arXiv:2601.10659v1 [quant-ph] 15 Jan 2026

随机能隙朗道–齐ener跃迁的反绝热驱动

GeorgiosTheologou[1],Mikkel F.Andersen[2,3] 和 Sandro Wimberger[4,5]1海德堡大学理论物理研究所，海德堡，德国2新西兰奥塔哥大学物理系，达尼丁3达尼丁Dodd-Walls光子学与量子技术中心，新西兰4帕尔马大学数学、物理与计算机科学系，帕尔马，意大利5意大利国家核物理研究所（INFN）米兰-比可卡分部帕尔马组，帕尔马，意大利

电子邮箱：sandromarcel.wimberger@unipr.it

2026年1月16日

摘要。 朗道–齐纳（LZ）模型描述了一个经历避免交叉的双能级量子系统。在绝热极限下，跃迁概率趋于零。可以反向设计辅助控制场 H_{CD} ，使完整哈密顿量 $H_0 + H_{\mathrm{CD}}$ 在所有参数值下都重现绝热性。我们的目标是构造一个单一控制场 H_1 ，驱动一组具有能隙分布的LZ型哈密顿量。H_1 在统计意义上表现最佳，能够使平均跃迁概率最小化。我们将注意力限制在一类特殊的 H_1控制上，其设计动机源于 H_{CD}。我们发现，瞬时绝热性与最终跃迁概率之间存在系统性的权衡关系。在线性扫描下，某些极限情形可以进行解析处理；其中之一是具有狄拉克 δ（t）函数的朗道–齐ener系统。全面且系统的数值模拟支持并拓展了解析结果。

关键词：绝热捷径；兰道–齐纳问题；量子控制；随机能隙分布；绝热量子计算

1. 引言

兰道–齐纳（LZ）系统于 1932 年首次提出。它描述了一个含线性变化含时哈密顿量的两能级量子力学系统 H_0，该系统会发生避免交叉。尽管具有时间依赖性，但它可以精确求解 [1, 2]。由于显式的时间依赖性，两个本征态之间会发生跃迁，其渐近跃迁概率由著名的兰道–齐纳公式给出 [3–6]。

跃迁受到（量子）绝热定理 [7]的限制。在绝热区间内，系统的时间演化沿着瞬时本征态进行，跃迁概率很小。系统保持在其初始制备本征态中的条件，具有理论和实际意义 [8, 9]。理论上，让系统演化得足够慢，或者说持续足够长的时间，就能确保其沿着绝热轨迹演化；但在实践中，退相干效应和技术限制为总演化时间设定了上限。

对快速绝热演化的需求催生了“绝热捷径”[10, 11]，这一领域，它是广阔而活跃的量子控制[12领域的一个分支14]，，涵盖对存在不完美性或参数变化的系统的控制 [15–18]。绝热捷径统称为这样一类方案：它们能够重现绝热演化，但不一定沿着绝热路径进行。本文关注的是由 Demirplak 和 Rice [19,20] 以及 Berry [21]分别独立提出的反绝热驱动（CD）。通过添加附加控制场 H_{CD}，对初始哈密顿量H_0 进行扩展，使完整系统 $H_0 + H_{\mathrm{CD}}$ 能够驱动 H_0 的本征态实现无跃迁演化。反绝热驱动本质上是绝热性的逆向工程。对于二维系统，H_{CD} 可以用闭式形式求得；对于低维系统，各种近似方案 [22,23] 都能足够精确地重现 H_{CD}。

快速且无误差地操控量子态前景可期，因此反绝热协议在量子技术发展中备受关注 [10]。例如，人们已考虑将其用于控制超导量子比特 [24, 25] 和 NV中心 [26]。对反绝热协议的理论研究主要聚焦于所谓能隙参数（H_0本征态之间最小能量差）固定且已知的情况。在实际应用中，情况通常并非如此；选择绝热转移过程的一个主要动机，往往是其对实验参数变化（如能隙参数 [27,28]）的稳健性。即使是典型的朗道–齐ener系统——其中含时激光场驱动双能级原子或量子比特 [29]，——也会由于不同原子所感受到的光强有所变化而包含一系列能隙。有些系统本身也可能包含范围很广的能隙。在分析多体自旋链的双能级子空间时，由于与剩余部分的相互作用，会出现随机能隙 [30]。另一个例子是能隙取决于热系综中所占据的特定微观状态。例如，在光镊中，驱动两个热原子自旋动力学的耦合，关键取决于所占据的特定运动状态 [31]。任何

试图使用反绝热协议操控自旋态，都必须确保其能够稳健应对由此产生的广泛能隙。因此，研究具有能隙分布而非单一已知能隙的朗道–齐ener系统系综中的反绝热协议，既具有理论意义，也有实际重要性。

本文的主要目标是构造一个控制场 H_1 ，使其适用于具有随机能隙分布的朗道–齐ener系统系综。单一控制场无法使系综中的所有系统都实现无跃迁驱动。这里，H_1 旨在实现统计意义上的控制，使平均跃迁概率 $\langle \mathcal{P} \rangle$最小化。含时哈密顿量的空间，即便仅考虑二能级系统，也过于庞大，若不施加额外约束便无法穷尽。我们将研究范围限定在一类特殊的 H_1 场中，这类场的构造受到标准形式 H_{CD}的启发。由此定义了广义朗道–齐ener系统，它恰好具有一个能隙参数和一个控制参数。

广义系统本身也颇具研究价值，其中某些极限情形可以通过解析方法求解。其中一种情形是，在避免交叉中心处具有狄拉克 δ（t）函数的朗道–齐ener系统。这是控制参数趋于无穷大的极限情形；这一情形多少有些不符合物理实际，因为波函数在该极限下会变得不连续。尽管如此，这种情形仍然值得研究，因为它可以解析求解，并能帮助我们理解当前的优化问题。我们已用闭式形式计算出相应的跃迁概率。

使最终跃迁概率最小的控制场与标准反绝热驱动理论有显著差异。事实上，通过允许系统偏离绝热路径，我们平均而言能够获得更低的最终跃迁概率。这可表示为 σ_1 与σ_2 的比较，其中 σ_i 是我们双能级问题中作为控制算符的泡利算符。 σ_1 控制场通常优于标准反绝热驱动中使用的 σ_2 场。这还有一个优点： σ_1 已存在于朗道–齐ener哈密顿量中，因此实验中无需设计新的控制哈密顿量。此外，我们发现，控制场的理想时间函数不再是洛伦兹函数。

本文的结构安排如下：第2节简要介绍朗道–齐ener系统和反绝热驱动的理论背景，然后在第3节定义主要问题。在第4节，我们给出无限控制情形的解析解；最后，在第5节对一般情形进行数值分析。附录A、B和C作为正文的补充，包含更多细节和额外计算。

2. 理论背景

2.1. 朗道–齐*ener*问题

在朗道–齐ener系统中，两个渐近自由态从 $t = -\infty$ 线性扫过至$t = +\infty$ ，并在 $t = 0$ 处发生避免交叉。相应的薛定谔方程形式为

$$i\hbar\partial_t |\psi\rangle = (-t/T\sigma_3 + a\sigma_1) |\psi\rangle \tag{1}$$

其中 σ_i，$i = 1$，2，3 为泡利矩阵。兰道–齐纳公式量化了两个本征态之间的非绝热跃迁，其表达式为：

$$\mathcal{P}_{\mathrm{LZ}} = \exp\left(-\frac{\pi T a^2}{\hbar}\right) \tag{2}$$

在式（1中，我们可以通过重新标度消去 $\hbar$ 和其中一个参数：$a \to a\sqrt{T/\hbar}$，$t \to t/\sqrt{\hbar T}$

$$i\partial_t |\psi\rangle = (-t\sigma_3 + a\sigma_1)|\psi\rangle \tag{3}$$

以及 $\mathcal{P}_{\mathrm{LZ}}(a) = \mathrm{e}^{-\pi a^2}$。重新标度后的参数 a 表征能隙，其中 $2a$是避免交叉处的最小能隙。

无需求解薛定谔方程¨即可得到式（2）[32–37]。在本文中，我们需要式（3）的完整时间演化矩阵 [1,2]。设 $H_0 \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n)$，其中 $H_0 = H_0^\dagger$ 。利用时间演化 $\mathcal{U}_0$，初值问题 $i\partial_t |\psi\rangle = H_0 |\psi\rangle$ 在初始条件 $|\psi_i\rangle \equiv |\psi(t_i)\rangle$ 下的解可形式化地写为 $|\psi_f\rangle = \mathcal{U}_0(t_f, t_i)\,|\psi_i\rangle$。对于 $n = 2$, $\mathcal{U}_0(t_f, t_i)$ 是一个酉矩阵 2×2，可写成如下形式

$$\mathcal{U}_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{B}_0 \\ -\mathcal{B}_0^* & \mathcal{A}_0^* \end{pmatrix} \tag{4}$$

其中 $\mathcal{A}_0$，$\mathcal{B}_0 \in \mathbb{C}$ 称为凯莱–克莱因参数，满足 $\det \mathcal{U}_0 = |A_0|^2 + |B_0|^2 ! = 1$ [38]。朗道–齐ener系统（式（3））可精确求解，$\mathcal{U}_0$ 并且 $\mathcal{A}_0$，$\mathcal{B}_0$ 可表示为抛物柱函数的乘积之和[1]。

令 $|g(t)\rangle$，$|e(t)\rangle$ 分别表示瞬时基态和激发态，$|+\rangle \equiv (1, 0)^{\mathrm{T}}$，$|-\rangle \equiv (0, 1)^{\mathrm{T}}$ 表示 $\mathbb{C}^2$ 中的标准基。跃迁概率定义为

$$\mathcal{P}_0\ t_f\ t_i \quad = \left|\langle e\ t_f\ |\mathcal{U}_0\ t_f\ t_i\ |g\ t_i\ \rangle\right|^2 \qquad\qquad t_i \to (,\ )$$
$$-\infty\ t_f \to +\infty\ \ |e\ +\infty\ \rangle = |g\ -\infty\ \rangle = |-\rangle \qquad \mathcal{P}_0 = |\mathcal{A}_0|^2 \sim \ ^{-\pi a^2}$$
$$(\,)\,(,\ )\,(\,)\text{。在，极限下，}(\,)\,(\,)\text{ 和 e，从而恢复兰道–齐纳公式作为首阶项。}$$

2.2. 反绝热驱动

根据 [10, 19–21], ，我们可以反向推导出修正项 $H_{\mathrm{CD}}(t; a)$，使总哈密顿量 $H(t;\ a) \equiv H_0(t; a) + H_{\mathrm{CD}}(t; a)$ 能够驱动 H_0的本征态，实现无跃迁演化。构造 H_{CD} 的目的是抵消由 H_0的时间依赖性引起的非绝热跃迁。由于本征矢量可相差复相位 [39]，因此 H_{CD} 并不唯一。典型的选择是由绝热定理 [7, 38, 40],所规定的形式，对于该形式，

$$H_{\mathrm{CD}} = i\sum_{n\neq m} \frac{|m\rangle\langle m|\partial_t H_0|n\rangle\langle n|}{E_n - E_m}, \tag{5}$$

与 $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$ 的瞬时本征态/本征值 H_0。方程（5）在本征值交叉或简并的情况下会失效。此外，对于 $n \geq 2$该

对谱进行解析求值是一项极为复杂的任务，因此通常采用 H_{CD}近似方案，而不进行精确求值 [22, 25, 39, 41]。

关于内积 $\langle A,\ B\rangle \equiv \mathrm{tr}(A^\dagger B)$，$H_{\mathrm{CD}}$ 满足三个正交条件 [22]

$$H_{\mathrm{CD}} \perp \mathbf{1}, \quad H_{\mathrm{CD}} \perp H_0, \quad H_{\mathrm{CD}} \perp \partial_t H_0 \tag{6}$$

对于 $n = 2$，哈密顿量属于张成空间$_{\mathbb{R}}\{\mathbf{1}, \sigma_{i:1,\ldots,3}\}$，上述条件唯一确定了 H_{CD}的方向。因此，对于 $n = 2$，总能找到 $H_{\mathrm{CD}}(t;\ a)$，特别是对于方程(3) [21]，$H_{\mathrm{CD}} = f_{\mathrm{CD}}\sigma_2$ 其中

$$f_{\mathrm{CD}}(t;a) = \frac{1}{2}\frac{a}{t^2 + a^2}, \tag{7}$$

这是一个以 $t = 0$ 为中心的洛伦兹脉冲。完整的哈密顿量 $H = H_0 + H_{\mathrm{CD}}$ 随后可写为

$$H(t;a) = -t\sigma_3 + a\sigma_1 + \frac{1}{2}\frac{a}{a^2 + t^2}\sigma_2. \tag{8}$$

3. 随机能隙朗道–齐ener

3.1. 问题陈述

对于单一且固定的能隙值 a，最优修正项为 H_{CD}，式（7），而完整的哈密顿量（式（8）在所有时间下产生的跃迁概率都恰好为 $\mathcal{P} = 0$。问题在于如何将 H_{CD} 推广到 H_1，使其能够驱动能隙分布，并最小化由 $\langle\mathcal{P}\rangle$产生的平均跃迁概率 $H = H_0 + H_1$。用 $\mathcal{P}$ 表示最终（渐近）跃迁概率，这与兰道–齐纳公式（式（2））相对应。

我们假设能隙参数 a 服从正态分布，$a \sim \mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$，其中 $\mu \equiv \langle a\rangle$ 且 $\sigma^2 \equiv \langle (a-\mu)^2\rangle$。我们的分析不依赖于分布；原则上，它也适用于更一般的单峰分布。一个合理的起点是将平均能隙作为式（7）中的耦合，即 $H_1 = H_{\mathrm{CD}}(t;\ \langle a\rangle)$。重申最初的问题，我们的目标是找到一个修正项 H_1，使其表现优于 $H_{\mathrm{CD}}(t;\ \langle a\rangle)$，并且这一优势所适用的 μ参数范围 σ 尽可能大。

3.2. 默认选择

与式（8）中一样，我们考虑如下哈密顿量

$$H(t;a,b) \equiv -t\sigma_3 + a\sigma_1 + \frac{1}{2}\frac{b}{b^2t^2 + 1}\sigma_2. \tag{9}$$

控制参数 b 与能隙耦合 a 现在彼此无关。H 给出的跃迁概率为 $\mathcal{P}(a,b)$，这实际上推广了兰道–齐纳公式，$\mathcal{P}(a,0) = \mathcal{P}_{\mathrm{LZ}}(a) = \mathrm{e}^{-\pi a^2}$。$\mathcal{P}$取值于 $[0,1]$，且 $\mathcal{P}(a,b) = 0$仅沿曲线 $ab - 1 = 0$成立，在该曲线上

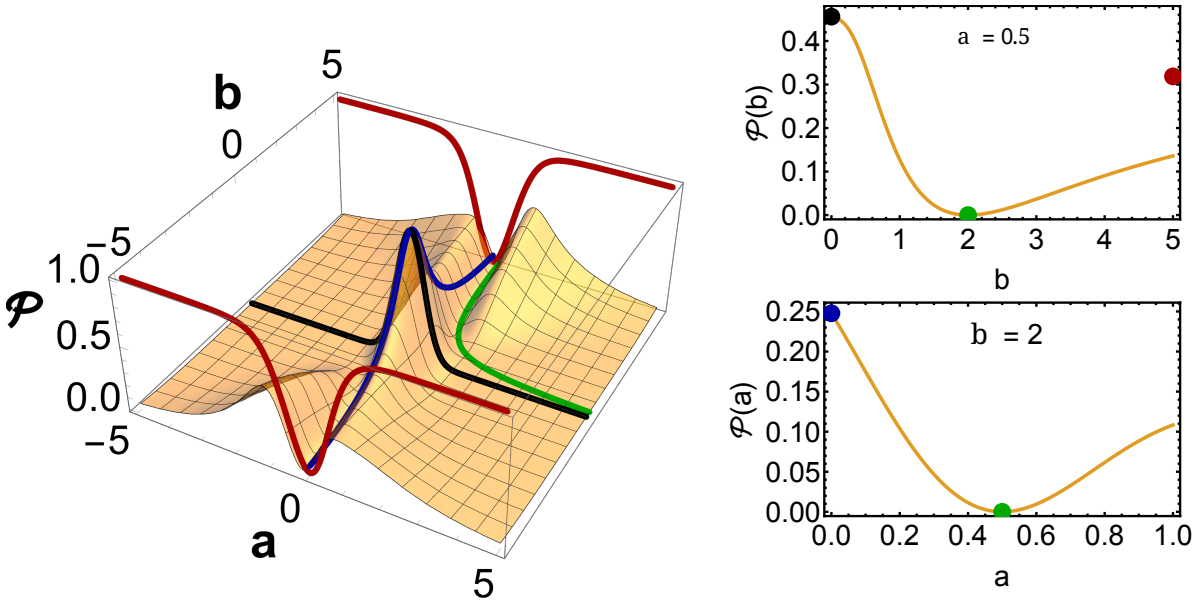

图 1: （左图）由式 (9) 中的哈密顿量生成的跃迁概率三维图。黑色曲线 $b = 0$ 对应兰道–齐纳公式，$\mathcal{P}(a, 0) = \mathcal{P}_{\mathrm{LZ}}(a) = \mathrm{e}^{-\pi a^2}$。蓝色曲线对应零能隙 $a = 0$，红色曲线对应无限大的控制参数 $b \to \infty$。沿绿色曲线 $b = 1/a$，我们采用控制参数为 $\mathcal{P}(a, 1/a) = 0$ 的反绝热驱动。对于较大的 a，我们可以忽略修正项，并有 $\mathcal{P}(a, b) \xrightarrow{a\to\infty} 0$。在 (0, 0) 附近，$\mathcal{P}(a, b) \approx \mathrm{e}^{-\pi(a^2+b^2/4)}$。$\forall a, b,\ \mathcal{P}(a, b) \in [0, 1]$ 以及 $\mathcal{P}(-a, -b) = \mathcal{P}(a, b)$，见式 (A.11)。分别展示了 $\mathcal{P}(a, b)$ 在 a 固定（右上图）和 b 固定（右下图）时的切片。

我们恢复式（8）。固定 a 或 $b, \mathcal{P}$ 时，其全局最小值位于 $b_0(a) \equiv 1/a$，请参见图 1。

$\mathcal{P}(a, b)$ 对能隙分布 $a \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 取平均，得到控制耦合 $b, \langle\mathcal{P}\rangle(b) \equiv \langle\mathcal{P}(a, b)\rangle$ 的函数，该函数在 $b = b^*$ 处取得最小值。我们将最优控制耦合 b^* 及其对应的最小值 $\mathcal{P}^*$ 定义为

$$b^* \equiv \operatorname*{argmin}_{b>0} \langle\mathcal{P}(a, b)\rangle_a, \quad \mathcal{P}^* \equiv \langle\mathcal{P}(a, b^*)\rangle_a \tag{10}$$

临界值 b^*, $\mathcal{P}^*$ 是参数 μ, σ的光滑函数，因此最优耦合可展开为幂级数:

$$b^*(\mu, \sigma) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\mu)\sigma^k \tag{11}$$

在 $\sigma \to 0$的极限下，实际上我们有一个能隙固定为 $\mu = a$ 的单一系统，且 b_0 在式（11）中与 $\mathcal{P}(a, b_0(a)) = 0$, $b_0(\mu) = 1/\mu$。

对于分布的参数，原则上我们可以考虑任意实数值。不过，除第4节外，我们将限定为正值

$\mu > 0$ 和 $\sigma \in (0, \sigma_{\max}]$，其中 $\sigma_{\max} \equiv \mu/5$。实际上，我们只允许 $a > 0$，因为在此参数范围内取到负值的概率小于 10^{-7}。在第4节中，我们将单独处理 $\mu = 0$ 的情形，并同时考虑正间隙和负间隙。经过后续章节的进一步分析后，我们还将对 $0 < \mu < \mu_{\max}$ 施加另一项限制。由于 σ 中 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$具有偶对称性，式（11）中的所有奇数项均消失，$b_{2k+1} = 0$。因此，对于较小的 μ，$b^*(\mu, \sigma) \approx b_0(\mu) = 1/\mu$，我们可以忽略$\sigma$ 依赖性。

在此近似下，$\mathcal{P}^*$ 对应于 b_0–切片的 $\mathcal{P}(a, b)$，并以正态分布加权，见图 2 右图。

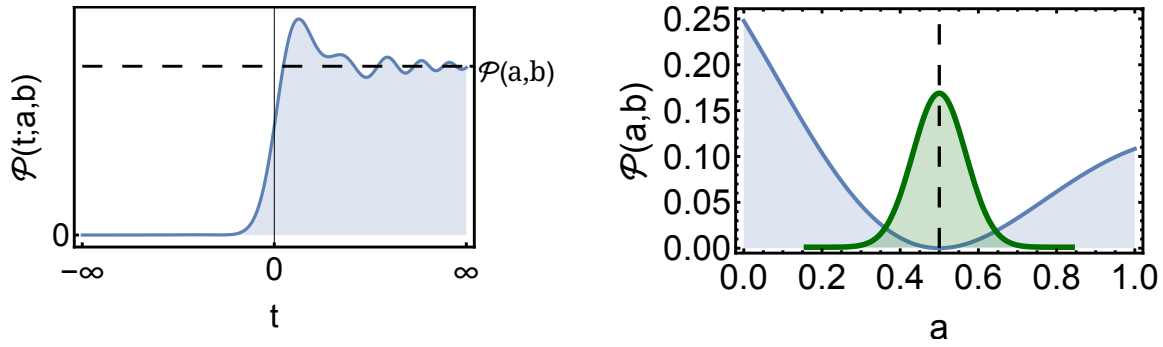

图 2：（左图）$\mathcal{P}(t; a, b)$的时间依赖性。通常，对于互不相关的参数 a, b，$\mathcal{P}(t, \cdot)$的表现与原始兰道–齐纳系统相同。图 1 中的 $\mathcal{P}(a, b)$表示 $\mathcal{P}(t; a, b)$的最终（渐近）值。（右图）$\mathcal{P}$随能隙耦合 a的变化关系，其中 $b = 2$（蓝线）。在 $a = 1/b = 0.5$ 处的最小值对应于 $\mathcal{P}(0.5, 2) = 0$，即反绝热驱动。仅保留式 (11) 中的第一项，等价于将分布中心与最小值对齐。由正态分布加权的阴影面积（绿色曲线所示，未按比例绘制）给出了最优平均跃迁概率 $\mathcal{P}^*$。

3.3. 广义兰道–齐纳系统

下一步要问的是，我们是否能做得比默认选择更好，也就是说，我们希望找到 H_1 其表现优于 H_{CD}的方案。正如我们将在后文各节中看到的，答案是肯定的。我们将把搜索范围限制在一族 H_1 修正上，这些修正是原始 H_{CD}的连续变形。

我们定义哈密顿量

$$H_{\text{GLZ}}(t; a, b; \varphi) \equiv -t\sigma_3 + a\sigma_1 + \frac{b/2}{b^2t^2 + 1}\sigma_\varphi \tag{12}$$

with

$$\sigma_\varphi \equiv \sigma_1 \cos\varphi + \sigma_2 \sin\varphi, \quad \varphi \in [0, \pi/2] \tag{13}$$

引入取值范围为 φ 的连续角参数 $\varphi \in [0, \pi/2]$。在 H_{CD} 所满足的三个正交条件中，式（6）中，H_{GLZ} 仅违反了第二个条件。

为简化讨论，在本节剩余部分，我们将仅关注 $H_1[\varphi = 0] \propto \sigma_1$ 与 $H_1[\varphi = \pi/2] \propto \sigma_2$之间的比较，后者为默认情况。

3.4. 特征曲线

为了使 H_1 可行，必须存在特殊的控制耦合 $b_0(a)$，使得 $\mathcal{P}(a, b_0(a)) = 0$。于是，对于给定的能隙分布 $a \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$，我们可以选择 $b^* = b_0(\mu)$作为最优耦合（忽略 σ 依赖性），使正态分布的中心与最小值对齐，见图 2 右图。随着 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$的宽度 σ 增大，b_0 会受到高阶项（公式 (11)）的修正，而我们在大部分情况下忽略这些修正。

我们将 $\mathcal{P}(a,\ b;\ \varphi)$的根统称为特征曲线，其定义为

$$\mathrm{CC}[\varphi] \equiv \{(a, b_0(a;\varphi)) \subset \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{P}(a, b_0(a;\varphi);\varphi) = 0,\ a \in \mathbb{R}\} \tag{14}$$

对于 $\varphi = \pi/2,\ b_0\ (a;\ \pi/2)\ = 1/a$，这对应于标准反绝热驱动，见图1左图中的绿色曲线。对于 $\varphi \neq \pi/2,\ b_0$ 必须通过数值方法求得，因为它取决于控制场的具体形式 H_1。

关于公式（14）的性质，$\varphi = \pi/2$ 与一般情形之间有两个关键差异，见图3。第一个差异是概率在中间时刻的时间依赖性，$\mathcal{P}(t;\ a, b_0(a))$。对于 $\varphi = \pi/2,\ \mathcal{P}(t;\ a,\ 1/a;\ \pi/2)\ = 0,\ \forall t$；而对于一般情形，$\mathcal{P}(t; a, b_0(a;\ \varphi);\ \varphi)\ \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow}\ 0$ 仅在渐近情况下成立，通常在 $t = 0$ 附近呈现峰状结构。这一点可从图3左图中看出，也体现了我们选择非绝热演化所作出的主要妥协。

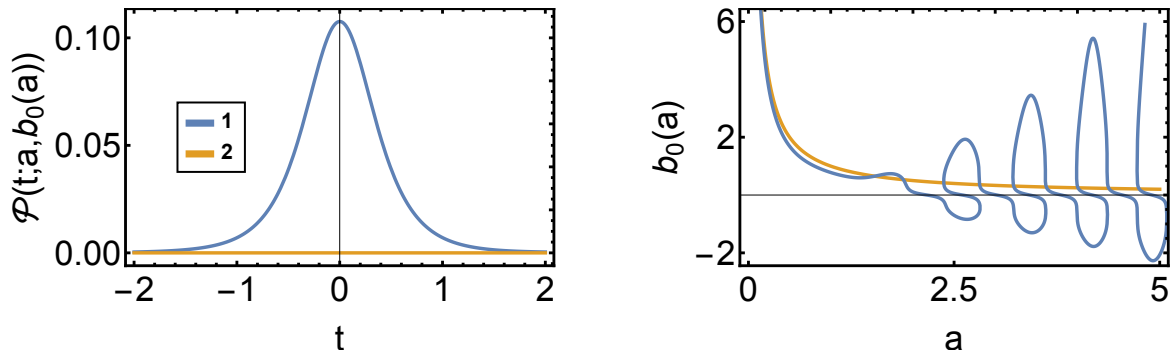

图 3: 比较 $\sigma_1\ (\varphi = 0)$（蓝线）与 $\sigma_2\ (\varphi = \pi/2)$（橙线）。（左图）跃迁概率的时间依赖性 $\mathcal{P}(t;\ a,\ b_0(a))$，对应 $a = 0.5$。对于控制 σ_2，反绝热演化保证所有时间的跃迁概率均为零；而对于控制 σ_1，概率仅在渐近意义下趋于零。（右图）特征曲线，式（14）。对于控制 σ_1，我们观察到在较大的 a 时行为不规则。

第二个差异是整体行为。对于较小的 a， $b_0(a;\ \varphi)$ 的表现与 $b_0(a;\ \pi/2)\ = 1/a$ 类似，数值分析表明 b_0 存在、唯一，且随 φ平滑变化。对于较大的 a，我们在某些情况下观察到振荡或多值性，见图3右图，但这种行为的起因尚不清楚。为避开这一区域，我们将范围限制在 $0 \leq \mu < 2$。否则，对于更大的 μ， b_0 应替换为 b^*，见公式（11）。

3.5. 边界曲线

在方程（12）中，有两个耦合项 a、b 以及参数 φ。对于后者的影响，在极限 $b \to \infty$ 下最容易理解；在此极限中， b 可以从问题中消去。

在图4中，我们绘出了函数 $\mathcal{P}(a,\ b)$，其中 $\varphi = 0$。与 $\varphi = \pi/2$（见图1左图）比较后，我们发现， $b \to \infty$ 对应的边界曲线（红线）比 $\varphi = \pi/2$对应的边界曲线表现更好，它降低了整个区域 $\{(a,\ b) \subset \mathbb{R}^2 | a > 0,\ b > 0\}$ 内与我们的问题相关的概率质量。

下一节中，我们将解析地处理极限 $b \to \infty$ ，并证明在此极限下 $\varphi = 0$ 是最优值。

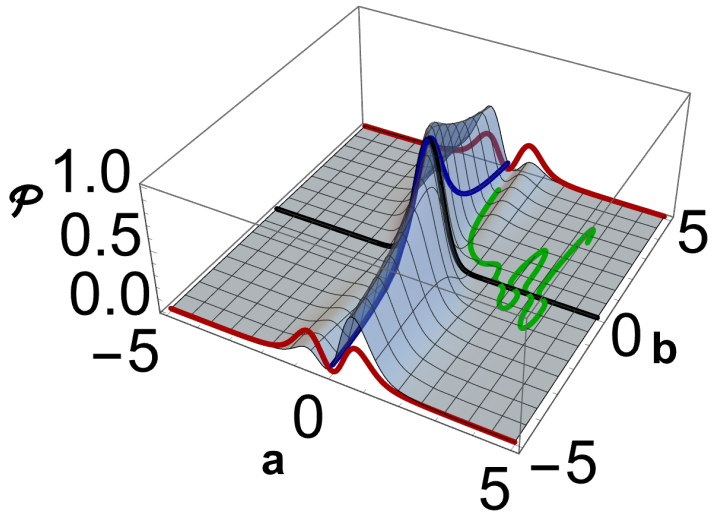

图 4: $\mathcal{P}$（$a,\ b$）对应的三维图， $\varphi = 0$，类似于图1左图。极限 $a \to 0$ （蓝色曲线）和 $b \to 0$ （黑色曲线）不受 φ的选择影响。绿色曲线是特征曲线，见图3右图。与图1相比，极限 $b \to \infty$ （红色曲线）的表现更好，降低了跃迁概率。

4. 带有狄拉克-δ 耦合的兰道–齐纳问题

在极限 $b \to \infty$下，薛¨定方程（式（12）可以解析求解，所得跃迁概率 $\mathcal{P}_\infty(a;\ \varphi)$ $\equiv \lim_{b\to\infty} \mathcal{P}(a,\ b;\ \varphi)$ 可见

闭式解（式（22））。这些函数的实例已作为红色曲线出现在图 1（$\varphi = \pi/2$）和图 4（$\varphi = 0$）中。式（22）是式（B.20）的特例，后者在附录 B 中推导，并包含更多细节。主要结果是，对于能隙参数 a 的所有取值，$\varphi = 0$ 使 $\mathcal{P}_\infty(a;\varphi)$ 最小。关于上一节引入的随机能隙问题，极限 $b \to \infty$ 对应于 $\mu \to 0$，其中 $b_0(\mu;\varphi) \xrightarrow{\mu\to 0} \infty$ 与 φ 无关，见图 3 右图。结论是，在极限 $b \to \infty$ 下，对于任意平均值为 $\mu = 0$ 的概率分布，$\varphi = 0$ 都能使平均跃迁概率最小。

4.1. 预备知识

对于 $b \to \infty$，广义哈密顿量的薛¨定谔方程（式（12））具有如下形式

$$i\partial_t |\psi\rangle = \left[-t\sigma_3 + a\sigma_1 + \frac{\pi}{2}\delta(t)\sigma_\varphi \right] |\psi\rangle \tag{15}$$

其中 $\delta(t)$ 是狄拉克δ函数。式（15）关于时间为一阶方程。由于右端的 $\delta(t)$，解在 $t = 0$ 处必定存在跳跃间断，其中 $|\psi(0^+)\rangle = \mathcal{K}\,|\psi(0^-)\rangle$。矩阵 $\mathcal{K}$ 由式（15）和 $\mathcal{K} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_\varphi}$确定。利用泡利矩阵的性质，矩阵指数可表示为闭式，参见附录 C.1，

$$\mathcal{K}(\varphi) = -i\sigma_\varphi. \tag{16}$$

将时间演化 $\mathcal{U}_\infty(t_f, t_i;\, a, \varphi) = \mathcal{U}_0(t_f, 0;\, a)\mathcal{K}(\varphi)\mathcal{U}_0(0, t_i;\, a)$ 分解，并取极限 $t_f = -t_i, t_f \to +\infty$，式（15）的解便可化为朗道–齐ener系统（式（3））， 从而得到 $\mathcal{P}_\infty = \left|\langle -|\,\mathcal{U}_\infty\,|-\rangle\right|^2 = |\mathcal{A}_\infty|^2$，其中 $\mathcal{A}_\infty$ 是 $\mathcal{U}_\infty$ 的对角元。

在式 (15) 中，狄拉克-$\delta(t)$ 函数可视为强度无穷大的瞬时脉冲的极限。另一种更直观的解释如下。对于二能级系统，其物理态可以唯一映射到三维球面的表面上，这个球面也称为布洛赫球 [42]。从几何角度看，$H_1 = \frac{b/2}{b^2t^2+1}\sigma_\varphi$ 的净效应是绕轴 $\hat{n}_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ 旋转 π，无论 b 如何，因为 $i\partial_t |\psi\rangle = H_1 |\psi\rangle \Rightarrow |\psi(+\infty)\rangle = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_\varphi} |\psi(-\infty)\rangle$。当 b 有限时，旋转会在时间演化 $t \in (-\infty, +\infty)$ 过程中逐渐施加。有了这一表示，在极限 $b \to \infty$ 下，$H_1 \xrightarrow{b\to\infty} \frac{\pi}{2}\delta(t)\sigma_\varphi$ 的效果是在布洛赫球上进行一次瞬时 π 旋转。

4.2. 狄拉克-δ 耦合的解

情形 $a = 0$ 很简单，因此先进行处理。式（15）化为

$$i\partial_t |\psi\rangle = \left[-t\sigma_3 + \frac{\pi}{2}\delta(t)\sigma_1 \right] |\psi\rangle\,. \tag{17}$$

对于 $t_f > 0$，在对称区间 $[-t_f, t_f]$ 内对方程（17）积分，取 $|\psi(-t_f)\rangle = |-\rangle$并考虑不连续性，方程（16），可得 $|\psi(t_f)\rangle = -i\sigma_\varphi\,|\psi(-t_f)\rangle = -i\mathrm{e}^{-i\varphi}\,|+\rangle$ 从而得到 $\mathcal{P}_\infty(0;\varphi) = 0,\ \forall\varphi$，取极限 $t_f \to \infty$。

For 一般情形下，若 $a \neq 0$，方程（15）对应的完整时间演化矩阵为

$$\mathcal{U}_\infty(t_f, t_i; a, \varphi) = \mathcal{U}_0(t_f, 0; a)\mathcal{K}(\varphi)\mathcal{U}_0(0, t_i; a) \tag{18}$$

Expa对式（18）中的矩阵求逆（省略 a 依赖关系），可得

$$\mathcal{A}_\infty(t_f, t_i) = -i\Big[\mathcal{A}_0(0, t_i)\mathcal{B}_0(t_f, 0)\mathrm{e}^{i\varphi} - \mathcal{A}_0(t_f, 0)\mathcal{B}_0^*(0, t_i)\mathrm{e}^{-i\varphi}\Big], \tag{19}$$

其中 $\mathcal{A}_0$，$\mathcal{B}_0$ 由式（A.1）和（A.2）给出。为利用时间对称性，即式（A.10），我们考虑围绕 $t = 0$进行对称积分，其中 $t_f = -t_i$。经过代数运算，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\infty(t_f, -t_f) &= -i\Big[\mathcal{A}_0(0, -t_f)\mathcal{B}_0(t_f, 0)\mathrm{e}^{i\varphi} - \mathcal{A}(t_f, 0)\mathcal{B}_0^*(0, -t_f)\mathrm{e}^{-i\varphi}\Big] \\
&= -i\Big[\mathcal{A}_0(0, -t_f)\mathcal{B}_0(0, -t_f)\mathrm{e}^{i\varphi} - \mathcal{A}^*(0, -t_f)\mathcal{B}_0^*(0, -t_f)\mathrm{e}^{-i\varphi}\Big] \\
&= 2\mathrm{Im}(\underbrace{\mathcal{A}_0(0, -t_f)\mathcal{B}_0(0, -t_f)}_{\mathcal{C}_0}\mathrm{e}^{i\varphi})
\end{aligned} \tag{20}$$

仅保留 在 $t_f \to +\infty$，$\mathcal{C}_0$ 的极限下，仅保留首阶项，式（20）可写为

$$\mathcal{C}_0 \sim \frac{\Gamma(1-\nu)}{a\sqrt{\pi}} D_\nu^2(0)(\mathrm{e}^{-\pi a^2/2} - 1)e^{i\frac{\pi}{4}}, \tag{21}$$

其中 $\nu\,(a) \equiv ia^2/2$ 和 $D_\nu\,(z)$ 是抛物柱函数。利用公式 $D_\nu\,(0) = 2^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\pi}/\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)$，[43, 第 19] 章以及伽马函数的性质，还可进一步化简，参见 附录 D。 $\mathcal{P}_\infty = |\mathcal{A}_\infty|^2$ 的最终形式为

$$\mathcal{P}_\infty(a; \varphi) = (1 - \mathrm{e}^{-\pi a^2})\cos^2(\chi(a) - \varphi), \tag{22}$$

with

$$\chi(a) \equiv \frac{\pi}{4} + \arg\Gamma\left(\frac{1-\nu(a)}{2}\right) - \arg\Gamma\left(\frac{2-\nu(a)}{2}\right), \quad \nu(a) \equiv i\frac{a^2}{2}. \tag{23}$$

$\mathcal{P}_\infty(a; \varphi)$ 是兰道–齐纳公式 $\mathcal{P}_0(a) = \mathrm{e}^{-\pi a^2}$ 的互补概率，并由因子 $\cos^2(\chi(a) - \varphi)$ 加权。 $\chi(a)$ 满足 $\chi(-a) = \chi(a)$，其中 $\chi(0) = \pi/4$，并且随着 $a > 0$ 从 $\pi/4$ 增加到 $\pi/2$。它与 $t = 0$ 处朗道–齐ener系统跃迁概率的时间导数以及所谓的跳跃时间有关，后者在 [44] 中引入。其渐近展开可见于 [44],，结合式 (22) 可得

$$\mathcal{P}_\infty(a; \varphi) \overset{a\to 0}{\sim} \pi a^2\cos^2(\varphi - \tfrac{\pi}{4}) - \frac{\pi a^4}{2}\left[\ln 2\cos 2\varphi + \pi\cos^2(\varphi - \tfrac{\pi}{4})\right] + \mathcal{O}(a^6) \tag{24}$$

$$\mathcal{P}_\infty(a; \varphi) - \sin^2\varphi \overset{a\to\infty}{\sim} \frac{1}{2a^2}\sin 2\varphi + \frac{1}{4a^4}\cos 2\varphi + \mathcal{O}(1/a^6) \tag{25}$$

在式（24）中，第一个非零项仅取决于 $\left|\frac{\pi}{4} - \varphi\right|$，且在 $\varphi = 0, \pi/2$ 处取最小值。下一阶项将这两个值区分开来，使得

$\mathcal{P}_\infty(a;0)$ 最小。在另一个极限下，式（25）中， $\mathcal{P}_\infty$ 趋近于 $\sin^2\varphi$，当 $1/a^2$ 时，但 $\varphi = 0, \pi/2 \Rightarrow \sin 2\varphi = 0$ 是例外，因为其一阶项为零。只有当 $\varphi = 0, \mathcal{P}_\infty(a;0) \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} 0$。

根据以上观察，我们得出结论：对于所有 a，参数 $\varphi = 0$ 都是使相应概率最小的最优值，即

$$\mathcal{P}_\infty(a;0) = \min_{\varphi\in[0,\pi/2]}\{\mathcal{P}_\infty(a;\varphi)\}, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

回到随机能隙问题，对于 $a \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$， $b_0(0;\varphi) \to \infty$，在此极限下它与 φ 无关；图3中选择 $\mathcal{P}(0,\infty) = 0$。根据式 (26)， $\varphi = 0$ 也使平均概率最小。为量化这一优势，我们在图5（右图）中绘出了平均概率随标准差 σ 的变化，其中 $a \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$。我们观察到，对于 $\varphi = 0$，改进十分显著。最终，当 σ 较大时，由于正态分布中的归一化因子 $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$，所有曲线都趋于零。将 $\langle a^2\rangle = \sigma^2$、 $\cancel{\langle a^4\rangle} = 3\sigma^4$ 代入式 (24)，可为 $\sigma \in (0, 0.2)$ 提供良好的近似，见图5右图中的插图。

最后，我们想将结果与裸哈密顿量 H_0，式（3）进行比较。渐近跃迁概率为 $\mathcal{P}_{\mathrm{LZ}}(a) = \mathrm{e}^{-\pi a^2}$，式（2）。对于$a \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$，平均值为$\langle\mathcal{P}_{\mathrm{LZ}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+2\pi\sigma^2}}$，式（C.2），其中 $\mu = 0$。对应的曲线显示在图5~~的右图~~中（黑色虚线）。它在 $\varphi = \pi/2$ 处与 $\sigma^*_{\pi/2} \approx 0.84$线相交，而对于 $\varphi = 0$，两条曲线完全不相交，这意味着加入外场 $H_1[\varphi = 0]$ 对裸哈密顿量有利 H_0，无论 σ 有多大，渐近地都能带来约2倍的提升。

本节所展示的结论适用于任何零均值的单峰分布，而不仅限于我们在此重点讨论的正态分布。下一节的目标是数值地考察本节的结论是否也适用于有限均值 $\mu > 0$，进而适用于有限控制耦合 b。

5. 一般情形的数值模拟

上一节的主要结果是，当控制项趋于无穷大 $b \to \infty$ 时， $\varphi = 0$ 使平均概率最小；对于分布$a \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$，它是最优的。本节旨在探究将这一结果推广到 $\mu > 0(b$ 有限) 的情形，而这只能通过数值模拟来实现。

我们再次只讨论两个边界情形： $\sigma_1,(\varphi = 0)$ 和 $\sigma_2, (\varphi = \pi/2)$。主要发现是， σ_1 在很大范围的参数 σ_2 中优于 μ, σ，但代价是瞬时绝热性受到影响，见下方图 7 。

首先，我们通过数值计算确立这一结果。接着，我们对实验误差进行稳定性分析。最后，我们通过改变脉冲函数（见式（12））的形状或扫描函数，修改模型（式（12））。尽管这两个小节中的分析并不全面，但结果体现了相同的趋势：在广泛的参数范围内， σ_1 均略微但系统性地优于 σ_2 。

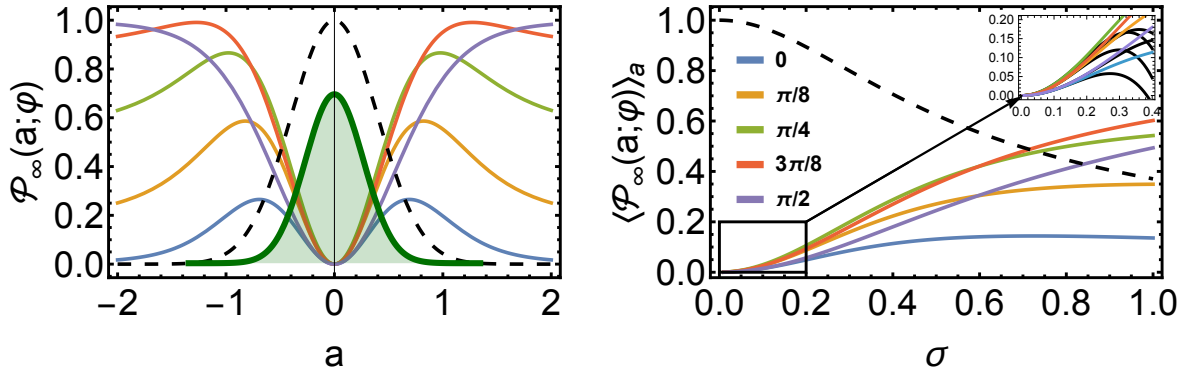

图5： （左图）将式（22）表示为能隙耦合 a 的函数，并与以 φ 为中心的正态分布叠加，取不同的 $\mu = 0$ 值（未按比例绘制）。（右图）在 $a \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 上的平均概率随σ 的变化。两幅图中的颜色相同，具体对应关系见右图图例。虚线对应兰道–齐纳公式 $\mathcal{P}_{\mathrm{LZ}}(a) = \mathrm{e}^{-\pi a^2}$，式（2）（左图），以及$\langle\mathcal{P}_{\mathrm{LZ}}\rangle(0, \sigma) = 1/\sqrt{1+2\pi\sigma^2}$，式（C.2）（右图）。插图展示了原点附近的放大图，其中黑线根据式（24）计算。

在本节中，对于能隙分布，我们假设其服从正态分布 $a \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$，其中 $\sigma \in (0, \sigma_{\max}]$，$\sigma_{\max} \equiv \mu/5$。我们不使用式（3），而采用其重新缩放后的形式

$$i\partial_s |\psi\rangle = \left[T(-\lambda(s)\sigma_3 + a\sigma_1) + \partial_s\lambda \frac{b/2}{b^2\lambda(s)^2+1}\sigma_\varphi\right]|\psi\rangle\,, \quad s \in [0,1], \tag{27}$$

在较大的 T下具有相同的解。除最后一个小节外，所有模拟均采用 $\lambda(s) = \lambda_0(s - \frac{1}{2})$ $T = \lambda_0 = 10$。除非另有说明，我们采用近似 $b^* = b_0$，见式（11），并忽略高阶项。默认情况下，数值平均使用 1000 次模拟。唯一的例外是图 6，其中我们比较了不同的样本量。

5.1. σ_1与 σ_2 控制

在图 6中，我们可以看到两个不同 $\mathcal{P}^*$ 取值下平均跃迁概率的典型表现 μ。当分布宽度 σ 较小时，a两条曲线及其间距均随 σ增大。正如预期，随着样本点数量增加，随机涨落会减小。

容易看出，对于较小的 σ，图 6 中的所有曲线都应单调递增；任何偏离单调性的情况都源于数值模拟中的统计涨落。根据定义，$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}a\, \mathrm{e}^{-(a-\mu)^2/(2\sigma^2)}\mathcal{P}(a, b)$。在 $a = \mu$ 和 $b^* = b_0$附近展开，得到 $\mathcal{P}^*(\mu,\sigma) \overset{\sigma\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\mathcal{P}''(\mu, b_0(\mu))\sigma^2 > 0$；由于最小值，$\mathcal{P}''(\mu, b_0(\mu)) > 0$，见图 1 右图。

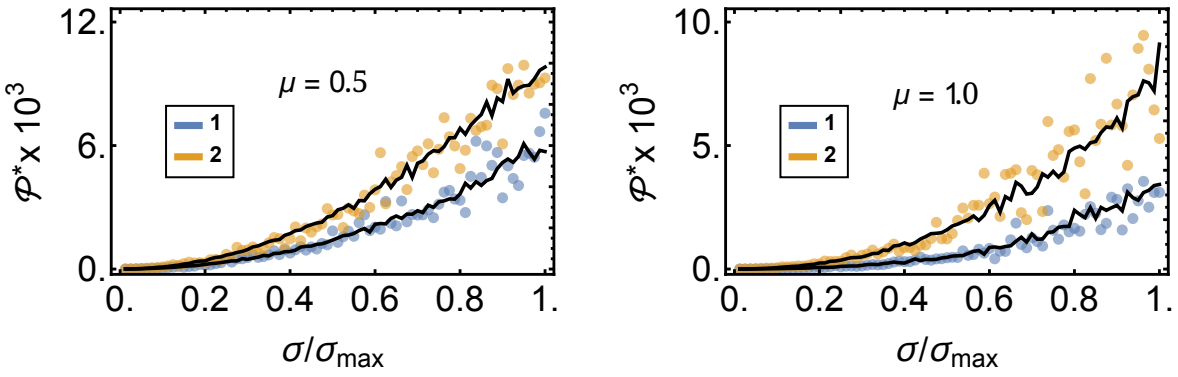

图6： $\mathcal{P}^*$ 作为 σ 的函数，针对 $\mu = 0.5$， $\sigma_{\max} = 0.1$(左图)以及 $\mu = 1.0$， $\sigma_{\max}$ =0。2（右图）。两条曲线分别对应 $\varphi = 0$ (σ_1，蓝线)和 $\varphi = \pi/2$ (σ_2，橙线)。数据点是对 100 个随机 a值取平均得到的，黑线则是对 1000 个随机值取平均得到的。与裸哈密顿量 H_0的平均值（式 (C.2)）相比，在 $\sigma = \sigma_{\max}$ 处，相应的值为 $\langle \mathcal{P}_{\mathrm{LZ}} \rangle \approx 463 \times 10^{-3}$ (左图)和 $\langle \mathcal{P}_{\mathrm{LZ}} \rangle \approx 73 \times 10^{-3}$ (右图)。

接下来，我们要量化$\mu \in$ 取不同值$\mu \in (0, 2)$时 σ_1 与 σ_2 之间的差异，结果见图 7。给定 μ，我们令 $\sigma = \sigma_{\max} = \mu/5$，使两条曲线之间的间距最大，见图 (6)。左图绘出了平均概率 $\mathcal{P}^*$。结合图 6 可知，在参数范围 $\mu \in (0, 2)$ $\sigma \in (0, \mu/5)$内， σ_1 优于σ_2。图 7 所示的曲线必然存在一个峰值，因为在 μ趋于零的极限下，受 σ的限制，可以通过单个控制值 b使跃迁概率变小。在 μ较大的另一极限下，跃迁概率因归一化而趋于零，见附录 C.4。

采用不同于 H_{CD} 的修正项所作出的主要妥协是，时间演化不再在整个演化过程中保持反绝热。对于能隙 a 的单次实现， $\mathcal{P}(t; a, b_0(a))$ 仅在渐近情况下才趋于零，通常会在 $t = 0$ 附近出现峰值，见图 3 左图。在图 7 右图中，我们计算了图 2 左图中跃迁概率的平均面积（在时域内），以衡量平均而言偏离绝热性的程度。对于 σ_2，单个控制场 H_{CD} 无法使整个系统系综实现无跃迁演化。尽管如此，在中间时刻，偏离零的平均值仍然很小。绝热定理保证 $\mathcal{P}(t; a, b_0(a)) \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} 0, \forall t$，因此图 7 右图中的两条曲线在 μ 较大时都趋于零。

5.2. 稳定性分析

在上一节中，我们比较了 σ_1 与 σ_2 控制。与 σ_1 相比， σ_2 的优势在于，在较宽的参数范围 $\mathcal{P}^*[\sigma_1] < \mathcal{P}^*[\sigma_2]$内，见图6 以及图7左图。此优势的代价是， $\mathcal{P}^*$ 在

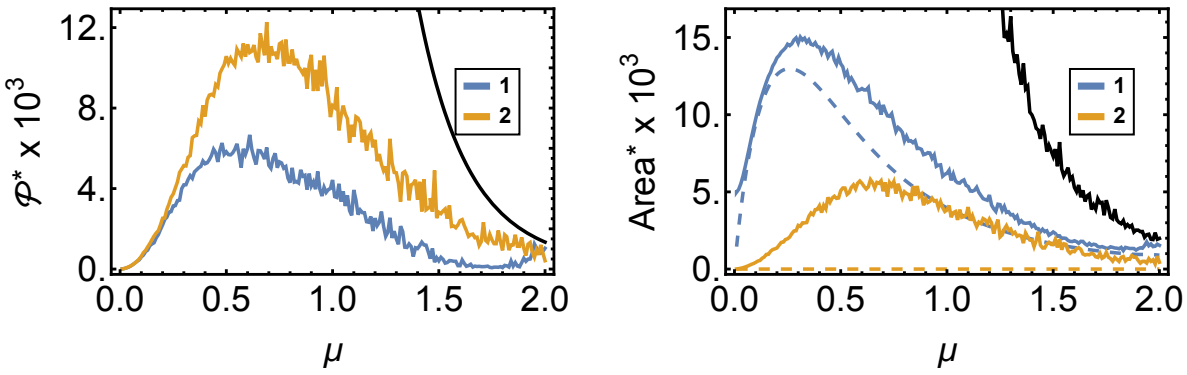

图7： $\mathcal{P}^*$（左图）以及时域中的平均面积（右图）随 μ的变化，其中分布为 $a \sim \mathcal{N}$（μ，$\mu^2/25$）。右图中的虚线对应单能隙（$\sigma \to 0$）。对于 σ_2，理论上面积恰好为零；而对于 σ_1，由于在 $t = 0$附近出现峰值，面积偏离零，见图3（左图）。黑线表示自由哈密顿量 H_0的演化，方程（C.2），其中左图取 $\sigma = \mu/5$，右图则为数值计算得到的平均值。

绝热 中间时刻会明显偏离绝热路径，见图7右图。

下一步是分析两种不同控制方案的稳定性。为此，我们通过在修正项 ε H_1中引入不完美参数 H_1，研究不同类型误差的影响，见表1。第一类误差是在实验装置中通常会考虑的误差。参数 ε会同时影响脉冲的峰值和面积。在另外两种情况下，我们进行了相应的调整，使脉冲的面积或高度在 ε的一阶范围内保持不变。这需要对实验装置进行额外控制，原则上在实际中更难实现。

	函数	Area	Peak
(1)	$(1+\varepsilon)\frac{b/2}{b^2t^2+1}$	$\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)$	$(1+\varepsilon)\frac{b}{2}$
(2)	$\frac{b/2}{b^2t^2(1-\varepsilon)^2+1}$	$\frac{\pi}{2}\frac{1}{1-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}(1+\varepsilon+\dots)$	$\frac{b}{2}$
(3)	$(1+\varepsilon)\frac{b/2}{\frac{b}{2}t^2(1-\varepsilon)^2+1}$	$\frac{\pi}{2}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}(1-\varepsilon^2+\dots)$	$(1+\varepsilon)\frac{b}{2}$

表1： 修正项中的不同类型不完美性 H_1。（1）误差同时影响面积和峰值。（2）固定峰值，以及（3）将面积固定到 ε的一阶。

在图8 中，我们绘制了 $\mathcal{P}^*$的热图。横轴上，我们改变能隙分布的标准差 $a \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$，纵轴上则改变不完美参数 ε。数值分析表明，对于表 σ_1 和 σ_2中的两种情况，在表1所列的所有类型误差下，其稳定性在定性上相当，而 σ_1 控制相比 σ_2 控制略有优势。此外，固定峰值时，表（1）中的类型（2）误差优于其他误差，可将平均概率提高至多

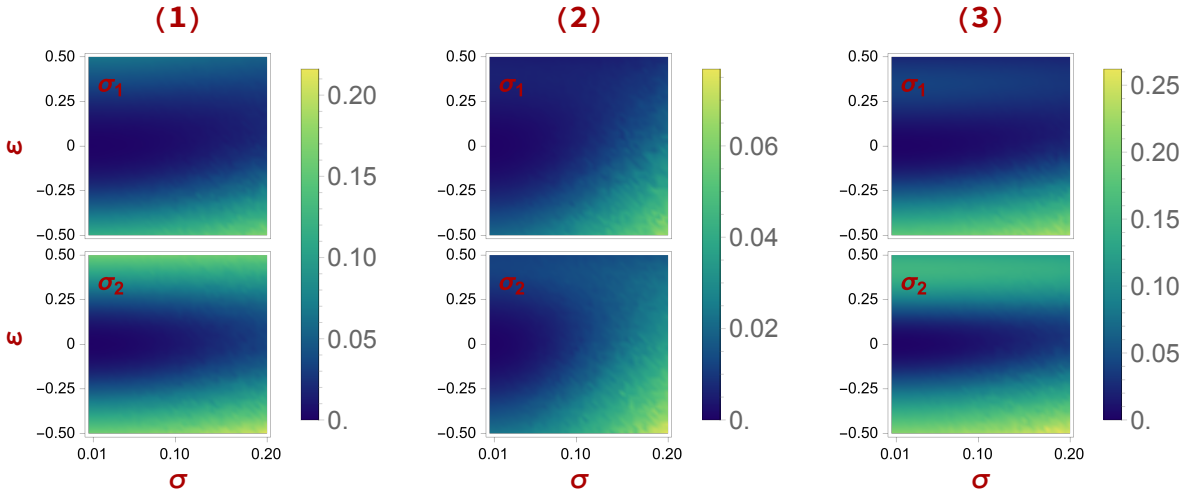

图 8: 热图： $\mathcal{P}^*$ 对应表 1 中不同类型的误差以及能隙分布 $a \sim \mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$, $\mu = 0.5$。蓝色区域为理想区域，对应较低的平均跃迁概率。顶行对应 σ_1 ，底行对应σ_2。不同列对应不同类型的误差。在每个子图中，横轴变化的是 σ ，纵轴为误差参数 ε，参见表 1。固定峰值后，采用表 1中的类型 (2)，精度约提高三倍。 σ_1 与 σ_2 的定性行为相同。

三倍。总的来说，我们在此确认，处理能隙分布时， σ_1 控制具有优势。

5.3. 修改脉冲函数

在式 (12的广义哈密顿量中，我们提出另一项改进：将反绝热脉冲 f_{CD}（见式 (7）的形状改为更一般的形式 $H_1 = f_{\mathrm{D}}\sigma_\varphi$。以原始洛伦兹形状$f^{\mathrm{L}}{}_{\mathrm{D}} = \frac{b/2}{b^2t^2+1}$为蓝本，我们采用表 2 中所示的多种函数，并绘于图 9；除此之外，这些函数的选取并无特别依据。与 L的情况相同，精确的函数形式通过施加以下条件来确定：

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t\ f_{\mathrm{D}}(t;b) = \frac{\pi}{2}, \quad f(0;b) = \frac{b}{2} \tag{28}$$

此外，这些脉冲 f_{D} 经过设计，可保持极限 $b \to \infty$，参见图1中的红色曲线。这样一来， f_{D} 控制 $a \to 0$ 极限，参见图1中的蓝色曲线，而 φ 控制 $b \to \infty$ 彼此独立的极限，参见附录 C.3。

在图 10中，我们绘制了 $\mathcal{P}^*$ 随 μ、 $a \sim \mathcal{N}(\mu,\ \mu^2/25)$ 变化的曲线，分别对应 σ_1（左图）和 σ_2 （右图）。对于较小的 μ，原始洛伦兹脉冲在表 2所列的函数中表现最差。一般修正项 H_1 存在非零跃迁概率，这与图 2左图所示的情况类似。对于较大的 μ，相应的特征曲线（定义见式（14））会变得

#	$f_{\mathrm{D}}(t;\ b)$
L	$\frac{b/2}{b^2t^2+1}$
g	$\frac{b}{2}\mathrm{e}^{-b^2t^2/\pi}$
s	$\frac{1}{2}\frac{\text{正弦 } bt}{t}$
r	$\frac{b}{2}\mathbf{1}(\lvert t\rvert < \frac{\pi}{2b})$
t	$\frac{1}{2}\mathbf{1}(\lvert t\rvert < \frac{\pi}{b})(b-\frac{\lvert t\rvert}{\pi}b^2)$

表2： $b>0$。以洛伦兹函数 L为模型的一般脉冲函数示例。

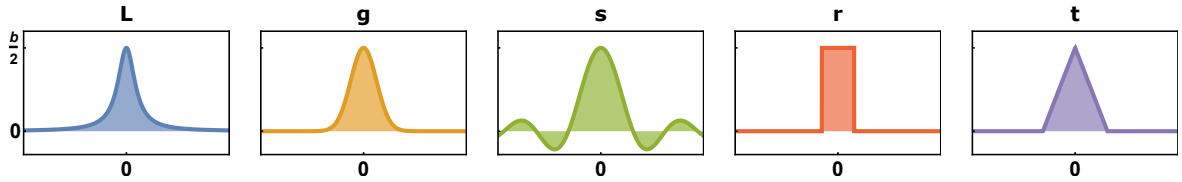

图9： 的图像$(t;\ b)$来自表2，作为时间的函数。在 $t=0$时，$f_{\mathrm{D}}(t;\ b)=b/2$，图像下方的面积（阴影区域）等于 $\pi/2$。面积-峰值条件，即公式（28），规定了某一类函数中函数关系，例如对于矩形脉冲，规定了宽度和高度关于 b的函数关系。

不规则，且通常是多值的。因此，将结果推广至更大的 $\mu \gtrsim 1$时必须格外谨慎。数值分析再次表明，几乎对于所有 $\mu \in (0,\ 2)$ 范围内的取值以及表 f_{D} 2中所有函数，σ_1相较于 σ_2具有优势。总体而言，选择 s 表现最佳，而原始的 L 在此参数范围内表现最差。从实验角度来看，高斯脉冲 g 或许是在性能和可靠性之间的最佳折衷方案。脉冲 f_{D} 的进一步工程设计与优化将留待未来研究。

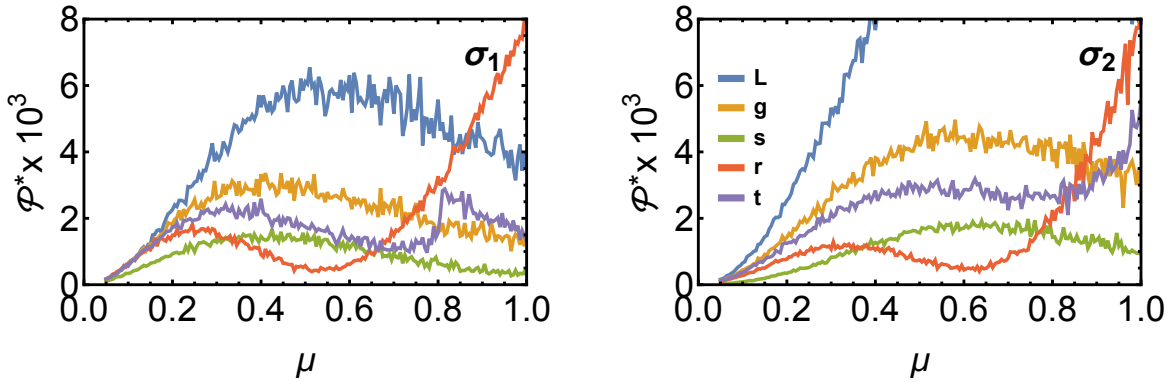

图10： $\mathcal{P}^*$作为 μ的函数，其中 $a\sim\mathcal{N}(\mu,\ \mu^2/25)$。当 μ较小时，L是表2中示例里最差的。 $\varphi=0$， σ_1 (左图)和 $\varphi=\pi/2$， σ_2 (右图)。比较 σ_1 和 σ_2 两种情况，对于几乎所有 μ值，$\mathcal{P}^*[\sigma_1] < \mathcal{P}^*[\sigma_2]$结果都与脉冲形式无关 f_{D}。

5.4. 非线性扫掠

在式 (27中，经过适当设计的非线性扫掠 [45–54] 优于线性斜坡，可显著加快绝热演化，即适用于较小的T。非线性模型很少能精确求解，只能在绝热极限或微扰极限下进行解析处理 [55, 56]。其缺点之一是它们对参数的依赖通常高度非线性；在我们的情形中，这一点并不理想，因为能隙 a 并非固定不变。

图 11 比较了线性扫掠（Lin）和正切扫掠（Tan），其中

$$\lambda_{\mathtt{Lin}}(s) = \lambda_0(s-\tfrac{1}{2}), \quad \lambda_{\mathtt{Tan}}(s;a) = \frac{\lambda_0}{2} a \tan(\arctan(\tfrac{1}{a})(2s-1)), \tag{29}$$

a 是式 (27中的能隙参数。通过使 $\lambda_{\mathtt{Tan}}$ 在区间 $\lambda_{\mathtt{Lin}}$ 的边界处与 $s \in [0,1]$的取值相匹配，便确定了 H_1的具体形式。与修正项 a 一样，扫掠不属于发生波动的系统，因此，$\lambda(s;\ a)$中的参数应保持恒定。式 (27)现在可写成

$$i\partial_s |\psi\rangle = \left[T(-\lambda(s;c)\sigma_3 + a\sigma_1) + \partial_s\lambda(s;b)\frac{b/2}{b^2\lambda(s;b)^2+1}\sigma_\varphi \right] |\psi\rangle\,, \ s \in [0,1], \tag{30}$$

引入一个与能隙无关的新参数 c 。与方程（11）类似，给定 $a \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$，可以针对特定取值 μ,σ 优化 $c(\mu,\sigma)$。为简便起见，我们令 $c=\mu$，忽略可能存在的 σ 依赖性。和之前一样，对于耦合 b，我们将使用 b_0，但需注意，对于 $\varphi \neq \pi/2$，b_0 现在也依赖于 T，见图 11 的 (c) 和 (d) 面板。数值分析表明，在很大的 T 范围内，我们可以放心地忽略这一点。由于 σ_1 的演化在中心处并非无跃迁（见图3左侧面板），b_0 对 T 的依赖关系（见图 11 的 (c) 和 (d) 面板中的蓝色曲线）呈现振荡行为，其中 Tan 扫掠略有优势。对于较小的 T，两种扫掠的表现相近；当 T 较大时，Tan 扫掠则优于 Lin 。与前几节一样，σ_1 相较于 σ_2 的优势虽小，却具有系统性。

我们得出结论，对于能隙具有随机分布的兰道–齐纳问题，采用非线性扫描并使用 σ_1 控制，再次取得了更好的结果；但与线性扫描相比，改进甚微，甚至毫无改进。

6. 结论

我们详细研究了参数涨落对 LZ 跃迁控制的影响，并用能隙的随机分布对其进行建模。我们的目标是寻找受反绝热控制启发的最佳控制脉冲 [10, 19, 21]，，使其能够在平均意义上最好地抑制非绝热跃迁。结果表明，基于实矩阵元的附加控制场，即通过 σ_1 实现的控制场，比标准反绝热 σ_2 结果更好。由于原始哈密顿量中已经包含实矩阵元，这种方法的优势在于无需引入新的矩阵元并由实验者加以控制，

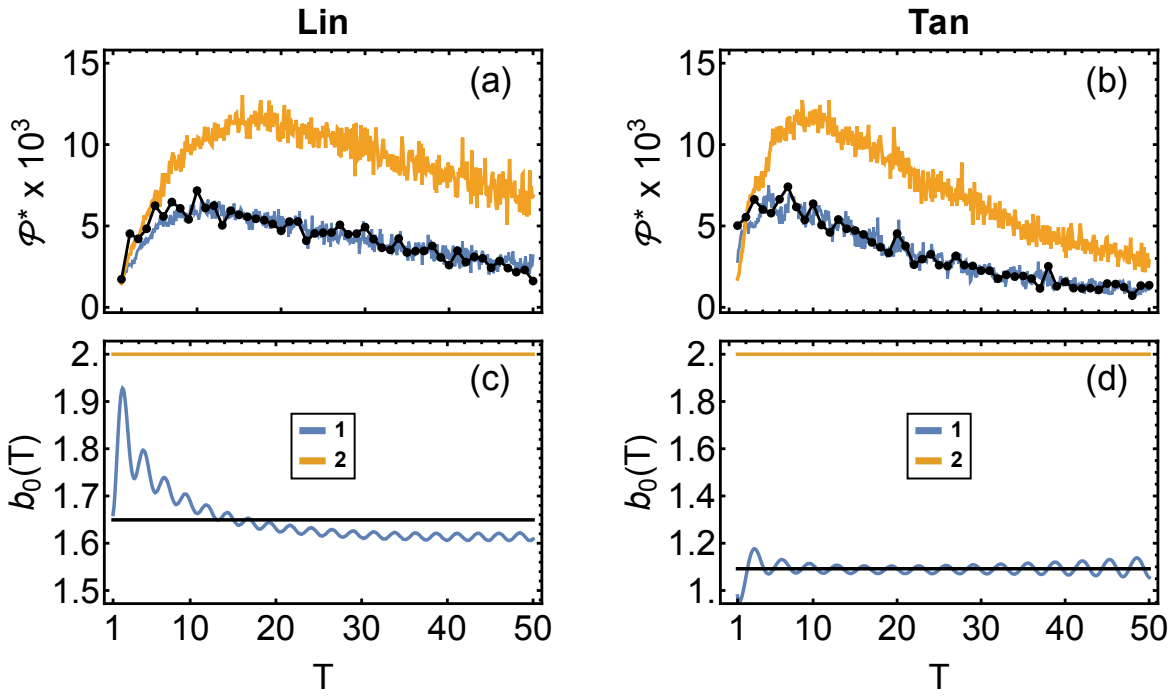

图 11： （上排） $\mathcal{P}^*$ 随协议时间 T变化的情况，能隙分布为$a \sim \mathcal{N}$（μ， $\mu^2/25$），其中 $\mu = 0.5$ 且 $\lambda_0 = 10$，见式（30）。我们采用式（29中给出的扫描函数，右图 (a) 为线性扫描，左图 (b) 为正切扫掠。（下排） b_0 随 T变化的情况。当 σ_1 时，我们观察到振荡；而当 σ_2 时，则没有 T依赖性。颜色对应于控制量 σ_1 （蓝线）和 σ_2 （橙线）。(a) 和 (b) 面板中的黑色点/线对应于平均值 b_0（T），其由 (c) 和 (d) 中的黑线表示。

这与 Petiziol 等人提出有效反绝热协议的动机类似，参见文献 [22, 39]。结合对脉冲形式的优化，与不使用附加控制的情况相比，LZ 协议的速度可以显著提升。

我们的结果大多是在耦合服从正态分布的情况下证明的，但也可推广到参数不确定性的单峰分布。这表明，在系统参数和涨落参数的广泛范围内，我们确实也能控制具有随机参数的系统。这种控制对于任何受先验未知耦合影响的实验都很重要，还可能为利用绝热转移、以抵御能隙参数 [28] 变化的量子技术开辟新途径。它也可能使我们能够控制光镊中两个热原子的自旋碰撞动力学 [31]。类似的实验曾利用核磁共振对两个量子比特进行控制 [57], ，并应用了反绝热控制。由于这类实现很可能都会在某种程度上受到随机参数涨落的影响，这让我们对本文所开发方法的实际应用抱有希望。

具有涨落参数的标准朗道–齐ener模型已得到广泛研究[35, 58–63]。当时间相关尺度远快于系统的时间尺度时，通常在存在 δ-相关白噪声的情况下，平均行为可由林德布拉德动力学描述；而对于有限时间相关，则需要采用非马尔可夫描述 [64]。我们的情形对应于静态极限，此时参数涨落远慢于典型时间尺度。未来的工作将聚焦于具有有限时间相关性的噪声与反绝热场控制之间的相互作用。为此，必须将无跃迁驱动的形式体系扩展到开放量子系统 [65–68] 其中仍有许多问题尚待解决。

致谢

我们感谢 Lucia Deimel、Francesco Petiziol 和 Robert Weiß 对我们的工作和手稿提出意见。MFA 和 SW 感谢 Q-DYNAMO（EU HORIZON-MSCA-2022-SE-01）的资助，项目编号为 101131418；SW 还感谢国家复苏与韧性计划通过 PRIN 2022 项目“量子原子混合物：液滴、拓扑结构与涡旋”提供的资助，项目编号为 20227JNCWW，CUP D53D23002700006；以及通过意大利大学与研究部资助的下一代欧盟第 4 任务第 2 组成部分第 1.3 项投资、2022 年 3 月 15 日第 341 号招标提供的资助，项目编号为 PE0000023，MUR 于 2022 年 10 月 11 日通过第 1564 号特许令批准，CUP D93C22000940001，项目名称为“国家量子科学与技术研究所”（NQSTI）。MFA 还感谢 Aotearoa量子技术提供的支持。该研究计划由 Te Whai Ao—Dodd Walls中心开展，并由新西兰商业、创新与就业部通过国际科学伙伴关系资助，合同编号为 UOO2347。

附录A。

先说明下文所用符号：对于朗道–齐ener系统，式（3），我们将时间演化矩阵记为 $\mathcal{U}_0$，将 $\mathcal{U}_0$ 的矩阵元记为$\mathcal{A}_0$，$\mathcal{B}_0$ 如式（4）所示，相应的跃迁概率记为 $\mathcal{P}_0 = |\mathcal{A}_0|^2$。对于广义哈密顿量，式（12），我们采用类似的符号，并在 $b = 0$ 的情形下保留下标 0，而在 ∞ 的情形下记为 $b \to \infty$。通常省略对参数 φ 的依赖。具体而言，对于以下形式区间内的时间演化

$$[-t_f, 0], \quad [0, t_f], \quad t_f > 0$$

我们使用下标 $\pm$。

附录*A.1.* 朗道–齐*ener*

对于式（3）， $\mathcal{A}_0$的公式 $\mathcal{B}_0$ 可见于 [1, 2]。为方便起见，我们汇总了所有相关方程

$$\mathcal{A}_0(t_f,t_i;a)=\frac{\Gamma(1-\nu)}{\sqrt{2\pi}}\Big[D_\nu(z_f)D_{\nu-1}(-z_i)+D_\nu(-z_f)D_{\nu-1}(z_i)\Big] \tag{A.1}$$

$$\mathcal{B}_0(t_f,t_i;a)=\frac{\Gamma(1-\nu)}{a\sqrt{\pi}}e^{i\frac{\pi}{4}}\Big[-D_\nu(z_f)D_\nu(-z_i)+D_\nu(-z_f)D_\nu(z_i)\Big] \tag{A.2}$$

$$\nu\equiv i\frac{a^2}{2},\quad z_i\equiv\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}t_i,\quad z_f\equiv\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}t_f \tag{A.3}$$

其中 $D_\nu(z)$ 为抛物柱函数 [69]。根据其在大 $|t_i|,|t_f|$ [69–71], 时的渐近展开，领先项为

$$\mathcal{A}_0\sim \mathrm{e}^{-\pi\frac{a^2}{2}+i(\varphi_f-\varphi_i)},\quad \mathcal{B}_0\sim-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-\pi a^2}}e^{i\theta} \tag{A.4}$$

$$\theta(t_f,t_i)\equiv\varphi_i+\varphi_f+\frac{\pi}{4}+\arg\Gamma(1-\nu) \tag{A.5}$$

$$\varphi_i\equiv\tfrac{1}{2}(t_i^2+\tfrac{1}{2}a^2\ln 2t_i^2),\quad \varphi_f\equiv\tfrac{1}{2}(t_f^2+\tfrac{1}{2}a^2\ln 2t_f^2) \tag{A.6}$$

令 $t_f=-t_i$ 代入式 (A.4)，可得朗道–齐ener公式

$$\mathcal{P}_0(a)=|\mathcal{A}_0(a)|^2=\mathrm{e}^{-\pi a^2} \tag{A.7}$$

附录*A.2.* 对称性

式 (3)具有以下性质，这些性质也可推广至 $b\neq 0$、式$i\partial_t|\psi\rangle=H_{\mathrm{GLZ}}|\psi\rangle$ (12),

$$i\partial_t|\psi\rangle=\left[-t\sigma_3+a\sigma_1+\frac{b/2}{b^2t^2+1}\sigma_\varphi\right]|\psi\rangle \tag{A.8}$$

其中 $\sigma_\varphi\equiv\cos\varphi\sigma_1+\sin\varphi\sigma_2$。

(i) 时间演化矩阵 $\mathcal{U}(t,0)$ 和 $\mathcal{U}(0,-t)$ $t>0$存在如下关系。令

$$\tau\equiv-t,\quad |\varphi(\tau)\rangle\equiv\sigma_3|\psi(-\tau)\rangle$$

将 τ 代入方程 (A.8) 得

$$i\partial_\tau|\psi(-\tau)\rangle=\left(-\tau\sigma_3-a\sigma_1-\frac{b/2}{b^2\tau^2+1}\sigma_\varphi\right)|\psi(-\tau)\rangle$$

两边乘以 σ_3，并代入恒等式 $\sigma_3^2=\mathbf{1}$

$$i\partial_\tau(\sigma_3|\psi(-\tau)\rangle)=\sigma_3\left(-\tau\sigma_3-a\sigma_1-\frac{b/2}{b^2\tau^2+1}\sigma_\varphi\right)\sigma_3^2|\psi(-\tau)\rangle$$

代入 $|\varphi(\tau)\rangle$

$$i\partial_\tau |\varphi(\tau)\rangle = \sigma_3\left(-\tau\sigma_3 - a\sigma_1 - \frac{b/2}{b^2\tau^2+1}\sigma_\varphi\right)\sigma_3 |\varphi(\tau)\rangle$$

最后，利用泡利矩阵关系

$$\sigma_3\sigma_\varphi\sigma_3 = -\sigma_\varphi$$

并通过重新标记 $\tau \to t$ 我们得到

$$i\partial_t |\varphi(t)\rangle = \left(-t\sigma_3 + a\sigma_1 + \frac{b/2}{b^2t^2+1}\sigma_\varphi\right)|\varphi(t)\rangle \tag{A.9}$$

即，$i\partial_t|\varphi\rangle = H_{\mathrm{GLZ}}|\varphi\rangle$。最后一个方程在区间 $[0,t]$ 内的解为

$$|\varphi(t)\rangle = \mathcal{U}(t,0)|\varphi(0)\rangle$$

其中 $\mathcal{U}$ 为相应的时间演化矩阵。将结果表示为$|\psi(t)\rangle$

$$|\psi(0)\rangle = \sigma_3\mathcal{U}^\dagger(t,0)\sigma_3|\psi(-t)\rangle$$

与 $|\psi(0)\rangle = \mathcal{U}(0,\ -t)\ |\psi(-t)\rangle$ 比较可得

$$\sigma_3\mathcal{U}^\dagger(t,0)\sigma_3 = \mathcal{U}(0,-t)$$

展开矩阵并采用简记

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{A}_+^*&-\mathcal{B}_+\\\mathcal{B}_+^*&\mathcal{A}_+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}\mathcal{A}_-^*&\mathcal{B}_-\\-\mathcal{B}_-^*&\mathcal{A}_-\end{pmatrix}$$

可得

$$\mathcal{A}_- = \mathcal{A}_+^*, \quad \mathcal{B}_- = \mathcal{B}_+ \tag{A.10}$$

(ii) 兰道–齐纳公式，式（A.7）关于 a 为偶函数：$\mathcal{P}_0(-a) = \mathcal{P}_0(a)$，将式（A.8）推广后可得

$$\mathcal{P}(a,b) = \mathcal{P}(-a,-b) \tag{A.11}$$

证明中，利用 $\sigma_3\sigma_\varphi\sigma_3 = -\sigma_\varphi$

$$H_{\mathrm{GLZ}}(t;a,b) = -t\sigma_3 + a\sigma_1 + \frac{b/2}{b^2t^2+1}\sigma_\varphi = \sigma_3 H_{\mathrm{GLZ}}(t;-a,-b)\sigma_3$$

由此可得

$$\mathcal{U}(t_f,t_i;a,b) = \sigma_3\mathcal{U}(t_f,t_i;-a,-b)\sigma_3$$

随后，对于对角元 $\mathcal{A}\equiv\mathcal{U}_{11}$

$$\mathcal{A}(t_f,t_i;a,b) = \mathcal{A}(t_f,t_i;-a,-b)$$

这证明了方程（A.11），只需直接取极限 $t_f \to +\infty$、$t_i \to -\infty$ 和$\mathcal{P} = |\mathcal{A}|^2$。

（iii）在方程（A.4）中，令 $t_f = -t_i$ 可得 $\mathcal{A}_0 \in \mathbb{R}$。这是（i）以及下述性质的推论：$\mathcal{U}(t_f,\ t_i) = \mathcal{U}(t_f,\ t_0)\,\mathcal{U}(t_0,\ t_i)$。当 $t_f = -t_i = t > 0$且 $t_0 = 0$

$$\mathcal{U}(t,-t) = \mathcal{U}(t,0)\mathcal{U}(0,-t)$$

展开矩阵后，我们得到

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+\mathcal{A}_- - \mathcal{B}_+\mathcal{B}_-^*$$
$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_+\mathcal{B}_- + \mathcal{A}_-^*\mathcal{B}_+$$

结合方程（A.10）

$$\mathcal{A} = |\mathcal{A}_+|^2 - |\mathcal{B}_+|^2 = 2|\mathcal{A}_+|^2 - 1 \in \mathbb{R} \tag{A.12}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_+\mathcal{B}_+ + \mathcal{A}_-^*\mathcal{B}_+ = 2\mathcal{A}_+\mathcal{B}_+ \tag{A.13}$$

附录 B.

附录 *B.1.* 带有狄拉克-δ的朗道–齐*ener*

令 $\boldsymbol{n} = (n_1,\ n_2,\ n_3) \in \mathbb{R}^3$ 和

$$i\partial_t\,|\psi\rangle = \Big[-t\sigma_3 + a\sigma_1 + \delta(t)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\Big]\,|\psi\rangle\,, \quad a \neq 0 \tag{B.1}$$

在对称区间 $[-t_f, t_f]$内对式（B.1）积分，其中 $t_f > 0$，时间演化矩阵变为

$$\mathcal{U}_\infty(t_f,-t_f;a,\boldsymbol{n}) = \mathcal{U}_0(t_f,0;a)\mathcal{K}(\boldsymbol{n})\mathcal{U}_0(0,-t_f;a) \tag{B.2}$$

其中因子为 附录 C.1

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{n}) \equiv \mathrm{e}^{-i\ (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})} = \cos|\boldsymbol{n}| - i\sin|\boldsymbol{n}|\,(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \tag{B.3}$$

由狄拉克 δ（t）和 $\mathcal{U}_0$ 引起，如式（4）所示。展开式中的矩阵 (B.2)

$$\mathcal{A}_\infty = C_0\cos|\boldsymbol{n}| - i\frac{n_3}{|\boldsymbol{n}|}\sin|\boldsymbol{n}|\,C_3 + \sin|\boldsymbol{n}|\left(\frac{n_1}{|\boldsymbol{n}|}C_1 + \frac{n_2}{|\boldsymbol{n}|}C_2\right) \tag{B.4}$$

with $\mathcal{A}_\infty$为 $\mathcal{U}_\infty$和 $C_i(a)$ $i = 0$的对角元，1、2、3由下式给出

$$C_0 = (\mathcal{U}_{0,+}\mathcal{U}_{0,-})_{11} = \mathcal{A}_0 \tag{B.5}$$
$$C_1 = -i(\mathcal{A}_{0,-}\mathcal{B}_{0,+} - \mathcal{A}_{0,+}\mathcal{B}_{0,-}^*) = 2\mathrm{Im}(\mathcal{A}_{0,-}\mathcal{B}_{0,-}) \tag{B.6}$$
$$C_2 = \mathcal{A}_{0,-}\mathcal{B}_{0,+} + \mathcal{A}_{0,+}\mathcal{B}_{0,-}^* = 2\mathrm{Re}(\mathcal{A}_{0,-}\mathcal{B}_{0,-}) \tag{B.7}$$
$$C_3 = \mathcal{A}_{0,+}\mathcal{A}_{0,-} + \mathcal{B}_{0,+}\mathcal{B}_{0,-}^* = \left|\mathcal{A}_{0,+}\right|^2 + \left|\mathcal{B}_{0,+}\right|^2 = 1 \tag{B.8}$$

其中第二个等式由式（A.10）得出。 $\mathcal{A}_0$、 $\mathcal{A}_{0,-}$ 和$\mathcal{B}_{0,-}$ 由式（A.1）和（A.2）给出

$$\mathcal{A}_0 \equiv \mathcal{A}_0(t_f,-t_f;a) = \frac{\Gamma(1-\nu)}{\sqrt{2\pi}}\Big(D_\nu(z_f)D_{\nu-1}(z_f) + D_\nu(-z_f)D_{\nu-1}(-z_f)\Big) \tag{B.9}$$

$$\mathcal{A}_{0,-} \equiv \mathcal{A}_0(0,-t_f;a) = \frac{\Gamma(1-\nu)}{\sqrt{2\pi}}D_\nu(0)\Big(D_{\nu-1}(z_f) + D_{\nu-1}(-z_f)\Big) \tag{B.10}$$

$$\mathcal{B}_{0,-} \equiv \mathcal{B}_0(0,-t_f;a) = \frac{\Gamma(1-\nu)}{a\sqrt{\pi}}e^{i\frac{\pi}{4}}D_\nu(0)\Big(-D_\nu(z_f) + D_\nu(-z_f)\Big) \tag{B.11}$$

在 $t_f \to +\infty$ 的极限下，保留 t_f [69–71] 中的首阶项

$$\mathcal{A}_0 \sim \mathrm{e}^{-\pi a^2/2} \tag{B.12}$$

$$\mathcal{A}_{0,-} \sim D_\nu(0)\mathrm{e}^{-\pi a^2/8 - i\varphi_f} \tag{B.13}$$

$$\mathcal{B}_{0,-} \sim \frac{\Gamma(1-\nu)}{a\sqrt{\pi}}D_\nu(0)(\mathrm{e}^{-3\pi a^2/8} - \mathrm{e}^{\pi a^2/8})e^{i(\varphi_f+\frac{\pi}{4})} \tag{B.14}$$

在方程（B.7）和（B.8）中，仅出现乘积 $\mathcal{A}_{0,-}\mathcal{B}_{0,-}$，其中 t_f 在首阶项中消去

$$\mathcal{A}_{0,-}\mathcal{B}_{0,-} \sim \frac{\Gamma(1-\nu)}{a\sqrt{\pi}}D_\nu^2(0)(\mathrm{e}^{-\pi a^2/2} - 1)e^{i\frac{\pi}{4}} \tag{B.15}$$

代入 $D_\nu(0) = 2^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\pi}/\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)$、[43, 第 19] 章，并经过进一步的代数运算后，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{0,-}\mathcal{B}_{0,-} &\sim \frac{2^\nu\sqrt{\pi}}{a}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma^2\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}(\mathrm{e}^{-\pi a^2/2} - 1)e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{a}(\mathrm{e}^{-\pi a^2/2} - 1)\frac{|\Gamma(1-\nu)|}{|\Gamma(\frac{1-\nu}{2})|^2}e^{i\omega(a)}\end{aligned} \tag{B.16}$$

with

$$\omega(a) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{a^2}{2}\ln 2 + \arg\Gamma(1-\nu) - 2\arg\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \tag{B.17}$$

令 $x \equiv \pi a^2$，利用公式 $\sinh(x) = 2\sinh(\frac{x}{2})\cosh(\frac{x}{2})$ 以及方程（D.2）和（D.3）中的性质，Γ 函数在（B.16）中的比值变为

$$\frac{|\Gamma(1-\nu)|}{|\Gamma(\frac{1-\nu}{2})|^2} = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cosh\frac{x}{2}}{\sqrt{\sinh x}} = \frac{|a|}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\tanh\frac{x}{2}}}$$

由此

$$\mathcal{A}_{0,-}\mathcal{B}_{0,-} \sim \frac{|a|}{2a}\frac{e^{-x}-1}{\sqrt{\tanh\frac{x}{2}}}e^{i\omega(a)} = -\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(a)\sqrt{1-e^{-\pi a^2}}e^{i\omega(a)} \tag{B.18}$$

其中符号函数 $\mathrm{sgn}(a) \equiv \frac{|a|}{a}$。公式 (B.17) 可写成一种等价但更熟悉的形式。根据勒让德倍增公式，公式 (D.1) 中 $z = (1-\nu)/2$

$$\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{-\nu}\Gamma(\tfrac{2-\nu}{2})$$

由此可得

$$\begin{aligned}\arg\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})} &= \arg(2^{-\nu}\Gamma(\tfrac{2-\nu}{2})/\sqrt{\pi}) = \arg(2^{-\nu}\Gamma(\tfrac{2-\nu}{2}))\\ &= \arg 2^{-ia^2/2} + \arg\Gamma(\tfrac{2-\nu}{2})\\ &= -\frac{a^2}{2}\ln 2 + \arg\Gamma(\tfrac{2-\nu}{2})\end{aligned}$$

and

$$\arg\Gamma(1-\nu) - \arg\Gamma(\tfrac{1-\nu}{2}) = -\frac{a^2}{2}\ln 2 + \arg\Gamma(\tfrac{2-\nu}{2})$$

将最后一个方程代入式（B.17），得到 $\omega(a) = \frac{\pi}{2} - \chi(a)$，其中

$$\chi(a) \equiv \frac{\pi}{4} + \arg\Gamma\left(\frac{1-\nu(a)}{2}\right) - \arg\Gamma\left(\frac{2-\nu(a)}{2}\right) \tag{B.19}$$

将上述结果与式（B.4）结合，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\infty(a) = {}& \mathrm{e}^{-\pi a^2/2}\cos|\mathbf{n}| - i\frac{n_3}{|\mathbf{n}|}\sin|\mathbf{n}|\\ & - \mathrm{sgn}(a)\sqrt{1-\mathrm{e}^{-\pi a^2}}\sin|\mathbf{n}|\left[\frac{n_1}{|\mathbf{n}|}\cos\chi(a) + \frac{n_2}{|\mathbf{n}|}\sin\chi(a)\right]\end{aligned} \tag{B.20}$$

对于 $n_3 = 0$，令 $\mathbf{n} = |\mathbf{n}|(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$，式（B.20）化为

$$\mathcal{A}_\infty(a) = \mathrm{e}^{-\pi a^2/2}\cos|\boldsymbol{n}| - \mathrm{sgn}(a)\sqrt{1-\mathrm{e}^{-\pi a^2}}\sin|\boldsymbol{n}|\cos(\chi(a)-\varphi) \tag{B.21}$$

以及对于 $|\mathbf{n}| = \frac{\pi}{2}$

$$\mathcal{A}_\infty(a) = -\mathrm{sgn}(a)\sqrt{1-\mathrm{e}^{-\pi a^2}}\cos(\chi(a)-\varphi) \tag{B.22}$$

$$\mathcal{P}_\infty(a) = (1-\mathcal{P}_0(a))\cos^2(\chi(a)-\varphi) \tag{B.23}$$

其中 $\mathcal{P}_0 = \mathrm{e}^{-\pi a^2}$ 和 $\chi(a)$ 由式（B.19）给出。

附录 C. 其他计算

附录 *C.1.* 不连续矩阵

方程（B.3）的推导

对于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^3$，泡利矩阵满足

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\mathbf{1} + i(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

由此可得

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{2k} = |\boldsymbol{n}|^{2k}\,\mathbf{1}, \quad (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{2k+1} = |\boldsymbol{n}|^{2k+1}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})$$

将指数函数 $\exp(-i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ 的级数按偶次幂和奇次幂拆分，可得

$$\exp(-i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \cos|\boldsymbol{n}|\,\mathbf{1} - i(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin|\boldsymbol{n}|$$

对于 $\boldsymbol{n} = \frac{\pi}{2}(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ 我们得到公式（16）。

附录 *C.2.* 平均朗道–齐*ener*

对于 $a \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$，兰道–齐纳跃迁概率的平均值 $\mathcal{P}_{\mathrm{LZ}}(a) = \mathrm{e}^{-\pi a^2}$，公式（2）可表示为以下积分

$$\langle \mathcal{P}_{\mathrm{LZ}} \rangle(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}a \; \mathrm{e}^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\pi a^2}. \tag{C.1}$$

公式（C.1）是一个标准的高斯积分，可通过配方计算

$$\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2} + \pi a^2 = \frac{1}{2(\frac{\sigma}{\sqrt{1+2\pi\sigma^2}})^2} \left(a - \frac{\mu}{1+2\pi\sigma^2} \right)^2 + \frac{\pi\mu^2}{1+2\pi\sigma^2}.$$

通过平移积分参数 $a \to a + \frac{\mu}{1+2\pi\sigma^2}$ 并利用高斯分布的归一化，$\langle 1 \rangle_a = 1$ 我们得到最终公式

$$\langle \mathcal{P}_{\mathrm{LZ}} \rangle(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{1+2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\pi\mu^2}{1+2\pi\sigma^2} \right). \tag{C.2}$$

对于 $\sigma \to 0$，我们得到兰道–齐纳公式 $\langle \mathcal{P}_{\mathrm{LZ}} \rangle(\mu, 0) = \mathrm{e}^{-\pi\mu^2}$；而对于 $\sigma \to \infty$，首项为 $\langle \mathcal{P}_{\mathrm{LZ}} \rangle(\mu, \sigma) \overset{\sigma\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$，且与 μ 无关。

附录 *C.3.* 与角度无关

在式（12）中，对于 $a = 0$，角度参数 φ 可以提取出来。

定义 $U_\varphi \equiv \exp(i\frac{\varphi}{2}\sigma_3)$。展开矩阵指数，$U_\varphi = \cos\frac{\varphi}{2}\mathbf{1} + i\sin\frac{\varphi}{2}\sigma_3$，并利用泡利矩阵的性质和三角恒等式，可得

$$\begin{aligned}
U_\varphi^\dagger \sigma_1 U_\varphi &= (\cos\tfrac{\varphi}{2} - i\sin\tfrac{\varphi}{2}\sigma_3)\sigma_1(\cos\tfrac{\varphi}{2} + i\sin\tfrac{\varphi}{2}\sigma_3) \\
&= \cos^2\tfrac{\varphi}{2}\sigma_1 + i\sin\tfrac{\varphi}{2}\cos\tfrac{\varphi}{2}[\sigma_1, \sigma_3] + \sin\tfrac{\varphi}{2}\sigma_3\sigma_1\sigma_3 \\
&= (\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2})\sigma_1 + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sigma_2 \\
&= \sigma_1\cos\varphi + \sigma_2\sin\varphi \\
&= \sigma_\varphi\,.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

对于 $a = 0$，式（12）中的哈密顿量变为 $H[\varphi] \equiv -t\sigma_3 + f_{\mathrm{D}}\sigma_\varphi$。结合式（C.3）和关系式 $[U_\varphi, \sigma_3] = 0$，可得

$$H[\varphi] = U_\varphi^\dagger H[0] U_\varphi$$

因此 $\mathcal{U}[\varphi] = U_\varphi^\dagger \mathcal{U}[0] U_\varphi$，其中 $\mathcal{U}$为相应的时间演化矩阵。最后，对于跃迁概率

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}[\varphi] &= \left| \langle + | \mathcal{U}[\varphi] | + \rangle \right|^2 \\
&= \left| \langle + | U_\varphi^\dagger \mathcal{U}[0] U_\varphi | + \rangle \right|^2, \quad U_\varphi |+\rangle = \mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{2}} |+\rangle \\
&= \left| \langle + | \mathcal{U}[0] | + \rangle \right|^2 \\
&= \mathcal{P}[0]
\end{aligned}$$

至此，计算完成。

附录 *C.4.* σ 极限

计算图中两个极限 6。我们采用如下记号

$$\partial_a \mathcal{P}(a,b) \equiv \mathcal{P}'(a,b), \quad \partial_b \mathcal{P}(a,b) \equiv \dot{\mathcal{P}}(a,b)$$

高阶导数同理。

展开 $\langle \mathcal{P} \rangle$ 在式（10）中的定义，可得

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}a \; \mathrm{e}^{-(a-\mu)^2/(2\sigma^2)} \mathcal{P}(a,b)$$

附录 *C.4.1*。 $\sigma \to 0$ 将 $\mathcal{P}(a,\ b)$ 在 $a = \mu$ 附近展开，可得

$$\mathcal{P}(a,b) = \mathcal{P}(\mu,b) + \mathcal{P}'(\mu,b)(a-\mu) + \frac{1}{2}\mathcal{P}''(\mu,b)(a-\mu)^2 + \dots$$

奇次幂 由于奇偶对称性，在取平均后这些项会消失。使用 $\langle (a-\mu)^2 \rangle = \sigma^2$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \mathcal{P}(\mu,b) + \frac{1}{2}\mathcal{P}''(\mu,b)\sigma^2 + \dots$$

在最后一个方程中，我们令 $b = b^*$，式（11），并在 b_0 附近展开

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^* \equiv \langle \mathcal{P}(a,b^*) \rangle &= \mathcal{P}(\mu,b^*) + \frac{1}{2}\mathcal{P}''(\mu,b^*)\sigma^2 + \dots \\
&= \cancel{\left[\mathcal{P}(\mu,b_0) + \dot{\mathcal{P}}(\mu,b_0)(b^*-b_0) \right.} + \left. \frac{1}{2}\ddot{\mathcal{P}}(\mu,b_0)(b^*-b_0)^2 + \dots \right] + \frac{1}{2}\mathcal{P}''(\mu,b_0)\sigma^2 + \dots \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{P}''(\mu,b_0(\mu))\sigma^2 + \frac{1}{2}\ddot{\mathcal{P}}(\mu,b_0(\mu))b_2^2(\mu)\sigma^4 + \dots \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{P}''(\mu,b_0(\mu))\sigma^2 + \dots
\end{aligned}$$

各项 $\mathcal{P}(\mu,\ b_0(\mu))$ $\mathcal{P}(\mu,\ b_0(\mu))$ 根据 $b_0(\mu)$ 的定义消失，见式（10）、（14）以及图 1 （右图）。

附录 *C.4.2*。 $\sigma \to \infty$ 令 $\xi \equiv 1/\sigma$。我们在 0 附近展开 ξ

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{P} \rangle &= \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}a \; \mathrm{e}^{-\xi^2(a-\mu)^2/2} \mathcal{P}(a,b) \\
&= \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}a \left(1 - \frac{1}{2}\xi^2(a-\mu)^2 + \dots \right) \mathcal{P}(a,b)
\end{aligned}$$

假设我们可以在 $\sigma \to \infty$ ($\xi \to 0$) 附近展开 b^*

$$b^*(\mu,\xi) = b_\infty(\mu) + b_{\infty,2}(\mu)\xi^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^* \equiv \langle \mathcal{P}(a,b^*)\rangle &= \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}a\, \left(1-\frac{1}{2}\xi^2(a-\mu)^2+\dots\right)\mathcal{P}(a,b^*(\mu,\xi)) \\ &= \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}a\, \left(1-\frac{1}{2}\xi^2(a-\mu)^2+\dots\right)\mathcal{P}(a,b_\infty(\mu)+\dots) \\ &= \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}a\, \left(1-\frac{1}{2}\xi^2(a-\mu)^2+\dots\right)(\mathcal{P}(a,b_\infty(\mu))+\dots) \\ &= \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}a\, \mathcal{P}(a,b_\infty(\mu))+\dots \\ &\xrightarrow{\xi\to 0} 0\end{aligned}$$

附录 D. 特殊函数

计算中所使用的（欧拉）伽马函数的性质 [43]

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z) \tag{D.1}$$

$$\left|\Gamma(\tfrac{1}{2}+bi)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh\pi b} \tag{D.2}$$

$$\left|\Gamma\left(1+bi\right)\right|^2 = \frac{\pi b}{\sinh\pi b} \tag{D.3}$$

参考文献

[1] Vitanov N V and Garraway B M 1996年《物理评论A》53(6) 4288–4304 URL https://link.aps. org/doi/10.1103/PhysRevA.53.4288[2] Ivakhnenko O V, Shevchenko S N and Nori F 2023 Phys. Rept. 995 1–89[3] Landau L D 1932 Phys. Z. Sowjetunion 2[4]Zener C 1932《伦敦皇家学会会刊》A辑，含数学与物理学论文 137 696–702 ISSN 09501207 URL http://www.jstor. org/stable/96038[5]St¨uckelberg, E C G 1932 Helv. Phys. Acta 5 369 URL https://cir.nii.ac.jp/crid/ 1370289641671472000[6] Majorana E 1932《新物理学》9 43?50 ISSN 1827-6121 URL http://dx.doi.org/10.1007/ BF02960953[7]Born M and Fock V 1928 Zeitschrift f¨ ur Physik 51 165?180 ISSN 1434-601X URL http: //dx.doi.org/10.1007/BF01343193[8] Berry M V 1984《伦敦皇家学会会刊》A辑：数学与物理科学 392 45?57 ISSN 0080-4630 URL http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1984.0023[9] Farhi E, Goldstone J, Gutmann S and Sipser 2000 通过绝热演化实现量子计算（预印本 quant-ph/0001106）URL https://arxiv.org/abs/quant-ph/0001106[10] Gu´ery-Odelin D, Ruschhaupt A, Kiely A, Torrontegui E, Mart´ınez-Garaot S and Muga J G 2019 Rev. Mod. Phys. 91(4) 045001 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.91. 045001[11] del Campo A and Kim K 2019《新物理学杂志》21 050201 URL https://dx.doi.org/ 10.1088/1367-2630/ab1437[12] Dong D and Petersen I 2010《IET控制理论与应用》4(12) 2651–2671 URL https: // digital-library.theiet.org/doi/abs/10.1049/iet-cta.2009.0508

[13] D’Alessandro D 2021 量子控制与动力学导论（Chapman and Hall/CRC）URL http://dx.doi.org/10.1201/9781003051268[14] Koch C P, Boscain U, Calarco T, Dirr G, Filipp S, Glaser S J, Kosloff R, Montangero S, Schulte- Herbr¨uggen T, Sugny D and Wilhelm F K 2022 EPJ Quantum Technology 9 ISSN 2196-0763 URL http://dx.doi.org/10.1140/epjqt/s40507-022-00138-x[15] Poggi P M, De Chiara G, Campbell S and Kiely A 2024《物理评论快报》132(19) 193801 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.132.193801[16] Weidner C A, Reed E A, Monroe J, Sheller B, O’Neil S, Maas E, Jonckheere E A, Langbein F C and Schirmer S G 2024 封闭与开放系统中的鲁棒量子控制：理论与实践（预印本 2401.00294）URL https://arxiv.org/abs/2401.00294 [17] Koch C P 2016《物理学杂志：凝聚态》28 213001 URL https://doi.org/10. 1088/0953-8984/28/21/213001[18] Li J S and Khaneja N 2009《IEEE自动控制汇刊》54 528–536 [19] Demirplak M and Rice S A 2003《物理化学杂志A辑》107 9937–9945（预印本 https://doi.org/10.1021/jp030708a）URL https://doi.org/10.1021/jp030708a[20] Demirplak M and Rice S A 2005《物理化学杂志B辑》109 6838?6844 ISSN 1520-5207 URL http://dx.doi.org/10.1021/jp040647w[21] Berry M V 2009《物理学杂志A：数学与理论》42 365303 URL https: //dx.doi.org/10.1088/1751-8113/42/36/365303[22] Petiziol F, Mintert F and Wimberger S 2024《EPL》145 15001（预印本 2402.04936）[23] Sels D and Polkovnikov A 2017《美国国家科学院院刊》114 E3909– E3916（预印本 https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.1619826114）URL https: // www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.1619826114[24] Zhang Z, Wang T, Xiang L, Jia Z, Duan P, Cai W, Zhan Z, Zong Z, Wu J, Sun L, Yin Y and Guo G 2018《新物理学杂志》20 085001 URL https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/ aad4e7[25] Veps¨al¨ainen A, Danilin S and Paraoanu G S 2019《科学进展》5 eaau5999（预印本 https: // www.science.org/doi/pdf/10.1126/sciadv.aau5999）URL https://www.science.org/ doi/abs/10.1126/sciadv.aau5999[26] Chen S Q and Lu H 2025《物理评论应用》23(2) 024015 URL https://link.aps.org/doi/10. 1103/PhysRevApplied.23.024015[27] Weitz M, Young B C and Chu S 1994《物理评论快报》73(19) 2563–2566 URL https://link. aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.2563[28] Bateman J and Freegarde T 2007《物理评论A》76(1) 013416 URL https://link.aps.org/doi/ 10.1103/PhysRevA.76.013416[29] Wubs M, Saito K, Kohler S, Kayanuma Y and H¨anggi P 2005《新物理学杂志》7 218 URL https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/7/1/218[30] Villazon T, Claeys P W, Polkovnikov A and Chandran A 2021《物理评论B》103(7) 075118 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.103.075118[31] Sompet P, Szigeti S S, Schwartz E, Bradley A S and Andersen M F 2019《自然-通讯》10 ISSN 2041-1723 URL http://dx.doi.org/10.1038/s41467-019-09420-6[32] Wittig C 2005《物理化学杂志B辑》109 8428–8430[33] Chichinin A 2013《物理化学杂志B辑》117 6018–6018[34] Ho L T A and Chibotaru L F 2014《物理化学与化学物理》16(15) 6942–6945[35] Kayanuma Y 1984《日本物理学会志》53 108?117 ISSN 1347-4073 URL http://dx.doi.org/10.1143/JPSJ.53.108[36] Rojo A G 2010 朗道–齐纳问题的矩阵指数解（预印本 1004.2914）URL https://arxiv.org/abs/1004.2914[37] Glasbrenner E P and Schleich W P 2023《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》56 104001[38] Sakurai J J and Napolitano 2020《现代量子力学》第3版（剑桥大学

出版社)[39] Petiziol F, Dive B, Mintert F and Wimberger S 2018 《物理评论A》98(4) 043436 网址 https: //link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.043436[40] Messiah A 1961 《量子力学》第二卷（爱思唯尔科学出版公司）[41] Claeys P W, Pandey M, Sels D and Polkovnikov A 2019 《物理评论快报》123(9) 090602 网址 https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.090602[42]Nielsen M A and Chuang I L 2010 《量子计算与量子信息》：十周年纪念版（剑桥大学出版社）[43] Abramowitz M and Stegun I A 1964 《数学函数手册》：含公式、图表和数学表格，第九版多佛印刷版、第十版美国政府印刷局印刷版（纽约：多佛出版社）[44]Vitanov N V 1999 《物理评论A》59(2) 988–994 网址 https://link.aps.org/doi/10.1103/ PhysRevA.59.988[45] Roland J and Cerf N J 2002 《物理评论A》65(4) 042308 网址 https://link.aps.org/doi/10. 1103/PhysRevA.65.042308[46] Rezakhani A T, Pimachev A K and Lidar D A 2010 《物理评论A》82(5) 052305 网址 https: // link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.82.052305[47] Rezakhani A T, Kuo W J, Hamma A, Lidar D A and Zanardi P 2009 《物理评论快报》103 ISSN 1079-7114 网址 http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.080502[48] Bason M G, Viteau M, Malossi N, Huillery P, Arimondo E, Ciampini D, Fazio R, Giovannetti V, Mannella R and Morsch O 2012 《自然·物理》8 147?152 ISSN 1745-2481 网址 http: //dx.doi.org/10.1038/nphys2170[49] Tomka M, Souza T, Rosenberg S and Polkovnikov A 2016 量子多体系统的测地路径（预印本 1606.05890）网址 https://arxiv.org/abs/1606.05890[50] Petiziol F, Dive B, Carretta S, Mannella R, Mintert F and Wimberger S 2019 《物理评论A》99(4) 042315 网址 https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.99.042315[51] Kolodrubetz M, Sels D, Mehta P and Polkovnikov A 2017 《物理学报告》697 1–87 ISSN 0370-1573 网址 https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157317301989[52]Dengis S, Wimberger and Schlagheck P 2025 《物理评论A》111(3) L031301 网址 https: // link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.111.L031301[53]Dengis S, Wimberger and Schlagheck P 2025 《物理评论A》112(4) 042610 网址 https: //link.aps.org/doi/10.1103/qxqg-qnnq[54] Romanato L, Eshaqi-Sani N, Lepori L, Kirova T, Arimondo E and Wimberger S 2025 《物理评论A》112(5) 052812 网址 https://link.aps.org/doi/10.1103/pst6-r584[55] Vitanov N V and Suominen K A 1999 《物理评论A》59(6) 4580–4588 网址 https://link.aps. org/doi/10.1103/PhysRevA.59.4580[56] Ashhab S, Ilinskaya O A and Shevchenko S N 2022 《物理评论A》106(6) 062613 网址 https: //link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.106.062613[57] Suresh A, Varma V, Batra P and Mahesh T S 2023 《化学物理学杂志》159 024202 ISSN 0021-9606 网址 https://doi.org/10.1063/5.0159448[58] Kayanuma Y 1985 《日本物理学会志》54 2037–2046[59] Ao P and Rammer J 1989 《物理评论快报》62(25) 3004–3007 网址 https://link.aps.org/doi/ 10.1103/PhysRevLett.62.3004[60] Wubs M, Saito K, Kohler S, H¨anggi P and Kayanuma Y 2006 《物理评论快报》97(20) 200404 网址 https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.200404[61] Kayanuma Y and Nakayama H 1998 《物理评论B》57(20) 13099–13112 网址 https://link.aps. org/doi/10.1103/PhysRevB.57.13099[62] Huang Z and Zhao Y 2018 《物理评论A》97(1) 013803 网址 https://link.aps.org/doi/10. 1103/PhysRevA.97.013803[63] Pokrovsky V L and Sinitsyn N A 2003 《物理评论B》67(14) 144303 网址 https://link.aps.org/ doi/10.1103/PhysRevB.67.144303 [64] Kiely A 2021 《欧洲物理快报》134 10001 网址 https://doi.org/10.1209/0295-5075/134/

10001
[65] Vacanti G, FazioR, Montangero S, Palma G M, Paternostro M and Vedral V 2014 《新物理学杂志》**16053017** 网址https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/5/053017[66] ImpensF and Gu´ery-Odelin D 2019 科学报告**9** 4048[67] Alipour S, Chenu A, Rezakhani A T anddel Campo A 2020 《量子》**4** 336 ISSN 2521-327X 网址https://doi.org/10.22331/q-2020-09-28-336[68] Santos A Cand Sarandy M S 2021 《物理评论*A*》**104(6)** 062421 网址https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.104.062421[69] Whittaker ET and Watson G N1996 《现代分析教程》（剑桥大学出版社）ISBN 9780511608759 网址http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511608759[70] Vidunas R and Temme N M 2002（预印本math/0205045）网址https://arxiv.org/abs/math/0205045[71] VitanovN V2010《量子跃迁》（圣克莱门特·奥赫里茨基大学出版社）