西数据进行势函数重构的一致稳定性已在 [34] 中得到确立（狄利克雷边界条件的情形在技术细节上略有不同，参见 [35]）：

$$\|q_{(1)m} - q_{(2)m}\|_{L_2(0,\pi)} \le C(Q)\big(\|K_m^{(1)}(\pi,t) - K_m^{(2)}(\pi,t)\|_{L_2(0,\pi)} + \|N_m^{(1)}(\pi,t) - N_m^{(2)}(\pi,t)\|_{L_2(0,\pi)}\big).$$

将后一估计与 (3.9) 和 (3.10) 结合，我们得到 $j = m$ 的 (2.3)，从而完成定理 2.2 的证明。

4 一致稳定性 利用谱数据反问题的稳定性 ta

本节给出定理 2.4 的证明，该定理关于由谱数据确定的反问题的一致稳定性。

利用谱映射方法 [2,9,18], ，我们得到以下表达式（见 [19] 中的 (10.24)）：

$$q_j^{(1)}(x) - q_j^{(2)}(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i \beta_{nkj}^{(i)} \frac{d}{dx}\big(S_j^{(1)}(x,\lambda_{nk}^{(i)}) S_j^{(2)}(x,\lambda_{nk}^{(i)})\big). \tag{4.1}$$

定理 *2.4* 的证明。 由 (4.1) 可得 $q_j^{(1)}(x) - q_j^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^{6} S_{kj}(x)$，其中

$$S_{1j}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}(\beta_{nkj}^{(2)} - \beta_{nkj}^{(1)}) \frac{d}{dx} S_j^{(2)}(x,\lambda_{nk}^{(2)}) S_j^{(1)}(x,\lambda_{nk}^{(2)}), \tag{4.2}$$

$$S_{2j}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} \beta_{nkj}^{(1)} \frac{d}{dx}(S_j^{(2)}(x,\lambda_{nk}^{(2)}) - S_j^{(2)}(x,\lambda_{nk}^{(1)}))S_j^{(1)}(x,\lambda_{nk}^{(2)}), \tag{4.3}$$

$$S_{3j}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} \beta_{nkj}^{(1)} \frac{d}{dx}S_j^{(2)}(x,\lambda_{nk}^{(1)})(S_j^{(1)}(x,\lambda_{nk}^{(2)}) - S_j^{(1)}(x,\lambda_{nk}^{(1)})), \tag{4.4}$$

$$S_{4j}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} (\beta_{nkj}^{(2)} - \beta_{nkj}^{(1)})S_j^{(2)}(x,\lambda_{nk}^{(2)}) \frac{d}{dx}S_j^{(1)}(x,\lambda_{nk}^{(2)}), \tag{4.5}$$

$$S_{5j}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} \beta_{nkj}^{(1)}(S_j^{(2)}(x,\lambda_{nk}^{(2)}) - S_j^{(2)}(x,\lambda_{nk}^{(1)})) \frac{d}{dx}S_j^{(1)}(x,\lambda_{nk}^{(2)}), \tag{4.6}$$

$$S_{6j}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} \beta_{nkj}^{(1)} S_j^{(2)}(x,\lambda_{nk}^{(1)}) \frac{d}{dx}(S_j^{(1)}(x,\lambda_{nk}^{(2)}) - S_j^{(1)}(x,\lambda_{nk}^{(1)})). \tag{4.7}$$

我们从级数 (4.2) 开始:

$$S_{1j}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\beta_{nkj}^{(2)} - \beta_{nkj}^{(1)}}{n} \cos nx \sin nx + \frac{\beta_{nmj}^{(2)} - \beta_{nmj}^{(1)}}{n-\frac{1}{2}} \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} O(\delta_{nk}).$$

由于 $|\beta_{nkj}^{(2)} - \beta_{nkj}^{1}| \le n^2\delta_{nk}$ 且当 $\tilde{\delta} < \infty$ 时有 $\{n\delta_{nk}\} \in l_2$，因此级数 (4.2) 在 $L_2(0,\ \pi)$ 中收敛。此外，根据命题 3.1，我们有 $\|N_j^{(2)}(x,\ .)\|_{L_2(0,\ x)} \le C(Q)$，以及 $\|K_j^{(1)}(x,\ .)\|_{L_2(0,\ x)} \le C(Q)$，因此

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} S_{1j}(x)\right\|_{L_2(0,\pi)} \le C(Q)\tilde{\delta}.$$

同理，我们可以得到关于 S_{4j}的类似估计。类似地，我们得到以下估计

$$\left|\sum_{j=1}^{m} S_{kj}(x)\right| \le C(Q)\tilde{\delta}, \quad k = 2,3,5,6.$$

(4.2)–(4.7) 的收敛性及其估计可得出所需结论。 □

资助：本研究获得俄罗斯科学基金会 24-71-10003 号资助，https://rscf.ru/en/project/24-71-10003/。

参考文献

[1] 列维坦，B. M. 反斯图姆-刘维尔问题。VNU 科学出版社，乌得勒支，1987年。[2] 弗赖林，G.；Yurko, V. A. 反斯图姆-刘维尔问题及其应用。新星科学出版社，纽约州亨廷顿，2001年。[3] 马尔琴科，V. A. 斯图姆-刘维尔算子及其应用。修订版，美国数学学会，普罗维登斯，2011年。[4] Kravchenko, V.V. 正向与反斯图姆-刘维尔问题。Birkh¨auser，尚，2020年。

[5] Pokorny, Yu. V.；Penkin, O. M.；Pryadiev, V. L. 等。《几何图上的微分方程》。Fizmatlit，莫斯科， 2005 [俄文版]。[6] Berkolaiko, G.；Carlson, R.；Fulling, S.；Kuchment, P.《量子图及其应用》。Contemp. Math. 415，美国数学学会，普罗维登斯，RI，2006年。[7] Belishev, M. I. 基于边界控制方法的某类图（树）上的边界谱反问题。《反问题》20（2004年），647–672。[8] Brown, B. M.；Weikard, R. 树上的Borg-Levinson定理。《英国皇家学会学报A辑：数学、物理与工程科学》461（2005年），3231–3243。[9] Yurko, V. A. 图上斯图姆-刘维尔算子的反谱问题。《反问题》21（2005年），1075–1086。[10] Yurko, V. A. 任意紧图上微分算子的反谱问题。《反适定问题杂志》18（2010年），第3期，245–261。[11] Yurko, V. A. 空间网络上微分算子的反谱问题。《俄罗斯数学调查》71（2016年），第3期，539–584。[12] Belishev, M. I. 黎曼流形的边界控制与层析成像（边界控制方法）。《俄罗斯数学调查》72（2017年），第4期，581–644。[13] Bondarenko, N. P. 部分反Sturm-Liouville问题。《数学》11（2023年），第10期，2408。[14] Moller, M.；Pivovarchik, V. 图上的正向与反有限维谱问题。Birkh¨auser，尚，2020年。[15] Kurasov, P. 图的谱几何。Birkh¨auser，柏林，2024年。[16] Savchuk, A. M.；Shkalikov, A. A. 势函数属于Sobolev空间的斯图姆-刘维尔算子的反问题：一致稳定性。《泛函分析及其应用》44（2010年），第4期，270–285。[17] Savchuk, A. M.；Shkalikov, A. A. Sobolev空间标度下关于谱函数的逆斯图姆-刘维尔问题的一致稳定性。《斯捷克洛夫数学研究所学报》283（2013年），181–196。https://doi.org/10.1134/S0081543813080130。[18] Bondarenko, N. P. 矩阵Sturm-Liouville算子反谱问题的构造性解。《反问题科学与工程》28（2020年），第9期，1307–1330。[19] Bondarenko, N. P. 矩阵反Sturm-Liouville问题的一致稳定性。arXiv:2506.15300。[20] Xu, X. C.；Bondarenko, N. P. 半直线上自伴矩阵薛定谔算子反散射问题的稳定性。《应用数学研究》149（2022年），第3期，815–838。[21] Buterin, S. A. 具有全局时滞的几何图上的泛函微分算子及反谱问题。《数学成果》78（2023年），79。[22] Bondarenko, N. P. 带圈图上逆斯图姆-刘维尔问题的稳定性。《反适定问题杂志》（2025年），在线发表。网址：https://doi.org/10. 1515/jiip-2025-0059。

[23]Mochizuki, K.; Trooshin, I. 套索形图上逆散射问题的条件稳定性。载于：分析、概率、应用与计算。数学趋势，Birkh¨auser，尚，2019年。https://doi.org/10.1007/978-3-030-04459-6_19.[24] Bondarenko, N. P. 量子树上逆斯图姆-刘维尔问题的稳定性，《应用数学研究》155（2025年），第6期，文章编号 e70162。[25] Kravchenko, V. V.; Avdonin, S. A. 量子星形图上反谱问题的求解方法。《逆问题与病态问题杂志》**31**（2023年），第1期，31–42。[26] Avdonin, S. A.; Khmelnytskaya, K. V.; Kravchenko, V. V. 从韦尔矩阵恢复量子星形图上的势函数。《逆问题与成像》**18** （2024年），第1期，311–325。[27] Avdonin, S. A.; Khmelnytskaya, K. V.; Kravchenko, V. V. 量子树的重建技术。《数学方法与应用科学》**47** （2024年），第9期，7182–7197。[28] Buterin, S. A. 渐近分离零点的正弦型函数恢复的一致稳定性。《数学札记》**111** （2022年），第3期，339–353。[29] Pivovarchik, V. 星形图上斯图姆-刘维尔方程的反问题。《数学新闻》**280** （2007年），第13–14期，1595–1619。[30] Cheng, Y. H. 利用节点数据重建 p星形图上的斯图姆-刘维尔算子。《落基山数学杂志》**42** （2012年），第5期，1431–1446。[31] Bondarenko, N. P. 星形图上斯图姆-刘维尔算子的谱分析。《数学方法与应用科学》**43**（2020年），471–485。https://doi.org/10.1002/mma.5853。[32] Kuznetsova, M. A. 星形图上斯图姆-刘维尔边值问题权数的渐近公式。《萨拉托夫大学学报：数学、力学、信息学》**18**（2018年），第1期，40–48。[33] Buterin, S. 根据谱一致完全稳定地恢复斯图姆-刘维尔算子的卷积扰动，《微分方程杂志》282（2021年），67–103。[34] Bondarenko, N. P. 非自伴斯图姆-刘维尔算子反问题的一致稳定性，《数学新闻》298（2025年），第8期，2814–2844。[35] Bondarenko, N. P. 边界条件中含解析函数的逆斯图姆-刘维尔问题，《开放数学》18（2020年），第1期，512–528。

Egor Evgenevich Chitorkin 1. 萨马拉国立研究型大学信息技术与控制论研究所，莫斯科公路34号，俄罗斯萨马拉443086。2. 萨拉托夫国立大学力学与数学系，阿斯特拉罕大街83号，俄罗斯萨拉托夫410012。
电子邮件：*chitorkin.ee@ssau.ru*

Natalia Pavlovna Bondarenko 1. 萨马拉国立研究型大学应用数学系，莫斯科公路34号，俄罗斯萨马拉443086。2. 萨拉托夫国立大学力学与数学系，

俄罗斯萨拉托夫410012，阿斯特拉罕大街83号。3. S.M.尼科尔斯基数学研究所，俄罗斯人民友谊大学（RUDN大学），莫斯科米库卢霍-马克拉亚街6号，邮编117198，俄罗斯；4. 莫斯科基础与应用数学中心，莫斯科国立罗蒙诺索夫大学，莫斯科119991，俄罗斯。电子邮件：*bondarenkonp@sgu.ru*