arXiv:2601.10653v1 [math.QA] 15 Jan 2026

Borcherds代数的对称性

LISA CARBONE

摘要。我们概述 Borcherds代数的构造，特别是 Carnahan 构造的怪兽李代数 $\mathfrak{m}_g$，其中 g 是 Monster 怪物有限单群的一个元素。当 g 为恒等元素时，$\mathfrak{m}_g$ 是 Borcherds 的怪物李代数。我们讨论 $\mathfrak{m}_g$ 在杂化弦紧化模型中的出现。我们还总结了近期关于为李代数 $\mathfrak{m}_g$关联李群类比的研究。最后讨论一些尚未解决的问题。

1. 概述

设 $\mathbb{M}$ 为 Fischer–Griess怪物有限单群。设 $J(q)$为归一化的椭圆模不变量

$$J(q) = \sum_{n=-1}^{\infty} c(n)q^n = \frac{1}{q} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \dots,$$

其中 $q = e^{2\pi i\tau}$ 当 $\tau \in \mathbb{C}$ 且 Im(τ) > 0. 基于 McKay 和 Thompson 早先提出的一个猜想，Conway 和 Norton [CN79] 提出了怪兽月光猜想，该猜想断言存在一个自然的无限维 $\mathbb{Z}$-分次 $\mathbb{M}$-模$W = \bigoplus_{n=-1}^{\infty} W_n$，使得 $\sum_{n=-1}^{\infty} \dim(W_n)q^n = J(q)$，并且对每个 $g \in \mathbb{M}$，其生成函数（即 McKay–Thompson 级数） $\sum_{n=-1}^{\infty} \mathrm{tr}\,(g|_{W_n})\, q^n$，都是由 SL(2，$\mathbb{R}$) 的某个适当离散子群所对应的零属函数域的主模。

Frenkel、Lepowsky 和 Meurman [FLM84]和 [FLM88] 构造了一个无限维的$\mathbb{Z}$分次 $\mathbb{M}$-模，$V^\natural$，其分次维数为 $J(q)$。他们将 $V^\natural$ 构造成一个顶点算子代数，称为 月光模，其作为顶点算子代数的自同构群为 $\mathbb{M}$。

月光模 $V^\natural$ 构造为两个子空间 V_+ 和 V_-之和，它们分别是 $\mathbb{M}$中特定对合的 $+1$ 和 -1 特征子空间。若元素 $g \in \mathbb{M}$与该对合可交换，则 [FLM88] 证明，其 McKay–Thompson 级数$\sum_{n=-1}^{\infty} \mathrm{tr}\left(g|_{V^\natural_{n+1}}\right) q^n$ 可表示为两个级数之和，这两个级数由该元素在 V_+和 V_-上的迹给出，从而部分解决了关于 $W = V^\natural$的 Conway-Norton 猜想。关于详细的历史，我们请读者参阅 [FLM88]。

Borcherds [Bor92] 利用 [FLM88] 的构造 $V^\natural$ 以及怪物李代数$\mathfrak{m}$——它是在一类新型李代数（现称为Borcherds代数 [Bor88], ）中发现的——并结合弦理论中的无鬼定理，证明了怪兽月光猜想中剩余的情形。

在构造 $\mathfrak{m}$之前，Borcherds于20世纪80年代发现了假怪物李代数 [AI03]，，它为证明怪兽月光猜想铺平了道路。Borcherds利用与一个洛伦兹格相关联的顶点算子构造了它；该洛伦兹格由利奇格构造而来。他最初希望这能得到所寻求的代数，将怪物群与模函数联系起来。然而，这个代数具有的对称性与其说和怪物群有关，不如说与康威群有关；其分母公式是一个自守乘积，特化后得到的是模判别式 Δ，而不是 j函数。假怪物李代数的分母公式促使Borcherds构造了怪物李代数，并用它证明了怪兽月光猜想 [Bor92]。

令 $V_{1,1}$ 表示偶自模二维洛伦兹格 $\mathrm{II}_{1,1}$ 对应的顶点代数，并令 $V = V^\natural \otimes V_{1,1}$。Borcherds 以两种不同方式构造了怪物李代数 $\mathfrak{m}$：

(1) $\mathfrak{m} = P_1/R$ 其中 P_1 是 V的物理空间：

$$P_1 = \{\psi \in V^\natural \otimes V_{1,1} \mid L(0)\psi = \psi,\ L(j)\psi = 0,\ j > 0\}$$

它是 $V = V^\natural \otimes V_{1,1}$ 中由权为 1 的初等向量构成的子空间，其中 $L(j)$ 是Virasoro生成元，R 表示 P_1上的自然双线性型的根基。

(2) $\mathfrak{g}(A)$ 是与 A相关联的李代数；A是一个特定的无限 Borcherds Cartan矩阵。于是 $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{g}(A)/\mathfrak{z}$, 其中 $\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{g}(A)$的中心。

Borcherds [Bor92] 计算了 $\mathfrak{m}$的分母公式，并将 Garland 和 Lepowsky [GL76] 的同调方法加以推广，从而推导出 Conway 和 Norton 猜想的复制公式。

Conway 和 Norton 在 [CN79] 中提出，导致月光现象的那些现象或许也能在除 $\mathbb{M}$ 之外的其他群中观察到。Queen[Que81] 提供了进一步支持这一主张的证据。特别是，在各种情形下，Queen 将 McKay–Thompson 级数的系数分解为 Monster 的子群的商群的表示。

Norton 随后提出了广义月光猜想 [Nor87, Nor01]。对于每一对交换元素 (g, h)，该猜想提出，在上半平面上存在一个全纯函数 $Z(g, h, \tau)$（广义 McKay–Thompson 级数 $T_{g,h}(\tau)$），它要么是常数，要么是一个主模，并且具有若干其他性质。月光模 $V^\natural$ 被一族不可约的 g-扭曲模 $V_g^\natural$ 所取代：对于每个 $g \in \mathbb{M}$ 有一个这样的模，其中每个 $V_g^\natural$ 都是中心扩张的中心化子 $C_{\mathbb{M}}(g)$ 的分次表示。

$V_g^\natural$的分次维数由函数 $J_g(\tau)$ 给出，这些函数与广义 McKay– Thompson 级数 T_g（取 $g = h$）相关

$$T_g(\tau) = \sum_{n=-1}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(g \mid_{V_{g,n+1}^\natural}\right) q^n$$

通过对合 $\tau \to -1/\tau$

$$J_g(\tau) = T_g(-1/\tau).$$

此处 $q = e^{2\pi \mathrm{i} \tau}$ 和 $\tau \in \mathbb{C}$，其中 $\mathrm{Im}(\tau) > 0$.

¨Dong、Li 和 Mason [DLM96], H¨ohn [H03] and Carnahan [Car10], [Car12]证明了广义月光猜想的许多方面。例如，Dong、Li 和 Mason [DLM00]证明了不可约 g扭曲模 $V_g^\natural$的存在性，且该模在同构意义下唯一。这样的模 $V_g^\natural$ 具有 $C_{\mathbb{M}}(g)$的典范射影作用。他们给出了 $V_{2A}^\natural$ （怪兽群）的构造，对应于 $\mathbb{M}$ 的共轭类 $2A$[1] （H¨ohn.[H03]也给出了该构造）。

构造 g扭曲 $V^\natural$模是一个深刻的问题，涉及许多人的工作。在 [vEMS20], 中，作者借助 Verlinde 公式的一项应用 [Hua08], 、 [HL98]的张量范畴理论以及 [CM16]的不动点正则性结果，发展了循环轨形理论的若干方面。格顶点算子代数的扭曲模概念最初由 Frenkel、Lepowsky 和 Meurman [FLM88] 发现，这是物理学家所称的轨形共形场论的第一个实例。

1.1. 怪兽李代数。 作为广义月光猜想研究的一部分，Carnahan [Car10], [Car12]构造了一族李代数 $\mathfrak{m}_g$，每个共轭类 $[g] \in \mathbb{M}$对应一个李代数，它们与不可约的 g 扭曲模 $V_g^\natural$相关联。

若一个元素 $g \in \mathbb{M}$ 满足 McKay–Thompson 级数在某个水平 $g \in \mathbb{M}$ 的 Fricke 对合 下保持不变,
则称其为*Fricke* 元素

$$T_g(\tau) = \sum_{n=-1}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(g \mid_{V_{n+1}^\natural}\right) q^n$$

对于某个 $N \geq 1$，此时我们称 $\mathfrak{m}_g$ 具有***Fricke*** 型；否则， $\mathfrak{m}_g$ 具有非 ***Fricke*** 型。

Carnahan 证明，李代数 $\mathfrak{m}_g$ 是 Borcherds代数，并且 $\mathfrak{m}_g$ 具有 $C_{\mathbb{M}}(g)$ 通过齐次李代数自同构给出的典范作用。李代数 $\mathfrak{m}_g$具有这样的性质：其分母恒等式包含一个自守函数的无穷乘积展开，该自守函数由与元素 $g \in \mathbb{M}$对应的 McKay–Thompson 级数导出。

Carnahan 对李代数 $\mathfrak{m}_g$ 的分母公式的分析，自然分为两种情况，分别考察 $\mathfrak{m}_g$ 为 Fricke 型以及 $\mathfrak{m}_g$ 为非 Fricke 型 [Car12]。这两种情况分别对应于 $g \in \mathbb{M}$ [Car17] 中的 Fricke 元素和非 Fricke 元素。

这些李代数 $\mathfrak{m}_g$ 由 I. Frenkel [DF11]独立发现。Duncan 和 Frenkel 描述了 $\mathfrak{m}_g$ 的 Verma 模的分次维数，并用 Rademacher 和表示。他们还猜想，在（猜想中的） g扭曲的手征三维量子引力理论背景下，扭曲怪兽李代数 $\mathfrak{m}_g$ 具有一种自然的几何解释。

[1]采用《有限群图鉴》中的记号 https://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/ 3

1.2. **弦理论中的怪兽李代数**。 Harvey 和 Moore 首先指出，Borcherds代数是杂化弦紧化模型的对称性（[HM96], [HM98]）。

最近，Paquette、Persson 和 Volpato（[PPV16]和 [PPV17]）提出了一种物理解释，将怪兽月光猜想与一族特定的紧化联系起来；这些紧化由怪兽群的共轭类标记，是将 $E_8 \times E_8$ 杂化弦紧化到 $1+1$维的结果。

对于每个元素 $g \in \mathbb{M}$，他们都考虑一种紧化到 $1+1$个时空维度的杂化弦模型。每个此类模型都以 Carnahan的怪兽李代数 $\mathfrak{m}_g$ 作为自发破缺的规范对称性代数。

在任何超对称理论中，BPS态都是一种保留部分超对称性的物理态。在 [PPV16], 中，作者引入了一个超对称指标 Z，用于计数 BPS态的数量（带符号）。对超对称指标有贡献的 BPS态空间自然同构于 $\bigwedge^{\infty} \mathfrak{m}^{-}$。

人们已证明，在 [HM96] 中，弦理论中的 BPS 态构成一个代数，尽管人们仍未完全理解杂化弦的 BPS态代数。不过，在此讨论的杂化弦构造中， [PPV16]和 [PPV17]将 BPS 态的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 实现为怪物李代数的一个模 $\mathfrak{m}$ （当 $g=1$时成立；对于 $\mathfrak{m}_g$，类似的结论在 $g \neq 1$时成立），而 Harvey 和 Moore 则证明了 $\mathcal{H}$ 本身具有代数结构。

广义月光在物理学中也有一种解释，该解释由 Dixon、Ginsparg 和 Harvey 提出 [DGH88]。具体而言，他们将 $V_g^{\natural}$解释为具有 $\mathbb{M}$对称性的共形场论中的扭曲扇区，并将函数 $Z(g, h, \tau)$解释为亏格一配分函数。

2. BORCHERDS代数

我们的论述主要遵循 [Bor92], [Jur98], [Jur96]和 [JLW95]。设 I 为一个可数指标集。设 $A=(a_{ij})$，其中 $a_{ij} \in \mathbb{R}$ 且 $i, \ j \in I$。设

$$X = \{e_i, \ f_i, \ h_i \mid i \in I\}$$

其中 e_i、 f_i 和 h_i 是形式符号。令 $L(X)$ 表示由 X 生成的自由李代数。我们通过以下设定，在 $\mathbb{C}$ 上构造李代数 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(A)$：

$$\mathfrak{g}_0 = L(X)/\mathcal{I}$$

其中， $\mathcal{I}$ 是由以下李词 4 生成的理想

$$
\begin{aligned}
[h_i, h_j] \quad & \text{for all } i, j \in I, \\
[h_i, e_j] - a_{ij} e_j \quad & \text{for all } i, j \in I, \\
[h_i, f_j] + a_{ij} f_j \quad & \text{for all } i, j \in I, \\
[e_i, f_j] - \delta_{ij} h_i \quad & \text{for all } i, j \in I.
\end{aligned}
$$

考虑带有坐标逐点加法的阿贝尔群 $\mathbb{Z}^I$。生成 $\mathcal{I}$ 的关系由齐次元素组成，因此 $\mathfrak{g}_0 = L(X)/\mathcal{I}$ 也是一个分次李代数 $\mathbb{Z}^I$。
令 $A(X)$ 为由 X 生成的自由结合代数。那么， $A(X)$ 带有一种 $\mathbb{Z}^I$ 分次，其定义如下：

h_i的度为$(0, \ldots\ldots, 0, \ldots\ldots)$，$e_i$的度为$(0, \ldots\ldots, 0, 1, 0, \ldots\ldots, 0, \ldots\ldots)$，
f_i的度为$(0, \ldots\ldots, 0, -1, 0, \ldots\ldots, 0, \ldots\ldots)$，其中 ± 1 对每个 i都位于第 i位，

将 $A(X)$ 视为关于李括号 $[u, v] = uv - vu$ 的李代数时， $L(X)$ 是由 X 生成的 $A(X)$ 的李子代数。将此分次限制到 $L(X)$ 上，我们得到 $L(X)$ 上的 $\mathbb{Z}^I$ 分次：

$$
\begin{aligned}
&\deg[h_i, e_j] = \deg(e_j), \\
&\deg[h_i, f_j] = \deg(f_j), \\
&\deg[e_i, f_i] = \deg(h_i), \\
&\deg[e_i, f_j]_{i \neq j} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots), \text{ with } 1 \text{ in the } i\text{-th position} \\
&\qquad\qquad \text{and } -1 \text{ in the } j\text{-th position.}
\end{aligned}
$$

对于 $z \in \mathfrak{g}_0(A)$

$$\deg(z + \mathcal{I}) = \deg(z)$$

除非 $z \in \mathcal{I}$。令 $(n_1, n_2, \ldots\ldots) \in \mathbb{Z}^I$。令 $L(X)(n_1, n_2, \ldots\ldots)$ 表示 $L(X)$ 中分次为 $(n_1, n_2, \ldots\ldots)$ 的子空间，并令

$$\mathfrak{g}_0(n_1, n_2, \ldots) = L(X)(n_1, n_2, \ldots)/\mathcal{I} \cap L(X)(n_1, n_2, \ldots)$$

表示 $\mathfrak{g}_0$ 中分次为 $(n_1, n_2, \ldots\ldots)$ 的子空间。
对于每个 $i \in I$，我们定义一个 $L(X)$ 的线性自同态 D_i，其中

$$D_i \text{ acts as the scalar } n_i \text{ on } L(X)(n_1, n_2 \ldots).$$

那么 D_i 是导子，称为 $L(X)$的次数导子。 D_i 也自然地定义在 $\mathfrak{g}_0$的子空间 $\mathfrak{g}_0(n_1、\ n_2、\ldots\ldots)$上。

Let η 是 $L(X)$上的对合（即二阶自同构），它将

$$\begin{aligned} h_i &\mapsto -h_i, \\ e_i &\mapsto f_i, \\ f_i &\mapsto e_i. \end{aligned}$$

那么， η 在 $\mathfrak{g}_0$上也有良好定义。我们用相同的符号 e_i、 f_i、 h_i 表示这些元素在 $\mathfrak{g}_0$中的像。

令 $\mathfrak{h}$ 为由 h_i 生成的阿贝尔子代数，其中 $i \in I$。令 $\mathfrak{g}_0^+$为由 e_i 生成的李子代数，其中 $i \in I$；令 $\mathfrak{g}_0^-$为由 f_i 生成的李子代数，其中 $i \in I$。

定理 2.1。 [Jur96] 李代数 $\mathfrak{g}_0$ 具有三角分解

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_0^+.$$

阿贝尔子代数 $\mathfrak{h}$ 的基由 h_i 组成，其中 $i \in I$。子代数$\mathfrak{g}_0^\pm$分别是由 e_i生成的自由李代数，其中 $i \in I$；以及由 f_i生成的自由李代数，其中 $i \in I$。

与 [JLW95] 和 [Jur96] 中一样，我们将研究扩张 Borcherds 代数 $\mathfrak{g}^e$，即添加了适当次数导子的 Borcherds 代数。在扩张李代数中，Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 经过扩充，使简单根线性无关且重数为一。扩张 Cartan 子代数记为 $\mathfrak{h}^e$。

由于 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_0^+$，我们有（[MP95], 第 1.8 节，推论 3）

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0^-) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0^+)$$

作为 $\mathbb{C}$-向量空间。

回想一下，三维 Heisenberg 李代数 $\mathcal{H}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

是具有以下基的李代数

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

满足以下关系

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = 0, \quad [Y, Z] = 0.$$

命题 2.2。 设 $i \in I$ 固定，令 $\mathfrak{u}_i$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 中由元素e_i、 f_i、 h_i张成的子代数。

(1) 假设 $a_{ii} \neq 0$。令 $f = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ $e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 为$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$的通常基。令 $\widehat{e}_i = \dfrac{2e_i}{a_{ii}}$ 和 $\widehat{h}_i = \dfrac{2h_i}{a_{ii}}$。那么映射 $\longrightarrow$

$$\begin{aligned}\varphi : \mathfrak{u}_i &\to \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\\ f_i &\to f,\\ \widehat{h}_i &\to h,\\ \widehat{e}_i &\to e\end{aligned}$$

是李代数同构。

(2) 设 $a_{ii} = 0$。则映射

$$\begin{aligned}\varphi : \mathfrak{u}_i &\to \mathcal{H}\\ f_i &\mapsto Y,\\ h_i &\mapsto Z,\\ e_i &\mapsto X\end{aligned}$$

是李代数的一个同构。

证明。 对于 (1)，由 $\mathfrak{g}_0(A)$的定义关系可得

$$\begin{aligned}[\widehat{h}_i, \widehat{e}_i] = [\frac{2h_i}{a_{ii}}, \frac{2e_i}{a_{ii}}] &= \left(\frac{2}{a_{ii}}\right)^2 [h_i, e_i] = \left(\frac{2}{a_{ii}}\right)^2 a_{ii}e_i = \frac{4e_i}{a_{ii}} = 2\widehat{e}_i\\ \text{so } \varphi([\widehat{h}_i, \widehat{e}_i]) &= [h, e] = \varphi(2\widehat{e}_i) = 2e;\\ [\widehat{h}_i, f_i] = \frac{2}{a_{ii}}[h_i, f_i] &= -\frac{2}{a_{ii}}a_{ii}f_i = -2f_i\\ \text{so } \varphi([\widehat{h}_i, f_i]) &= [h, f] = \varphi(-2f_i) = -2f;\\ [\widehat{e}_i, f_i] = [\frac{2e_i}{a_{ii}}, f_i] &= \frac{2}{a_{ii}}[e_i, f_i] = \frac{2}{a_{ii}}h_i = \widehat{h}_i\\ \text{so } \varphi([\widehat{e}_i, f_i]) &= [e, f] = \varphi(\widehat{h}_i) = h\end{aligned}$$

因此$\mathfrak{u}_i \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$。

对于 (2)，我们有

$$\begin{aligned}\varphi([e_i, f_i]) &= [X, Y] = \varphi(h_i) = Z,\\ \varphi([e_i, h_i]) &= [X, Z] = \varphi(a_{ii}e_i) = \varphi(0) = 0,\\ \varphi([f_i, h_i]) &= [Y, Z] = \varphi(-a_{ii}f_i) = \varphi(0) = 0.\end{aligned}$$

所以$\mathfrak{u}_i \cong \mathcal{H}$。

□

^如果 $a_{ii} \neq 0$，我们称 $\{\widehat{e}_i, f_i, h_i\}$ 为一个 $\mathfrak{sl}_2$-三元组。

如果 $a_{ii} = 0$，我们称 $\mathfrak{u}_i$ 由 $\{e_i, f_i, h_i\}$ 生成的一个海森堡三元组。 7

2.1. **Borcherds Cartan矩阵**。设 $I=\{1,2,3,\dots\}$。设 $A=(a_{ij})_{i,\ j\in I}$是一个元素属于 $\mathbb{R}$ 的矩阵，满足以下条件：

(B1) A具有对称性。(B2) 如果 $i\neq j$，那么 $a_{ij}\leq 0$。(B3) 如果 $a_{ii}>0$，那么对所有 $j\in I$都有 $\frac{2a_{ij}}{a_{ii}}\in\mathbb{Z}$。

Let

$$X=\{e_i,\ f_i,\ h_i\mid i\in I\}$$

令 $L(X)$ 表示由 X生成的自由李代数。我们通过如下定义，在 $\mathbb{C}$ 上构造李代数 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_0(A)$：

$$\mathfrak{g}_0=L(X)/\mathcal{I}$$

其中 $\mathcal{I}$ 是由以下李词生成的理想

$$\begin{aligned}
&[h_i,h_j], \quad \text{for all } i,j\in I,\\
&[h_i,e_j]-a_{ij}e_j, \quad \text{for all } i,j\in I,\\
&[h_i,f_j]+a_{ij}f_j, \quad \text{for all } i,j\in I,\\
&[e_i,f_j]-\delta_{ij}h_i, \quad \text{for all } i,j\in I.
\end{aligned}$$

以下定理给出了判定一个李代数是否为Borcherds代数的条件。

定理 2.3 。 [Bor92, Jur98] 设 $\mathfrak{g}$ 是一个满足以下条件的李代数：

(1) $\mathfrak{g}$ 可以按 $\mathbb{Z}$分次为 $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_i$，其中当 $i\neq 0$时，$\mathfrak{g}_i$ 是有限维的，并且 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{g}_0$是可对角化的。*(2)* $\mathfrak{g}$ 有一个对合 ω，它将 $\mathfrak{g}_i$ 映射到 $\mathfrak{g}_{-i}$，并且在 $\mathfrak{g}_0$的非中心元上作用为 -1。特别地，$\mathfrak{g}_0$ 是阿贝尔的。*(3)* $\mathfrak{g}$ 有一个李代数不变双线性型 $(\cdot,\cdot)$，它在 ω 下不变，并满足：若 $i\neq -j$，则 $\mathfrak{g}_i$ 与 $\mathfrak{g}_j$正交；此外，对于 $x,y\in\mathfrak{g}$，由 $(x,y)_0=-(x,\omega(y))$定义的形式 $(\cdot,\cdot)_0$, 在 $\mathfrak{g}_m$ 上正定，当 $m\neq 0$时成立。*(4)* $\mathfrak{g}_0\subset[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$。

那么 $\mathfrak{g}$ 是一个*Borcherds*代数，也就是说，存在一个*Borcherds Cartan*矩阵 A，使得 $\mathfrak{g}$ 同构于 $\mathfrak{g}(A)/\mathfrak{z}$，其中 $\mathfrak{z}$是某个中心子代数。

我们固定一个特定子集 $I_0\subset I$，其中 $i\in I_0$，若 $a_{ii}>0$。对于所有 $i\neq j$ 和 $i\in I_0$，我们定义：

$$\begin{aligned}
d_{ij}^{+}&=(\operatorname{ad}e_i)^{\frac{-2a_{ij}}{a_{ii}}+1}e_j\in\mathfrak{g}_0^{+}=\operatorname{Lie}\{e_i\mid i\in I\}\\
d_{ij}^{-}&=(\operatorname{ad}f_i)^{\frac{-2a_{ij}}{a_{ii}}+1}f_j\in\mathfrak{g}_0^{-}=\operatorname{Lie}\{f_i\mid i\in I\}.
\end{aligned}$$

令 $\mathfrak{k}_0^{+}$为由以下元素生成的 $\mathfrak{g}_0^{+}$的理想

$$d_{ij}^{+}\text{ for }i\in I_0,\ j\in I\text{ and }[e_i,e_j]\text{ for }i,j\in I\text{ if }a_{ij}=a_{ji}=0.$$

令 $\mathfrak{k}_0^-$ 为由以下元素生成的 $\mathfrak{g}_0^-$ 的理想

$$d_{ij}^- \text{ for } i \in I_0,\ j \in I \text{ and } [f_i, f_j] \text{ for } i, j \in I \text{ if } a_{ij} = a_{ji} = 0.$$

于是， $\mathfrak{k}_0^{\pm}$是 $\mathfrak{g}_0$的子代数。令 $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_0^+ \oplus \mathfrak{k}_0^-$。子代数 $\mathfrak{k}_0^{\pm}$和 $\mathfrak{k}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$[Jur96]的理想。Borcherds代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$定义为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0/\mathfrak{k}_0$ [Jur96]。因此， $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$是由以下生成元生成的李代数

$$\{e_i, f_i, h_i \mid i \in I\}$$

及关系

$$\begin{aligned}
&[h_i, h_j] = 0, \text{ for all } i, j \in I,\\
&[h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \text{ for all } i, j \in I,\\
&[h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \text{ for all } i, j \in I,\\
&[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \text{ for all } i, j \in I,\\
&(\operatorname{ad} e_i)^{\frac{-2a_{ij}}{a_{ii}}+1} e_j = 0, \text{ for all } i, j \in I \text{ with } i \neq j \text{ and } i \in I_0 \subset I,\\
&(\operatorname{ad} f_i)^{\frac{-2a_{ij}}{a_{ii}}+1} f_j = 0, \text{ for all } i, j \in I \text{ with } i \neq j \text{ and } i \in I_0 \subset I,\\
&[e_i, e_j] = 0 \text{ if } a_{ij} = a_{ji} = 0, \text{ for all } i, j \in I,\\
&[f_i, f_j] = 0 \text{ if } a_{ij} = a_{ji} = 0, \text{ for all } i, j \in I.
\end{aligned}$$

由于理想 $\mathfrak{k}_0$ 是齐次的， $\mathfrak{g}$ 继承了由 $\mathfrak{g}_0$的给定分次诱导的 $\mathbb{Z}^I$分次。我们用字母 $\mathfrak{h}$和 e_i、 f_i、 h_i 表示它们在 $\mathfrak{g}$中的像。将.....映为.....的对合 η

$$\begin{aligned}
h_i &\mapsto -h_i,\\
e_i &\mapsto f_i,\\
f_i &\mapsto e_i.
\end{aligned}$$

在 $\mathfrak{g}$上是良定义的。

Let

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}^+ &= \mathfrak{g}_0^+/\mathfrak{k}_0^+,\\
\mathfrak{n}^- &= \mathfrak{g}_0^-/\mathfrak{k}_0^-.
\end{aligned}$$

回顾次数导子的定义：

$$D_i \text{ acts as the scalar } n_i \text{ on } \mathfrak{g}_0(n_1, n_2, \dots).$$

D_i 也定义在 $\mathfrak{g}$的子空间 $\mathfrak{g}$(n_1， n_2，.....)上。回忆一下，这些是具有分次（n_1， n_2，.....） $\in \mathbb{Z}^I$的子空间。这些子空间还具有如下性质：除非仅有有限多个 n_i 非零，否则 $\mathfrak{g}$(n_1， n_2，.....) =0。给定任何具有分次（n_1， n_2，.....）的 $x \in \mathfrak{g}$，仅有有限多个 n_i 非零。在这种情况下， $\mathfrak{n}^+$ 由以下元素张成

$$[e_{i_1}, [e_{i_2}, [\dots, [e_{i_{r-1}}, e_{i_r}] \dots]$$

其中 e_j 出现 $|n_j|$ 次，而 $\mathfrak{n}^-$ 由以下元素张成

$$[f_{i_1}, [f_{i_2}, [\dots, [f_{i_{r-1}}, f_{i_r}]\dots]$$

其中 f_j 出现 $|n_j|$ 次。空间 $\mathfrak{g}(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots)$ 分别由 e_i 张成，其中 ± 1 出现在第 i 个位置。

引理 2.4。 *([Jur96])* 对于每个 $i \in I_0$， $\mathfrak{g}$ 都是不可约 $\mathfrak{u}_i$-子模的直和，其中 $\mathfrak{u}_i = (\mathfrak{sl}_2)_i$。

2.2. **一个对称双线性形式。** 我们在 Q 上定义一个取值于 $\mathbb{R}$ 的对称双线性形式 $(\cdot, \cdot)_Q$，其定义为 $(\alpha_i, \alpha_j)_Q = a_{ij}$，并将其线性延拓到 Q 的任意元素。通常，该形式还延拓为 $\mathfrak{h}$ 及其对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 上的形式，并满足定义条件

$$(\lambda, \alpha_i) = \lambda(h_i) \quad \text{for all } \alpha_i \text{ and } \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

我们固定这样一个双线性型。按照 [Jur96]，它可以延拓为 $(\mathfrak{h}^e)^*$ 上的对称双线性形式。由于取决于在 $\mathfrak{d}$ 上选择的对称双线性形式，这一延拓并不唯一。

$$([a, b], c)_{\mathfrak{g}} = -(b, [a, c])_{\mathfrak{g}}$$

此外，在 $(\mathfrak{h}^e)^*$ 上的对称双线性形式还可延拓为 $(\mathfrak{g}^e)^*$ ([Jur96],定理 1.6) 上唯一的 $\mathfrak{g}^e$-不变对称双线性形式。

2.3. **根系。** 令 $\mathfrak{d}_0$ 表示由 $i \in I$ 的 D_i 张成的 $\mathfrak{g}$ 的（可能是无限维的）交换导子空间。令 $\mathfrak{d}$ 为 $\mathfrak{d}_0$ 的一个子空间。构成半直积李代数 $\mathfrak{g}^e = \mathfrak{d} \rtimes \mathfrak{g}$。于是， $\mathfrak{h}^e = \mathfrak{d} \rtimes \mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}^e$ 的一个阿贝尔子代数，它在每个空间 $\mathfrak{g}(n_1, n_2, \dots)$ 上进行标量乘法。

令 $\alpha_i \in (\mathfrak{h}^e)^*, i \in I$ 由以下条件定义：

$$[h, e_i] = \alpha_i(h) e_i \text{ for all } h \in \mathfrak{h}^e.$$

于是对于所有 $i, j \in I$，我们有

$$\begin{aligned} \alpha_i(h_j) &= a_{ij} \\ D_i(e_j) &= \delta_{i,j} \\ D_i(f_j) &= -\delta_{i,j} \\ D_i(h) &= 0, \text{ for any } h \in \mathfrak{h}^e. \end{aligned}$$

引理 2。 5. [Jur96] 对于 $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_0$，简单根 α_i 在 $(\mathfrak{h}^e)^*$ 中线性无关 .

对于所有 $\alpha \in (\mathfrak{h}^e)^*$，我们定义

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(x) \text{ for all } h \in \mathfrak{h}^e\}.$$

根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 包含于 $\mathfrak{g}(A)$ 中，但由于 $\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{h}^e = 0$，也可以视为 $\mathfrak{g}^e$ 的子集。对于所有 α, $\beta \in (\mathfrak{h}^e)^*$

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

对于所有 $i \in I$，我们有 $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}, f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$。如果所有 $n_i \geq 0$，或者如果所有 $n_i \leq 0$ 且只有有限多个 n_i 非零，那么

$$\mathfrak{g}(n_1, n_2, \dots) \subset \mathfrak{g}_{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\dots}.$$
$$\mathfrak{g}(n_1, n_2, \dots) = \mathfrak{g}_{n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\dots}$$

和 $\mathfrak{g}(0, 0, \dots) = \mathfrak{h}$。

$\mathfrak{g}$ 的根 是满足 $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$的非零 $\alpha \in (\mathfrak{h}^e)^*$。令 Δ 为根的集合。令Δ^+为正根的集合，也就是满足 $n_i \geq 0$且只有有限多个 n_i 非零的根 $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \dots$。令 Δ^+ 为负根的集合，也就是满足 $n_i \leq 0$且只有有限多个 n_i非零的根$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \dots$。所有根都位于根格 $Q = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i$上。

若（α，α）$_Q > 0$，我们称 $\alpha \in \Delta$ 为实根；若（α，α）$_Q \leq 0$，则称其为虚根。集合 $I_0 = \{i \in I \mid a_{ii} = (\alpha_i, \alpha_i)_Q > 0\}$ 为实单根编索引，而 $I\backslash I_0 = \{i \in I \mid a_{ii} = (\alpha_i, \alpha_i)_Q \leq 0\}$ 为虚单根编索引。

实根（分别为虚根）的集合记为 Δ^{re}（分别为 Δ^{im}）；正实根（分别为负实根）的集合也记为 $\Delta^{\mathrm{re}}_{\pm}$，正虚根（分别为负虚根）的集合记为 $\Delta^{\mathrm{im}}_{\pm}$。

Borcherds代数的基本性质总结如下，这些性质由 [Jur96]的命题1.5推出。

命题2.6。*Borcherds*代数 $\mathfrak{g}(A)$ 具有以下性质：

(1) $\mathfrak{g}_{n\alpha_i} = 0$ 除非 $n = \pm 1$。*(2)* $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ 其中 $\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ 且 $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_-} \mathfrak{g}_\alpha$。*(3)* $\{h_i \mid i \in I\}$ 是 $\mathfrak{h}$的基。*(4)* $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$（不交并）。*(5)* 对所有 α、$\beta \in (\mathfrak{h}^e)^*$，有 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$。*(6)* $\eta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$，且对所有 $\alpha \in (\mathfrak{h}^e)^*$，$\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} < \infty$。*(7)* 如果（可能是无限的）矩阵 A' 由矩阵 A 通过行的置换以及相应的列置换得到，那么存在自然同构$\mathfrak{g}(A) \cong \mathfrak{g}A'$。*(8)* 如果 A 具有 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$的形式，则存在自然同构 $\mathfrak{g}(A) \cong \mathfrak{g}(B) \times \mathfrak{g}(C)$。

3. 怪物李代数

令 $V_{1,1}$ 表示对应于偶自对偶二维洛伦兹格 $\mathrm{II}_{1,1} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的顶点代数，其双线性型由矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$给出。令 $V = V^\natural \otimes V_{1,1}$。若向量 $v \in V$ 满足以下条件，则称其为初等的

$$L(j)v = 0$$

对任意 $j > 0$，其中 $L(j)$ 是 Virasoro生成元。此外，如果

$$L(0)v = nv$$

那么 v 是权为 n 的初等对象。我们有 $\mathfrak{m} = P_1/R$，其中

$$P_1 = \{\psi \in V^\natural \otimes V_{1,1} \mid L(0)\psi = \psi,\ L(j)\psi = 0,\ j > 0\},$$

这是 V 中权为 1 的初等向量组成的子空间， $L(j)$ 是 Virasoro生成元， R 表示 P_1上自然双线性型的根基。空间 P_1 被称为 V的物理空间，因为它包含 V 中对应于共形场论中物理态的向量。

我们将 $\mathfrak{m}$ 的根格与 $II_{1,1}$等同。于是， $\mathfrak{m}$ 具有根空间分解（见[Bor92], [JLW95]）

$$\mathfrak{m} = \left(\bigoplus_{m,n<0} \mathfrak{m}_{(m,n)} \oplus \mathfrak{m}_{(-1,1)}\right) \oplus \mathfrak{m}_{(0,0)} \oplus \left(\mathfrak{m}_{(1,-1)} \oplus \bigoplus_{m,n>0} \mathfrak{m}_{(m,n)}\right),$$

其中（m， n） $\in II_{1,1}$。回顾 [FLM88]， $\mathbb{M}$ 通过顶点算子代数自同构作用于 $V^\natural$，且 Aut($V^\natural$) 等于 $\mathbb{M}$. $\mathbb{M}$ 在 $V^\natural$ 上的作用诱导出 $\mathbb{M}$ 在 $\mathfrak{m}$上的作用。特别地， $\mathbb{M}$对 $\mathfrak{m}$ 的作用在每个根空间$\mathfrak{m}_{(1,n)}$ 和$\mathfrak{m}_{(-1,-n)}$ 上产生一个 $\mathbb{M}$作用，并且 $\mathbb{M}$ 在 $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}_{(0,0)}$上平凡作用；
$\mathfrak{h} = \mathfrak{m}_{(0,0)}$是 $\mathfrak{m}$ 的 Cartan 子代数（[Bor92],[JLW95]）。

Borcherds [Bor92]利用无鬼定理，得到了怪物李代数的齐次子空间 $\mathfrak{m}_{(m,n)}$（对应于 m， n） $\neq$ (0，0) 与 $V^\natural$ 的齐次子空间 $V^\natural_{mn+1}$ 之间的 $\mathbb{M}$-模同构，其中 $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}_{(0,0)} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ 是一个平凡的 $\mathbb{M}$-模。

3.1. 怪物李代数作为 $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}(A)/\mathfrak{z}$。 正如 [Bor92]，所示，怪物李代数 $\mathfrak{m} = P_1/R$ 同构于广义Kac–Moody代数 $\mathfrak{g}(A)/\mathfrak{z}$，其中 $\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{g}(A)$ 的中心。

在 [Jur98]，中给出了一个显式的Borcherds Cartan矩阵 A:

(1)
$$A = \begin{array}{c} \\ c(-1) \\ \\ \\ c(1) \\ \\ \\ c(2) \\ \\ \end{array} \overset{\begin{array}{cccccccc} \overset{c(-1)}{\longleftrightarrow} & & \overset{c(1)}{\longleftrightarrow} & & & \overset{c(2)}{\longleftrightarrow} & & \end{array}}{\left(\begin{array}{c|ccc|ccc|c} 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 & \dots \\ \hline 0 & -2 & \dots & -2 & -3 & \dots & -3 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & -2 & \dots & -2 & -3 & \dots & -3 & \\ \hline -1 & -3 & \dots & -3 & -4 & \dots & -4 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ -1 & -3 & \dots & -3 & -4 & \dots & -4 & \\ \hline \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \end{array}\right)},$$

数值 $c(j)$ 是模函数中 q 的系数

$$J(q) = j(q) - 744 = \sum_{i \geq -1} c(j)q^j = \frac{1}{q} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots$$

使得 $c(-1) = 1, c(0) = 0, c(1) = 196884, \dots$。

作为分块矩阵，它如下所示：

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 2_{c(-1)\times c(-1)} & 0_{c(-1)\times c(1)} & -1_{c(-1)\times c(2)} & \cdots & \\ \hline 0_{c(1)\times c(-1)} & -2_{c(1)\times c(1)} & -3_{c(1)\times c(2)} & \cdots & \\ \hline -1_{c(2)\times c(-1)} & -3_{c(2)\times c(1)} & -4_{c(2)\times c(2)} & \cdots & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right),$$

Thus

$$A = (a_{jk,pq})_{(j,k),(p,q)\in I}$$

其中 $a_{jk,pq} = -(j+p)$。因此，$(a_{jk,pq})$ 是大小为 $c(j) \times c(p)$ 的块，位于块位置 (j,p)。我们定义指标集

$$I = \{(j,k) \mid j \in \{-1,1,2,3,\dots\},\ 1 \le k \le c(j)\}$$

以反映 A 的分块形式，使得

$$A = (a_{jk,pq})_{(j,k),(p,q)\in I}$$

其中 $a_{jk,pq} = -(j+p)$。因此，$(a_{jk,pq})$ 是大小为 $c(j) \times c(p)$ 的块，位于行/列分块位置 (j,p)。

那么 $\alpha_{-1} := \alpha_{-11}$ 是一个平方范数为 2 的实根，而 $\alpha_{jk} := \alpha_{jk,jk}$ 是一个平方范数为 $-2j$ 的虚根，对于 $(j,k) \in I$ 且 $j > 0$，因此对于 $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$，我们定义

$$I^{\mathrm{re}} := \{(j,k) \in I \mid a_{jk,jk} > 0\} = \{(-1,1)\}, \text{ and}$$
$$I^{\mathrm{im}} := \{(j,k) \in I \mid a_{jk,jk} \le 0\} = \{(j,k) \mid j \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le c(j)\}.$$

A 的行空间由以 $(\pm 1,1)$ 为指标的两行张成。

$$R_1 = (2,0,\dots 0,-1,\dots,-1,\dots)$$

$$R_2 = (0,-2,\dots,-2,-3,\dots,-3,\dots)$$

Then

$$(-1/2R_1 + 3/2R_2) = (-1,-3,\dots,-3,-4,\dots,-4,\dots).$$

因此，A 的秩为 2。

$\mathfrak{g}(A)$ 的 ***Serre–Chevalley*** 生成元为 [Jur98] e_{jk}、f_{jk}、h_{jk}，对所有 $(j,\ k) \in I$，其定义关系为

(R:1) $$[h_{jk}, h_{pq}] = 0,$$

(R:2) $$[h_{jk}, e_{pq}] = a_{jk,pq}e_{pq} = -(j+p)e_{pq},$$

(R:3) $$[h_{jk}, f_{pq}] = -a_{jk,pq}e_{pq} = (j+p)f_{pq},$$

(R:4) $$[e_{jk}, f_{pq}] = \delta_{jp}\delta_{kq}h_{jk},$$

(R:5) $$(\operatorname{ad} e_{-1\,1})^j\ e_{jk} = (\operatorname{ad} f_{-1\,1})^j\ f_{jk} = 0,$$

对所有 $(j,\ k)$、$(p,\ q) \in I$。从此以后，我们通常记 $e_{-1} := e_{-11}$ 和 $f_{-1} := f_{-11}$。 $\mathfrak{g}(A)$ 的 ***Cartan*** 子代数为 $\mathfrak{h}_A = \sum_{(j,\ k)\in I} \mathbb{C}h_{jk}$。卡坦对合 $\eta\colon \mathfrak{g}(A) \to \mathfrak{g}(A)$ 在 $\mathfrak{h}_A$ 上的作用为 -1，并交换 e_{jk} 和 f_{jk}。

怪物李代数***Monster*** 李代数 是 $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}(A)/\mathfrak{z}$，其中 $\mathfrak{z}$是 $\mathfrak{g}(A)$的中心。注意，$\mathfrak{z}$包含于 $\mathfrak{h}_A$ 中，因此 $\mathfrak{m}$ 的 Cartan 子代数为 $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_A/\mathfrak{z}$。诱导在 $\mathfrak{m}$ 上的卡坦对合也记作 η。空间 $\mathfrak{n}^{\pm}$ 与 $\mathfrak{h}$ 的交为零，因此可以将它们视为 $\mathfrak{m}$的子集。矩阵 A的秩为 2，因此 $\mathfrak{h}$ 的维数为 2。

在 $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}(A)/\mathfrak{z}$中定义以下元素:

$$h_1 := \frac{1}{2}(h_{-11} - h_{11}) + \mathfrak{z}, \qquad h_2 := -\frac{1}{2}(h_{-11} + h_{11}) + \mathfrak{z},$$
$$e_{-1} := e_{-11} + \mathfrak{z}, \qquad f_{-1} := f_{-11} + \mathfrak{z},$$

并对所有$(j,\ k) \in I - \{(-1,\ 1)\}$，记 e_{jk}为 $e_{jk} + \mathfrak{z}$，记 f_{jk}为 $f_{jk} + \mathfrak{z}$。下面的命题给出了 $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}(A)/\mathfrak{z}$的生成元与关系的显式描述。

命题 3.1。 [CJM22] $\mathfrak{m}$ 的 ***Serre–Chevalley***生成元为 e_{-1}、f_{-1}、h_1、h_2以及 e_{jk}、f_{jk} ***forall*** $(j,k) \in I - \{(-1,1)\}$，其定义关系为:

(M:1) $$[h_1, h_2] = 0,$$

(M:2a) $$[h_1, e_{-1}] = e_{-1}, \qquad [h_2, e_{-1}] = -e_{-1},$$

(M:2b) $$[h_1, e_{jk}] = e_{jk}, \qquad [h_2, e_{jk}] = je_{jk},$$

(M:3a) $$[h_1, f_{-1}] = -f_{-1}, \qquad [h_2, f_{-1}] = f_{-1},$$

(M:3b) $$[h_1, f_{jk}] = -f_{jk}, \qquad [h_2, f_{jk}] = -jf_{jk},$$

(M:4a) $$[e_{-1}, f_{-1}] = h_1 - h_2,$$

(M:4b) $$[e_{-1}, f_{jk}] = 0, \qquad [e_{jk}, f_{-1}] = 0,$$

(M:4c) $$[e_{jk}, f_{pq}] = -\delta_{jp}\delta_{kq}\left(jh_1 + h_2\right),$$

(M:5) $$(\operatorname{ad} e_{-1})^j e_{jk} = 0, \qquad (\operatorname{ad} f_{-1})^j f_{jk} = 0,$$

对于所有 (j,k)、$(p,q) \in I - \{(-1,1)\}$。此外，$\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 = \mathfrak{h}_A/\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的 ***Cartan*** 子代数。

我们有 $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}(A)/\mathfrak{z}$，而中心 $\mathfrak{z}$ 由以下元素张成

$$(p-j)h_{-11} - (p+1)h_{jk} + (j+1)h_{pq}.$$

因此 $h_{-11} + \mathfrak{z} = h_1 - h_2$；$h_{1k} + \mathfrak{z} = -h_1 - h_2$对于 $(1,k) \in I$；并且

$$\begin{aligned} h_{jk} + \mathfrak{z} &= h_{jk} + \frac{1}{2}\left((1-j)h_{-11} - (1+1)h_{jk} + (j+1)h_{11}\right) + \mathfrak{z} \\ &= \frac{1-j}{2}\,h_{-11} + \frac{1+j}{2}\,h_{11} + \mathfrak{z} \\ &= \frac{1}{2}\left(h_{-11} + h_{11}\right) + \frac{j}{2}\left(-h_{-11} + h_{11}\right) + \mathfrak{z} \\ &= -jh_1 - h_2 \end{aligned}$$

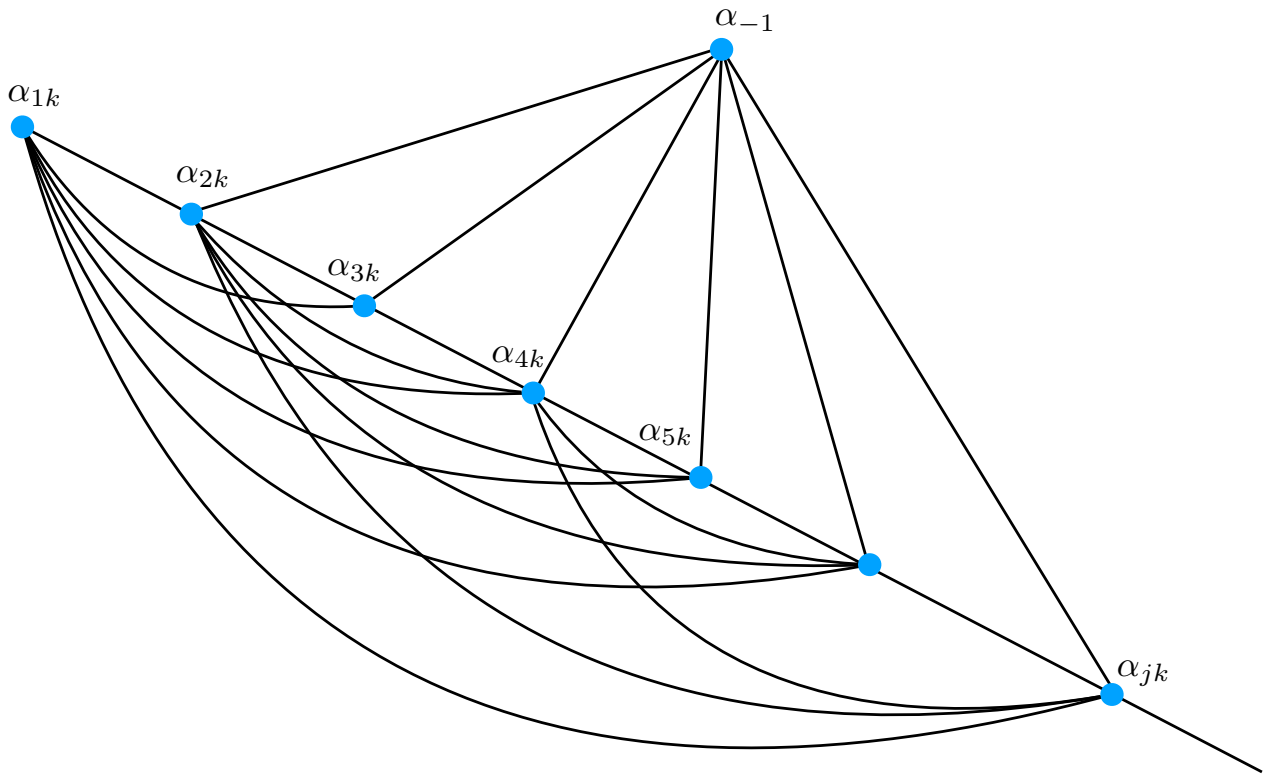

图 1. 怪物李代数的 Dynkin 图 $\mathfrak{m}$，其具有实单根 α_{-1} 和虚单根 α_{jk}，是一个定义在可数集上的完全图，仅缺少一条边，即连接 α_{-1} 与 α_{1k} 的边。边上的重数未标出。连接 α_{-1} 与 α_{jk} 的边的重数为 $|1-j|$，连接 α_{jk} 与 $\alpha_{j'k'}$ 的边的重数为 $j+j'$。每个顶点 α_{jk} 表示一个以 $c\ (j)$ 个顶点 $\{\alpha_{jk} \mid 1 \le k \le c\ (j)\}$ 构成的完全图，其中每条边的重数为 $2j$。

当 $j \neq 1$ 时。因此 h_1 和 h_2 张成 $\mathfrak{h}$。此外，根据 (M:2a) 和 (M:2b)，h_1 和 h_2 线性无关。

4. $\mathfrak{m}$ 的分解

在 [Jur98], Jurisich 的研究中，他将怪物李代数分解为两个自由子代数 $\mathfrak{u}^{\pm}$ 以及一个 $\mathfrak{gl}_2 \cong \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C}h$ 的副本，其中 $\mathfrak{u}^{\pm}$ 是由可数多个形如.....的元素生成的自由李代数

$$e_{\ell,jk} := (\operatorname{ad} e_{-1})^{\ell} e_{jk} \quad \text{and} \quad f_{\ell,jk} := (\operatorname{ad} f_{-1})^{\ell} f_{jk}$$

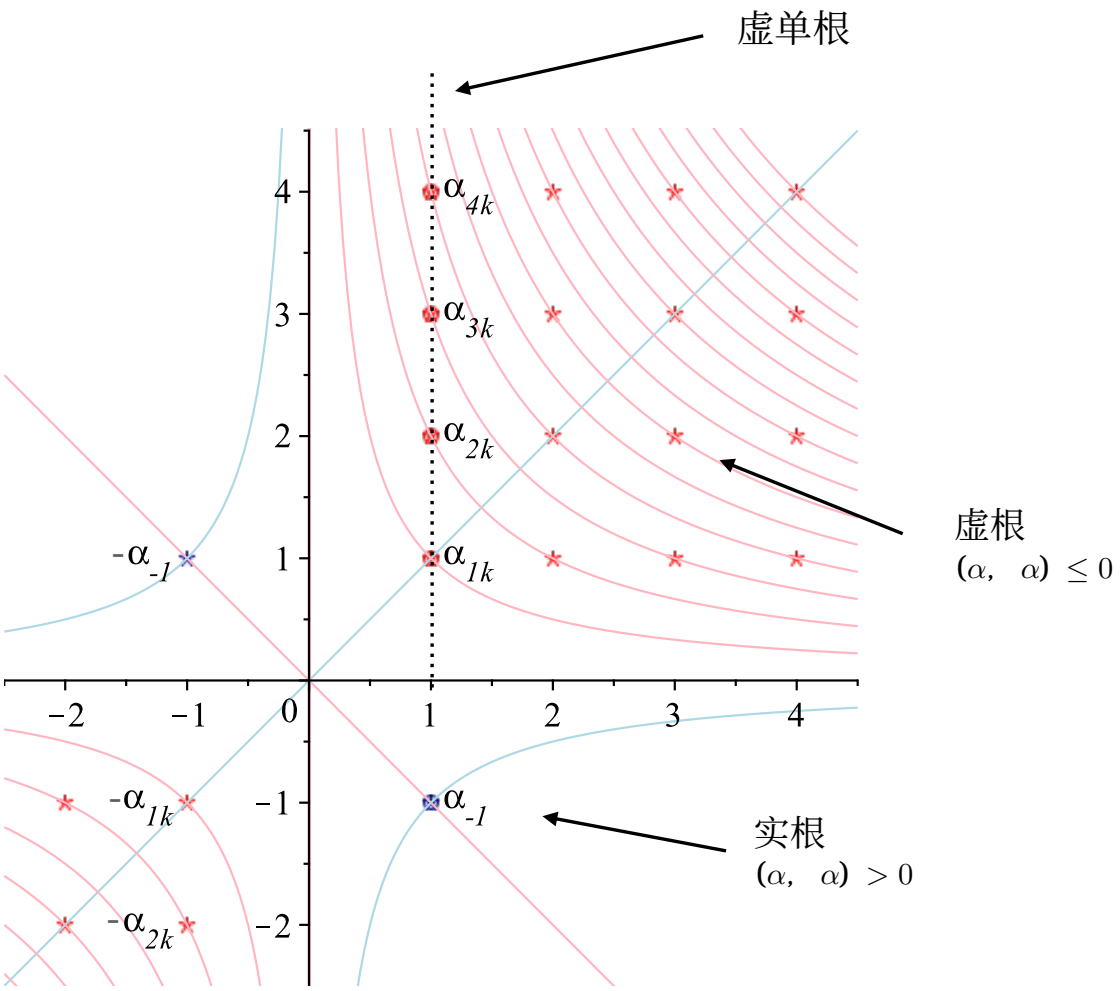

图 2. 怪物李代数的根格 $\mathfrak{m}$

分别。实单根向量 e_{-1}、f_{-1} 和虚单根向量 e_{jk}、f_{jk}（在自由子代数 $\mathfrak{u}^{\pm}$的记号中对应于情形 $\ell = 0$）是 $\mathfrak{m}$的切瓦利生成元。

此外，自由子代数 $\mathfrak{u}^{\pm}$ 由 $\mathfrak{gl}_2$-模自由生成，这些模由伴随作用给出。证明这种分解存在的过程使用了 $\mathfrak{m}$的 Borcherds Cartan矩阵的显式形式，该形式也见于 [Jur98]。

这种分解使 [JLW95] 简化了 Borcherds 关于怪兽月光猜想的证明，尤其是其中关于 $\mathfrak{m}$分母恒等式的证明。具体而言，这种分解简化了对 $\mathfrak{u}^{+}$所需半无穷同调的计算，从而简化了特征标递推。结合 $\mathfrak{sl}_2$-表示理论，这使 [JLW95] 能够高效地计算怪物李代数的分母公式。

5.1. **Fricke 型的怪兽李代数**。若元素 $g \in \mathbb{M}$ 满足 McKay–Thompson 级数 $T_g(\tau)$ 在某个 $N \geq 1$ 下关于 level NFricke 对合 $\tau \mapsto -1/N\tau$保持不变，则称其为 *Fricke* 。否则，称 g 为非 Fricke。在 $\mathbb{M}$ 中有 141 个 Fricke 共轭类和 53 个非 Fricke 共轭类。当 g 为 Fricke 时， $\mathfrak{m}_g$ 具有与怪物李代数$\mathfrak{m}$相似的结构。

T李代数 $\mathfrak{m}_g$，对于 Fricke 型的 g，其分母公式为 [Car12] :

$$f(p) - f(q^{1/N}) = p^{-1} \prod_{m>0,\, n\in \frac{1}{N}\mathbb{Z}} (1 - p^m q^n)^{c(m,n)}$$

其中

$$f(q) = q^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c(1, \frac{n}{N}) q^n.$$

请注意，在 [Car17], 中，命题 3.4 给出的分母公式采用了不同的变量归一化，并使用 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-分次而非 $\mathbb{Z} \times \frac{1}{N}\mathbb{Z}$-分次。本文采用 $\mathbb{Z} \times \frac{1}{N}\mathbb{Z}$-分次。

指数 $c(m, \frac{n}{N})$ 是根 $(m, \frac{n}{N})$ 的重数 $\in \mathbb{Z} \oplus \frac{1}{N}\mathbb{Z}$。它们是相对于循环群 $\langle g \rangle$ [Car12] 对广义 McKay–Thompson 级数进行离散傅里叶变换所得的系数。

对于 Fricke 型的 g，我们有 $\mathfrak{m}_g = \mathfrak{g}(A_g)/\mathfrak{z}$，其中 $\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{g}(A_g)$ 的中心，而 A_g 是 Borcherds Cartan 矩阵（Carnahan）：

$$A_g = \begin{array}{c} \\ c(1,\frac{-1}{N}) \\ \\ c(1,\frac{1}{N}) \\ \\ c(1,\frac{2}{N}) \\ \\ \end{array} \overset{\begin{array}{cccccccc} \overset{c(1,\frac{-1}{N})}{\longleftrightarrow} & & \overset{c(1,\frac{1}{N})}{\longleftrightarrow} & & & \overset{c(1,\frac{2}{N})}{\longleftrightarrow} & & \end{array}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 & \dots \\ 0 & -2 & \dots & -2 & -3 & \dots & -3 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & -2 & \dots & -2 & -3 & \dots & -3 & \\ -1 & -3 & \dots & -3 & -4 & \dots & -4 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ -1 & -3 & \dots & -3 & -4 & \dots & -4 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}},$$

Let

$$I = \{(j,k) \mid j \in \{-1, 1, 2, 3, \dots\},\ 1 \leq k \leq c(1, j/N)\}.$$

对于 $(j,k) \in I$，各项满足

$$(\alpha_{jk}, \alpha_{pq}) = a_{jk,pq} = -(j+p).$$

当 g 为 Fricke 型时，Carnahan [Car17]证明了 $\mathfrak{m}_g$ Jurisich 分解 $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{u}^+$ 的一个类似结果，其中 $\mathfrak{u}^\pm$ 为自由李代数。出现 $\mathfrak{gl}_2$这一项是因为

Fricke 型怪物李代数恰好有一个实单根。Carnahan 还证明， $\mathfrak{m}_g$ 的 Borcherds Cartan矩阵与 $\mathfrak{m}$的具有相同形式，只是块的大小不同，这些大小由 $\mathfrak{m}_g$虚单根的根空间维数给出。利用这一分解以及类似于 [GL76],中的同调计算，Carnahan 简化了对 $\mathfrak{m}_g$扭分母公式的计算。

5.2. **生成元与关系** $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}$。 对于所有的 $(j,k) \in I - \{(-1,1)\}$， $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}$的生成元为 e_{-1}、 f_{-1}、 h_1、 h_2以及 e_{jk}、 f_{jk} ，其定义关系如下:

$$
\begin{aligned}
[h_1, h_2] &= 0, \\
[h_1, e_{-1}] &= e_{-1}, & [h_2, e_{-1}] &= -e_{-1}, \\
[h_1, e_{jk}] &= e_{jk}, & [h_2, e_{jk}] &= j e_{jk}, \\
[h_1, f_{-1}] &= -f_{-1}, & [h_2, f_{-1}] &= f_{-1}, \\
[h_1, f_{jk}] &= -f_{jk}, & [h_2, f_{jk}] &= -j f_{jk}, \\
[e_{-1}, f_{-1}] &= h_1 - h_2, \\
[e_{-1}, f_{jk}] &= 0, & [e_{jk}, f_{-1}] &= 0, \\
[e_{jk}, f_{pq}] &= -\delta_{jp}\delta_{kq}(j h_1 + h_2), \\
(\operatorname{ad} e_{-1})^j e_{jk} &= 0, & (\operatorname{ad} f_{-1})^j f_{jk} &= 0,
\end{aligned}
$$

李代数 $\mathfrak{m}_g$ 的 Cartan 子代数为 $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 = \mathfrak{h}_A/\mathfrak{z}$。

5.3. **结构定理：** $\mathfrak{m}_g$ **对于** g **Fricke 型的**。唯一的实单根是 $\alpha_{-1} = (1, \frac{-1}{N})$。虚单根为 $\alpha_{jk} = (1, \frac{j}{N})$，其中 $j \in \mathbb{Z}_{>0}$。
正虚根为 $(m, \frac{j}{N})$，其中 $m,\ j \in \mathbb{Z}_{>0}$其范数为 $\frac{-2mj}{N}$。
以下定理直接由 Jurisich、JPAA 的推论 5.1 得出（Carnahan 也曾指出这一点，并将此类李代数称为 *Fricke* 李代数）。

定理 **5.1.** 设 $g \in \mathbb{M}$ 为 *Fricke* 型。设 $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ 和 $I_0 = \{-1\}$。则

$$\mathfrak{m}_g = \mathfrak{u}^+ \oplus \mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{u}^-$$

其中 $\mathfrak{u}^+$ 是由集合 S^+ 上生成的自由李代数 $L(S^+)$

$$S^+ = \{(\operatorname{ad} e_i)^\ell e_j \mid i \in I_0,\ j \in I,\ 0 \le \ell \le j-1\},$$

且 $\mathfrak{u}^-$ 是由集合 S^- 上生成的自由李代数 $L(S^-)$

$$S^- = \{(\operatorname{ad} f_i)^\ell f_j \mid i \in I_0,\ j \in I,\ 0 \le \ell \le j-1\}.$$

5.4. **示例：Fricke 李代数** $\mathfrak{m}_{2A}$**，怪兽群**。怪兽有限单群 $\mathbb{B}$ 包含 $\mathbb{M}$ 的 Fricke 元素，并且与 $\mathbb{M}$中的 2A 共轭类重合。在这种情况下， $N = 2$。

McKay –对于 $\mathbb{B}$，常数项为 $a(0) = 104$ 的 Thompson 级数 $T_{2A}(\tau)$ 为

$$\begin{aligned} j_{2A}(\tau) &= T_{2A}(\tau) + 104 \\ &= \left(\left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(2\tau)} \right)^{12} + 2^6 \left(\frac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)} \right)^{12} \right)^2 \\ &= \frac{1}{q} + 104 + 4372q + 96256q^2 + 1240002q^3 + 10698752q^4 + \dots \end{aligned}$$

且 $\eta(\tau)$ 是 Dedekind eta函数。简单根 $(1, \frac{n}{2})$ 的根重数 c，即 $(1, -\frac{n}{2})$，是 q^n in 的系数

$$T_{2A}(-1/\tau) = T_{2A}(\tau/2).$$

Thus

$$c(1, \frac{1}{2}) = 4372,\ c(1,1) = 96256,\ c(1, \frac{3}{2}) = 1240002,\ c(1,2) = 10698752, \dots$$

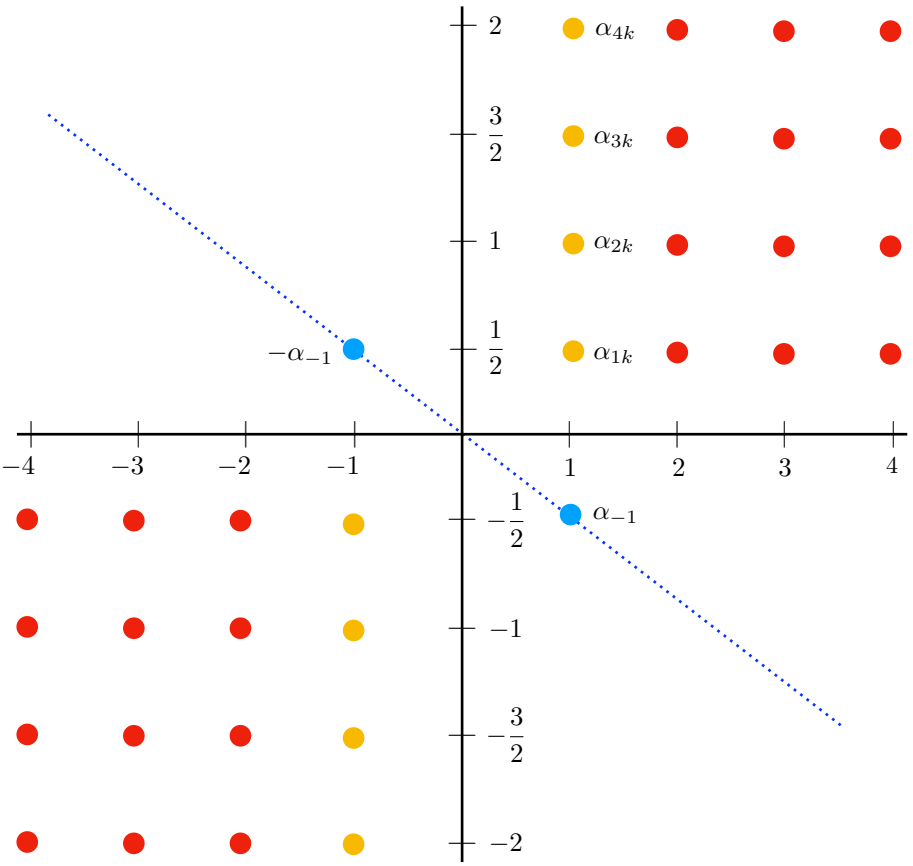

图3. Baby Monster李代数的根格 $\mathfrak{m}_{2A}$

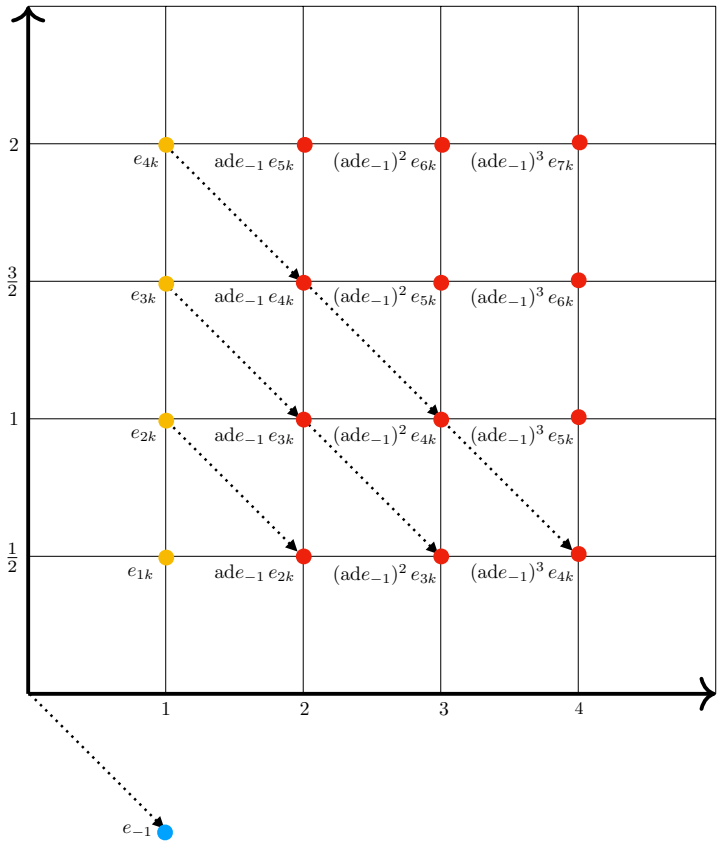

图4. α_{-1}-权 弦怪兽群 $\mathfrak{gl}_2(-1)$-模在 Baby Monster 李代数 $\mathfrak{m}_{2A}$ 中

5.5. 示例：非Fricke李代数 $\mathfrak{m}_{2B}$。 每个非 Fricke T_g 都有一个首选的 eta-乘积展开式（命题 4.2, [Car18]）：

$$T_{g^{N/n}} = \prod_{i=1}^{k} \eta(a_i\tau)^{b_i}$$

其中 Dedekind η-函数为

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)\,.$$

η商表达式 $T_{2B}(\tau)$ 为 ([FLM], 第10.5节) $T_{2B}(\tau) = \dfrac{\eta(\tau)^{24}}{\eta(2\tau)^{24}}$。现在我们应用变换 $\tau \to (-1/\tau)$，在该变换下

$$\eta(\tau) \to \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau).$$

变换后的 η乘积为

$$T_{2B}(-1/\tau) = 2^{12}\frac{\eta(\tau)^{24}}{\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{24}}.$$

这给出

$$\begin{aligned} T_{2B}(-1/\tau) &= 4096q^{1/2} + 98304q + 1228800q^{3/2} + \dots \\ &= 2^{12}(q^{1/2} + 24q + 300q^{3/2} + \dots) \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{T_g\left(\frac{\tau}{2}\right)} = q^{1/2} + 24q + 300q^{3/2} + \dots$$

因此我们得到恒等式（ [DLM96]中也曾指出）

$$T_{2B}(-1/\tau) = \frac{2^{12}}{T_g(\frac{\tau}{2})}$$

其形式为

$$T_g(-1/\tau) = k_1 + \frac{k_2}{T_g(\frac{\tau}{N})}$$

对于某些非负整数 k_1 和 k_2，正如 Carnahan 所指出的。我们注意到它与雅可比 theta 函数的相似性

$$\theta_4(\tau) = \frac{\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^2}{\eta(\tau)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n e^{\pi i n^2\tau}.$$

引理 5.2. 共轭类 *2B* 的变换级数 $T_{2B}(-1/\tau)$ 为

$$T_{2B}(-1/\tau) = 2^{12}\frac{\eta(\tau)^{24}}{\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{24}} = \frac{2^{12}}{T_{2B}(\frac{\tau}{2})} = \left(\frac{2\eta(\tau)}{\theta_4(\tau)}\right)^{12}.$$

这给出了 Conway 和 Norton [CN79]所提出的主张的一个例子，即 η-乘积可以用 θ-函数表示。

要得到 $\mathfrak{m}_{2B}$的根重数，请注意

$$
\begin{aligned}
T_{2B}(\tau) &= \frac{\eta(\tau)^{24}}{\eta(2\tau)^{24}} \\
&= \frac{1}{q}\prod_{n>0}(1-q^{2n})^{24}(1-q^{2n+1})^{24}(1-q^{2n})^{-24} \\
&= \frac{1}{q}\prod_{n\geq 0}(1-q^{2n+1})^{24} \\
&= \frac{1}{q}\prod_{m\geq 0}(1-q^{m})^{c(m,0)}.
\end{aligned}
$$

于是根重数为

$$
c(m,0) = \begin{cases} 0, & m \text{ even} \\ 24, & m \text{ odd} \end{cases}
$$

这与 Carnahan 在 [Car18] 中表格所列的数值一致。
我们有

$$
T_{2B}(-1/\tau) = 4096q^{1/2} + 98304q + 1228800q^{3/2} + \cdots .
$$

因此， $c(1, \frac{n}{2})$由下式给出

$$
c(1,\frac{1}{2}) = 4096,\ c(1,1) = 98304,\ c(1,\frac{3}{2}) = 1228800, \cdots .
$$

5.6. 的李代数结构 $\mathfrak{m}_g$。 李代数 $\mathfrak{m}_g$ 是根据 [Car12] 和 [DF11] 中的半无限上同调构造的。Borcherds 对 $\mathfrak{m}_g$ 的早期构造，以及 I. Frenkel 独立进行的构造，都是基于将无鬼定理应用于 26 维玻色弦（参见 [Bor92], [DF11] 和 [FLM88]）。

在与 H. Chen、J. Du、D. Hou、D. Tan 和 F. Thurman 的合作工作 [CCD+26] 中，我们通过其 Borcherds Cartan矩阵、生成元与关系以及根系，研究了李代数 $\mathfrak{m}_g$ 作为 Borcherds代数的结构（另见本卷中的 [Tan26], ）。我们证明了 Jurisich定理的一个变体，该定理表明，与怪物李代数 $\mathfrak{m}$ 一样，当 g 为非 Fricke 时， $\mathfrak{m}_g$ 包含由某些正、负虚根向量生成的自由子代数。这一点在 Fricke情形下已为人所知 [Car18]。
如果 $g \in \mathbb{M}$ 是非 Fricke 的，那么

$$
\mathfrak{m}_g = \mathfrak{u}^- \oplus (\mathcal{H} \oplus \mathbb{C}h_{(1,1)}) \oplus \mathfrak{u}^+
$$

其中 $\mathfrak{u}^{\pm}$ 是由一组可数的特定根向量生成的自由李代数， $\mathcal{H}$ 是一个无限维 Heisenberg李代数，而 $h_{(-1,1)}$ 是 $\mathcal{H}$的一个中心元。

6. 为李代数构造李群类比 $\mathfrak{m}_g$

由于怪兽李代数 $\mathfrak{m}_g$ 描述了物理对称性，因此为它们关联一个李群 $G(\mathfrak{m}_g)$ 的类比十分重要。构造 Borcherds代数对应的群存在已知的困难，因为与虚单根对应的根向量在伴随表示或大多数忠实的最高权模上并不局部幂零。

为克服这一问题，人们发展出了几种彼此不同但相互关联的构造（[CJM22]，[CJM26]，[CJ26]）。与 Kac–Moody代数的情况一样，对 Borcherds代数进行（拓扑）完备化，并构造该完备化的自同构群，事实证明是自然且有用的做法。

在 [CJM26], 中，作者通过定义代数意义上的原可求和性 （它等价于在有限维子空间上的收敛性），构造了一个完备的原幺正群 U^+，它由完备化 $\hat{\mathfrak{m}}$的 $\mathfrak{m}$的自同构组成。作为拓扑群， U^+ 的生成元是常数项为 1 的幂级数。作者证明，怪兽有限群 $\mathbb{M}$ 在 $\mathfrak{m}$ 上的作用诱导出 $\mathbb{M}$ 在 $\hat{\mathfrak{m}}$上的作用，而这又诱导出 $\mathbb{M}$ 在 U^+上的相容作用。

在 [CJM22], 中，作者还构造了一个群 $G(\mathfrak{m})$，它关联于 $\mathfrak{m}$ 的所有根（包括实根和虚根）及其间的关系。相比之下，Tits 对 Kac–Moody 群 [Tit87] 的表示中，只有与实根相关的生成元与关系。

群 $G(\mathfrak{m})$ 本身并非 $\mathfrak{m}$ 的自同构群，但作者表明， $G(\mathfrak{m})$ 的某些子群是 $\mathfrak{m}$ 的自同构群，也是 $\mathfrak{m}$ 中某些 $\mathfrak{gl}_2$ 子代数以及 $\mathfrak{m}$ 的一个完备化 $\hat{\mathfrak{m}}$的自同构群。

对于一类可直和分解为 Kac–Moody（或半单）代数 $\mathfrak{g}_J$ 与自由李代数 $\mathfrak{u}^{\pm}$ 的 Borcherds代数，如 [Jur98]，中所述，作者在与 Eliz- abeth Jurisich [CJ26]，合作的研究中，构造了一个半直积，其一方是 Kac–Moody（或半单）群，另一方是 Magnus群；后者由与虚单根之负相对应的可逆形式幂级数构成。我们还将这一构造应用于若干具体实例。

7. 未解决问题与未来方向

这一领域的未解决问题不胜枚举。它们与群论、数论、李理论和弦理论都有联系。下面列举几个未解决问题。

7.1. $\mathfrak{m}_g$ 的李群类比。

问题 1. 对于任意 Borcherds代数 $\mathfrak{g}$，相对于 Borcherds Cartan矩阵 A，应当可以构造群 [CJM22] 的群 $G(\mathfrak{m})$ 的类似物 $G(\mathfrak{g})$。对应于实根或虚根的 A 对角线上的非零元素会产生 $G(\mathfrak{g})$ 的 SL_2 子群，这些子群对应于 $\mathfrak{g}$ 的相关 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数的自同构群。对角线上的零元素对应于范数为零的虚单根。

$\widehat{\ }$由 $\widehat{e_i}$、 h_i 和 f_i 生成的李子代数是 $\mathfrak{g}$ 的三维海森堡子代数，由此会产生 $G(\mathfrak{g})$ 的三维海森堡子群。应当可以构造 $\mathfrak{g}$ 中三维海森堡子代数的自同构群，这些子代数与上述子群相对应。

问题 2。 $G(\mathfrak{m})$ 在怪兽月光中扮演什么角色（如果有的话）？
问题 3。 $\mathbb{M}$ 在 $\mathfrak{m}$ 上的作用 $\mathbb{M} = \mathrm{Aut}(V^\natural) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{m})$ 来自 $\mathbb{M}$ 在 $V^\natural$上的 [FLM88]-作用。

(a) $G(\mathfrak{m})$ 的某个子群是否作用于 $V^\natural$? (b) $V^\natural$ 上的 [FLM88] 对合是否包含于 $G(\mathfrak{m})$ 中? (c) 对任意 $g \in \mathbb{M}$，中心化子 $C_{\mathbb{M}}(g)$ 是否为 $G(\mathfrak{m})$ 的子群？对于对合 $g \in \mathbb{M}$ 呢? (d) $\mathbb{M}$ 是否包含于 $G(\mathfrak{m})$ 的中心化子中，或者反之？(e) 是否存在 $G(\mathfrak{m})$（或 $G(\mathfrak{m})$ 的某个子群）在 $\mathrm{End}(V^\natural)$ 上的表示?

7.2. $\mathfrak{m}_g$**的结构**。

问题 4。 </style}回忆怪物李代数的分解 [Jur98]

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{u}^+.$$

当 $g \in \mathbb{M}$ 为 Fricke 时， $\mathfrak{m}_g$ 具有与 [Car17]类似的结构:

$$\mathfrak{m}_g = \mathfrak{v}^- \oplus \mathfrak{gl}_2 \oplus \mathfrak{v}^+$$

其中， $\mathfrak{u}^\pm$ 和 $\mathfrak{v}^\pm$ 是自由李代数，其中 $\mathfrak{v}^\pm$ 由可数多个如下形式的元素生成

$$e_{\ell,jk} := (\mathrm{ad}\, e_{-1})^\ell e_{jk} \quad \text{and} \quad f_{\ell,jk} := (\mathrm{ad}\, f_{-1})^\ell f_{jk}.$$

Carnahan 利用这一分解简化了 Fricke 情形下 $\mathfrak{m}_g$ 的扭曲分母恒等式的证明。Fricke 型的怪兽李代数 $\mathfrak{m}_g$ 能否实现为 $\mathfrak{m}$的真子代数?

问题 5. 设 $g \in \mathbb{M}$，并令 $\mathfrak{m}^g$ 为 $\mathfrak{m}$ 中由 g 的不动点构成的子代数:

$$\mathfrak{m}^g = \{x \in \mathfrak{m} \mid g \cdot x = x\} \subset \mathfrak{m}.$$

自然可以将 $\mathfrak{m}^g$ 视为对应于 $C_{\mathbb{M}}(g)$ 的李代数。 $\mathfrak{m}^g$ 与 $\mathfrak{m}_g$ 之间有何关系?

7.3. $\mathfrak{m}_g$ **在弦理论中的进一步实现**。

问题 6. Persson、Paquette 和 Volpato 提出的紧化杂化弦模型（BPS态空间）中，$\mathfrak{m} = P_1/R$ 的生成元是否有物理解释? 这些对应于简单根 $(1, j)$ 的生成元具有如下形式

$$e_{j,u} = u \otimes \iota(c_j) + R$$

其中， u 是 $V^\natural_{j+1}$ 中的主向量；对于固定的 $j > 0$，我们固定 $c_j \in \widehat{L}$ （$L = II_1$的一个二次中心扩张，$_1$），使得 $\bar{c_j} = (1, j)$。

问题 7。 在与 Natalie Paquette 合作的工作中，我们 [CP26], 对 Monster 怪物李代数 $\mathfrak{m}$ 的根系以及更一般的无限族怪兽李代数 $\mathfrak{m}_g$的某些对称性作出了解释，将其表述为 Persson、Paquette 和 Volpato 所研究的杂化弦紧化模型的离散对称性。

这些离散对称性是 $O(2,2:\mathbb{Z}) \leq O(2,2:\mathbb{R})$，的子群，它们能否在 $G(\mathfrak{m})$ 中实现？除去一个二阶群的扩张后，其中某些对称性（对合）包含在 $G(\mathfrak{m})$ 中。

问题 8。 Monster 李代数 $\mathfrak{m}$ 的自由子代数（或其生成元）如何由 $V = V^\natural \otimes V_{1,1}$ 中的顶点代数元素产生？这些自由子代数及其作用是否有杂化弦方面的物理解释?

7.4. **非弗里克分母恒等式**。

问题 9。 分解 $\mathfrak{m}_g = \mathfrak{u}^- \oplus (\mathcal{H} \oplus \mathbb{C}h_{(1,1)}) \oplus \mathfrak{u}^+$ 被用于 [Tan26]，以简化 Carnahan 关于 g 为非 Fricke 时 $\mathfrak{m}_g$ 的扭曲分母恒等式的证明。能否利用这一分解简化 $\mathfrak{m}_g$ 的半无限上同调构造?

参考文献

[AI03] Michael Atiyah和 Daniel Iagolnitzer（编），《菲尔兹奖得主讲座》，第二版，世界科学出版社20世纪数学丛书，第9卷，世界科学出版公司，里弗埃奇，新泽西州，2003年。MR 2039982[Bor88] Richard Borcherds，《广义卡茨-穆迪代数》，J. Algebra 115（1988），第2期，501–512。MR 943273[Bor92] Richard E. Borcherds，《怪兽月光与怪物李超代数》，Invent. Math. 109（1992），第2期，405–444。MR 1172696[Car10] Scott Carnahan，《广义月光 I：零亏格函数》，Algebra Number Theory 4（2010），第6期，649–679。MR 2728485[Car12] ，《广义月光 II：Borcherds乘积》，Duke Math. J. 161（2012），第5期，893–950。MR 2904095[Car17] ，《月光中的 Fricke 李代数与零亏格性质》，J. Phys. A 50（2017），第40期，404002，21页。MR 3708084[Car18] ，*51* 《月光模的构造》，Commun. Number Theory Phys. 12（2018），第2期，305–334。MR 3824577[CCD+26] L. Carbone、H. Chen、J. Du、D. Hou、D. Tan和F. Thurman，《作为Borcherds代数的怪兽李代数》，准备中（2026年）。[CJ26] Lisa Carbone和Elizabeth Jurisich，《一类Borcherds代数的Magnus群构造》，预印本（2026年）。[CJM22] Lisa Carbone、Elizabeth Jurisich和Scott H. Murray，《构造怪物李代数的李群类比》，Lett. Math. Phys. 112（2022），第3期，论文编号43，16页。MR 4418318[CJM26] ，《怪物李代数的李群类比》，arXiv:2311.11078v3 [math.RT]（2026年）。[CM16] Scott Carnahan和Masahiko Miyamoto，《不动点顶点算子子代数的正则性》，预印本（2016年）。[CN79] J. H. Conway和S. P. Norton，《怪兽月光》，Bull. London Math. Soc. 11（1979），第3期，308–339。MR 554399[CP26] Lisa Carbone和Natalie Paquette，《异质 Monster 中的虚反射与离散对称性》，arXiv:2202.09720v3 [hep-th]（2026年）。

[DF11] John F. R. Duncan和Igor B. Frenkel，《Rademacher 和、月光与引力》，Commun. Num- ber Theory Phys. 5（2011），第4期，849–976。MR 2905139[DGH88] L. Dixon、P. Ginsparg和J. Harvey，《美女与野兽：Monster 模中的超共形对称性》，Comm. Math. Phys. 119（1988），第2期，221–241。MR 968697[DLM96] Chongying Dong、Haisheng Li和Geoffrey Mason，《月光模的一些扭曲扇区》，《月光、Monster及相关主题》（马萨诸塞州南哈德利，1994），Contemp. Math.，第193卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996年，第25–43页。MR 1372716[DLM00] ，《轨形理论与广义月光中迹函数的模不变性》，Comm. Math. Phys. 214（2000），第1期，1–56。MR 1794264[FLM84] I. B. Frenkel、J. Lepowsky和A. Meurman，《Fischer-Griess Monster 的自然表示及其特征标模函数 J》，Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 81（1984），第10期，，Phys. Sci.，3256–3260。MR 747596[FLM88] Igor Frenkel、James Lepowsky和Arne Meurman，《顶点算子代数与Monster》，纯数学与应用数学，第134卷，Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1988年。MR 996026[GL76] Howard Garland和James Lepowsky，《李代数同调与Macdonald-Kac 公式》，Invent. Math. 34（1976），第1期，37–76。MR 414645.[H03] G H¨ohn，《怪兽群的广义月光》，预印本。197（2003）。[HL98] Koichiro Harada和Mong Lung Lang，《与Monster 模相关的模形式》，《Monster与李代数》（俄亥俄州哥伦布，1996），俄亥俄州立大学数学研究所出版物，第7卷，de Gruyter，柏林，1998年，第59–83页。MR 1650637[HM96] Jeffrey A. Harvey和Gregory Moore，《代数、BPS 态与弦》，Nuclear Phys. B 463（1996），第2–3期，315–368。MR 1393643[HM98] ，《BPS 态代数论》，Comm. Math. Phys. 197（1998），第3期，489–519。MR 1652775[Hua08] Yi-Zhi Huang，《顶点算子代数与Verlinde 猜想》，Commun. Contemp. Math. 10（2008），第1期，103–154。MR 2387861[JLW95] E. Jurisich、J. Lepowsky和R. L. Wilson，《怪物李代数的实现》，Selecta Math.（新系列）1（1995），第1期，129–161。MR 1327230[Jur96] Elizabeth Jurisich，《广义卡茨-穆迪代数概述》，Contemporary Mathematics 194（1996），121–160。[Jur98] ，《广义卡茨-穆迪李代数、自由李代数与怪物李代数的结构》，J. Pure Appl. Algebra 126（1998），第1–3期，233–266。MR 1600542[MP95] Robert V. Moody和Arturo Pianzola，《具有三角分解的李代数》，加拿大数学会专著与高级教材丛书，John Wiley & Sons Inc.，纽约，1995年，Wiley-Interscience 出版物。MR 96d:17025[Nor87] Simon Norton，《广义月光》，Proc. Sympos. Pure Math. 47（1987），第1期，209–210。[Nor01] ，《从月光到 Monster》，《月光及相关主题会议论文集》（蒙特利尔，QC，1999），CRM Proc. Lecture Notes，第30卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001年，第163–171页。MR 1877765[PPV16] N. M. Paquette、D. Persson和R. Volpato，《Monster BPS 代数与月光的超弦起源》，arXiv 电子预印本（2016年）。[PPV17] Natalie M. Paquette、Daniel Persson和Roberto Volpato，《BPS 代数、零亏格与异质 Monster》，J. Phys. A 50（2017），第41期，414001，17页。MR 3708102[Que81] Larissa Queen，《由若干有限群导出的模函数》，Math. Comp. 37（1981），第156期，547–580。MR 628715[Tan26] Daniel Tan，《非 Fricke Monster 李代数的结构》，预印本（2026年）。[Tit87] Jacques Tits，《域上 Kac-Moody 群的唯一性与表示》，J. Algebra 105（1987），第2期，542–573。MR 873684[vEMS20] Jethro van Ekeren、Sven Moller和Nils R. Scheithauer，《全纯顶点算子代数的构造与分类》，J. Reine Angew. Math. 759（2020），61–99。MR 4058176