arXiv:2601.10664v1 [econ.TH] 15 Jan 2026

风险与无独立性的单调比较静态

COLLIN RAYMOND[⊛] 和 YANGWEI SONG[†]

摘要。我们通过为局部效用函数提出新的条件，将期望效用下广为人知的比较结果扩展到非期望效用模型。我们说明了我们的结果与期望效用下单调比较静态的现有结果，以及非期望效用下风险偏好方面的现有结果，既有相似之处，也有所不同。我们的条件推广了针对特定偏好（包括期望效用）的现有结果，并使我们能够在新的环境和偏好下验证单调比较静态。我们将这些结果应用于偏好或财富可能发生变化的投资组合选择问题，以及预防性储蓄问题。

[⊛] 康奈尔大学，电子邮箱： collinbraymond@gmail.com。

[†] 科罗拉多大学博尔德分校，电子邮箱： yangwei.song@colorado.edu。2026年1月。我们感谢亚利桑那州立大学、计量经济学会亚洲年会、杜克大学、乔治城大学、岭南大学、中西部理论会议、风险、不确定性与决策、SAET、南方经济学会、时间、不确定性与策略第九届会议、芝加哥大学、纳瓦拉大学、宾夕法尼亚大学和罗切斯特大学的研讨会参与者，并感谢 Chris Chambers、David Dillenberger、Jean-Pierre Drugeon、Miles Kimball、Yusufcan Masatlioglu、Daniel Rappoport、Todd Sarver、Ed Schlee 和 Bruno Strulovici 提出的宝贵意见。[1]

1. 引言

理解主体在涉及风险与不确定性的情境中如何应对，是许多经济问题的核心。这类预测使研究者能够利用模型进行反事实思维，并推导出直观且可用数据检验的测试。尤其重要的是，理解模型何时具有单调比较静态（MCS）——即经济主体的行为总会随着参数的定向变化而以相同方向作出响应。这使得预测不受行为和参数具体水平的影响。例如，一个经典问题是：较富裕的个人是否会将更多资金投资于风险较高的资产（Arrow [1965], Pratt [1964]）。

尽管经济学中对比较静态的正式研究可追溯至Samuelson[1948], ，但直到Milgrom 和 Shannon [1994] 才在经济学中将确定性条件下的一般结果形式化（尽管此前已有相关先驱工作，例如Topkis [1978]）；而直到Athey [2002]，这些结果才被系统地扩展到风险条件下的行为。Athey[2002], 将许多彼此分散的结果整合起来，提供了统一的分析框架，阐明在期望效用（EU）框架下，如何将关于原始要素的假设（例如结果分布和代理人的伯努利效用函数）加以汇总，从而得出 MCS 预测。

尽管期望效用（EU）方法具有易处理性，许多研究者仍认识到，它会产生各种不切实际的预测，从阿莱悖论（Allais[1979]）到小赌注风险厌恶（Rabin [2000]）皆是如此。对此，研究者提出了大量模型，从保留无差异曲线线性但允许其不再平行的模型（Dekel [1986], Gul [1991], Chew [1983]），到放弃线性假设的模型（Chew 等人 [1991], Quiggin [2012], Kőszegi和Rabin [2007]）。这些模型的优势在于能够更好地解释观测到的、偏离 EU 预测的行为，但它们往往较难处理。因此，在许多标准经济环境中，它们会得出什么预测往往更难看清。研究者通常必须针对每个具体模型采用新的分析方法。

本文提出了一套工具，将期望效用框架下广为人知的 MCS 结果扩展到违背期望效用基本原则的模型中。本文提供了一种统一的方法，既能形成直觉，也能推导形式化结果，将底层原始要素（如收益、效用和分布）的结构与经济主体在广泛的非期望效用模型（即违背独立性公理的模型）中的行为预测联系起来。具体而言，只要研究者

知道非期望效用偏好的局部效用（Machina [1982a]），便可推导出许多标准的 MCS 陈述——而所有广泛使用的非期望效用模型，其局部效用都是众所周知的。我们的方法有一项重要限制：与现有关于风险的非期望效用研究一样，偏好必须足够“光滑”（例如，盖托可微）。

我们的贡献有两方面。首先，我们给出了可推广并扩展现有非期望效用模型 MCS 结果的结论，并据此为新的环境（如预防性储蓄）和偏好（如二次效用）提供了新的 MCS 结果。其次，我们说明了非期望效用偏好的 MCS 结果与期望效用下已有的 MCS 结果以及非期望效用风险偏好的已知结果之间的关系。我们明确指出，对于熟悉这两类文献的读者而言，非期望效用的 MCS 条件乍看之下为何以及如何显得出人意料。这是因为我们的条件要求考虑非期望效用模型中结果之间固有的非可分性。

无论在实质内容还是形式上，我们的方法都扩展了 Athey [2002], 的研究，并借鉴了她论文中的许多技术工具。我们的主要结果表明，可以通过两种自然方式扩展她著名的 MCS 条件，分别由命题 6.1/6.2和命题 6.3所概括。她对由伯努利效用函数和结果分布构成的原始要素作出了一些假设（例如对数超模性或单交叉）。由于非期望效用模型不存在伯努利效用函数，我们以局部效用取而代之。局部效用函数由 Machina [1982a]引入。他指出，通过考察非期望效用泛函在局部线性（关于概率）的近似——本质上即其方向导数——可以将许多关于期望效用下风险厌恶的已知结果推广至非期望效用框架。他（以及 Cerreia-Vioglio 等人 [2017]的后续扩展）表明，这些近似在确定高阶风险偏好方面发挥着与伯努利效用函数相同的作用。

从期望效用转向非期望效用模型，会给 MCS 结果带来两项关键变化；相较于现有关于非期望效用模型中风险偏好的研究，我们还需要开发新的工具。首先，我们将非期望效用的 MCS 问题充分推广，使其与期望效用方法之间的相似之处清晰可见。这使我们能够指出，与期望效用文献中的结果类似的结论，通常需要对原始要素（具体而言，即效用函数）增加额外假设。这并不意外，因为非期望效用模型对允许行为集合的限制较弱。形式上，这是因为我们需要确保局部效用函数上的条件在积分后仍然成立。为此，我们需要在现有研究的基础上Quah 和 Strulovici [2012]，并说明如何将Athey [2002] 的条件推广至非期望效用函数。

其次，我们表明，将这些条件应用于具体的非期望效用泛函，可能会导出看起来与期望效用下条件截然不同的条件。由于局部效用函数是一个关于概率的非线性函数的导数（偏好为期望效用时除外），它们既取决于导数的方向，也取决于导数所在的位置。期望效用下的 MCS 条件考察伯努利效用随结果变化的形状（因为伯努利效用，即期望效用偏好的局部效用，只取决于方向，而与所考虑的彩票无关）。但在非期望效用下，我们的条件共同限制了随着定义局部效用的导数方向和位置变化，局部效用如何改变。这产生了一种相互作用，而在Athey [2002] 和Machina[1982a] （及其后续研究）中都不存在这种相互作用。后者表明，风险偏好只取决于局部效用随导数方向而非位置的变化（即固定导数取值的位置，再考察方向变化时会发生什么）。[1]

在第3节中，我们介绍在风险与不确定性下研究非期望效用偏好及 MCS 所需的基本符号。接着，第4 节给出一些例子，进一步阐明为何现有的 MCS 和局部效用方法不足以解决问题。我们以讨论Machina [1982a], 为基础，首先探讨在期望效用框架下，绝对风险厌恶递减的标准刻画为何无法推广至非期望效用情形。随后，我们进行类似的分析，但转而说明预防性储蓄的标准结果，Kimball [1991], 为何无法推广至非期望效用情形。具体而言，我们表明，若从 Machina 的局部效用方法出发，直接套用期望效用框架下 MCS 的条件，在这两种情况下都会得出错误结论。事实上，这种方法可能过于严格，也可能过于宽松。对于绝对风险厌恶递减，我们的条件比期望效用条件的朴素类比更强（即蕴含后者），但反向蕴含不成立。相比之下，对于预防性储蓄，期望效用条件的朴素类比蕴含我们的条件，但反向蕴含同样不成立。

接下来，我们将在第5节概述一般的 MCS 问题，并讨论解决该问题的方法（着重说明我们关注的是行动和参数均为标量的情形）。在我们的表述中，我们强调：（i）我们的条件适用于局部效用，而非伯努利效用；（ii）相较于Athey [2002] ，由于需要在多个聚合阶段中保持这些条件不变，因此生成 MCS 所需的条件更强；以及（iii）为什么我们需要考虑不同的子情形（例如，参数影响分布而行动影响收益，或反之），同时在

[1]事实上，Machina [1982a， 1989] 意识到只关注方向的变化而不考虑位置是有局限性的，但没有提出解决这一问题的一般方法。

对于期望效用，它们可以用统一的方式处理。我们的目标是从足够一般的视角来研究这一问题，从而能够与期望效用的现有研究进行类比。

在第6节中，我们讨论一个主要情形：行动可以改变代理人在各状态上所面临的分布，而外生参数则要么改变给定状态下的货币收益，要么改变局部效用函数（例如，通过改变风险态度）。利用我们的两个洞见，我们为 MCS 提供充分条件。我们聚焦于这一环境，是因为我们认为它们得出的结果具有最广泛的适用性。我们给出三组结果。第一组结果与许多应用相关，给出了充分条件，使得关于行动和参数的总体效用的导数关于参数具有单交叉性。在总体效用的可微性和形状满足某些附加假设的情况下，这足以保证 MCS 成立。我们的第二个结果推导出关于行动—参数对的效用具有二阶单交叉性的条件。这一结果是 Athey [2002] 第三节中相关结果的自然类比；但还需考虑上述额外因素。它们必须考虑到局部效用同时刻画导数的方向和导数的位置，还必须考虑到存在额外的聚合层次。我们的最后一个结果对原始要素施加更强的假设，从而使关于行动和参数的总体效用具有超模性。正如我们在第8节中所讨论的，我们的技术还可应用于其他环境和条件。

在确立了一般性结果后，我们将在第7节将其应用于典型的经济情境，包括风险资产投资和预防性储蓄。我们通过三个具体例子展示三项关键见解。首先，我们表明，我们的方法具有足够的普适性，可以涵盖Machina [1982a]所讨论的标准比较静态问题：偏好（具体而言，风险厌恶）发生变化时，对风险资产的投资会如何变化？运用我们的一般框架，可以得出Machina [1982a], 的结果，进而推出期望效用结果。第二个例子表明，我们的分析工具使我们能够超越文献中的标准结果。我们重新考察第4节中的一个例子，给出财富对风险厌恶影响的结果——这是一个Machina [1982a]明确指出其方法无法处理的比较静态问题。利用我们的 MCS，我们构造了适当的、依赖于财富的风险厌恶概念，并证明这足以推出：随着财富增加，决策者会增加对风险资产的投资。最后，我们将方法应用于第4节中的另一个动机示例：预防性储蓄。现有的一般性结果中尚无先例涉及这一例子。我们展示了如何运用我们的条件，推导出期望效用偏好以及特定非期望效用偏好（例如秩依赖偏好和Kreps 和 Porteus [1978]的偏好）的既有结果。

我们将在第8 节总结全文，并讨论在线附录中介绍的扩展内容；附录9和10 则汇集了本文正文的证明和其他形式化结果。

在线附录的第 A 节考察第 6节的镜像情形：行动影响主体的效用，而参数影响状态分布（其中包含 Machina [1989]的方法）。我们给出一般性结果及其应用。第 B节讨论如何将我们的结果扩展到具有主观不确定性的环境中——具体而言，是模糊厌恶模型。我们给出针对特定模糊厌恶模型的结果及其应用。

2. 文献综述

关于无不确定性情形以及期望效用下存在不确定性的情形中的 MCS，已有大量文献。对我们的研究（以及许多其他研究）而言，关键的参考文献是 Milgrom 和 Shannon [1994], Athey [2002], Quah 和 Strulovici [2009]和 Quah 和 Strulovici [2012]的开创性论文。当然，我们的相对贡献在于将分析扩展到期望效用之外。

同样，关于非期望效用偏好的文献浩如烟海，但期望效用框架之外的比较静态研究则少得多。现有研究通常聚焦于特定经济环境和特定函数形式。 Schlee [1994] 说明了期望效用下比较静态的标准预测并不适用于非期望效用情形。 Ormiston 和 Schlee [1999] 和 Schlee [1995] 针对若干非期望效用泛函，推导出特定类型的比较静态结果。 Quiggin [1991] 在秩依赖效用假设下，为一类特定问题给出了比较静态结果；Haliassos 和 Hassapis [2001] 以及 Chateauneuf 等人 [2016]也得出了类似结果。

Machina [1989] 在一个强假设下，为 Fréchet 可微函数推导出更一般的比较静态结论：行动的变化不会影响结果的分布，也不会影响结果的货币价值，而只会直接影响局部效用函数。由此，他实现了其所谓的“概率分布与控制变量的函数分离”。在这一限制下，他可以借助局部效用函数的偏导数推导比较静态结论。 Chew和Nishimura[1992]将 Machina [1989]的研究推广到了盖托可微函数。 Neilson [1995] 讨论了非期望效用下的比较静态问题同时具有线性效应和非线性效应。他指出，Machina [1989]的分析聚焦于参数和行动变化产生的“线性”效应，并表明，对于某些限制性较强的偏好类别（例如中间性

偏好），非线性项会消失。当然，这类分析无论是在其能够处理的问题范围上，还是在其适用的非期望效用偏好类型上，都存在局限。我们的目标是明确纳入这些非线性项，并说明如何仍然能够获得易于处理的比较静态结果。因此，我们的结果更为一般，因为我们不要求这种函数分离。

采用不同的方法，Dziewulski 和 Quah [2024] 分别在主体的偏好由最大最小偏好（Gilboa 和 Schmei- dler [1989]）以及变分偏好（Maccheroni 等人 [2006]表示时，确立了 MCS 成立的充分条件。我们通过推导适用于更广泛的模糊厌恶偏好的充分条件，补充了他们的分析，其中包括 Klibanoff 等人 [2005]提出的平滑模糊偏好。在模糊性下的投资组合选择这一背景中，Gollier [2011]在平滑模糊性框架下分析了不确定资产的需求如何随模糊厌恶程度变化。Cherbonnier 和 Gollier [2015] 考察了平滑模糊性模型和 α最大最小模型，并给出了风险资产需求随财富增加而上升的条件。我们可以在一般框架内推导出他们关于平滑模糊性模型的结果。Cerreia-Vioglio 等人 [2022] 研究了财富相关的绝对模糊态度如何影响不同模糊模型下的投资组合选择。由于他们采用的框架和假设各不相同，其结果无法与我们的结果直接比较。

3. 框架

3.1. **定义：风险偏好。** 我们首先介绍一些支撑我们方法的技术性定义。我们直接沿用由 Machina [1982a]开创的非期望效用分析传统。我们的方法植根于经济分析的一种传统，即为足够“平滑”的非期望效用泛函推导结果。

我们首先介绍偏好的定义域。令 $\Delta(Z)$ 表示定义在紧区间 $Z = [z, z]$ 上的所有累积分布函数（cdf） F 的集合。假设个体对 $\Delta(Z)$ 的偏好排序是完备且具有传递性的，并可由偏好泛函 $V : \Delta(Z) \to \mathbb{R}$ 表示。

为便于解释，假设 Z 中的元素是货币结果（尽管这并非必要），因此我们关注货币彩票。除非另有说明，本文所考虑的所有分布均来自集合 $\Delta(Z)$。在 $\Delta(Z)$ 上赋予弱收敛拓扑；若且唯若在 F_n 的每个连续点 Z 处， Z (Δ) Z(Δ)，则称序列 $\{F_n\}$ 收敛于 F，并且

只有在 $F_n(z) \to F(z)$ 时，才在 F 的每个连续点 z 处成立。对于所有连续的 u^*，期望效用泛函 $\int u^*(z)dF(z)$ 均连续；该拓扑是满足这一性质的最弱拓扑。

给定两个累积分布函数 F 和 G，若对于所有 $z \in Z$，$F(z) \leq G(z)$，则称 F 一阶随机占优（FOSD）G，记作$F \succsim_{FOSD} G$。除非另有说明，本文中分布集合 $\Delta(Z)$ 上的序为 $\succsim_{FOSD}$。

定义 1. 若存在一个连续函数 $u(\cdot, F) : Z \to \mathrm{R}$，使得对于每个 $F \in \Delta(Z)$，都有对应的函数 $V : \Delta(Z) \to \mathrm{R}$，且对每个$G \in \Delta(Z)$，则称该函数为**Fréchet 可微**，

$$V(G) - V(F) = \int u(z, F)d(G - F) + o(\| G - F \|),$$

其中 $o(\cdot)$表示一个在零点取值为零，且其阶高于自变量的函数。

这表明，从 F到 G的微分变化会使V的值改变 $\int u(z, F)d(G–F)$，也就是说，改变了相对于 F和 G的 $u(z, F)$的期望值。换言之，在对初始分布 F的微分变动进行排序时，个体的行为恰如一位期望效用最大化者，其**局部效用函数** 为 $u(z, F)$。本文假设 $u(z, F)$足够光滑，以确保所需导数存在。

接下来，我们介绍 V 的两个较弱的可微性概念。

定义 2。 如果对于每个 $F \in \Delta(Z)$，都存在一个连续函数 $u(\cdot, F) : Z \to \mathrm{R}$，使得对于任意满足 $G(\cdot, 0) = F$ 的光滑路径 $G(\cdot, t)$，则称函数 $V : \Delta(Z) \to \mathrm{R}$ 是 **Hadamard 可微**的，

$$V(G(\cdot, t)) - V(F) = t \int u(z, F)dG_t(z, 0) + o(t),$$

其中，$G_t(z, t)$ 是关于 t 的导数。

定义 3。 如果对于每个 $F \in \Delta(Z)$，都存在一个连续函数 $u(\cdot, F) : Z \to \mathrm{R}$，使得对于任意 $G \in \Delta(Z)$，则称函数 $V : \Delta(Z) \to \mathrm{R}$ 是 **盖托可微**的，

$$V((1 - t)F + tG) - V(F) = t \int u(z, F)d(G - F) + o(t).$$

在有限维空间中，Hadamard 可微性等价于 Fréchet可微，而在无限维空间中则更弱。它强于 Gâteaux 可微性。它是满足链式法则性质的最弱微分定义（例如，见 Nashed [1971, 第 124]）。局部效用函数 $u(\cdot, F)$ 在 Fréchet、Hadamard 可微性下一致，

并且在 Gâteaux 可微性成立时也一致。尽管文献中使用的大多数偏好都满足 Hadamard 可微性，但并非全部如此。例如，并非所有中间偏好都具有 Hadamard 可微性，甚至也并非都具有 Gâteaux 可微性。

期望效用泛函 $V(F) = \int u^*(z)dF(z)$，其中 u^* 是伯努利效用函数，具有局部效用函数 $u(z, F) = u^*(z)$，对所有 $F \in \Delta(Z)$ 均成立。

另一类非期望效用偏好是**秩依期望效用（RDU）**(Quiggin[1982], Yaari [1987])，其泛函形式为

$$V(F) = \int u^*(z)d\omega(F(z)), \tag{1}$$

其中 $\omega : [0,1] \to [0,1]$ 是连续、严格递增且满射的，而效用函数u^* 连续且严格递增。Chew 等人 [1987]证明，RDU 不 Fréchet 可微，而Chew和Nishimura [1992] 证明，若ω 可微且导数 ω_1 有界，则 RDU 是 Hadamard 可微的。[2] 相应的局部效用函数为

$$u(z, F) = \int_{\underline{z}}^{z} \omega_1(F(t))du^*(t). \tag{2}$$

另一类非期望效用偏好源自Machina [1984]研究的诱导偏好。他指出，即使代理人是期望效用最大化者，她对时间性风险前景的选择也未必能表示为期望效用最大化。为说明这一点，考虑诱导偏好泛函

$$V(F) := \max_{a \in A} \int \varphi(z, a)\, dF(z),$$

其中 A 是一个紧集。请注意，由 V 表示的偏好在概率上是非线性的。 Machina [1984, 定理 5] 表明，在相当一般的条件下，诱导偏好泛函 V 是 Fréchet 可微的，其局部效用为 $u(z, F) = \varphi\big(z, a^*(F)\big)$，其中 $a^*(F)$ 是唯一的最大化者。[3]

3.2. 定义：比较静态。接下来，我们将介绍格理论中的一些概念，以便讨论现代比较静态的概念。给定一个偏序集（$X, \geq$），交（$\wedge$）和并（$\vee$）运算定义如下：$x \wedge y := \sup\{z | z \leq$

[2]参见 Chew和Nishimura [1992]，了解其他一些非期望效用偏好类别，以及相应的 Hadamard 和 Gâteaux 可微性条件。[3]Sarver 中的动态混合厌恶偏好 [2018] 也为第二期偏好提供了诱导偏好表示。因此，只要这一诱导泛函可微，我们论文中的分析便可直接应用。

$x, z \le y\}$ 和 $x \vee y := \inf\{z | z \ge x, z \ge y\}$。给定一个具有通常乘积序的集合 $X \subseteq \mathbf{R}^n$，交和并运算为

$$x \wedge y = (\min(x_1, y_1), ..., \min(x_n, y_n)) \quad \text{and} \quad x \vee y = (\max(x_1, y_1), ..., \max(x_n, y_n)).$$

偏序集 $(X, \ge)$ 若对交与并运算封闭，则称为格。

定义 4. 设 $(X, \ge)$ 为格。若函数 $h : X \to \mathbf{R}$ 满足 $h(x \vee y) + h(x \wedge y) \ge h(x) + h(y)$ 对所有 $x, y \in X$ 均成立，则称其为**超模**。若函数 h 非负，且 $h(x \vee y)h(x \wedge y) \ge h(x)h(y)$ 对所有 $x, y \in X$ 均成立，则称其为**对数超模（对数超模）**。

我们将这两个定义应用于 $X \subseteq \mathbf{R}^2$。对任意 $\hat{x}_1 > x_1$， h 的超模性要求：增加第一个自变量所带来的增量收益（定义为 $h(\hat{x}_1, x_2) - h(x_1, x_2)$）会随着第二个自变量 x_2 的递增而增加；正函数 h 的对数超模性要求：增加第一个自变量所带来的相对收益（定义为 $\frac{h(\hat{x}_1, x_2)}{h(x_1, x_2)}$）会随着第二个自变量 x_2 递增而增加。

接下来 我们引入一个弱于超模性和对数超模的条件 .

定义 5. 设 $(S, \ge)$ 是一个偏序集。函数 $g : S \to \mathbf{R}$ 在 s 中满足**单交叉（SC1）**，当且仅当对所有 $\hat{s} > s$,

$$g(s) \ge (>)\ 0 \quad \Rightarrow \quad g(\hat{s}) \ge (>)\ 0.$$

SC1 的定义表明，随着 s 增大， $g(s)$ 至多从下方穿过零一次。

定义 6. 设 $(S, \ge)$ 和 $(X, \ge)$ 是两个偏序集。函数 $h : X \times S \to \mathbf{R}$ 在 $(x; s)$ 中满足**双变量单交叉（SC2）**，当且仅当对于所有 $\hat{x} > x$， $g(s) := h(\hat{x}, s) - h(x, s)$ 在 s 中满足 SC1。

下一个条件，区间支配序由Quah 和 Strulovici [2009],引入，弱于单交叉。

定义 7. 设 $S, X \subseteq \mathbb{R}$。函数 $h : X \times S \to \mathbb{R}$ 满足 **区间支配序**于 $(x; s)$ **，当且仅当**

$$h(\hat{x}, s) - h(x, s) \ge (>)\ 0 \quad \Rightarrow \quad h(\hat{x}, \hat{s}) - h(x, \hat{s}) \ge (>)\ 0$$

对于所有满足 $\hat{x}$ 和 x 的情况，$\hat{x} > x$ 和 $h(\hat{x}, s) \ge h(x', s)$ 对所有 $x' \in X$ 和 $x \le x' \le \hat{x}$以及所有 $\hat{s} > s$均成立。

最后，我们规定集合之间的一种序。

定义 8。 对于两个集合 A，$B \subseteq \mathbb{R}$，若对任意$a \in A$ 和 $b \in B$ 满足 $a \geq b$，我们也有 $b \in A$ 和 $a \in B$，则称 $A \leq B$ **它们满足强集合序** 。

4. 动机示例

有了上述形式化准备，我们现在给出两个示例，说明简单地修改现有的、针对期望效用下 MCS 所开发的方法，并使其直接类比于Machina [1982a], 开创的“局部”效用分析，是行不通的。我们将这两个示例视为说明性示例，因为Machina [1982a] 和Neilson [1995] 都指出，Machina [1982a] 中发展的分析通常无法推广到 MCS 问题。尽管如此，据我们所知，预防性储蓄相关的具体问题此前尚未在文献中讨论过。

回顾一下，Machina [1982a], 以及Cerreia-Vioglio 等人[2017], 近期的一项扩展表明，可以运用局部效用分析，将传统的风险偏好概念（包括高阶概念）应用于非期望效用模型。具体而言，正如他及后续论文所示，可以考察非期望效用泛函的 Gâteaux 导数，也就是局部效用，并判断这些局部效用是否具有类似于伯努利效用所要求的性质。具体来说，他证明，可以对局部效用函数关于其第一个自变量的偏导数施加条件，而这些条件等价于通常对伯努利效用的导数所施加的条件。因此，对于风险厌恶，要考察局部效用泛函是否为凹；对于审慎性，要考察局部效用的边际效用是否为凸，诸如此类。

这意味着，要进行 MCS 分析，我们应考察在期望效用框架下对伯努利效用函数施加的条件，并将相同条件施加于非期望效用偏好的局部效用函数的偏导数。

遗憾的是，这种做法并不正确。我们的例子表明，对局部效用函数施加与对伯努利效用函数相对应的条件，对于所期望的比较静态结果成立而言，既非必要也非充分。第一个例子给出了一种情形：标准的期望效用条件可由 MCS 推出（但 MCS 不能由该条件推出）；第二个例子则展示了相反的情形。这说明，我们需要开发新的分析工具来研究非期望效用情形，而不能只是放宽或加强现有条件。

4.1. **绝对风险厌恶递减。**

我们的第一个例子借鉴了以下见解：Machina [1982a]。考虑标准的投资组合选择问题。一位财富为 w

必须决定如何投资。她有两种选择：一种是收益为 $r > 0$ 的安全资产，另一种是收益为非负随机变量 s的风险资产。如果她购买 x 的风险资产，并将剩余的 $w - x$ 投资于安全资产，最终将拥有 $xs + (w - x)r$。

我们希望了解，在财富增加时，最优风险资产投资何时会随之增加。回想一下，在期望效用框架下，这个问题相当于询问 Arrow-Pratt 风险厌恶度量 $-\frac{u_{11}^*(z)}{u_1^*(z)}$ 是否随 z递减，其中 u^* 是伯努利效用函数——换言之，主体是否表现出绝对风险厌恶递减（DARA）。

为简化这个例子，假设代理人的偏好泛函是光滑的，即它们在彩票上是Fréchet 可微的，并且目标函数是拟凹的，且关于选择变量可微 x。 Machina [1982a，第299]页将这类主体称为**多样化者**。

如前所述，给定局部效用函数 $u(z, F)$，Machina [1982a] 表明，对于非期望效用泛函，$-\frac{u_{11}(z,F)}{u_1(z,F)}$ 是衡量风险厌恶的恰当指标，因为它刻画了对均值保持扩散的厌恶。因此，非期望效用框架下绝对风险厌恶递减的显然对应概念是 $-\frac{u_{11}(z,F)}{u_1(z,F)}$ 随 z递减。事实上，Machina [1982a] 和 Machina [1989]指出，这一指标无法回答最优投资 x 是否随财富增加 w这一问题。

我们通过一个利用特定非期望效用函数——二次效用——的例子，阐明这一差距。Machina [1982a] 讨论了一类特定的二次偏好：

$$V(F) = \int R(z)dF(z) + \frac{1}{2}[\int S(z)dF(z)]^2, \tag{3}$$

其中 R a 且 S 绝对连续。[4] 考虑以下参数化 :

$$R(z) = \int_0^z e^{-\alpha s}ds \quad \text{and} \quad S(z) = \int_0^z e^{-\beta s}ds, \tag{4}$$

其中 $z \in [0, \bar{z}]$和 α， $\beta \in \mathbb{R}_{++}$。 Machina [1982a] 证明 V是 Fréchet 可微的，其局部效用函数为

$$u(z, F) = R(z) + S(z)[\int S(t)dF(t)] = R(z) + S(z)\mathbb{E}_F S(t).$$

鉴于 $-\frac{R''(z)}{R'(z)} = \alpha$ 以及 $-\frac{S''(z)}{S'(z)} = \beta$，通过直接计算可得，对于任意 α 和 β，$-\frac{u_{11}}{(z,F)\,u_1(z,F)}$随 z 增加而减少。

[4]例如，Machina [1982a], Chew 等人 [1991], 和Corrao 等人[2022]对二次偏好进行了研究。

然而，并非对于任意 α 和 β，具有这些偏好的代理人都会在 w增加时相应地增加 x。事实上，我们在第 7.2 节证明，当 $\alpha \geq \beta$ 时，这一 MCS 将成立。因此，MCS 的实际条件意味着标准期望效用条件的直接扩展（即，只要 MCS 成立，就有 $-\frac{u_{11}(z,F)}{u_1(z,F)}$ 随 z 增加而减少），但反之则不成立。

4.2. 预防性储蓄。 我们的第二个例子讨论预防性储蓄。考虑一位消费者正在求解以下问题：

$$\max_{y\in[0,w]} V(\delta_{w-y}) + V(F_{y+\tilde{\varepsilon}}),$$

其中，w 是初始财富，y 是储蓄，δ_{w-y} 是将单位质量赋予点 $w-y$的退化分布，$\tilde{\varepsilon}$ 是零均值风险，$F_{y+\tilde{\varepsilon}}$ 是随机变量 $y+\tilde{\varepsilon}$的分布。如果在第二期收入中引入额外风险 $\tilde{\varepsilon}$ 后，最优储蓄 y增加，则称个人具有正的预防性储蓄动机。

Kimball [1990] 证明，在期望效用假设和标准光滑性假设下，伯努利效用函数的三阶导数为正 $u_{111}^* \geq 0$（且 $u_{11}^* \leq 0$）等价于具有正的预防性储蓄动机。

回想一下，若偏好泛函 V具有下行风险厌恶性，则每当彩票F在三阶随机意义上支配彩票 G时，我们有 $V(F) \geq V(G)$。众所周知，在期望效用假设和充分可微的条件下，审慎性——即 $u_{111}^* \geq 0$ ——等价于下行风险厌恶性（Menezes等人 [1980]）。因此，V 当且仅当具有正的预防性储蓄动机时，才具有下行风险厌恶性。因此，人们或许会自然地认为，即使在非期望效用情形下，检验审慎性也是判断预防性储蓄动机的简单方法；也就是说，检查是否满足 $u_{111}(z,\ F) \geq 0$。

这是不正确的。我们使用 RDU（1）提供一个例子，并结合文献中的两个已有结果。Cerreia-Vioglio 等人 [2017] 表明，一个 RDU 泛函表现出下行风险厌恶，当且仅当它是期望效用；换言之，在 RDU 下，只有当概率变换函数 ω 是恒等函数时，这一结论才成立，而这就退化为期望效用（Cerreia-Vioglio 等人 [2017, 推论 1]）。

然而，也可以很容易地证明，在相对温和的条件下，秩依期望效用（RDU）可以表现出正向的预防性储蓄动机。例如，Chateauneuf 等人 [2016]证明，只要货币效用是凹的，且其边际效用为凸，并且概率变换函数 ω 是凹的，那么代理人就会表现出正向的

预防性储蓄动机。换言之，$\omega_{11} \leq 0$, $u^*_{11} \leq 0$ 和 $u^*_{111} \geq 0$ 刻画了表现出正向预防性储蓄动机的秩依赖偏好。下面的命题对此作了概述。

命题4.1。在期望效用下，当且仅当个体具有下行风险厌恶时，他们才表现出正的预防性储蓄动机。相比之下，在秩依期望效用下，下行风险厌恶意味着正的预防性储蓄动机，但反之则不成立。

因此，在秩依期望效用下，检验下行风险厌恶会导致我们过于频繁地断言偏好不具有正的预防性储蓄动机——采用基于期望效用的条件并不能刻画预防性储蓄动机。相反，该条件过强：许多偏好并不满足下行风险厌恶，却仍然表现出预防性储蓄动机。

5. 单调比较静态问题

结合这些例子，我们现在定义单调比较静态问题。设 $\Theta \subseteq \mathrm{R}$ 和 $X \subseteq \mathrm{R}$。代理人的目标函数为 $U : X \times \Theta \to \mathrm{R}$，其中 $x \in X$表示选择变量，$\theta \in \Theta$ 表示外生参数。令

$$X^*(\theta) := \operatorname*{argmax}_{x \in X} U(x, \theta).$$

单调比较静态（MCS）问题关注的是原始要素所满足的条件：在这些条件下，代理人的最优选择集合 $X^*(\theta)$ 关于 θ 在强集序下是非递减的。

在期望效用下，Athey [2002] 给出了关于状态分布、从状态到结果的映射以及效用函数的条件，这些条件足以保证单调比较静态。我们的目标是推导出关于相同原始要素的类似条件，不同之处在于，我们将效用函数替换为局部效用函数。

参数和行动影响问题的方式有三种：(i) 通过改变状态分布；(ii) 通过改变给定彩票时的效用函数（例如，通过改变局部效用曲率）；(iii) 通过改变给定状态时的货币收益。[5] 我们假设参数和行动不能通过相同的方式产生影响（即，它们必须分别通过不同的渠道 (i)–(iii) 产生影响），且每个因素只能通过单一渠道发挥作用。

[5]我们想指出的是，这些渠道并非相互排斥——可能存在一个带有参数 θ 的效用函数，使得增加 θ 等价于在世界的每一种状态下都增加货币收益；在这些情况下，无论如何分类，我们的方法都会得出等价的条件。

相同的影响（即，它们必须分别通过不同的渠道 (i)–(iii) 产生影响），且每个因素只能通过单一渠道发挥作用。

虽然听起来这似乎是在实质上限制我们只能考虑这类问题，但事实并非如此。许多经济问题都可以通过变量变换重新表述，使得每个变量都通过单一渠道发挥作用，且两个变量作用于不同渠道（正如我们在应用中所做的那样）。因此，我们关于渠道互异且各自单一的条件，是对分析表述的规范化，而非对基础经济学含义的限制。

在正文中，我们研究行动 x 影响状态分布的情形，即 (i)，而参数 θ 通过 (ii) 或 (iii) 影响从状态到效用的映射。这对应于标准方法：参数 θ 改变“效用函数”，而代理人采取行动 x来影响结果分布。这些情形与期望效用和非期望效用偏好下广为人知的 MCS 结果尤为相关。如前所述，我们的形式化条件将与Athey [2002]第三节中的条件相对应。

互补情形中，x 与 θ 的作用互换（即 θ 改变结果分布，而 x影响效用），将在附录A中分析。在期望效用下，关于 MCS 的结果通常（例如 Athey [2002]中的结果）对这两种情形都对称适用；而在非期望效用偏好下，这种对称性通常并不成立。

形式上，我们的分析建立在Milgrom 和 Shannon [1994] 和Quah 和 Strulovici [2009]的结果之上。 Milgrom 和 Shannon [1994]证明，只要 U 在 (x,θ)中满足 SC2，MCS 就成立。不难验证，超模性和对数超模都是比 SC2 更强的条件。

Quah 和 Strulovici [2009] 提出了一种函数的新序——区间支配序。它严格弱于 SC2，但仍足以保证 MCS。下文的引理5.1表明，当 U 关于 x 是拟凹的，且 $U_1(x,\theta)$ 满足 SC1 时，U 满足区间支配序，因此 MCS 成立。[6]

引理 5.1。 若 $U(x,\theta)$ 关于 x 是拟凹且可微的，并且 $U_1(x,\theta)$ 关于 θ 满足 *SC1*，那么 U 在 $(x;\theta)$ 中满足区间支配序。

因此，我们的目标是找出原始要素的充分条件，使得 $U(x,\ \theta)$ 满足超模性、SC2，或者使 $U_1(x,\ \theta)$ 关于 θ 是 SC1。在下一节中，我们将采用三种

[6]拟凹性确保 U 要么（i）关于 x 单调，要么（ii）其最大化集合构成一个区间 $[\underline{x},\overline{x}]$，且在 x 以下偏好随 x 递增，在 $\overline{x}$以上则递减。

不同的策略。首先，我们将给出充分条件，使得 $U_1(x,\ \theta)$ 关于 θ 是 SC1。其次，我们转而给出保证 U 是 SC2 的条件。最后，我们将给出使 U 超模的条件。

6. 行动影响分布

令$S = [\underline{s}, \overline{s}]$表示代理人所面临的状态集合。行动 x 会影响状态分布，该分布由概率密度函数（pdf）$h(s;x)$及其对应的累积分布函数 $H(s;\ x)$刻画。给定的行动 x和参数 θ会诱导出一个结果彩票，因此，$U(x,\ \theta)$等于在该诱导彩票下计算的 V。

当 θ 直接影响局部效用函数而不影响结果时，状态与货币结果之间的映射是固定的。因此，稍微滥用一下符号，令货币结果为 s。令$V(\theta,\ H(\cdot;\ x))$表示偏好泛函，其局部效用函数为 $u(z,\ \theta,\ F)$（我们用效用上方的横线表示 θ直接影响效用，而不是通过结果彩票间接影响效用）。此时的目标函数为 $U(x,\ \theta) = V(\theta,\ H(\cdot;\ x))$。

—

正如我们稍后将在第7.1节的一个应用中所展示的，这种情形涵盖了Machina [1982a]的方法；例如，θ 会改变个体的风险厌恶程度，而行动则是对彩票的选择。值得注意的是，个体风险厌恶程度的变化不会改变给定状态下的货币收益，而是改变货币数额转化为效用的方式，这正是我们此处讨论的情形。

更复杂的情形是，θ 通过结果影响局部效用函数。设状态 s 实现时的结果为 $\varphi(s,\theta)$。那么，对于每个 x 的取值和每个参数 θ，令 $F(\cdot;\ x,\theta)$ 表示货币结果上的分布。令 V表示偏好泛函 $V(F(\cdot;\ x,\theta))$，其局部效用函数为 $u(z,F)$。目标函数为 $U(x,\theta) = V(F(\cdot;\ x,\theta))$。这种情形涵盖了以下情况：$\theta$会改变给定状态下的货币收益，例如，$\theta$ 会改变个体的财富水平（应用示例见第 7.2 节）。

这两种情形的关键区别在于，当 θ 直接进入效用函数时，它不会影响由此产生的彩票，因此不会出现在局部效用函数的彩票论元中。这使得分析更加简单。

接下来，我们将给出 MCS 成立时的三组充分条件：U_1 在 θ 中满足 SC1，U 在 $(x;\theta)$ 中满足 SC2，以及 U 是超模的。我们首先介绍最易于应用的条件，然后在后续小节中扩展分析。

6.1. **满足 SC1 的充分性** 我们首先对偏好泛函的可微性施加相对较强的假设，这反过来使我们只需对局部效用函数如何随彩票变化提出相对较弱的条件。此外，这些假设与大多数应用中通常自然采用的假设相符，因此，我们的第一个结果可以很容易地应用于后续各节中的应用。我们的条件保证 在 θ 中满足 SC1。根据引理 5.1 以及 Quah 和 Strulovici [2009]，如果 $U(x,\theta)$ 在 x上是拟凹的，则 MCS 成立。

具体而言，我们假设偏好泛函是 Hadamard 可微的，并且关于 x 可微。当 θ 直接进入局部效用函数（第一种情形）时，

$$U_1(x,\theta) = \frac{d\overline{V}(\theta, H(\cdot;x))}{dx} = \frac{d\overline{V}(\theta, H(\cdot;x+t))}{dt}\Big|_{t=0} = \int \overline{u}(s,\theta,H(\cdot;x))h_2(s;x)ds, \tag{5}$$

其中，最后一个等式由 Hadamard 可微性的定义得出，而 $h_2(s;x) = \partial h(s;x)/\partial x$。类似地，当 θ 进入结果（第二种情形）时，

$$\begin{aligned} U_1(x,\theta) &= \frac{dV(F(\cdot;x,\theta))}{dx} = \frac{dV(F(\cdot;x+t,\theta))}{dt}\Big|_{t=0} = \int u(z,F(\cdot;x,\theta))dF_x(z;x,\theta) \\ &= \int u(\varphi(s,\theta),F(\cdot;x,\theta))h_2(s;x)ds, \end{aligned}$$

其中，$F_x(z;x,\theta) = \partial F(z;x,\theta)/\partial x$ 对于路径 $t \mapsto F(\cdot;x+t,\theta)$ 而言，正是定义 2 中的 G_t；最后一个等式则由 $F(\cdot;x,\theta)$ 的定义得出。

比较上述两个表达式可见，一个统一的一般表述涵盖了这两种情形：

$$U_1(x,\theta) = \int v(s,\theta,x)h_2(s;x)ds, \tag{6}$$

其中，在前一种情形下，$v(s,\theta,x) = u(s,\theta,H(\cdot;x))$；在后一种情形下，$v(s,\theta,x) = u(\varphi(s,\theta),F(\cdot;x,\theta))$。

在偏好属于伯努利 u^* 的期望效用（EU）情形下，该公式最终变为 $U_1(x,\theta) = \int u^*(s,\theta)h_2(s;x)ds$。除了 v 通过局部效用函数的彩票论元依赖于 x 之外，这两种表述相当相似。

鉴于这种相似性，下一条命题给出与期望效用理论下已知条件自然对应的条件，也就不足为奇了。证明的关键步骤是，条件 (2) 和 (3) 确保积分 $\int v(s,\theta,x)h_2(s;x)ds$ 具有 SC1 性质，而 V 的 Hadamard 可微性则保证了这是正确的求值表达式。[7]

命题 6.1. 假设

[7]盖托可微性太弱，因为它只能保证沿线性路径可微。

(1) 偏好泛函是 *Hadamard* 可微的；*(2)* $H(s;x)$ 关于 $(-x;s)$ 几乎处处（*a.e.*）具有 *SC2* 性质[8]，且 $H(s;x)$ 关于x可微；*(3)* 对所有 x，$v_1 \geq 0$，$v_1(s,\theta,x)$ 关于 (s,θ) 几乎处处（*a.e.*）具有对数超模性。

那么 $U_1(x,\theta)$ 在 θ 中是 *SC1*。

解读这些条件最简单的方式，是将其与期望效用理论下的等价结果进行比较；在期望效用理论中，代理人具有伯努利效用函数。与 Athey [2002], 相比，显然我们讨论的是局部效用，它们多了一个参数（方向导数的位置）

备注 1。假设代理人是期望效用最大化者，那么与命题*6.1* 等价的结果对假设作如下修改：我们不需要 *(1)*，而且 *(3)* 不再要求“对所有 x”。这是因为 *(i)* 期望效用是 *Hadamard* 可微的；*(ii)* 局部效用函数退化为伯努利效用函数，且独立于 x；*(iii)* 这些条件意味着 U 是 *SC2*。

我们主要将 V 的 Hadamard 可微性视为一项技术性假设。话虽如此，请记住，并非所有中间性偏好都是 Hadamard 可微的，甚至并非都是 Gâteaux 可微的。

假设（2）限制了行动的变化影响状态分布的方式。回想一下，这意味着两个 H由不同的 x所诱导的分布，作为状态的函数至多交叉一次。此外，正如 Athey [2002]指出的那样，递增 x 可能会同时提高分布的均值和风险程度，从而形成均值—风险权衡。

假设（3）包含两部分。第一部分意味着某种单调性。对于第二部分，当 $v(s,\theta,x) = u(s,\theta,H(\cdot;x))$ 时，假设 $v_1(s,\theta,x)$ 关于 (s,θ) 为对数超模，等价于 $-\frac{u_{11}(s,\theta,H(\cdot;x))}{u_1(s,\theta,H(\cdot;x))}$ 关于 θ 递减。随着~~θ 增加~~，代理人会变得风险厌恶程度较低，按 Machina [1982a] 的意义而言。

从技术角度看，这一结果是我们对Quah 和 Strulovici [2012], 引理 9.2的扩展所推得的结果；该引理使我们能够以类似于Athey [2002]的方式，将局部效用函数的性质加总起来。

我们在第7节提供应用，以便更好地理解这些假设。

[8]若函数 $g : S \to \mathrm{R}$ 满足 SC1 条件（几乎处处），则称其几乎处处为 SC1；也就是说，SC1 定义中的条件对$S \times S$中几乎所有满足 $s < \hat{s}$ 的 $(s,\hat{s})$ 对都成立。若函数 $h : X \times S \to \mathrm{R}$ 关于（x; s）几乎处处为 SC2，则对所有 $\hat{x} > x$, $g(s) = h(\hat{x},s) - h(x,s)$，其关于 s 几乎处处为 SC1。

尽管条件（2）和（3）看起来相当具体，但我们可以通过多种方式对其进行修改，使之类似于期望效用下的条件。

命题 6.2。 将条件 *(2)* 和 *(3)* 替换为以下任一条件

(1) $h(s;\ x)$ 关于 $(x;s)$ 几乎处处满足 *SC2*，$h(s;x)$ 关于 x，$v \geq 0$ 可微，且对所有 x，$v(s,\theta,x)$ 关于 (s,θ) 几乎处处对数超模；或 *(2)* $\int_{-\infty}^{s} H(t;\ x)dt$ 关于 $(-x;s)$ 几乎处处满足 *SC2*，$H(s;x)$ 关于 x，$v_{11} \leq 0$ 可微，$\int sd(H(s;\hat{x})-H(s;x)) = 0$，且对所有 x，$-v_{11}(s,\theta,x)$ 关于 (s,θ) 几乎处处对数超模。

那么，命题 *6.1*仍然成立。

在条件 (1) 下，正如 Athey [2002]所指出的，关于 h的条件比一阶随机占优更强，但比单调似然比更弱；而关于 v 的条件限制了收益水平。对数超模意味着，较高的参数在较高状态下具有较高的相对收益。

对于（2），对 v 的限制等价于风险厌恶（即 $v_11 \leq 0$），且风险厌恶程度随参数的变化在状态上递增（即$-v_11(s,\ \theta,\ x)$ 关于（$s,\ \theta$）是对数超模）。对分布 H的条件意味着，对于 X 的两个不同取值，H 的积分曲线交叉一次，且二者均值相同。

注 2。 与注 *1*一样，期望效用下的相应结果不需要命题 *6.1*中的（*1*），而且我们可以从对数超模条件中省略“对所有 *x*”的要求。

6.2. U 为SC2的充分性。注意，只有当 $U_1(x,\theta)$是关于 x拟凹时，$U_1(x,\theta)$为SC1才足以保证MCS。这一限制，加上命题 6.1 和 6.2 所依据的相对较强的可微性假设，促使我们探究能否在对 U要求较弱的条件下得到类似结果。本节将加强对局部效用函数的条件，使 U 为SC2。这样，我们便能在不施加拟凹性且对 U采用较弱可微性假设的情况下确立MCS。我们的方法确定了使 $U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta)$ 关于 θ为SC1的条件。为此，我们依赖比上一节更强的聚合性质，不过这些性质仍借鉴了Quah 和 Strulovici [2012]提出的方法。

我们首先推导 $U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta)$。当 θ直接影响局部效用函数时，盖托可微性意味着

$$U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta) = \int_0^1 \int \overline{u}(s,\theta,H_{\alpha,x,\hat{x}}(\cdot))d(H(s;\hat{x}) - H(s;x))d\alpha, \tag{7}$$

其中，对于所有 $\hat{x} > x$ 和 $\alpha \in [0,1]$，$H_{\alpha,x,\hat{x}}(\cdot) = (1-\alpha)H(\cdot;x) + \alpha H(\cdot;\hat{x})$。当 θ 影响结果时，盖托可微性意味着

$$U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta) = \int_0^1 \int u(\varphi(s,\theta), F_{\alpha,x,\hat{x}}(\cdot;\theta))d(H(s;\hat{x}) - H(s;x))d\alpha, \tag{8}$$

其中，对所有 $\hat{x} > x$ 和 $\alpha \in [0,1]$，$F_{\alpha,x,\hat{x}}(\cdot;\theta) = (1-\alpha)F(\cdot;x,\theta) + \alpha F(\cdot;\hat{x},\theta)$。于是我们可以写成

$$U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta) = \int_0^1 \int v(s,\theta,\alpha)d(H(s;\hat{x}) - H(s;x))d\alpha, \tag{9}$$

其中在情形（7）下，$v(s,\theta,\alpha) = u(s,\theta,H_{\alpha,x,\hat{x}}(\cdot))$；在情形（8）下，$v(s,\theta,\alpha) = u(\varphi(s,\theta), F_{\alpha,x,\hat{x}}(\cdot;\theta))$。[9]

作为类比，请注意，期望效用下的等价表述为

$$U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta) = \int u^*(s,\theta)d(H(s;\hat{x}) - H(s;x)). \tag{10}$$

请注意，伯努利效用函数不依赖于彩票（即 α），因此我们无需对 α 积分。

由于我们的目标是确定一组充分条件，使得 $U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta)$ 关于 θ 具有 SC1 性质，因此我们必须聚合局部效用函数的单交叉性质。在非期望效用偏好下，还会出现一项关于 α 的积分聚合，它体现了沿从 $H(\cdot;x)$ 到 $H(\cdot;\hat{x})$（或从 $F(\cdot;x,\theta)$ 到 $F(\cdot;\hat{x},\theta$）的线性路径对局部效用函数进行积分。因此，盖托可微偏好下的 MCS 类似于期望效用下的多维 MCS 问题。与之前一样，相较于 Athey [2002] 和期望效用下的现有研究，我们有：（i）与伯努利效用相比，局部效用多了一个自变量（方向导数的位置）；此外，我们现在还有（ii）一个由 α 索引的额外积分层。由于（ii），在聚合单交叉性质时，有时必须使用比 Athey [2002] 更强的工具，即 Quah 和 Strulovici [2012] 中的方法。我们将他们的结果加以调整，以证明引理 9.2；该引理为 v 和 H 给出了充分条件，使得 $U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta)$ 具有 SC1 性质。

命题 6.3。 假设偏好泛函是盖托可微的。以下条件至少有一项成立：

(1) $h(s;x)$ 在 $(x;s)$ 上几乎处处为 *SC2*，$v \geq 0$，且 $v(s,\theta,\alpha)$ 在 (s,θ,α) 上几乎处处为对数超模，对所有 $\hat{x} > x$ 均成立；

[9] 这里稍微滥用了记号，因为本小节中定义的 v 与上一小节中的 v 具有不同的参数。不过，它们发挥着相同的概念作用。为简化记号，我们省略 v 对 x 和 $\hat{x}$ 的依赖关系。命题 6.3 中的对数超模假设，是指每一对这样的对象都必须满足的条件。

(2) $H(s;\ x)$ *在* $(-x;\ s)$ *上几乎处处为 SC2，* $v_1 \geq 0$，且 $v_1(s,\theta,\alpha)$ *在* (s,θ,α) *上几乎处处为对数超模，对所有* $\hat{x} > x$ *均成立；(3)* $\int_{-\infty}^{s} H(t;\ x)dt$ *在* $(-x;\ s)$ *上几乎处处为 SC2，* $v_{11} \leq 0$, $\int sd(H(s;\ \hat{x}) - H(s;x)) = 0$，且$-v_{11}(s,\theta,\alpha)$ *在* (s,θ,α) *上几乎处处为对数超模，对所有* $\hat{x} > x$ *均成立。*

因此，U（x，θ）在（x；θ）上具有 *SC2* 性质。[10]

我们这里的条件与上一小节中给出的条件相似，但有两个关键差异。首先，如前所述，我们将偏好泛函的可微性假设从 Hadamard 可微性弱化为 Gâteaux 可微性，并取消了对 h 或 H 的可微性要求。作为补偿，我们强化了关于局部效用函数的条件。此前的条件要求，对于每个 α，局部效用（或其一阶或二阶导数）关于（s，θ）具有对数超模性；而现在还必须关于 α 具有对数超模性。

对这些条件的解释与上一小节中的解释非常相似，此外，对数超模条件还取决于 α。将这些条件转换为原始局部效用函数 $u(z,\ F)$ 和 $u(z,\ \theta,\ F)$ 是直接的。例如，我们可以在分布集合上定义如下偏序 $\succsim_x$：$H(\cdot;\ \hat{x}) \succsim_x H(\cdot;\ x)$ 当且仅当 $\hat{x} \geq x$。此外，假设该偏序满足

$$(1-\alpha')H(\cdot;x) + \alpha' H(\cdot;\hat{x}) \succ_x (1-\alpha)H(\cdot;x) + \alpha H(\cdot;\hat{x}) \quad \forall \alpha' > \alpha, \forall \hat{x} > x.$$

在这两种情况下，关于 $v(s,\ \theta,\ \alpha)$ 如何随 α 变化的条件，都可以转化为局部效用函数 $u(z,\ F)$ 和 $u(z,\ \theta,\ F)$ 关于 $\succsim_x$ 如何随 F 变化的条件。

回想一下，等价的期望效用表述省略了 α。下面的备注表明，若这些条件省略了 α，那么它们对期望效用也同样是充分条件。

备注 3. 在期望效用框架下，诱导出的局部效用函数 v 会化简为伯努利效用函数，且与 α 无关。因此，命题 *6.3* 在省略 α后仍然成立。

6.3. 使 U 成为超模的充分性。 现在我们讨论第三组充分条件；这些条件会使 U 成为超模。

具体而言，回顾一下

$$U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta) = \int_0^1 \int v(s,\theta,\alpha)d(H(s;\hat{x}) - H(s;x))d\alpha.$$

[10]由引理9.2 可知，命题 6.3 在假设中将 α 替换为 $-\alpha$ 后仍然成立。

我们希望确保该函数关于 θ 递增。为此，我们对局部效用函数施加超模性。由于超模函数之和仍是超模函数，这一性质在积分运算中也能保持。

命题 6.4. 假设

(1) 偏好泛函盖托可微；(2) $H(\cdot;\hat{}x) \gtrsim_{FOSD} H(\cdot;x)$ 对所有$\hat{}x > x$成立；(3) $v(s,\theta,\alpha)$ 关于(s,θ) 是超模的，对所有$\hat{}x > x$ 和 $\alpha \in [0,1]$均成立。

那么， $U(x,\theta)$ 关于(x,θ)是超模的。

与前文一样，在期望效用下，该条件会简化。

备注 4. 与备注 3中一样，省略 α即可得到期望效用下的相应结果。

现在我们来解释命题 6.4中的假设。为便于说明，设$v(s,\theta,\alpha)$ 关于 s递增。在 θ 影响结果的情况下，一个充分条件是结果 $\varphi(s,\theta)$ 关于状态 s递增，且局部效用 $u(z,F)$关于结果 z递增。因此，代理人的效用会随状态增加。假设（2）是标准要求，即较高的 x 会按照一阶随机占优的意义带来“更好”的状态分布。假设（3）指出，参数 θ 越高，状态增加所带来的价值越大。直观而言，这意味着代理人应当将更好的状态分布与更高的参数相匹配。

6.4. MCS 与局部效用的唯一性。根据 Machina [1988], ，局部效用函数在以下意义上唯一到正仿射变换为止。设 V 是表示定义在 $\Delta(Z)$ 上的偏好关系 $\gtrsim$ 的光滑偏好泛函，且 $\{u(\cdot, F)|F \in \Delta(Z)\}$ 是相应局部效用函数的集合。再设 V^* 是另一个偏好泛函，其局部效用函数为 $\{u^*(\cdot,F) = a(F)+b(V(F))u(\cdot,F)|F \in \Delta(Z)\}$，其中 $a:\Delta(Z) \to \mathrm{R}$ 且 $b:\mathrm{R} \to \mathrm{R}_{++}$ 是正的连续函数。那么 V^* 是 V 的单调变换，并表示相同的偏好 $\gtrsim$。

回想一下，我们对局部效用函数 u 的假设限制了 u 对结果和彩票论元的依赖方式。由于上述仿射变换中的乘法常数可能取决于彩票论元，因此并非所有假设在此类变换下都能保持不变。更具体地说，我们的充分条件的不变性既取决于 θ 的作用，也取决于条件的表述方式。

当 θ 不影响结果，因而不进入彩票论元（情形（7））时，以 v 的导数表述的条件——即命题 6.3 的假设（2）和（3），以及命题 6.4的假设（3）——在此类变换下保持不变。相反，当 θ 影响结果（情形（8））时，这些相同的条件未必能保持不变。

当偏好泛函 Hadamard 可微时，以 v 的导数表述的条件——例如命题6.1 中的假设（3）和命题6.2 中的假设（2）——在此类变换下均得以保持，无论 θ 是否影响结果。最后请注意，要求局部效用函数 v本身具有对数超模的条件——即命题6.2 和6.3 中的假设（1）——即使在期望效用框架下进行标准仿射变换，也无法保持。

7. 应用

现在我们介绍本研究结果的三个应用。首先，我们证明，我们的方法能够重现文献中一个可通过直接套用Machina [1982a] 的方法得到的已有结果——我们给出比较风险厌恶的条件。随后，我们重新考察两个动机示例；对于这两个示例，Machina [1982a] 的方法并不奏效：财富变化下风险承担的变化，以及预防性储蓄。前者补充了Machina [1982b]的研究。在所有情形中，我们都会讨论本方法如何涵盖已有结果（包括期望效用方面的结果以及已知的非期望效用结果）。

我们的例子还凸显了此前讨论的两种情形之间的区别：第7.1 节考察 θ 直接影响效用、从而改变彩票到效用水平的映射的情形，而第7.2节分析 θ的情形；在此应用中，财富会改变给定状态下的货币收益。

所有应用都依赖命题6.1 ，因此施加了相对严格的可微性条件。当然，我们也可以利用命题6.3 和6.4 来得到类似结果，但这需要对局部效用施加更强的条件。

7.1. **投资组合选择与风险偏好的变化**。

我们首先说明，我们的方法如何涵盖Machina [1982a]所采用的方法。具体而言，我们复现他的定理4，但使用对数超模的表述。

考虑第4.1节中的同一投资组合选择问题。回忆一下，安全资产带来恒定收益 $r > 0$，而风险资产带来随机收益 $s \in [0, \bar{s}]$。令 $F_{\bar{s}}$

表示该随机收益的累积分布函数，并假设 $\mathbb{E}[s] > r$。令 θ 为决定风险厌恶程度的参数。因此， θ 不会影响结果，但会直接影响局部效用函数；而行动 x 会影响结果的分布 $z = wr + x(s-r)$。按照第 6节中的记号，令 $V(\theta, H(\cdot;x))$ 为一个局部效用函数为 $u(z,\theta,F)$ 的偏好泛函。

命题 7.1。 假设 V 是 *Hadamard* 可微的，且 U 关于 x是拟凹的。若 $u_1(z,\theta,F)$ 关于 (z,θ) 几乎处处对所有 F均为对数超模，则 θ 的增加会使最优选择 x增加。

注意，根据构造， z 的分布为 $H(z;\ x) = F_{\tilde{s}}(\frac{z-wr}{x} + r)$，它关于 $(x;\ z)$ 几乎处处满足 SC2，也就是说，命题6.1 中的假设（2）成立。因此，该结果可直接由命题6.1 和引理 5.1推出。

$u_1(z,\theta,F)$的对数超模性意味着，对所有 z和 F， $-\frac{u_{11}(z,\theta,F)}{u_1(z,\theta,F)}$随 θ递减。另一种等价且广为人知的假设表述方式是：对于任意 F和 $\hat{\theta} > \theta$， $u(\cdot,\theta,F)$是 $u(\cdot,\hat{\theta},F)$的凹变换。因此， $-\frac{u_{11}(z,\theta,F)}{u_1(z,\theta,F)}$取值较低的代理人会更多地投资于风险资产。因此，按照 Machina [1982a]的意义，代理人 $\hat{\theta}$的风险厌恶程度低于代理人 θ，这证实了 $-\frac{u_{11}(z,\theta,F)}{u_1(z,\theta,F)}$是衡量绝对风险厌恶程度的恰当指标。

注 5。 在期望效用框架下，令 $u^*(z,\theta)$ 表示伯努利效用函数。命题 7.1可简化为如下结论：若 $u_1^*(z,\theta)$ 几乎处处对数超模，那么 θ 的增加会使最优选择增加 x。

命题 7.1 还直接推出了非期望效用泛函的已有结果。这里我们说明，它可以推出 Chew 等人 [1987]的结果；他们假设已知的 RDU 非期望效用模型（1）。假设参数 θ衡量风险厌恶程度，并令 $\omega(\cdot,\theta)$ 和 $u^*(\cdot,\theta)$分别表示秩依效用主体的概率变换函数和效用函数。

推论 7.1。 假设秩依期望效用满足 $u_{11}^*(z,\theta) < 0$ 对所有 z和 θ均成立。若 $\omega_1(p,\theta)$ 和 $u_1^*(z,\theta)$ 均为对数超模，那么 θ 的增加会使最优选择 x增加。

注意到， ω_1 和 u_1^* 是对数超模，当且仅当对于所有 $\hat{\theta} > \theta$， $\omega(\cdot,\theta)$ 和 $u^*(\cdot,\theta)$ 是 $\omega(\cdot,\hat{\theta})$ 和 $u^*(\cdot,\hat{\theta})$ 的凹变换。因此，推论 7.1 表明，对于任意初始财富，代理人 $\hat{\theta}$的风险厌恶程度低于代理人 θ，且在风险资产上的投资更多。

7.2. **投资组合选择与财富变化**。 接下来，我们重新审视第 4.1 节中的例子——财富变化如何影响风险承担。回想一下，这是一个直接套用 Machina [1982a]方法行不通的例子。

回顾一下，基本设定与第7.1节相同，但令 $t = x(s - r)$。这里的参数是财富 w，它影响结果 $\varphi(t, w) = wr + t$，而行动 x影响 t 的分布，其分布函数为 $H(t; x) = F_{\tilde{s}}(\frac{t}{x} + r)$。

为了在偏好泛函可微时得到 MCS，我们引入一个假设：可微的绝对风险厌恶递减。

定义 9。可微偏好泛函 V 若满足**可微的绝对风险厌恶递减（D-DARA）**，则对所有 t 和 $\tilde{t}$，$-\frac{u_{11}}{u_1}(y+t, F_{y+\tilde{t}})$ 关于 y 几乎处处递减。[11]

D-DARA 的限制相当宽松。尤其是，它允许 $-\frac{u_{11}}{u_1}(z, F)$ 随 z 递增而随 F 递减，或随 z 递减而随 F 递增。[12]等价地说，D-DARA 表示 $u_1(y + t, F_{y+\tilde{t}})$ 关于 (t, y) 对数超模。因此，取 $\theta = w$，D-DARA 蕴含命题 6.1 中的假设（3）。在期望效用下，D-DARA 归结为标准的绝对风险厌恶递减要求，即 $-\frac{u_{11}^*}{u_1^*}(z)$ 属于 z，其中 u^* 是伯努利效用。

接下来的 MCS 结果可直接由命题 6.1推出：如果偏好泛函具有 D-DARA，那么代理人的初始财富越多，她对风险资产的投资就越多。

命题 7.2。 假设 V 是 *Hadamard* 可微的，并具有 *D-DARA*，且 U 在 x上是拟凹的。那么，w 的增加会导致 x的最优选择增加。

注6。 在期望效用框架下，令 $u^*(z, \theta)$ 表示伯努利效用函数。命题 7.2可简化为如下结论：如果 $u_1^*(z, \theta)$ 满足绝对风险厌恶递减，那么 w 的增加会导致 x的最优选择增加。

Machina [1982b] 研究了非期望效用偏好的一种独特比较静态：当初始财富和财富增量均具有随机性时，随着财富增加，个体何时会增加对风险资产的投资（基于Ross [1981]的研究）。他将广义 *DARA* 定义为在 Fréchet可微条件下，$-\frac{u_{11}(z,F)}{\int u_1(t,F)dF(t)}$ 随z 和 F 均递减的性质。广义 DARA 与 D-DARA 条件彼此独立：两者互不蕴含

[11]回想一下，$F_{y+\tilde{t}}$ 表示随机变量 $y + \tilde{t}$的分布。注意，t 是任意标量˜，而且 t 是任意随机变量，二者不必相关。[12]后一种模式对应于 Machina [1982a]的假设 I 和 II；他认为，这些假设与大量关于独立性公理系统性违反的实验证据相符。

对方。具体而言，在具有凹伯努利效用函数的期望效用框架下，广义 DARA 不可能成立，而在期望效用框架下，D-DARA 则退化为标准 DARA 条件。然而，Machina [1982b]表明，广义 DARA 也可以推出我们的 MCS 结果。

接下来，我们将推导三种特定非期望效用偏好的 D-DARA 条件。首先考虑秩依期望效用，并说明命题7.2蕴含 Chew 等人 [1987]的定理 2。

推论 7.2。假设秩依期望效用满足 $u_{11}^*(z,\theta) < 0$，对所有 z和 θ均成立。若 $-\frac{u_{11}^*(z)}{u_1^*(z)}$关于$z$递减，则财富增加 w 会使风险资产的最优投资增加。

根据命题 7.2，证明很直接。根据我们对秩依期望效用局部效用函数的定义，观察式（2），对于 y，$t \in [\underline{t}, \bar{t}]$ 以及 $F_{\tilde{t}} \in \Delta[\underline{t}, \bar{t}]$，

$$u(y+t, F_{y+\tilde{t}}) = \int_{\underline{t}}^{t} \omega_1(F_{\tilde{t}}(s)) du^*(y+s). \tag{11}$$

这意味着

$$u_1(y+t, F_{y+\tilde{t}}) = \omega_1(F_{\tilde{t}}(t)) u_1^*(y+t) \quad \text{a.e.}$$

由此很容易看出，D-DARA 可归结为 $-\frac{u_{11}^*(z)}{u_1^*(z)}$关于 z递减。也就是说，效用函数 u^* 呈现 Arrow-Pratt 意义下的标准绝对风险厌恶递减。

我们还可以重新考察作为启发性示例的二次偏好（3）。在参数化（4）下，经过直接计算可得 $-\frac{u_{11}(y+t,F_{y+\tilde{t}})}{u_1(y+t,F_{y+\tilde{t}})} = \beta + \frac{\alpha-\beta}{1+e^{(\alpha-\beta)(y+t)}} \int S(y+\tau) dF_{\tilde{t}}(\tau)$，当且仅当 $\alpha \geq \beta$ 时，D-DARA 成立。

最近，Mu 等人 [2024] 引入了一类对背景风险不变的非期望效用偏好：[13]

$$V(F) = \int \frac{1}{a} \ln \mathbb{E}_F e^{az} d\mu(a),$$

其中，μ 是针对通常的绝对风险厌恶系数的概率测度。我们的条件使我们能够轻松检验这些个体如何应对财富变化：$V(F)$ 的局部效用函数为

$$u(z,F) = \int \frac{1}{a} \frac{e^{az}}{\mathbb{E}_F e^{az}} d\mu(a).$$

显然，$u(y+t, F_{y+\tilde{t}})$ 关于 y是常数，因此，$-\frac{u_{11}(y+t,\ F_{y+\tilde{t}})}{u_1(y+t,\ F_{y+\tilde{t}})}$关于 y是常数。因此，按照我们的度量方式，它表现为常数绝对风险厌恶。

[13]如果加入独立的背景风险不会改变偏好，则称偏好对背景风险不变。

7.3. **预防性储蓄**。 现在回到我们最初动机中的第二个动机，讨论预防性储蓄，并将Kimball [1990] 的分析扩展到非期望效用情形。

我们将推导两个结果：首先，建立一种人际度量，用以衡量预防性储蓄动机的强度；其次，给出一项判据，用于判断某个特定个体是否具有正向的预防性储蓄动机。后者使我们能够直接探讨第4.2节中的例子。

与我们在第7.1节对风险的讨论类似，我们令 θ 改变代理人的态度。令$V(\theta, F)$ 表示偏好泛函。回顾第4.2节中的预防性储蓄问题：

$$\max_y \overline{V}(\theta, \delta_{w-y}) + \overline{V}(\theta, F_{y+\tilde{\varepsilon}}), \tag{12}$$

其中， w 为初始财富， y 为储蓄， $\tilde{\varepsilon}$为零均值风险。[14] 储蓄最优水平 y 的一阶条件为

$$-\frac{\partial \overline{V}(\theta, \delta_{w-y})}{\partial y} = \frac{\partial \overline{V}(\theta, F_{y+\tilde{\varepsilon}})}{\partial y}. \tag{13}$$

如果代理人的货币边际效用递减，即对所有 t， $V(\theta, F_{y+\tilde{t}})$关于 y是凹的，那么，只要满足以下条件， $\tilde{\varepsilon}$ 所代表的风险就会导致储蓄增加

$$\frac{\partial \overline{V}(\theta, F_{y+\tilde{\varepsilon}})}{\partial y} > \frac{\partial \overline{V}(\theta, \delta_y)}{\partial y},$$

也就是说，当风险 $\tilde{\varepsilon}$ 提高储蓄的边际效用时。因此，预防性储蓄动机与偏好泛函的一阶导数有关。

为了应用我们的 MCS 结果，可以遵循Kimball [1990] 并考虑以下由储蓄最优水平的一阶条件得到的最大化问题：

$$\max_x -\frac{\partial \overline{V}(\theta, F_{y+x\tilde{s}})}{\partial y}, \tag{14}$$ [15]

其中， $\tilde{s}$ 是一种风险，其概率密度函数为 $f_{\tilde{s}}$，累积分布函数为 $F_{\tilde{s}}$，且 $\mathrm{E}\tilde{s} > 0$。直观地说，目标函数刻画了边际效用随风险增加而变化的速度。

命题 7.3。 *假设*V *二阶 Hadamard 可微，且* U *关于* x*拟凹。假设*

(1) $\frac{d\overline{u}(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})}{dy}$ *is strictly decreasing in* t *for all* y, $\tilde{t}$, *and* θ;

[14]在预防性储蓄问题中，只有第二期的偏好相关；为简化记号，我们假设两期的偏好均由 V 表示。[15]与第6 节所研究的情形不同，这里的目标函数本身并非偏好泛函，而是偏好泛函的导数。尽管如此，分析过程仍类似。

(2) $-\frac{d\overline{u}_1(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})}{dy}$ *is log-spm in* (t,θ) *a.e. for all* y *and* $\tilde{t}$.

那么， θ 的增加会导致 x的最优选择增加。[16]

备注 7。在期望效用（*EU*）下，令 $u^*(z,\theta)$ 表示伯努利效用函数。命题 *7.3* 可简化为以下结果（*Kimball* [1990]）。若 $u_1^*(z,\theta)$ 对所有 θ 都随 z 严格递减，且 $-u_{11}^*(z,\theta)$ 几乎处处关于 (z,θ) 对数超模，那么 θ 的增加会使 x 的最优选择增加。

Kimball 的一项关键概念洞见是，任何关于风险厌恶的定理，都可以通过用 $-u_1^*$ 替换 u^*，转化为关于预防性储蓄的结果。我们的结果将这一洞见加以拓展，表明对于非期望效用偏好，可以通过用 $-\frac{du(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})}{dy}$ 替换 $u(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})$，将关于风险厌恶的结果应用于预防性储蓄。

在非期望效用偏好下，命题7.3的假设（1）不同于风险厌恶的条件，即 $u_{11}\le 0$。事实上，附录中的引理 10.1 证明，假设（1）意味着货币边际效用递减，也就是说，$\frac{\partial V(\theta,F_{y+\tilde{t}})}{\partial y}$ 随 y 递减。[17] 命题 7.3 的假设（2）等价于 $-\frac{du_{11}(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})/dy}{du_1(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})/dy}$ 随 θ 递减。因此，这引出了对预防性储蓄动机强度的一种全局度量，其定义如下

$$\eta^{\theta}_{F_{y+\tilde{t}}}(t) = -\frac{d\overline{u}_{11}(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})/dy}{d\overline{u}_1(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})/dy} \quad \forall\, y,t,\tilde{t}. \tag{15}$$

^对于任意 $\theta>\theta$，命题 7.3 表明，代理人 θ 比代理人 ^θ 具有更强的预防性储蓄动机，只要 $\eta^{\theta}_{F_{y+\tilde{t}}}(t)\ge\eta^{\hat{\theta}}_{F_{y+\tilde{t}}}(t)$ 对所有 y、t和 $\tilde{t}$均成立。

现在我们可以陈述刻画正预防性储蓄动机的条件了。命题 7.3表明，只要 $\frac{du_{11}(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})}{dy}\ge 0$，代理人 θ 就表现出正预防性储蓄动机。因此，正预防性储蓄动机的存在与

[16]我们想指出，第6.4 节中关于命题 6.1 中的假设（3）在等价仿射变换下保持不变的结论并不适用于此处。原因在于，本应用中的目标函数（14）是偏好泛函的导数，而不是偏好泛函本身。因此，对偏好泛函进行简单的单调变换，并不会得到目标函数的单调变换。直观地说，这是因为高阶风险偏好不会在单调变换下保持不变，因此，局部效用函数 $u(\cdot,F)$ 和 $a(F)+b(V(F))u(\cdot,F)$ 在预防性储蓄动机方面并不等价。[17]这两个条件彼此不同，且互不蕴含。为说明这一点，请注意：

$$\frac{d\overline{u}_1(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})}{dy} = \overline{u}_{11}(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}}) + \frac{\partial\overline{u}_1(y+t,\theta,F_{s+\tilde{t}})}{\partial s}\Big|_{s=y}.$$

显然，$\frac{du_1(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})}{dy}\le 0$ 并不意味着 $u_{11}(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})\le 0$，反之亦然。风险厌恶条件和假设（1）同时成立的一个充分条件是，$u_1(z,\theta,F)$ 关于 z和 F单调递减。

局部效用函数的全导数的凸性有关，而非其偏导数的凸性。

命题 7.4. 假设 V *Hadamard* 可微。如果 $\frac{du_1(y+t,\ \theta,\ F_{y+\tilde{t}})}{dy} \underline{\quad < 0 \text{ 且 } \frac{du_{11}(y+t,\ \theta,\ F_{y+\tilde{t}})}{dy}} \succeq 0$ 对所有 y、t和 t均成立，则代理人 θ 具有正向的预防性储蓄动机。

注释 8. 在期望效用下，命题 7.4 可简化为以下结果。若 $u_1^*(z,\ \theta)$ 对所有 z 均严格递减，且 θ 和 $u_{111}^*(z,\ \theta) \geq 0$ 对所有 z均成立，则代理人 θ 具有正向的预防性储蓄动机。

回到引出本文的例子，这凸显了非期望效用情形下，下行风险厌恶与预防性储蓄之间的差异。回顾一下，Cerreia-Vioglio 等人[2017, 推论 1] 发现，偏好泛函 V 与三阶随机占优相一致，当且仅当 $u_1(z,\ F)$ 存在且为凸。注意，在可微的情况下，这意味着我们考察局部效用的三阶偏导数。相比之下，我们的 MCS 涉及全导数——我们需要考虑导数方向及其所在位置变化时的相互作用。

我们还可以利用这些命题，既讨论现有关于预防性储蓄的研究结果，也为非期望效用偏好提出新的预防性储蓄比较度量。

首先，我们以秩依期望效用的情形重新考察这一动机性例子。命题 7.4 立即推出了 Chateauneuf 等人 [2016]的结果。

推论 7.3。 假设对于所有 z 和 θ，秩依期望效用满足 $u_{11}^*(z,\theta) < 0$。如果 $\omega_{11} \leq 0$ 且 $u_{111}^* \geq 0$，则该代理人表现出正的预防性储蓄动机。

我们还可以利用命题 7.3 提出一个新的条件，从而根据“更强的预防性储蓄动机”对个体进行排序

推论 7.4。 假设对于所有 z 和 θ，秩依期望效用满足 $u_{11}^*(z,\theta) < 0$ 且 $u_{111}^*(z,\theta) \geq 0$。如果 $\omega(\cdot,\theta)$ 是 $\omega(\cdot,\hat{\theta})$ 的凹变换，并且 $u_1^*(\cdot,\theta)$ 是 $u_1^*(\cdot,\hat{\theta})$ 的凸变换，则代理人 θ 比代理人 $\hat{\theta}$ 表现出更强的预防性储蓄动机。

Kimball 和 Weil [2009] 研究了在采用 Kreps–Porteus 偏好的两期模型中，风险厌恶和跨期替代如何影响预防性储蓄动机的强度（Kreps 和 Porteus [1978]），其中代理人的效用表示为

$$\nu(c) + \phi(\mathbb{E}_F u^*(z)), \tag{16}$$

其中 c表示第一期消费， F 表示第二期消费的分布， ν 表示第一期效用函数， u^* 表示第二期伯努利效用函数， ϕ 表示递增函数。函数 u^* 刻画代理人在第二期的风险态度，而函数 ϕ 则将跨期替代与风险厌恶分离开来。特别是，非线性函数 ϕ表明其偏离了标准的跨期期望效用最大化。假设 ϕ 和 u^* 足够光滑，表示式（16）是我们所构建形式的一种特例，其中第二期效用关于概率是非线性的。因此，上述分析也适用于这一 Kreps–Porteus 表示；在该表示中，第二期的局部效用函数为

$$u(z,F) = u^*(z)\phi_1(\mathbb{E}_F u^*(z)). \tag{17}$$

将此局部效用函数代入由命题 $-\frac{du_{11}}{du_1}\left(\frac{y+t}{y+t}\frac{F_{y+\tilde{t}}}{dy}\frac{dy}{dy}\right)/(F_{y+\tilde{t}})/$推导出的度量7.3，我们便可以考察风险和跨期偏好如何影响预防性储蓄动机的强度。具体而言，我们给出决策者表现出正向预防性储蓄动机的充分条件。[18]

推论 7.5。假设代理人具有由(16)描述的 *Kreps–Porteus* 偏好。当 $\nu_{11} \le 0$， $u^*_{11} < 0$， $u^*_{111} \ge 0$，且 $\phi_{11} \le 0$时，代理人表现出正向预防性储蓄动机。

8. 结论

研究者已提出大量 MCS 结果，适用于决策者具有期望效用的情形。我们着重展示可用于推广这些结果的技术。我们关注与Athey [2002], 第三节相对应的条件，因为我们假设行动空间和参数空间都是标量。之所以如此，是因为这些表述涵盖了风险下比较静态的主要应用。我们可以推广本文的方法（例如，允许行动集或参数集为多维），也可以对其加以专门化（例如，假设收益拟凹，或满足斯彭斯–米尔利斯单交叉条件）；这些情形对应于文献中的其他既有结果（包括Athey [2002]的其他章节）。我们的方法清晰地展示了如何以直接明了的方式做到这一点。

表 1 总结了我们第 6节的结果。它突出了两点。首先，前 1 至 3 行与第 4 至 6 行自然对应（体现在第二、三、四列的假设方面）。为获得 MCS，前 1 至 3 行的结果

[18]推论 7.5与Gollier [2001, 命题 67]一致。在我们的框架中，我们还可以得到预防性储蓄动机强度的局部度量，并推导出类似于 Kimball 和 Weil [2009]中命题 3 和 4 的结果；具体细节从略。

命题	假设 于 $H(s;x)$	假设 on v	假设 on V	结论	欧盟结果
6.1	H 在 $(-x;s)$ 中是 SC2, 在 x 中可微	$v_1 \geq 0$ 并且是对数超模 在 $(s,\ \theta)$ $\forall x$	Hadamard	U_1 是 SC1 in θ	Athey [2002] 命题 2 (ii)
6.2	h 在 $(x;s)$ 中是 SC2, 关于 x 可微	$v \geq 0$ 且是对数超模 在 $(s,\ \theta)$ 中 $\forall x$	Hadamard	U_1 是 SC1 in θ	Athey [2002] 命题2 (i)
6.2	$\int_{-\infty}^{s} H\ (t;\ x)\ dt$ 在 $(-x;\ s)$ 中是 SC2, H 在 x 中可微 , $\int sd(H(s;\hat{x}) - H(s;x)) = 0$	$-v_{11} \geq 0$, 且为对数超模 在 $(s,\ \theta)$ $\forall x$。	Hadamard	U_1 是 SC1 in θ	Athey [2002] 命题 2 (iii)
6.3	H 在 $(-x;s)$ 中满足 SC2	$v_1 \geq 0$ 且具有对数超模性 对所有 $\hat{x} > x$, 在 $(s,\ \theta,\ \alpha)$ 中	Gâteaux	U 是 SC2 在 $(x;\theta)$ 中	Athey [2002] 命题 2 (ii)
6.3	$h(s;\ x)$ 在 $(x;s)$ 中是 SC2	$v \geq 0$, 且为对数超模 对所有 $\hat{x} > x$, 在 $(s,\ \theta,\ \alpha)$ 中	Gâteaux	U 是 SC2 在 $(x;\theta)$ 中	Athey [2002] 命题2 (i)
6.3	$\int_{-\infty}^{s} H(t;\ x)dt$ 在 $(-x;s)$ 中是 SC2 $\int sd(H(s;\hat{x}) - H(s;x)) = 0$	$-v_{11} \geq 0$, 且为对数超模 对所有 $\hat{x} > x$, 在 $(s,\ \theta,\ \alpha)$ 中	Gâteaux	U 是SC2 在 $(x;\ \theta)$ 中	Athey [2002] 命题2 (iii)
6.4	H 关于一阶随机占优随 x增加	v 在 $(s,\ \theta)$ 中具有单调超模性 对于所有 $\alpha \in [0,1]$	Gâteaux	U 具有单调超模性 在 $(x,\ \theta)$ 中	

表 1. 我们的结果总结与比较

要求 V 在可微性和拟凹性方面满足比第 4 至 6 行更强的条件。作为补偿，它们对 v施加了较弱的条件；具体而言，对于每个固定的 x，要求 $(s,\ \theta)$ 中满足对数超模，而不是对所有成对的 $\hat{x} > x$，都要求 $(s,\ \theta,\ \alpha)$ 中满足对数超模。

其次，我们将我们的结果与Athey[2002], 的相应结果进行比较，指出了两种自然的条件扩展方式，分别由命题6.1/6.2 和命题 6.3 刻画。在期望效用假设下，这两种方式都得出她的命题 2。命题6.1/6.2 与 6.3中的条件并非彼此包含，而是在偏好的光滑性假设与局部效用函数对数超模性的强度之间作权衡。6.3 显然是对 Athey [2002], 的自然推广。第 7 节表明，事实上，6.1虽然可能不是那么直观的推广，却在应用中实用得多（也更容易检验）。这是因为，命题 6.1 中更强的可微性假设通常几乎适用于所有广泛使用的非期望效用偏好，而且超模性条件比命题 6.3中的条件容易验证得多。[19]

就应用而言，我们最关键的结果是命题 6.1，第 7 节中的三个例子都运用了这一结果。虽然我们着重讨论 U 是

[19]Athey [2002] 指出，与命题 2 (i) 和 (iii) 相对应的结果是她的新发现，而 (ii) 则可追溯至Diamond and Stiglitz [1974]。

拟凹的情形，但这一假设可以放宽；我们也可以改用命题 6.3，分别推导各项应用的结果。从第 6 节的抽象结果中较难看出、但从第 7 节的命题中可以直接看出的一点是：我们对局部效用函数的条件意味着，一般而言，在 MCS 中，我们关心局部效用函数的“方向”（即生成局部效用的导数方向）与取导数的位置之间的相互作用。这一特征在期望效用中并不存在（因为方向导数不依赖于位置——它们就是伯努利效用函数）。此外，由 Machina[1982a]开创的非期望效用风险偏好分析中也没有这一特征。因此，我们的分析揭示了新的直觉，这些直觉源于非期望效用下 MCS 所引发问题之间的相互作用。

最后，我们讨论两个注意事项。首先，我们的条件是充分条件，而非必要条件（请回顾Athey [2002] 中的期望效用对应条件同样是充分但非必要的）。不过，我们推导出的充分条件是紧的，因为违反这些条件便可以构造出 MCS 不成立的反例。以 D-DARA 条件为例。在第7.2节分析的二次偏好（3）背景下，且在参数化形式（4）下，当且仅当 $\alpha \geq \beta$ 时，D-DARA 条件成立。反之，当该条件被违反（即 $\alpha < \beta$）时，我们可以构造出最优投资随财富增加而减少的情形，从而导致单调性违背。[20] 类似地，推论7.3 给出了秩依效用主体具有正向预防性储蓄动机的充分条件。Chateauneuf 等人 [2016, 的命题 2] 表明这些条件也是必要条件。

其次，我们的结果要求偏好具有足够的光滑性。然而，除了期望效用之外，许多非期望效用偏好也满足 Hadamard 可微性：包括二次效用（Chew 等人 [1991]）、加权效用（Chew [1983], 隐式加权效用（Chew [1985]），以及秩依效用（Quiggin [1982]）和累积前景理论（Tversky 和 Kahneman [1992]）（只要加权函数在其定义域上具有有界导数），还有 Kőszegi-Rabin 选择适应个人均衡（Kőszegi和Rabin [2007]）。[21] 当然，我们的模型也排除了一些偏好；例如，失望厌恶（Gul[1991]）偏好甚至不具备 Gâteaux 可微性，谨慎期望效用（Cerreia-Vioglio 等人 [2015]）也是如此。因此，尽管我们的结果适用于许多非期望效用模型，要进一步拓展这些结果仍有许多工作要做。

[20]更具体地说，取 $\alpha = 0.42$，$\beta = 0.57$，$r = 1$，并考虑一个两点分布，其中 $s = 0.5$ 和 $s = 2$各以0.5的概率发生，可得到单调性违背：当 $w = 1.86$时，最大化解为$x^*(w) = 0.944$；而当$\hat{}w = 2.49$时，最大化解为 $x^*(\hat{}w) = 0.941$。[21]关于多种函数形式的精彩讨论，参见Chew 等人 [1987]。

9. 附录：预备引理

我们的 MCS 结果依赖于以下两个技术引理。特别是，引理9.2 提供了共同的数学工具，用于处理行动影响分布的情形（第6节讨论）以及行动影响效用函数的情形（附录A讨论）。

引理 9.1. 设 $v : S \times Y \times A \to \mathbb{R}$。假设对所有 $a \in A$，$v(s, y, a)$ 关于 (s, y) 是超模的。那么

$$\int_A \int_S (v(s, \hat{y}, a) - v(s, y, a)) d(F(s) - G(s)) da \geq 0 \quad \forall F \gtrsim_{FOSD} G, \forall \hat{y} > y. \tag{18}$$

证明。 由于 $v(s, y, a)$ 关于 (s, y) 是超模的，因此，对所有 a，$v(s, \hat{y}, a) - v(s, y, a)$ 关于 s 递增。因此，

$$\int_S (v(s, \hat{y}, a) - v(s, y, a)) d(F(s) - G(s)) \geq 0 \quad \forall a \in A, \forall F \gtrsim_{FOSD} G.$$

这意味着 (18)。 □

众所周知，超模函数之和仍为超模函数，对数超模函数之积仍为对数超模函数。然而，单交叉函数之和不一定是单交叉函数。Quah 和 Strulovici [2012] 指出了一种称为符号比率单调性的条件，在该条件下，聚合能够保留单交叉性质。

定义 10. 设 f 和 g 是定义在偏序集 $(S, \geq)$ 上的两个 SC1 函数。若 f 和 g 满足以下条件，则称它们满足**符号比率单调性**：

(i) 对任意满足 $g(s) < 0$ 且 $f(s) > 0$ 的 $s \in S$，对于所有 $\hat{s} > s$，均有 $-\frac{g(\hat{s})}{g(s)} \frac{f(\hat{s})}{f(s)} \geq -\frac{g(\hat{s})}{g(s)}$；且
(ii) 对任意满足 $f(s) < 0$ 且 $g(s) > 0$ 的 $s \in S$，对于所有 $\hat{s} > s$，均有 $-\frac{f(\hat{s})}{f(s)} \frac{g(s)}{g(\hat{s})} \geq -\frac{f(\hat{s})}{g(\hat{s})}$。

下一个引理可由定理 2 推得：Quah 和 Strulovici [2012]。

引理 9.2。 设 $l, k : S \times \Theta \times A \to \mathbb{R}$ 且 $K(\theta) = \int_A \int_S l(s, \theta, a) k(s, \theta, a) ds da$。那么，若 k 在几乎处处意义下关于 (s, θ, a) 为对数超模，且 l 满足以下条件，则 $K(\theta)$ 为 *SC1*：

(i) l 在 (s, θ, a) 上几乎处处满足 *SC1*；*(ii)* $l(s, \theta, a)$ 和 $l(\hat{s}, \theta, \hat{a})$ 这两个关于 θ 的函数，对所有 $(\hat{s}, \hat{a}) > (s, a)$，均满足符号比率单调性；*(iii)* $l(s, \theta, a)$ 和 $l(s, \theta, \hat{a})$ 这两个关于 s 的函数，对所有 $\hat{a} > a$ 及所有 θ，均满足符号比率单调性，

(iv) </style}关于 的函数 (s,θ,a) 和 $l(\hat{}s,\theta,a)$，对所有 $\hat{}s > s$ 及所有 θ，均满足符号比率单调性。

若 $A \subseteq \mathbb{R}$，在 l 与 a 相互独立的特殊情形下，只要 k 关于 $(s,\theta,-a)$ 几乎处处满足对数超模，引理的结论仍然成立，因为条件 *(i)-(iv)* 关于 $-a$ 显然成立。类似地，若 k 与 a 相互独立，只要在条件 *(i)-(iv)* 中用 $-a$ 替换 a，引理的结论仍然成立。

10. 附录：正文结果的证明

引理 5.1 的证明。固定 $\hat{}\theta > \theta$。任取满足以下条件的 $\hat{}x > x$：对于所有 $x' \in [x,\hat{}x] \cap X$，$U(\hat{}x,\theta) \geq U(x',\theta)$。我们首先证明 $U(\hat{}x,\hat{}\theta) - U(x,\hat{}\theta) \geq 0$。由于 $U(x,\theta)$ 关于 x 拟凹，因此 $U(x',\theta)$ 从 x 到 $\hat{}x$ 弱递增。由于 U 关于 x 可微，这意味着对于所有 $x \leq x' < \hat{}x$，$U_1(x',\theta) \geq 0$。由于 $U_1(x',\theta)$ 关于 θ 满足 SC1，这意味着对于所有 $x \leq x' < \hat{}x$，$U_1(x',\hat{}\theta) \geq 0$。因此，$U(\hat{}x,\hat{}\theta) - U(x,\hat{}\theta) \geq 0$，证毕。

若 $U(\hat{}x,\theta) > U(x,\theta)$，我们需要证明 $U(\hat{}x,\hat{}\theta) - U(x,\hat{}\theta) > 0$。若 $U(\hat{}x,\theta) > U(x,\theta)$，则集合 $\{x \leq x' \leq \hat{}x | U_1(x',\theta) > 0\}$ 具有正测度。由于 $U_1(x',\theta)$ 关于 θ 是 SC1，这意味着集合 $\{x \leq x' \leq \hat{}x | U_1(x',\theta) > 0\}$ 具有正测度。因此，$U(\hat{}x,\theta) - U(x,\theta) > 0$，证毕。□

命题 *P* 的证明 命题*6.1* 和*6.2*。由式（6）和分部积分可得 at

$$U_1(x,\theta) = \int v(s,\theta,x)h_2(s;x)ds = -\int v_1(s,\theta,x)H_2(s;x)ds$$
$$= v_1(\overline{s},\theta,x)\int sh_2(s;x)ds + \int v_{11}(s,\theta,x)\int_{-\infty}^{s} H_2(t;x)dtds.$$

命题 6.1 和6.2 可直接由上述等式和引理 9.2 得出 . □

命题 6.3 的证明。固定 $\hat{}x > x$。如果假设（1）成立，那么 v 是对数超模，且 $h(s,\hat{}x) - h(s;x)$ 是 SC1。由式（9）和引理 9.2 可知，$U(\hat{}x,\theta) - U(x,\theta)$ 关于 θ 是 SC1。如果命题 6.3 中的假设（2）成立，对式（9）应用分部积分可得

$$U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta) = \int_0^1 \int v_1(s,\theta,\alpha)(H(s;x) - H(s;\hat{x}))dsd\alpha,$$

再次应用假设（2）和引理9.2 即可得到所需结果。命题6.3中关于假设（3）的证明，可通过对（9）进行两次分部积分并应用引理9.2得到。□

命题*6.4* 的证明。由（9）可知，对所有$\hat{\theta} > \theta$,

$$U(\hat{x},\hat{\theta}) - U(x,\hat{\theta}) - \Big(U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta)\Big)$$
$$= \int_0^1 \int (v(s,\hat{\theta},\alpha) - v(s,\theta,\alpha))d(H(s;\hat{x}) - H(s;x))d\alpha.$$

由于 v 关于$(s,\ \theta)$ 对所有 α 和 H 关于 x递增，引理9.1 意味着上述表达式非负，因此，U 是超模的。□

命题*7.1*的证明。设 $z = wr + x(s-r)$ 服从分布 $H(z;\ x) = F_{\tilde{s}}(\frac{z-wr}{x} + r)$。注意，对任意$\hat{x} > x$,

$$-H(z;\hat{x}) - (-H(z;x)) = F_{\tilde{s}}\left(\frac{z-wr}{x} + r\right) - F_{\tilde{s}}\left(\frac{z-wr}{\hat{x}} + r\right)$$
$$\begin{cases} = 0, & \text{if } z \le (w-\hat{x})r, \\ < 0, & \text{if } (w-\hat{x})r < z < wr, \\ = 0, & \text{if } z = wr, \\ > 0, & \text{if } wr < z < \hat{x}(\overline{s}-r) + wr, \\ = 0, & \text{if } z \ge \hat{x}(\overline{s}-r) + wr. \end{cases}$$

因此，$H(z;\ x)$ 几乎处处在 $[(w-\hat{x})r, \hat{x}(s-r)+wr]$上关于 $(-x;\ z)$ 满足 SC2。将这一观察与 $u_1(z,\theta,F)$ 的对数超模性结合，并应用命题 6.1 和引理 5.1，即可得到所需结果。□

推论 7.1 的证明。根据 (2)，风险参数为 θ 的秩依效用主体的局部效用为$u(z,\theta,F) = \int_z^z \omega_1(F(t)\ \theta)du^*(t,\theta)$。因此，$u_1(z,\theta,F) = \omega_1(F(\overline{z})\ \theta)u_1^*(z,\theta)$ 几乎处处存在，特别是在 F 的每个连续点上都存在。由于 $F(z)$ 随 z 递增，且 ω_1 和 u_1^* 都是对数超模的，$u_1(z,\theta,F)$ 关于 (z,θ) 是对数超模的。根据 Chew 等人的引理 3，[1987], 条件$\omega_1 > 0$ 和 $u_{11}^* < 0$ 保证目标函数可微且关于 x拟凹。由命题 7.1 可直接得出该结果。□

命题 7.2 的证明。令 $F(\cdot;\ x,w)$ 表示结果 $wr + x(s-r)$ 的分布。由于对所有 $\hat{w} > w$，$F(\cdot;\ x,\hat{w}) \gtrsim_{FOSD} F(\cdot;\ x,w)$。于是，D-DARA 意味着 $u_{11}(wr+t,F(\cdot;x,w))\ u_1(wr+t,F(\cdot;x,w))$ ~~随 w 递增~~。也就是说，对所有 x，$u_1(wr+t,F(\cdot;\ x,w))$ 关于 (t,w) 具有对数超模性。按照命题 7.1 证明中的相同论证，$H(t;x) = F_{\tilde{s}}(\frac{t}{x} + r)$ 关于 $(-x;t)$ 几乎处处具有 SC2 性。于是，命题 6.1 推出所需结果。□

10.1. **第 7.3 节附录**。

引理 10.1。 假设 V 是 *Hadamard* 可微的。命题 7.3 的假设（*1*）意味着 $dV(\theta,F_{y+\tilde{t}})/dy$ 对所有 $\tilde{t}$ 都关于 y 严格递减。

证明。 固定 y、 $\tilde{t}$ 和 $\hat{s}>s$。令 $F_{\alpha,s,\hat{s}}=(1-\alpha)F_{y+\tilde{t}+s}+\alpha F_{y+\tilde{t}+\hat{s}}$。Hadamard 可微性意味着

$$\begin{aligned}&\frac{d\overline{V}(\theta,F_{y+\tilde{t}+\hat{s}})}{dy}-\frac{d\overline{V}(\theta,F_{y+\tilde{t}+s})}{dy}\\&=\int_0^1\int\left(\frac{d\overline{u}(y+t+\hat{s},\theta,F_{\alpha,s,\hat{s}})}{dy}-\frac{d\overline{u}(y+t+s,\theta,F_{\alpha,s,\hat{s}})}{dy}\right)dF_{\tilde{t}}(t)d\alpha<0.\end{aligned}$$

该不等式由命题 7.3 的假设（1）以及 $\hat{s}>s$ 得出。 □

命题 7.3 的证明。 固定 y。由于 V 是 Hadamard 可微的，我们有

$$\frac{\partial\overline{V}(\theta,F_{y+x\tilde{s}})}{\partial x}=\int s\overline{u}_1(y+xs,\theta,F_{y+x\tilde{s}})dF_{\tilde{s}}(s).$$

Then

$$U_1(x,\theta)=-\frac{\partial^2\overline{V}(\theta,F_{y+x\tilde{s}})}{\partial x\partial y}=\int sf_{\tilde{s}}(s)\left(-\frac{d\overline{u}_1(y+xs,\theta,F_{y+x\tilde{s}})}{dy}\right)ds. \tag{19}$$

注意到

$$U_1(0,\theta)=-\frac{d\overline{u}_1(y,\theta,\delta_y)}{dy}\int sf_{\tilde{s}}(s)ds.$$

由假设（1）和 $\mathrm{E}s>0$，我们有 $U_1(0,\theta)>0$。因此，最优 $x>0$。由于 $sf_{\tilde{s}}(s)$ 关于 s 是 SC1，且根据假设 (2)，$-du_1(y+xs,\theta,F_{y+x\tilde{s}})/dy$ 关于 (s,θ) 是对数超模，引理 9.2 蕴含 $U_1(x,\theta)$ 关于 θ 是 SC1。引理 5.1 蕴含 x 的最优选择随 θ 递增。□

命题 7.4 的证明。考虑代理人 θ 求解最大化问题 (12)。由于 $du_1(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})/dy<0$，引理 10.1 表明，$dV(\theta,F_{y+\tilde{t}})/dy$ 对所有 $\tilde{t}$ 而言均关于 y 严格递减。根据一阶条件 (13)，若对所有 y 及零均值风险 $\tilde{\varepsilon}$ 均有 $\partial V(\theta,F_{y+\tilde{\varepsilon}})/\partial y\geq\partial V(\theta,\delta_y)/\partial y$，则风险 $\tilde{\varepsilon}$ 会导致额外储蓄。令 $F_{\alpha,y}=(1-\alpha)\delta_y+\alpha F_{y+\tilde{\varepsilon}}$。根据 Hadamard 可微性，

$$\overline{V}(\theta,F_{y+\tilde{\varepsilon}})-\overline{V}(\theta,\delta_y)=\int_0^1\left(\int\overline{u}(y+\varepsilon,\theta,F_{\alpha,y})dF_{\tilde{\varepsilon}}(\varepsilon)-\overline{u}(y,\theta,F_{\alpha,y})\right)d\alpha.$$

因此，

$$\frac{\partial\overline{V}(\theta,F_{y+\tilde{\varepsilon}})}{\partial y}-\frac{\partial\overline{V}(\theta,\delta_y)}{\partial y}=\int_0^1\left(\int\frac{d\overline{u}(y+\varepsilon,\theta,F_{\alpha,y})}{dy}dF_{\tilde{\varepsilon}}(\varepsilon)-\frac{d\overline{u}(y,\theta,F_{\alpha,y})}{dy}\right)d\alpha\geq0.$$

最后一个不等式由 $du_{11}(y+\varepsilon,\theta,F_{\alpha,y})/dy\cdot(\varepsilon-y)\geq0$ 对所有 y,ε 以及 α 均成立可得。因此，代理人 θ 的最优储蓄增加。 □

推论 7.3 的证明。 注意，局部效用函数为 $u(z,\theta,F)=\int_z^z \omega_1(F(s)\ \theta)du^*(s,\theta)$。对于任意 y, $t\in[t,t]$ 以及 $F_{\tilde{t}}\in\Delta[t,t]$，我们有

$$\frac{d\overline{u}(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})}{dy}=\int_{\underline{t}}^{t}\omega_1(F_{\tilde{t}}(s),\theta)u_{11}^*(y+s,\theta)ds.$$

由于 $\omega_1>0$ 且 $u_{11}^*<0$，我们得到$du(y+t,\ \theta,\ F_{y+\tilde{t}})\ dy$ 关于 t严格递减，也就是说，命题7.3的假设（1）成立。注意

$$\frac{d\overline{u}_1(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})}{dy}=\omega_1(F_{\tilde{t}}(t),\theta)u_{11}^*(y+t,\theta)\quad \text{a.e.} \tag{20}$$

Then

$$\frac{d\overline{u}_{11}(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})}{dy}=\omega_{11}(F_{\tilde{t}}(t),\theta)f_{\tilde{t}}(t)u_{11}^*(y+t,\theta)+\omega_1(F_{\tilde{t}}(t),\theta)u_{111}^*(y+t,\theta)\geq 0, \tag{21}$$

其中 $f_{\tilde{t}}$ 是 t 的概率密度函数，且该不等式由 $\omega_{11}\leq 0$， $u_{11}^*<0$和 $u_{111}^*\geq 0$推出。根据命题7.4，代理人 θ 具有正的预防性储蓄动机。□

推论7.4的证明。我们首先验证目标函数关于 x是拟凹的。由（19）可得

$$U_1(x,\theta)=\int sf_{\tilde{s}}(s)\omega_1(F_{\tilde{s}}(s),\theta)(-u_{11}^*(y+xs,\theta))ds.$$

显然， U_1 随着 x 递减，因为 $u_{111}^*\geq 0$。因此， U 关于 x是拟凹的。

假设 $\omega(\cdot,\ \theta)$是 $\omega(\cdot,\ \hat{\theta})$的凹变换，且 $u_1^*(\cdot,\ \theta)$是 $u_1^*(\cdot,\ \hat{\theta})$的凸变换，则可得

$$-\frac{\omega_{11}(z,\theta)}{\omega_1(z,\theta)}\geq-\frac{\omega_{11}(z,\hat{\theta})}{\omega_1(z,\hat{\theta})}\quad\text{and}\quad-\frac{u_{111}^*(z,\theta)}{u_{11}^*(z,\theta)}\geq-\frac{u_{111}^*(z,\hat{\theta})}{u_{11}^*(z,\hat{\theta})}\quad\forall z.$$

运用（20）和（21），我们得到

$$-\frac{d\overline{u}_{11}(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})/dy}{d\overline{u}_1(y+t,\theta,F_{y+\tilde{t}})/dy}\geq-\frac{d\overline{u}_{11}(y+t,\hat{\theta},F_{y+\tilde{t}})/dy}{d\overline{u}_1(y+t,\hat{\theta},F_{y+\tilde{t}})/dy}\quad\forall y,t,\tilde{t}.$$

By 命题 7.3，代理人 θ 表现出更强的预防性储蓄动机 . □

推论 7.5 的证明。 由于 $\nu_{11}\leq 0$，命题 7.4 证明，由 $\tilde{\varepsilon}$所代表的风险将在 $du_{11}\ (y+t,\ F_{y+\tilde{t}})\ dy\geq 0$ 时引发额外储蓄。根据 (17)，我们知道

$$\begin{aligned}&\frac{du_{11}(y+t,F_{y+\tilde{t}})}{dy}\\=&u_{111}^*(y+t)\phi_1\left(\mathbb{E}\left[u^*(y+\tilde{t})\right]\right)+u_{11}^*(y+t)\phi_{11}\left(\mathbb{E}\left[u^*(y+\tilde{t})\right]\right)\mathbb{E}\left[u_1^*(y+\tilde{t})\right].\end{aligned}$$

显然， $u_{11}^*<0$、 $u_{111}^*\geq 0$ 和 $\phi_{11}\leq 0$ 共同意味着 $du_{11}\ (y+t,\ F_{y+\tilde{t}})\ dy\geq 0$，正如所需。 □

参考文献

M. Allais。《涉及风险的选择实证理论基础：对美国学派假设与公理的批判（1952）》。《施普林格》，1979 年。B. Andrews 和 C. Hopper。《黎曼几何中的里奇流：可微 1/4 挤压球面定理的完整证明》。《施普林格》，2010 年。K. J. Arrow。风险承担理论的若干方面。《风险承担理论论文集》，1965年。S. Athey。不确定性下的单调比较静态。《经济学季刊》，117(1)：187–223，2002年。S. Cerreia-Vioglio、D. Dillenberger 和 P. Ortoleva。谨慎期望效用与确定性效应。《计量经济学》，83(2)：693–728，2015。《S. Cerreia-Vioglio、F. Maccheroni 和 M. Marinacci。没有独立性公理的随机占优分析。《管理科学》，63(4)：1097–1109，2017年。S. Cerreia-Vioglio、F. Maccheroni 和 M. Marinacci。模糊厌恶与财富效应。《经济理论杂志》，199：104898，2022年。A. Chateauneuf、G. Lakhnati 和 E. Langlais。秩依效用框架下储蓄的预防性动机与审慎性。《经济理论》，61(1)：169–182，2016年。F. Cherbonnier 和 C. Gollier。模糊性下的递减厌恶。《经济理论杂志》，157：606–623，2015。S. H. Chew。准线性均值的推广：在收入不平等测度和解决阿莱悖论的决策理论中的应用。《计量经济学：计量经济学会杂志》，页码 1065–1092，1983。S. H. Chew。隐式加权与半加权效用理论、M 估计量，以及不确定拍卖物品的第二价格拍卖中的非需求揭示。技术报告，1985。S. H. Chew 和 N. Nishimura。可微性、比较静态与非期望效用偏好。《经济理论杂志》，56(2)：294–312，1992。S. H. Chew、E. Karni 和 Z. Safra。具有秩依赖概率的期望效用理论中的风险厌恶。《经济理论杂志》，42：370，1987。S. H. Chew、L. G. Epstein 和 U. Segal。混合对称性与二次效用。《计量经济学：计量经济学会杂志》，页码 139–163，1991。R. Corrao、D. Fudenberg、D. Levine 等。对抗性预测者、意外事件与随机化。技术报告，David K. Levine，2022年。E. Dekel。不确定性下偏好的公理化刻画：弱化独立性公理。《经济理论杂志》，40(2)：304–318，1986年。P. A. Diamond 和 J. E. Stiglitz。风险增加与风险厌恶。《经济理论杂志》，8(3)：337–360，1974年。P. Dziewulski 和 J. K.-H. Quah。线性目标下的比较静态：正规性、互补性与多先验信念排序。《计量经济学》，92(1)：167–200，2024 年。

I. Gilboa 和 D. Schmeidler。具有非唯一先验的最大最小期望效用。《数学经济学杂志》，18：141–153，1989年。C. Gollier。《风险与时间经济学》。麻省理工学院出版社，2001年。C. Gollier。投资组合选择与资产价格：模糊厌恶的比较静态。《经济研究评论》，78(4)：1329–1344，2011年。F. Gul。失望厌恶理论。《计量经济学：计量经济学会杂志》，第667–686页，1991年。M. Haliassos 和 C. Hassapis。非期望效用、储蓄与投资组合。《经济学杂志》，111(468)：69–102，2001年。L. P. Hansen 和 T. J. Sargent。鲁棒控制与模型不确定性。《美国经济评论》，91(2)：60–66，2001年。M. Kimball。小额与大额情形下的预防性储蓄。《计量经济学》，58(1)：53–73，1990年。M. Kimball 和 P. Weil。跨时间与可能情形的预防性储蓄与消费平滑。《货币、信贷与银行杂志》，41(2-3)：245–284，2009年。M. S. Kimball。持有资产的预防性动机，1991。P. Klibanoff、M. Marinacci 和 S. Mukerji。模糊情境下决策的平滑模型。《计量经济学》，73：1849–1892，2005年。B. Kőszegi 和 M. Rabin。参照点依赖的风险态度。《美国经济评论》，97(4)：1047–1073，2007年。D. Kreps 和 E. Porteus。不确定性的时间分解与动态选择理论。《计量经济学》，46(1)：185–200，1978年。F. Maccheroni、M. Marinacci 和 A. Rustichini。模糊厌恶、稳健性与偏好的变分表示。《计量经济学》，74：1447–1498，2006年。M. J. Machina。没有独立性公理的“期望效用”分析。《计量经济学：计量经济学会杂志》，第277–323页，1982a。M. J. Machina。递减风险厌恶的更强刻画。《计量经济学》，第1069–1079页，1982b年。M. J. Machina。时间风险与诱导偏好的性质。《经济理论杂志》，33(2)：199–231，1984年。M. J. Machina。“局部效用函数”的基数性质。载于《风险、决策与理性》，第339–344页。施普林格，1988年。M. J. Machina。比较静态与非期望效用偏好。《经济理论杂志》，47(2)：393–405，1989年。C. Menezes、C. Geiss 和 J. Tressler。下行风险递增。《美国经济评论》，70(5)：921–932，1980年。P. Milgrom 和 C. Shannon。单调比较静态。《计量经济学：计量经济学会杂志》，第157–180页，1994年。

P. R. Milgrom 和 R. J. Weber。拍卖与竞争性投标理论。《计量经济学：计量经济学会杂志》，第1089–1122页，1982。X. Mu、L. Pomatto、P. Strack 和 O. Tamuz。单调可加统计量。《计量经济学》，92(4)：995–1031，2024 年。M. Nashed。非线性算子的可微性及相关性质：微分在非线性泛函分析中的作用。载于《非线性泛函分析与应用》，第103–309页。爱思唯尔，1971。W. S. Neilson。非线性偏好下的比较静态导数。《数学经济学杂志》，24(1)：45–57，1995年。M. B. Ormiston 和 E. E. Schlee。风险下决策模型之间的比较静态检验。《数学经济学杂志》，32(2)：145–166，1999年。J. Pratt。小额与大额情形下的风险厌恶。《计量经济学》，32(1)：122–136，1964年。J. K.-H. Quah 和 B. Strulovici。比较静态、信息性与区间支配序。《计量经济学》，77(6)：1949–1992，2009年。J. K.-H. Quah 和 B. Strulovici。单交叉性质的聚合。《计量经济学》，80(5)：2333–2348，2012年。J. Quiggin。预期效用理论。《经济行为与组织杂志》，3(4)：323–343，1982。J. Quiggin。秩依期望效用理论的比较静态。《风险与不确定性杂志》，4：339–350，1991年。J. Quiggin。《广义期望效用理论：秩依模型》。施普林格科学与商业媒体公司，2012年。M. Rabin。风险厌恶与期望效用理论：校准定理。《计量经济学》，68：1281–1292，2000年。S. A. Ross。小额与大额情形下更强的风险厌恶度量及其应用。《计量经济学：计量经济学会杂志》，第621–638页，1981年。P. A. Samuelson。《经济分析基础》。《科学与社会》，13(1)，1948年。T. Sarver。动态混合厌恶偏好。《计量经济学》，86(4)：1347–1382，2018年。E. E. Schlee。非期望效用理论中多变量比较静态的保持。《风险与不确定性杂志》，9：257–272，1994年。E. E. Schlee。期望效用与非期望效用理论下免赔额保险的比较静态。《日内瓦风险与保险理论论文集》，20：57–72，1995年。A. Shapiro。方向可微性概念。《优化理论与应用杂志》，66：477–487，1990年。T. Strzalecki。乘数偏好的公理基础。《计量经济学》，79(1)：47–73，2011年。D. M. Topkis。在格上最小化次模函数。《运筹学》，26(2)：305–321，1978年。

A. Tversky 和 D. Kahneman。《展望理论的进展：不确定性的累积表示》。《风险与不确定性杂志》，5(4):297–323，1992。M. E. Yaari。《风险下选择的对偶理论》。《计量经济学：计量经济学会杂志》，第95–115页，1987。

附录 A：行动影响效用

回想一下，正文分析的是行动影响状态分布、而参数进入效用函数的情形。在本附录中，我们考虑与之互补的情形，即这两者的作用互换：参数影响分布，而行动影响效用。

在转向这一替代设定的细节之前，我们首先讨论一种同时涵盖本附录和正文分析的表述。一般表述为 $U(x,\theta) = V(\theta, F(\cdot; x,\theta))$，其中 θ 可以直接进入效用函数，而 x 和 θ 也都可能影响关于最终结果的彩票 F。[22] 回顾一下，V 表示定义在彩票上的偏好泛函，其中给定的彩票由二元组 (x,θ) 诱导。对于任意 $\hat{x} > x$，V 的盖托可微性意味着

$$U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta) = \int_0^1 \int u(z,\theta, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\cdot;\theta))d(F(z;\hat{x},\theta) - F(z;x,\theta))d\alpha, \tag{A1}$$

其中 $F_{\alpha,\, x,\, \hat{x}}(\cdot;\ \theta) = (1-\alpha)F(\cdot;\ x,\ \theta) + \alpha F(\cdot;\ \hat{x},\ \theta)$ 对每个 $\alpha \in [0,1]$ 均成立，而 u 是 V 的局部效用函数。作为类比，注意到在期望效用下的等价表述为

$$U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta) = \int u^*(z,\theta)d(F(z;\hat{x},\theta) - F(z;x,\theta)),$$

其中伯努利效用不取决于 F，因此我们不需要对 α 进行积分。然而，式（A1）中的函数形式非常一般，因此，局部效用函数 u 和分布函数 F 满足 MCS 的充分条件难以解释，这也是我们在正文和本附录中分别考察不同情形的原因。

回到这样的情形：x 影响效用，而 θ 影响状态分布。令 s 表示一个状态，状态分布由概率密度函数 $g(s;\theta)$ 和累积分布函数 $G(s;\theta)$ 给出。与论文正文一样，需要考虑两种情形，它们反映了 x 影响效用的不同方式。第一种情形中，行动直接影响局部效用，而不影响结果。这对应于 Machina [1989], 研究的情形，接下来我们将在此运用我们的框架，重现他的结果。稍微滥用一下记号，令结果为 s。~令 $V(x,G(\cdot;\theta))$ 表示偏好泛函，其局部效用函数为 $\tilde{u}(s,x,G)$。关键在于，x 不会影响结果，因此彩票 $G(\cdot;\theta)$ 独立于 x。在这种情况下，~目标函数为 $U(x,\theta) = V(x,G(\cdot;\theta))$。

由于我们研究的是一般的非期望效用偏好，因此不对偏好施加特定的函数形式。当行动 x 不影响结果时，差异 $U(\hat{x},\ \theta) - U(x,\ \theta)$ 无法用局部效用函数表示。因此，我们无法推导出关于局部效用的、有意义的充分条件，使该差异关于 θ 满足 SC1。不过，在这种情况下，我们可以

[22] 请注意，这一表述排除了 x 直接影响效用函数的情形。在这种情况下，差值 $U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta)$ 无法用局部效用函数表示。本附录稍后将对这一情形进行研究。

转而建立使 $U(x,\theta)$ 超模的条件。为此，我们不计算 $U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta)$，而是计算 $U(x,\hat{\theta}) - U(x,\theta)$（对 $\hat{\theta} > \theta$ 而言），该表达式可以表示为局部效用函数的函数。[23] 因此，我们可以找出关于局部效用和分布函数的充分条件，使 U 超模。A3节分析了这种情况。

第二种情况是行动通过结果影响效用。令 $\kappa(s, x)$ 表示状态 s 实现且选择行动 x时的结果。对于 x 的每个选择以及每个参数θ，令 $F(\cdot; x, \theta)$ 表示最终结果上的分布。此时的目标函数为$U(x, \theta) = V(F(\cdot; x, \theta))$，其中局部效用函数为 $u(\kappa(s, x) F(\cdot; x, \theta))$。

A1. **使 $U_1(x, \theta)$ 成为 SC1 的充分性**。首先，我们考虑 U_1 为 SC1 的情形。我们的分析与第6.1节中的分析相似。如上文所述，我们将注意力限定在行动 x 影响结果 $\kappa(s, x)$的情形。

与正文一样，我们首先对 V 作出一个相对较强的可微性假设——Hadamard 可微性。根据 Hadamard 可微性，

$$U_1(x,\theta) = \int u_1(\kappa(s,x), F(\cdot;x,\theta))\kappa_2(s,x)g(s;\theta)ds,$$

其中 $\kappa_2(s, x) = \frac{\partial \kappa(s, x)}{\partial x}$。

命题 A1。假设

（1） V 是 *Hadamard* 可微的；*（2）* $g(s; \theta)$ 几乎处处具有对数超模性；*（3）* $u(z, F)$ 关于 z 严格递增，对于所有 F，$\kappa(s, x)$ 关于 s递增，并且 $\kappa(s, x)$ 在 $(x; s)$ 上几乎处处具有 *SC2*，$\kappa(s, x)$ 关于 x 可微；*（4）* $u_1(z, F)$ 关于 (z, F) 几乎处处具有对数超模性。

则 $U_1(x, \theta)$ 关于 θ具有 *SC1*。

这些假设及结论与命题 6.1平行。假设（2）意味着，θ使较高状态相对而言更有可能发生。在假设（3）中，$u(z, F)$ 关于 z 严格递增，以及 $\kappa(s, x)$ 关于 s 递增，这两个假设都相当无害。假设（4）是一种绝对风险厌恶递减假设，表示局部效用的第二个参数上的局部风险厌恶正在下降。也就是说，$-\frac{u_{11}(z, F)}{u_1(z, F)}$ 关于 F递减。

---

[23]我们可以给出使 $U(x,\theta)$ 超模的条件，因为超模性在 (x,θ) 上具有对称性，即

$$U(\hat{x},\hat{\theta}) - U(x,\hat{\theta}) \geq U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta) \Leftrightarrow U(\hat{x},\hat{\theta}) - U(\hat{x},\theta) \geq U(x,\hat{\theta}) - U(x,\theta)$$

相反，我们可以通过计算 $U(x, \hat{\theta}) - U(x, \theta)$ 来推导超模性的条件。然而，SC2 在 (x, θ) 中并不具有对称性，因此同样的技术并不适用。

A2. **为 SC2 的充分性**。现在我们转而讨论能够保证 U 为 SC2 的条件。同样地，我们将注意力限制在行动 x 影响结果 $\kappa(s,\ x)$ 的情形。

对于任意 $\hat{x} > x$ 和 $\alpha \in [0,1]$，定义 $F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta) = (1-\alpha)F(\cdot;\ x,\theta) + \alpha F(\cdot;\ \hat{x},\theta)$。利用 V 的盖托可微性，我们得到

$$U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta) = \int_0^1 \int (u(\kappa(s,\hat{x}), F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta)) - u(\kappa(s,x), F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta)))dG(s;\theta)d\alpha. \tag{A2}$$

与第6.2节中的论证类似，我们需要使用对Quah 和 Strulovici[2012] 的扩展来聚合局部效用。

我们的第一个结果类似于命题 6.3的条件（1）。

命题A2。假设

（1） V 可盖托微；（2） g（s；θ）几乎处处为对数超模；（3） u（κ（s, x'） $F_{\alpha,\ x,\ \hat{x}}$（θ）对所有 （s, x', α, θ） 几乎处处为对数超模，其中 $\hat{x} > x$ 任意。

那么 U（x, θ） 在 （x；θ） 上具有*SC2*性质。

这些条件的解释与我们在论文正文中给出的类似，只需将 x和 θ互换即可。

我们还可以给出一些条件，而无需要求局部的 u是对数超模的 m.

命题 A3. 假设

(1) V 是盖托可微的；*(2)* $g(s;\theta)$几乎处处对数超模；*(3)* $u(z,F)$关于 z严格递增，对所有 F 均成立； $\kappa(s,x)$关于 s递增，且 $\kappa(s,x)$几乎处处在$(x;s)$上满足 *SC2*；*(4)* 以下条件之一成立：*a.* 对所有 s， $u(\kappa(s,x)\ F)$几乎处处在(x,F)上超模；*b.* 对所有 $\hat{x} > x$， $u_1(z, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$几乎处处在$(z,\alpha,\theta)$上对数超模。

那么 $U(x,\theta)$ 在$(x;\ \theta)$上满足 *SC2*。[24]

假设（1）和（2）完全是标准的。假设（3）确保对于所有 F， $u(\kappa(s,\ x)\ F)$ 在 $(x;\ s)$ 上几乎处处具有 SC2。假设 (2) 和 (3) 共同意味着对于所有 $\hat{\theta} > \theta$、$\hat{x} > x$ 和 $\alpha \in [0,1]$， $F_{\alpha,\ x,\ \hat{x}}(\hat{\theta}) \gtrsim_{FOSD} F_{\alpha,\ x,\ \hat{x}}(\theta)$。

由引理 9.2 可知，若在假设（4b）中将 α 替换为 $-\alpha$ ，命题A3 仍然成立。事实上，我们只需要 $-\frac{u_{11}(z,F_{\alpha,\ x,\hat{x}}(\theta))}{u_1(z,F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))}$ 关于 α单调。

假设（4）确保在我们的设定中可以聚合单交叉性质。显然，在期望效用下，假设（4）自动得到满足。假设（4a）具有很强的限制性。为说明这一点，假设存在 $\hat{x} > x$ 和 s、$\hat{s}$，使得 $\kappa(s, \hat{x}) - \kappa(s, x) < 0 < \kappa(\hat{s}, \hat{x}) - \kappa(\hat{s}, x)$，则假设（4a）要求对于所有 $\hat{F} \gtrsim_{FOSD} F$，

$$u(\kappa(s,\hat{x}),\hat{F}) - u(\kappa(s,x),\hat{F}) \geq u(\kappa(s,\hat{x}),F) - u(\kappa(s,x),F) \quad \text{and}$$
$$u(\kappa(\hat{s},\hat{x}),\hat{F}) - u(\kappa(\hat{s},x),\hat{F}) \geq u(\kappa(\hat{s},\hat{x}),F) - u(\kappa(\hat{s},x),F),$$

这表示 $u(z,F)$ 在 (z,F) 和 $(-z,F)$ 上都是超模的；也就是说，$u(\hat{z},F) - u(z,F)$ 关于 F 是常数。在可微的情况下，假设（4b）的等价表述是，$-\frac{u_{11}(z,F_\alpha,x,\hat{x}(\theta))}{u_1(z,F_\alpha,x,\hat{x}(\theta))}$ 随着 α 和 ~~θ 的增加~~而递减。

A3. 使 U 成为超模的充分性。 我们通过考察 MCS 的最后一个充分条件——即 U 是超模的——来结束本节。

如前所述，如果 x 不影响最终结果的分布，我们就无法用局部效用函数表示 $U(\hat{x},\theta) - U(x,\theta)$。不过，我们可以通过计算 $U(x,\hat{\theta}) - U(x,\theta)$，给出使 U 成为超模的充分条件。当行动 x 不影响结果时，对所有 $\hat{\theta} > \theta$ 和 $\alpha \in [0,1]$，令 $G_{\alpha,\theta,\hat{\theta}}(\cdot) = (1-\alpha)G(\cdot;\theta) + \alpha G(\cdot;\hat{\theta})$。如果 $\tilde{V}$ 是 Gâteaux 可微的，我们有

$$\begin{aligned} U(x,\hat{\theta}) - U(x,\theta) &= \tilde{V}(x, G(\cdot;\hat{\theta})) - \tilde{V}(x, G(\cdot;\theta)) \\ &= \int_0^1 \int \tilde{u}(s,x,G_{\alpha,\theta,\hat{\theta}}(\cdot)) d(G(s;\hat{\theta}) - G(s;\theta)) d\alpha. \end{aligned} \tag{A3}$$

当行动 x 影响结果时，令 $P_{\alpha,\theta,\hat{\theta}}(\cdot;x) = (1-\alpha)F(\cdot;x,\theta) + \alpha F(\cdot;x,\hat{\theta})$。也就是说，$P_{\alpha,\theta,\hat{\theta}}(\cdot;x)$ 是这样一个彩票：在每个状态 s 下，结果为 $\kappa(s,x)$，其概率密度函数由 $(1-\alpha)g(s;\theta) + \alpha g(s;\hat{\theta})$ 给出。于是，根据盖托可微性，我们有

$$\begin{aligned} U(x,\hat{\theta}) - U(x,\theta) &= V(F(\cdot;x,\hat{\theta})) - V(F(\cdot;x,\theta)) \\ &= \int_0^1 \int u(\kappa(s,x), P_{\alpha,\theta,\hat{\theta}}(\cdot;x)) d(G(s;\hat{\theta}) - G(s;\theta)) d\alpha. \end{aligned} \tag{A4}$$

注意，由（A3）和（A4）可知，在这两种情形下，我们只需证明

$$U(x,\hat{\theta}) - U(x,\theta) = \int_0^1 \int v(s,x,\alpha) d(G(s;\hat{\theta}) - G(s;\theta)) d\alpha \tag{A5}$$

关于 x 递增，其中前一种情形下，$v(s,x,\alpha) = \tilde{u}(s,x,G_{\alpha,\theta,\hat{\theta}}(\cdot))$；后一种情形下，$v(s,x,\alpha) = u(\kappa(s,x), P_{\alpha,\theta,\hat{\theta}}(\cdot;x))$。请注意，两种情形的关键区别在于，$x$ 是否进入局部效用函数的彩票论元。

因此，我们旨在给出一组充分条件，使得 $U(x,\hat{\theta}) - U(x,\theta)$ 随x递增。由于超模函数之和仍为超模函数，因此我们无需考虑聚合。下述结果可直接由引理 9.1推出。

命题 A4。假设

(1) 偏好泛函是盖托可微的；(2) $G(\cdot;\hat{\theta}) \gtrsim_{FOSD} G(\cdot;\theta)$ 对所有$\hat{\theta} > \theta$均成立；(3) $v(s,x,\alpha)$ 对所有$\hat{\theta} > \theta$和 $\alpha \in [0,1]$，关于(s,x)是超模的。

那么，$U(x,\theta)$ 关于(x,θ)是超模的。

这些假设的解释与命题 6.4 的解释相同，只是x 和 θ 的角色互换。我们注意到，（3）要求对所有$\alpha \in [0,1]$，$v(s,x,\alpha)$关于(s,x)是超模的。当 x 影响结果时，该条件要求原始局部效用函数$u(\kappa(s,\hat{x})\ F(\cdot;\hat{x},\theta)) - u(\kappa(s,x)\ F(\cdot;x,\theta))$对所有 θ关于 s递增。该假设是否成立，取决于 $u(z,F)$如何依赖于 F，以及 $\kappa(s,x)$如何随 x变化。假设（3）成立的一个充分条件是：对所有 F，$u(\kappa(s,x)\ F)$关于(s,x)是超模的；并且对所有 θ，$u(z,F(\cdot;x,\theta))$关于(z,x)是超模的。[25]

当行动 x 不影响结果时，命题 A4 重现了˜Machina [1989]中的定理 (i)。目标函数 $V(x, G(\cdot;\theta))$ 满足 Machina 所称的“概率分布与控制变量的函数分离”。

A4. 应用：投资组合选择与收益变化。考虑与第 4.1 节相同的投资组合选择问题。与正文不同，现在假设随机收益 s 取决于参数 θ，其累积分布函数为 $G(s;\theta)$，概率密度函数为 $g(s;\theta)$。假设在所有可能的 θ 下，s 的期望收益都超过无风险收益 r。因此，结果函数为 $\kappa(s,x) = wr + x(s-r)$，它在（$x$；$s$）中满足 SC2。此设定对应于 Athey [2002, 第 205] 页中的应用，是风险下选择领域的经典问题之一。

命题 A1 的一个直接应用得出以下结果。

命题 A5. 假设 V 是 *Hadamard* 可微的，且 U 关于 x是拟凹的。进一步假设，对于所有 F，$u(z,F)$ 关于 z严格递增，$u_1(z,F)$ 几乎处处具有对数超模性，且$g(s;\theta)$ 几乎处处具有对数超模性。那么，θ 增加会使最优选择 x增加。

$g(s;\theta)$ 的对数超模意味着 s 和 θ 是关联的。[26] 例如，θ 可以是代理人收到的信号，且该信号与收益 s关联，因此信号越强，较高收益相对而言就越有可能出现。$u_1(z,F)$ 的对数超模等价于 $-^{u_{11}}(z,F)\ u_1(z,F)$ 随着F递减，这代表一种绝对风险厌恶递减的形式——也就是说，代理人在较好的分布下进行评估时，风险厌恶程度会降低。因此，命题 A5 指出，当代理人

[25]众所周知，超模性在单调变换下并不保持，因此 κ的超模性并不能确保 $u(\kappa(s,x)\ F)$具有超模性。[26] Milgrom 和 Weber [1982] 证明，一组随机变量相互关联，当且仅当其联合密度具有对数超模性。

收到关于风险资产收益的更有利信号，并且在较好的分布下进行评估时风险厌恶程度较低，那么她就会增加对风险资产的投资。

Athey [2002, 命题 3] 还考虑了伯努利效用取决于参数的情形。在非期望效用偏好下，参数 θ 会自然地通过分布函数进入局部效用函数。因此，对效用如何依赖于 θ 的限制，在我们的框架中就转化为对局部效用如何依赖于分布的限制。Athey 条件（B）在命题3中的对应条件是 $u_1(z, F)$ 关于 (z, F)是对数超模的。

A5. **证明**。

命题 A1 的证明。由于 $g(s;\theta)$ 是对数超模的，我们有 $G(\cdot;\hat{\theta}) \gtrsim_{FOSD} G(\cdot;\theta)$，因此，对所有 $\hat{\theta} > \theta$， $F(\cdot; x, \hat{\theta}) \gtrsim_{FOSD} F(\cdot; x, \theta)$。结合 u_1 的对数超模性，我们知道 $u_1(z, F(\cdot; x, \theta))$ 关于 (z, θ) 是对数超模的。由于对所有 F， $u(z, F)$ 关于 z 严格递增，且 $\kappa(s, x)$ 关于 s 递增，我们也得到 $u_1(\kappa(s, x)\ F(\cdot; x, \theta))$ 关于 (s, θ) 是对数超模的。 $\kappa(s, x)$ 的 SC2 蕴含 $\kappa_2(s, x)$ 关于 s 是 SC1。于是，结论可由引理 9.2 立即推出。□

命题A2的证明。根据假设 (2) 和 (3)，函数 $u(\kappa(s, x')\ F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))g(s;\theta)$ 几乎处处满足对数超模性。根据 Athey 中的引理2， [2002], 函数 $A(x', \theta) = \int_0^1 \int u(\kappa(s, x')\ F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))g(s;\theta)dsd\alpha$关于 (x', θ) 满足对数超模性。这意味着

$$\frac{A(\hat{x}, \hat{\theta})}{A(x, \hat{\theta})} \geq \frac{A(\hat{x}, \theta)}{A(x, \theta)} \quad \forall \hat{\theta} > \theta. \tag{A6}$$

根据 (A2)，我们有 $U(\hat{x}, \theta) - U(x, \theta) = A(\hat{x}, \theta) - A(x, \theta)$。那么，对于任意 $\hat{\theta} > \theta$，若 $U(\hat{x}, \theta) - U(x, \theta) = A(\hat{x}, \theta) - A(x, \theta) \geq (>)0$，则由 (A6) 可得 $U(\hat{x}, \hat{\theta}) - U(x, \hat{\theta}) = A(\hat{x}, \hat{\theta}) - A(x, \hat{\theta}) \geq (>)0$。□

引理 *A1.* 假设命题 *A3* 中的假设（*3*）成立。固定 $\hat{x} > x$。那么，对于所有 F,$m(s, F) = u(\kappa(s, \hat{x})\ F) - u(\kappa(s, x)\ F)$，它关于 s 满足 *SC1*。此外，若存在 $s^* > s_*$ 使得

$$\kappa(s^*, \hat{x}) - \kappa(s^*, x) > 0 > \kappa(s_*, \hat{x}) - \kappa(s_*, x), \tag{A7}$$

那么，存在 $s_0 \in [s_*, s^*]$ 使得 $m(\hat{s}, F) \geq 0 \geq m(s, F)$ 对所有 F 和 $\hat{s} > s_0 > s$ 均成立。

证明。 由于 κ 关于 $(x; s)$ 满足 SC2，且 u 关于 z 严格递增，因此局部效用函数 $u(\kappa(s, x)\ F)$ 对所有 F 关于 $(x; s)$ 满足 SC2。因此， $m(s, F)$ 关于 s 满足 SC1。

假设存在这样的 s^*, s_*。由于 κ 关于 $(x; s)$ 满足 SC2，因此存在 $s_0 \in [s_*, s^*]$ 使得

$$\kappa(\hat{s}, \hat{x}) - \kappa(\hat{s}, x) \geq 0 \geq \kappa(s, \hat{x}) - \kappa(s, x) \quad \forall \hat{s} > s_0 > s.$$

由于 u严格递增，对于所有 F和 $\hat{s} > s_0 > s$，我们有 $m(\hat{s},\ F) \geq 0 \geq m(s,\ F)$。 □

命题 *A3* 的证明。 固定 $\hat{x} > x$。若不存在 $s^* > s_*$ 使得（A7）成立，这意味着以下两种情况之一：要么 $m(s, F) \geq 0$ 对所有 s 和 F 均成立；要么 $m(s, F) \leq 0$ 对所有 s 和 F 均成立，此时结论显然成立。因此，我们假设这样的 $s^* > s_*$ 确实存在。

首先，假设（4a）成立。对于任意 $\hat{\theta} > \theta$， $g(s;\theta)$ 几乎处处对数超模这一事实意味着，对于所有 α， $F_{\alpha,x,\hat{x}}(\hat{\theta}) \gtrsim_{FOSD} F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta)$。根据假设（4a），我们知道 $m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$ 是 θ 的递增函数。根据引理 A1，对于所有 F， $m(s, F)$ 关于 s 满足 SC1，且存在 s_0，使得对于所有 F 和 $\hat{s} > s_0 > s$， $m(\hat{s}, F) \geq 0 \geq m(s, F)$。取 $s < s_0 < \hat{s}$。由于 $g(s;\theta)$ 几乎处处对数超模，

$$\frac{g(\hat{s};\hat{\theta})}{g(s;\hat{\theta})} \geq \frac{g(\hat{s};\theta)}{g(s;\theta)} \quad \forall \hat{\theta} > \theta.$$

结合 $m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$ 关于 θ 递增这一事实，我们得到

$$-\frac{m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))g(s;\theta)}{m(\hat{s}, F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta))g(\hat{s};\theta)} \geq -\frac{m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\hat{\theta}))g(s;\hat{\theta})}{m(\hat{s}, F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\hat{\theta}))g(\hat{s};\hat{\theta})} \quad \forall \hat{\alpha}, \alpha, \forall \hat{\theta} > \theta.$$

因此，函数 $m(s,F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))g(s;\theta)$ 和 $m(\hat{s}, F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta))g(\hat{s};\theta)$ 关于 θ 满足带符号比率单调性。于是，根据 (A2) 以及 Quah 和 Strulovici 的定理 1 [2012]，可知 $U(\hat{x}, \theta) - U(x, \theta)$ 关于 θ 满足 SC1。

反之，假设（4b）成立。由（A2）可知，我们只需证明$m(s,F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$满足引理 9.2中的条件（i）—（iv）。由于 u 关于 z严格递增，因此m 是正、负还是零，完全由 s决定。根据引理 A1，$m(s, F)$关于s满足SC1。因此， $m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$在$(s, \alpha, \theta)$上具有SC，即满足引理 9.2中的条件（i）。此外，由于对于任意$\hat{\alpha} > \alpha$ 和 θ， $m(s,F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$与 $m(s,F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta))$必定符号相同，因此， s的函数 $m(s,F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$和 $m(s, F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta))$显然满足符号比率单调性。因此，满足引理 9.2中的条件（iii）。

现在，对于所有 $(\hat{s}, \hat{\alpha}) > (s, \alpha)$，函数 $m(s,F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$ 和 $m(\hat{s},F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta))$ 关于 θ 满足符号比率单调性，从而验证引理 9.2 (ii)；对于所有 $\hat{s} > s$，函数 $m(s,F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$ 和$m(\hat{s}, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$ 关于 α 满足符号比率单调性，从而验证 (iv)。定义 $h(a, b, F) = \int_a^b u_1(y, F)dy$。由于$u_1(y, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$ 关于 (y, α, θ) 是对数超模的，因此对于所有 $a < b$， $h(a, b,F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$ 关于 (a, b, α, θ) 是对数超模的。对于任意 $s \geq s_0$，我们知道 $\kappa(s, \hat{x}) \geq \kappa(s, x)$。由于 κ 随 s 增大，这意味着对于所有 $s \geq s_0$， $m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$ 关于 (s, α, θ) 是对数超模的，其中 $m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta)) = h(\kappa(s, x) - \kappa(s, \hat{x}), F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$。若 $s < s_0$，则 $m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta)) = -h(\kappa(s, \hat{x}) - \kappa(s, x), F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$，并且 $-m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$ 关于 (s, α, θ) 是对数超模的。

令 s_0 如引理 A1 中所定义。取 $s < s_0 < \hat{s}$、 $\theta < \theta$、 $\alpha < \hat{\alpha}$。我们知道 $m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta)) \leq 0$，且 $m(\hat{s},F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta)) \geq 0$。由于对于所有 $s' \geq s_0$， $m(s', F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$ 关于 (s', α, θ) 是对数超模的，因此我们得到

$$\frac{m(\hat{s}, F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\hat{\theta}))}{m(\hat{s}, F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta))} \geq \limsup_{s' \downarrow s_0} \frac{m(s', F_{\alpha,x,\hat{x}}(\hat{\theta}))}{m(s', F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))}. \tag{A8}$$

由于对于所有 $s' < s_0$，$-m(s', F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$ 关于 (s', α, θ) 是对数超模的，因此我们得到

$$\liminf_{s' \uparrow s_0} \frac{-m(s', F_{\alpha,x,\hat{x}}(\hat{\theta}))}{-m(s', F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))} \geq \frac{-m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\hat{\theta}))}{-m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))}. \tag{A9}$$

合并不等式（A8）和（A9）可得

$$-\frac{m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))}{m(\hat{s}, F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta))} \geq -\frac{m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\hat{\theta}))}{m(\hat{s}, F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\hat{\theta}))}.$$

因此，引理 9.2 中的条件 (ii) 得到满足。类似地，由于对于所有 $s' \geq s_0$，$m(s', F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$ 在 (s', α, θ) 中是对数超模的，我们得到

$$\frac{m(\hat{s}, F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta))}{m(\hat{s}, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))} \geq \limsup_{s' \downarrow s_0} \frac{m(s', F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta))}{m(s', F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))}. \tag{A10}$$

由于对于所有 $s' < s_0$，$-m(s', F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))$ 在 (s', α, θ) 中是对数超模的，我们得到

$$\liminf_{s' \uparrow s_0} \frac{-m(s', F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta))}{-m(s', F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))} \geq \frac{-m(s, F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta))}{-m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))}. \tag{A11}$$

合并不等式（A10）和（A11）可得

$$-\frac{m(s, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))}{m(\hat{s}, F_{\alpha,x,\hat{x}}(\theta))} \geq -\frac{m(s, F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta))}{m(\hat{s}, F_{\hat{\alpha},x,\hat{x}}(\theta))}.$$

因此，条件 (iv　　）在引理 9.2中得到满足。于是，结论可直接由引理 9.2得出。 □

命题 *A4* 的证明。 固定 $\hat{x} > x$ 和 $\hat{\theta} > \theta$。由（A5）可得

$$\begin{aligned} &U(\hat{x}, \hat{\theta}) - U(\hat{x}, \theta) - [U(x, \hat{\theta}) - U(x, \theta)] \\ &= \int_0^1 \int (v(s, \hat{x}, \alpha) - v(s, x, \alpha)) d(F(s; \hat{\theta}) - F(s; \theta)) d\alpha. \end{aligned}$$

根据假设 (2) 和 (3)，引理9.1 可推出

$$U(\hat{x}, \hat{\theta}) - U(\hat{x}, \theta) - [U(x, \hat{\theta}) - U(x, \theta)] \geq 0,$$

如所需。 □

命题 *A5* 的证明。 根据 Hadamard 可微性，

$$U_1(x, \theta) = \int u_1(wr + x(s-r), F(\cdot; x, \theta))(s-r) g(s; \theta) ds,$$

其中，$F(\cdot; x, \theta)$ 是结果 $wr + x(s-r)$ 的分布。由于 $u_1(z, F) > 0$，且在 θ 下 s 的期望收益大于 r，这意味着 $U_1(0, \theta) > 0$。最优投资 $x > 0$。因此，结果 $\kappa(s, x) = wr + x(s-r)$ 随 s 增加，并且关于 (x, s) 满足 SC2。因此，命题 A1 中的假设（3）得到满足。所需结果随后直接由命题 A1 和引理 5.1 得出。□

附录B：模糊的单调比较静态

在本节中，我们研究模糊偏好的 MCS，重点关注 Hadamard 可微的模糊偏好。我们认为，在这种情形下，自然的解释是：行动影响结果，而参数影响模糊偏好；由于模糊偏好被视为外生因素，因此不应受到行动的影响。

为处理模糊偏好，我们需要重新定义我们的定义域。令 S 表示状态空间。令 $\kappa(s,x)$表示在状态 s实现且选择行动 x时的结果。假设 $\kappa(s,x)$关于 s 递增且可微。令 u^* 为伯努利效用函数，并假设 u^* 可微、严格递增且严格凹。令 $\gamma(s;x) := u^*(\kappa(s,x))$，其可视为代理人的行为，即在给定每个 x的情况下，将状态空间 S 映射到效用R的映射。令 $\Gamma := \{\gamma(\cdot;x)|x \in X\}$为赋予上确界范数的可行行为集合，且代理人对 Γ具有偏好。我们假设参数 θ 影响代理人的模糊偏好，并令 $I(\cdot;\theta) : \Gamma \to \mathrm{R}$为代理人的偏好泛函。因此，代理人的目标函数为$U(x,\theta) = I(\gamma(\cdot;\, x);\, \theta)$。

由于偏好泛函 I 会随模糊模型而变化，我们考虑三种特定的模糊模型：变分偏好、平滑模糊偏好和乘数偏好。

B1. **变分偏好**。 我们从 Maccheroni 等人[2006]的变分偏好开始：

$$I(\gamma(\cdot;x);\theta) = \min_{F\in\Delta(S)} \Big(\int_S \gamma(s;x)dF(s) + c(F,\theta) \Big),$$

其中， $c(F,\ \theta)$ 是由 θ 参数化的成本函数。直观而言，代理人从行动 x中获得的效用，是通过在所有概率分布 $\Delta(S)$ 上最小化其期望效用，并将每个分布 F 的成本 $c(F,\ \theta)$ 纳入考虑后得到的。

命题 B1. 假设

(1) $c(F,\theta)$ 关于 F 严格凸，对每个 θ 均成立；(2) $-c(F,\theta)$ 关于 F 超模，对每个 θ 均成立，且关于 (F,θ) 超模；(3) $\gamma(s;x)$ 关于 (s,x) 超模。

那么， $U(x,\theta)$ 关于 (x,θ) 超模。

现在我们来解释命题中的假设。下一个引理表明，假设（1）可确保偏好泛函 Hadamard 可微。[27]

[27] Dziewulski 和 Quah [2024, 命题 9] 在不假设 c严格凸性的情况下，推导出了类似的 MCS 结果。

引理 B1. 如果命题 *B1* 中的假设 *(1)* I 是 *Hadamard* 可微的。[28]

固定 x。 Maccheroni 等人 [2006, 定理 18] 表明

$$U_1(x,\theta) = \int_S \gamma_2(s;x)dF^*(s,\theta),$$

其中 $\{F^*(\cdot,\ \theta)\} = \text{argmin}^{F\in\Delta(S)}(\int_S \gamma(s;\ x)dF + c(F,\ \theta))$。假设 (2) 和 (3) 的作用由下述引理说明。

引理 B2。 固定 x。若命题 *B1* 中的假设 *(2)* 和 *(3)* 成立，则 $F^*(\cdot,\ \hat{}\theta) \gtrsim_{FOSD} F^*(\cdot,\ \theta)$ 对所有 $\hat{}\theta > \theta$均成立。

结合引理 B2 和引理 9.1 可得 $U_1(x,\ \theta)$ 关于 θ递增，进而意味着U 是超模的。也就是说，命题 B1 成立。

B2. 平滑模糊偏好。接下来，我们研究 Klibanoff 等人 [2005] 的平滑模糊性模型下的 MCS。在平滑模糊性模型中，代理人认为状态分布存在模糊性，因为该分布取决于某个参数 $\lambda \in [0,1]$，而该参数的真实值未知。模糊性由一组 $\Lambda = \{F(\cdot;\ \lambda)|\lambda \in [0,1]\}$ 合理的累积分布函数来刻画。代理人对先验分布集合 Λ具有二阶信念。对于每个合理的概率分布$F(\cdot;\ \lambda)$，代理人都会计算行动 x 对应的期望效用，该效用由 $\int_S \gamma(s;\ x)dF(s;\ \lambda)$ 给出。

我们考虑 θ 影响代理人模糊偏好的两种方式。一种是 θ 影响代理人的二阶信念，我们将其记为 $\Pi(\lambda;\theta)$。此时，代理人的效用为

$$I(\gamma(\cdot;x),\theta) = \int_0^1 \phi\Big(\int_S \gamma(s;x)dF(s;\lambda)\Big)d\Pi(\lambda;\theta),$$

其中，ϕ 是凹、可微且严格递增的。函数 ϕ 刻画代理人的模糊态度。由于 γ 和 ϕ可微，泛函 I 是 Hadamard 可微的，且

$$U_1(x,\theta) = \int_S u(s,\theta,\gamma(\cdot;x))\gamma_2(s;x)ds, \tag{B12}$$

以及局部效用函数

$$u(s,\theta,\gamma(\cdot;x)) = \int_0^1 \phi_1\Big(\int_S \gamma(t;x)dF(t;\lambda)\Big)f(s;\lambda)\pi(\lambda;\theta)d\lambda, \tag{B13}$$

其中，$f(s;\ \lambda)$ 和 $\pi(\lambda;\ \theta)$ 分别是 $F(s;\ \lambda)$ 和 $\Pi(\lambda;\ \theta)$ 的概率密度函数。

现在我们给出关于平滑模糊性的 MCS 结果。

推论B1。假设

(1) $\kappa(s,x)$ 在$(x;s)$ 几乎处处具有 *SC2*；
(2) $f(s;\ \lambda)$ 在(s,λ) 几乎处处是对数超模；

[28]关于巴拿赫空间上的 Hadamard 可微性的定义，请参见附录 B6 。

(3) $\pi(\lambda;\ \theta)$ 在(λ,θ)上几乎处处为对数超模。

那么，$U_1(x,\theta)$ 在 θ中满足 *SC1*。

根据定义，$\gamma(s;x) = u^*(\kappa(s,x))$。由于 u^* 是 s的严格递增函数，假设（1）保证 $\gamma(s;x)$几乎处处在$(x;s)$中满足 SC2。假设（2）对可能信念集合施加了一个序：对于所有 $\hat{\lambda} > \lambda$，从似然比的角度看，$F(\cdot;\hat{\lambda})$支配 $F(\cdot;\lambda)$。[29]假设（3）意味着，更高的 θ 会使更高的 λ 相对而言更有可能。直观地说，假设 (2) 和 (3) 共同意味着，具有更高 θ 的代理人认为，更高的状态相对而言更有可能。

参数影响偏好的另一种情形是，θ 影响代理人的模糊态度。稍微滥用一下符号，令 $\Pi(\lambda)$表示代理人概率密度函数为 $\pi(\lambda)$的二阶信念。那么，代理人的效用为

$$\overline{I}(\gamma(\cdot;x),\theta) = \int_0^1 \overline{\phi}\Big(\int_S \gamma(s;x)dF(s;\lambda),\theta\Big)d\Pi(\lambda),$$

其中，$\overline{\phi}$对于所有 θ，ϕ 关于第一个参数是凹的、可微的且严格递增的。因此，代理人的目标函数为 $U(x,\ \theta) = I(\gamma(\cdot;\ x)\ \theta)$，并且

$$U_1(x,\theta) = \int_S \overline{u}(s,\theta,\gamma(\cdot;x))\gamma_2(s;x)ds, \tag{B14}$$

其中局部效用函数为

$$\overline{u}(s,\theta,\gamma(\cdot;x)) = \int_0^1 \overline{\phi}_1\Big(\int_S \gamma(t;x)dF(t;\lambda),\theta\Big)f(s,\lambda)\pi(\lambda)d\lambda.$$

推论B2。假设推论*B1* 中的假设（*1*）和（*2*）成立。进一步假设ϕ_1（z，θ）在（z，θ）上几乎处处是对数超模的。则 U_1（x，θ）在 θ上是*SC1*。

的对数超模性等价于 $-\phi_{11}(z,\ \theta)\ \phi_1(z,\ \theta)$关于 θ递减。因此，θ 刻画了代理人对模糊性的态度，而更高的 θ 意味着更少的模糊厌恶，这与Klibanoff 等人 [2005,的推论 3]一致。

B3。**乘数偏好**。一类重要的模糊偏好是乘数偏好（参见，例如，Hansen 和 Sargent [2001] 以及Strzalecki [2011]），它属于变分偏好和光滑偏好的交集。乘数偏好的表示为

$$\min_{F\in\Delta(S)}\Big(\int_S \gamma(s;x)dF(s) + \mu R(F||F^*(\cdot;\theta))\Big),$$

其中，$F^*(;\ \theta)$ 是参考分布，$R(F||F^*(;\ \theta)) := \int_S \ln \frac{dF}{dF^*(\cdot;\theta)}dF$是相对熵，而 $\mu > 0$ 是一个刻画模糊厌恶程度的参数。这种表示方式带来以下解读：参考分布 $F^*(;\ \theta)$ 是代理人对真实概率律的“最佳猜测”，但她担心真实概率律可能不同于 $F^*(;\ \theta)$。为应对

[29] $F(;\hat{\lambda})$ 在似然比意义上支配 $F(;\ \lambda)$，当且仅当 $\frac{f(s;\hat{\lambda})}{f(s;\lambda)}$关于 s 递增。

这种对模型误设的担忧，在评估每种行为时，她会将所有概率分布纳入考虑，并对那些按照相对熵衡量、接近其最佳猜测的分布赋予更高权重。

由于乘数偏好是变分偏好和光滑偏好的特例，前两节的结果自然可以扩展到这一情形。不过，鉴于乘数偏好所对应的特定函数形式，我们可以通过直接分析它们得到更强的 MCS 结果。具体而言，由于我们关注的是萨维奇行为，乘数偏好在序数上等价于以下期望效用偏好泛函[30]

$$U(x,\theta) = -\int_S \exp\Big(-\frac{1}{\mu}\gamma(s;x)\Big)dF^*(s;\theta). \tag{B15}$$

我们关注 θ 通过影响参考分布来影响代理人模糊偏好的情形。具体而言，我们假设 $F^*(\cdot;\theta)$关于似然比随 θ 递增。

请注意，式（B15）中的目标函数可视为附录 A 所研究情形的一个特例，其中 θ 影响分布，而 x 影响结果。下一个结果直接由命题 A3推出。

推论 B3. 假设

(1) $\kappa(s,x)$ 在$(x;s)$ 上几乎处处满足 *SC2*；(2) $f^*(s;\ \theta)$ 在(s,θ) 上几乎处处为对数超模，其中 $f^*(\cdot;\ \theta)$ 是 $F^*(\cdot;\ \theta)$的概率密度函数。[31]

那么，$U(x,\theta)$ 在$(x;\theta)$中满足 *SC2*。

更一般地，由于乘数偏好在萨维奇行为的定义域上符合期望效用，我们可以借助第 6 节和附录A中的结果，推导出一系列 MCS，具体取决于 x和 θ 如何影响目标函数。细节从略。

B4. **应用：比较静态平滑模糊性。** 我们运用附录 B2中的方法，复现 Gollier [2011, 推论 1] 中的模糊厌恶 MCS 结果：模糊厌恶程度降低会增加对不确定资产的需求。

我们采用Klibanoff 等人 [2005]的平滑模糊性模型。考虑以下投资组合选择问题。财富为 w 的代理人必须决定如何投资。她有两种选择：一种是收益为 $r>0$ 的安全资产，另一种是收益为非负随机收益 $s\in S$的不确定资产。如果代理人将 x 用于不确定资产，并将剩余的 $w-x$ 投资于安全资产，她最终将拥有 $xs+(w-x)r$。代理人认为可能的分布集合为 $\Lambda=\{F(\cdot;\ \lambda)|\lambda\in[0,1]\}$ 其中$\tilde{s}$ 表示可能的分布。代理人对集合 Λ 的二阶信念由 Π给出。我们假设股票

[30]例如，参见 Strzalecki [2011]。[31]Dziewulski 和 Quah [2024] 证明，该条件意味着成本函数 $c(F,\ \theta)=\mu R(F||F^*(\cdot;\ \theta))$满足命题 B1 中的假设（2）B1。

溢价 $\int_0^1 \int_S s dF(s;\ \lambda) d\pi(\lambda) > r$。根据Gollier [2011], 中的引理 1，不确定资产的最优投资为正。

我们假设参数 θ 会影响代理人的模糊态度。根据附录 B中的一般设定，结果函数为 $\kappa(s;x) = wr + x(s-r)$，它在$(x;s)$上满足 SC2。因此，推论 B1 中的假设（1）自动成立。由于 u^* 和 ϕ 均严格凹，经过直接验证可知，目标函数关于 x是拟凹的。应用推论 B2，可得以下结果:¯厌恶模糊程度较低的代理人会在不确定资产上投入更多。

推论B4. 假设 $f(s;\lambda)$ 在 (s,λ) 上几乎处处满足对数超模，且 $\bar{\phi}_1(z,\theta)$ 在 (z,θ) 上几乎处处满足对数超模。那么， θ 的增加会使不确定资产的最优投资 x增加。

与Gollier [2011], 相比，我们的方法表明，对数超模将分布函数集合上的条件与代理人的模糊态度这两个看似无关的方面联系起来。

B5. **应用：平滑模糊与财富效应**。 在此应用中，我们推导出平滑模糊偏好下模糊厌恶绝对程度递减的充分条件，且我们的结果重现了 Cherbonnier 和 Gollier [2015,命题 7]。

我们沿用上一节的投资组合选择框架，但现在考察财富 w 增加时，不确定资产的最优投资何时会增加。因此，本应用中的参数是财富 w。目标函数为

$$U(x,w) = \int_0^1 \bar{\phi}\Big(\int_S u^*(wr + x(s-r)) dF(s;\lambda)\Big) d\Pi(\lambda).$$

推论B5。 假设 $f(s;\ \lambda)$ 在(s,λ)上几乎处处为对数超模，且 $-\frac{u_{11}^*(z)}{u_1^*(z)}$和 $\frac{\bar{}}{=}\frac{\phi_{11}}{\phi_1}(z)$ 关于z递减。那么，财富增加会使最优 x增加。

B6. **基本形式定义与证明**。 我们首先给出巴拿赫空间 B 中 Gâteaux、Hadamard 和 Fréchet 可微性的定义。

定义11。 若在每个 $b \in$ B 处，都存在一个有界线性算子 $D\varphi[b,\cdot]$: B $\to$ R，使得对每个 $h \in$ B，函数 φ :B $\to$R 是**盖托可微** 的，

$$D\varphi[b,h] = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(b+th) - \varphi(b)}{t}.$$

算子 $D\varphi[b,\cdot]$ 称为 φ 在 b处的**Gâteaux 导数**。

定义12。 若函数 φ :B $\to$R 在每个 $b \in$B 处都存在一个连续线性算子 $D\varphi[b,\cdot]$: B $\to$ R，使得对于每个 $h \in$ B,

$$D\varphi[b,h] = \lim_{h'\to h, t\to 0} \frac{\varphi(b+th') - \varphi(b)}{t}.$$

算子 $D\varphi[b,\cdot]$ 称为 φ 在 b处的**Hadamard导数** 。

定义13. 函数 $\varphi : \mathrm{B} \to \mathrm{R}$ 是**Fréchet 可微** 的，当且仅当对每个 $b \in \mathrm{B}$，都存在连续线性算子 $D\varphi[b,\cdot] : \mathrm{B} \to \mathrm{R}$，使得对每个 $h \in \mathrm{B}$，

$$\varphi(b+h) - \varphi(b) - D\varphi[b,h] = o(\|h\|).$$

算子 $D\varphi[b,\cdot]$ 称为 φ 在 b处的**弗雷歇导数** 。

如果 φ 是盖托可微的，且 $D\varphi[b,\cdot]$ 在 b上连续，那么 φ 也可弗雷歇微分。（参见 Andrews 和 Hopper [2010]命题 A3。）

引理 *B1*的证明。 根据 Maccheroni 等人 [2006], 中的定理 18，假设（1）意味着 I是盖托可微的。根据 Maccheroni 等人 [2006], 中的引理28，我们知道 I 是利普希茨连续的。由此，根据 Shapiro [1990]中的命题3.5，这两点足以保证 I的 Hadamard 可微性。□

$\Delta(S)$ 关于一阶随机占优的序构成一个格。此外，对于任意 $F, G \in \Delta(S)$，有 $(F \wedge G)(s) = \min\{F(s)\ G(s)\}$，且 $(F \vee G)(s) = \max\{F(s)\ G(s)\}$。因此，

$$\int_S \gamma(s;x)dF + \int_S \gamma(s;x)dG = \int_S \gamma(s;x)d(F \wedge G) + \int_S \gamma(s;x)d(F \vee G) \quad \forall x \in X.$$

将这一观察与命题B1 中的假设（2）结合，可得函数 $-\left(\int_S \gamma(s;\ x)dF + c(F,\theta)\right)$ 关于 F是超模的，且关于(F,θ)是超模的。根据Milgrom 和 Shannon [1994], 极小化者 $F^*(\cdot,\theta)$ 随 θ递增，得证。□

推论B1的证明。注意，(B12) 是 (5) 的类似形式。要应用命题 6.2，只需证明 $\gamma(s;\ x)$ 满足 SC2，且对于所有x， $u(s,\theta,\gamma(\cdot;x))$ 几乎处处关于 (s,θ) 对数超模。正文中已讨论过， $\gamma(s;x)$ 的 SC2 性质可由假设（1）推出。根据 (B13)、条件 $\phi_1 > 0$、假设 (2) 和 (3)，以及 Athey [2002] 中的引理2，可直接得出 u 具有对数超模性。因此，命题 6.2 的假设（1）成立，推论B1随即得证。□

推论B2的证明。根据假设（1）， $\gamma_2(s;x)$ 关于 s具有SC1性质。为了使 U_1 关于 θ具有SC1性质，我们因此只需证明：对所有 x， $u(s,\theta,\gamma(\cdot;\ x))$ 关于(s,θ)几乎处处具有对数超模性。固定 x。根据假设， u^*是 t的递增函数。假设（2）意味着，对于所有λ， $F(\cdot;\ \lambda) \gtrsim_{FOSD} F(\cdot;\ \lambda)$。因此， $\int_S u^*(\kappa(t,x))dF(t;\ \lambda)$ 是 λ的递增函数。于是，根据 ϕ_1的对数超模性，我们得到 $\phi_1(\int_S u^*(wr + x(t-r))dF(t;\ \lambda)\ \theta)$ 关于(λ,θ)几乎处处具有对数超模性。结合这一观察与假设（2），可得 $\phi_1(\int_S u^*(wr + x(t-r))dF(t;\ \lambda)\ \theta)f(s,\lambda)$ 关于(s,θ,λ)几乎处处具有对数超模性。根据Athey的引理2， [2002], $u(s,\theta,\gamma(\cdot;\ x))$ 关于(s,θ)几乎处处具有对数超模性。□

推论的证明 *B3*。 注意，根据（B15），乘数偏好等价于采用以下局部效用函数的期望效用函数形式 $-\exp\left(-\frac{1}{\mu}\gamma(s;\ x)\right)$。因此，

命题 A3显然满足。结合推论 B3中的假设（1）和（2），命题 A3 推出 U 是 SC2。□

推论的证明 *B5*。 由于 u^* 和 ϕ 均为严格凹函数，直接验证可知$U(x,w)$ 关于 x是拟凹的。注意，(B14)可化简为

$$U_1(x,w) = \int_S \overline{u}(s,w,\gamma(\cdot;x))u_1^*(wr+x(s-r))(s-r)ds \tag{B16}$$

其中

$$\overline{u}(s,w,\gamma(\cdot;x)) = \int_0^1 \overline{\phi}_1\Big(\int_S u^*(wr+x(t-r))dF(t;\lambda)\Big)f(s;\lambda)\pi(\lambda)d\lambda.$$

固定 x。由于 $-\frac{u_{11}^*}{u_1^*}(z)$ 关于 z递减，这意味着 $u_1^*(wr+x(s-r))$ 关于 (s,w) 是对数超模的。注意，$s-r$ 在 s中满足 SC1。因此，如果对所有 x， U_1 在 $\neg w$ 中满足 SC1，那么 $u(s,w,\gamma(\cdot;x))$ 关于 (s,w) 是对数超模的。为证明这一点，令

$$\varphi(w,\lambda) := \overline{\phi}_1\Big(\int_S u^*(wr+x(t-r))dF(t;\lambda)\Big).$$

注意， $\varphi(w,\lambda)$ 是对数超模的，等价于

$$\Big(-\frac{\overline{\phi}_{11}\Big(\int_S u^*(wr+x(t-r))dF(t;\lambda)\Big)}{\overline{\phi}_1\Big(\int_S u^*(wr+x(t-r))dF(t;\lambda)\Big)}\Big)\int_S u_1^*(wr+x(t-r))rdF(t;\lambda) \tag{B17}$$

关于 λ递减。注意，由于 $\int_0^1\int_S sdF(s;\lambda)d\pi(\lambda) > r$， Gollier 中的引理 1 [2011] 表明，对不确定资产的最优投资为正。因此， u^* 是关于 t的递增函数。由于 f是对数超模的，对于所有 $\hat{\lambda} > \lambda$，我们有 $F(\cdot;\hat{\lambda}) \gtrsim_{FOSD} F(\cdot;\lambda)$。因此， $\int_S u^*(wr+x(t-r))dF(t;\lambda)$ 是关于 λ的递增函数。结合这一观察以及假设 $-\frac{\phi_{11}}{\phi_1}(z)$ 递减，可得 (B17) 中的第一项关于 λ递减。由于 u^* 是凹的，且 $x>0$、 u_1^*是关于 t的递减函数。此外，由于 $F(\cdot;\lambda)$ 随 λ递增，(B17) 中的第二项关于 λ递减。因此， $\varphi(w,\lambda)$ 是对数超模的。结合这一观察与 f的对数超模性，可得 $\varphi(w,\lambda)f(s;\lambda)\pi(\lambda)$ 关于 (s,w,λ) 是对数超模的。根据 Athey 中的引理 2 [2002]， $u(s,w,\gamma(\cdot;x))$ 关于 (s,w) 是对数超模的，证毕。□