arXiv:2601.10670v1 [math.RT] 15 Jan 2026

GL_2 与 GU_2 在离散赋值环上的实特征标与实共轭类

ARCHITA GUPTA、TEJBIR LOHAN 和 POOJA SINGLA

摘要。设 $\mathfrak{o}$ 是一个非阿基米德局部域的整数环，其剩余域具有奇特征，$\mathfrak{p}$ 是其极大理想，并设 $\mathfrak{o}_\ell = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell$ 对于 $\ell \geq 2$。本文研究有限群 $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 和 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的实值特征标与实表示。我们完整分类了这些群的实共轭类和强实类，并刻画了实值不可约复特征标。

我们证明，$\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的每个实值不可约复特征标都由一个在 $\mathbb{R}$ 上的表示给出。与此相反，我们证明 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 存在不能在 $\mathbb{R}$ 上实现的实值不可约特征标。这些结果推广了有限群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 和 $\mathrm{GU}_n(\mathbb{F}_q)$ 中已知的相应现象。

1. 引言

设$\mathbf{F}$ 是一个非阿基米德局部域，其整数环为 $\mathfrak{o}$，极大理想为 $\mathfrak{p}$，剩余域为 $\mathbf{k}$，具有奇特征 p 且基数为 q。固定 $\mathfrak{o}$ 的一个均匀化元 π。对于 $\ell \in \mathbb{N}$，令 $\mathfrak{o}_\ell = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell$。

设 $\mathbf{G}$ 是定义在 $\mathfrak{o}$上的经典群概形。其$\mathfrak{o}$-点群 $\mathbf{G}(\mathfrak{o})$ 是 $\mathbf{G}(\mathbf{F})$ 的一个极大紧子群，并在 $\mathbf{G}(\mathbf{F})$ 的表示论中发挥着基础性作用。由于 $\mathbf{G}(\mathfrak{o})$ 是概形有限的，$\mathbf{G}(\mathfrak{o})$ 的每个连续有限维不可约复表示都经由某个有限商群 $\mathbf{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 分解，其中 ℓ。因此，对 $\mathbf{G}(\mathfrak{o})$ 的连续表示的研究归结为对有限群 $\mathbf{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的有限维表示的研究。

近年来，$\mathbf{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的表示论得到了广泛研究；例如参见[Had24、CMO24、HS22]及其中的参考文献。这些研究大多聚焦于复表示。相比之下，人们对其他域上的表示所知甚少。本文旨在开启对 $\mathbf{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的实表示的系统研究。

我们将注意力限制在群 $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 和 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 上。我们的第一个主要结果是对这些群的实值不可约复特征标的完整描述；见定理 4.5。一个有限群的不可约复表示若能够在 $\mathbb{R}$上实现，则称为正交表示（文献中也称为实表示），其特征标称为正交特征标。每个正交特征标都是实值的，但反之一般不成立。众所周知，有限群的不可约特征标是正交的，当且仅当其 Frobenius–Schur 指标等于 1；见 [JL93，第 23] 章，或 [Isa76，第 4]章。在定理 5.2 中，我们考察 $\mathbf{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的每个实值特征标是否都是正交的。我们证明，对于$\ell \geq 1$，$\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的每个实值不可约复特征标都是正交的。相比之下，这一性质对 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 不成立。这些结果与有限群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 和 $\mathrm{GU}_n(\mathbb{F}_q)$ 的众所周知情形相对应；见 [Pra98，定理 4]，以及 [FV14，第 415] 页。

我们的方法依赖于已知的 $\mathbf{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 不可约表示的构造，以及对实类与强实类的分析。群 G 中的元素 g 若与其在 G 中的逆元共轭，则称为实的；若存在一个对合使其与逆元共轭，则称为强实。等价地，g 强实当且仅当它可以写成两个对合的乘积。若一个共轭类包含实元素（分别地，强实元素），则称其为实类（分别地，强实类）。

关于实元素与强实元素的研究由来已久；全面综述请参见 [OS15]。对于有限群，实共轭类的数量等于取实值的不可约复特征标的数量 [Hup98，定理 18。6]在有限域的情形下，Gow [Gow81] 分类了 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 的实共轭类，并

2010 数学主题分类。主要分类号 20G05；次要分类号 20C15、20G25、15B33。关键词和短语。实特征、正交表示、实共轭类、强实类、主理想局部环上的线性群。

证明其数量与 $\mathrm{GU}_n(\mathbb{F}_q)$ 的实共轭类数量相同；另见 [GS11，定理 3.8]。然而，与 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 不同，$\mathrm{GU}_n(\mathbb{F}_q)$ 的实共轭类并非全部都是强实类。奇数 q 的 $\mathrm{GU}_n(\mathbb{F}_q)$ 强实类已在 [GSV14] 中枚举。对于 $\ell \geq 2$ 的情形，我们证明了 $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 和 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的类似结果，包括对实共轭类与强实类的明确描述及枚举；参见定理 3.2、定理 3.5、命题 3.7，以及表 1。

强实元素与正交特征标之间的关系已得到广泛研究。例如，Tiep 提出的一个猜想由 Vinroot 证明 [Vin20], 指出，对于有限单群，每个不可约复特征都是正交的，当且仅当每个元素都是强实的。一般而言，这种等价性对有限群并不成立；参见 [KK15]。此外，与 $\mathrm{GU}_n(\mathbb{F}_q$相反，已知对于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q$，每个实元素都是强实的，且每个实特征标都是正交的；参见 [OS15，Pra98，FV14]。我们的结果表明，当 $_2(\mathfrak{o}_\ell$ 和 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell$ 时，这种二分现象同样成立；参见 $\ell \geq 2$；参见 第 5 节。

2. 记号与预备知识

本节中，我们将介绍所用记号，并给出一些预备结果。回顾一下，$\mathfrak{o}$ 是一个剩余域为 k、基数为 q 且特征为奇数 p的完备离散赋值环。令 $\mathfrak{p}$ 为极大理想，令 π 为一个固定的均匀化元。令 $\mathfrak{O}$ 为一个非分歧二次扩张。由此可知，存在 $\varepsilon \in \mathfrak{O}$，使得 $\varepsilon^2 \in \mathfrak{o}^\times \setminus (\mathfrak{o}^\times)^2$，且满足 $\mathfrak{O} = \mathfrak{o}[\varepsilon]$。令 $\mathfrak{P} = \pi\mathfrak{O}$ 为 $\mathfrak{O}$ 中的极大理想，$\mathcal{K} = \mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ 为剩余域；它是由 ε的像生成的 k 的二次扩张。对于 $\ell \in \mathbb{N}$，我们令$\mathfrak{o}_\ell = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell$ 和 $\mathfrak{O}_\ell = \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^\ell$ 表示有限商环。我们用 $x \mapsto x^\circ$ 表示 $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$的非平凡伽罗瓦自同构，其特征为 $\varepsilon^\circ = -\varepsilon$。对于所有 i，ε 在 $\mathfrak{O}_i$ 中的像也记作 ε。

令 $W = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}_\ell)$ 表示对应于最长韦伊元的置换矩阵。考虑 $\mathfrak{gl}_2(\mathfrak{O}_\ell)$ 上定义的对合

$$(a_{i,j})^\star := W(a^\circ_{j,i})W^{-1}, \tag{2.1}$$

及其在 $\mathfrak{O}_\ell^2$ 上的厄米形式，定义如下：

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle := v_1^\circ u_2 + v_2^\circ u_1.$$

对于 $\ell \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，关于 $\star$ 的酉群及其反厄米矩阵李代数为

$$\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell) := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}_\ell) \mid A^\star A = \mathrm{I}_2\},$$
$$\mathrm{gu}_2(\mathfrak{o}_\ell) := \{A \in \mathfrak{gl}_2(\mathfrak{O}_\ell) \mid A + A^\star = \mathrm{O}_2\}.$$

本文中，我们将 GL_2 和 GU_2 视为 $\mathfrak{o}$-群概形，其中后者的 R-点对每个 $\mathfrak{o}$-代数 R 和 $A \in \mathfrak{gl}_2(R)$，都是 $A \mapsto (A^\star)^{-1}$ 的不动点。令 $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数概形。那么，作为 $\mathfrak{o}$-李代数概形，$\mathfrak{g}$ 或为 $\mathfrak{gl}_2$，或为 $\mathfrak{gu}_2$，后者是 $A \mapsto -A^\star$ 的不动点。群在其李代数上的伴随作用记作 Ad。回顾

我们用 R_ℓ 作为通用记号，在 $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_2$ 的情形下表示 $\mathfrak{o}_\ell$，在 $\mathrm{G} = \mathrm{GU}_2$ 的情形下表示 $\mathfrak{O}_\ell$。为使证明中的记号统一，我们用 ϵ 表示 $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_2$ 时的 1，以及 $\mathrm{G} = \mathrm{GU}_2$. 时的 ε。类似地，∂_{G} 用来表示 $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_2$ 时的 -1，以及 $\mathrm{G} = \mathrm{GU}_2$ 时的 1。

对于 $i \leq \ell$，令 $\rho_{\ell,i} \colon \mathfrak{o}_\ell \to \mathfrak{o}_i$ 为自然投影映射。相应的自然投影映射 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell) \to \mathrm{G}(\mathfrak{o}_i)$ 也记作 $\rho_{\ell,i}$。对于任意矩阵 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell)$，我们将 $\rho_{\ell,1}(A)$ 记作 $\rho_{\ell,1}(A)$。令 $\mathrm{K}^i = \ker(\rho_{\ell,i})$ 为 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的第 i 个同余子群。对于 $i \geq \ell/2$，群 K^i 同构于 $M_2(R_{\ell-i})$ 的阿贝尔加法子群 $\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell-i})$。令 $\psi \colon R_\ell \to \mathbb{C}^\times$ 为 R_ℓ 的一个固定本原一维表示。对于 $R_\ell = \mathfrak{O}_\ell$，我们假设 ψ 满足 $\psi(x + \epsilon y) = \psi'(x)\psi'(y)$，其中 ψ' 是 $\mathfrak{o}_\ell$ 的一个本原一维表示。因此，根据我们对 ψ 的选择，$\pi^{\ell-1}\mathfrak{o}_\ell \not\subseteq \ker(\psi)$。

对于任意 $i \leq \ell/2$ 和 $A = [a_{st}] \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_i)$，我们将考虑满足以下条件的 A 的提升 $\widetilde{A} = [\widetilde{a_{st}}] \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell)$：$\rho_{\ell,\, i}(\widetilde{A}) = A$，其中 $\widetilde{a_{st}} = \epsilon$ 对于 $a_{st} = \epsilon$，$\widetilde{a_{st}} = 0$ 对于 $a_{st} = 0$，并且当 $a_{ij} = a_{kl}$时成立。在这种情况下，我们称 $\widetilde{A}$ 为 A的**Serre 提升**。对于任意 $i \leq \ell/2$ 和 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_i)$，定义 $\psi_A : \mathrm{I} + \pi^{\ell-i}\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell) \to \mathbb{C}^\times$ 为

$$\psi_A(\mathrm{I} + \pi^{\ell-i}B) := \psi(\pi^{\ell-i}\boldsymbol{tr}(\tilde{A}B)), \tag{2.2}$$

对于 A 的任意提升 $\tilde{A}$ 以及 $\mathrm{I} + \pi^{\ell-i}B \in \mathrm{K}^{\ell-i}$.，那么 ψ_A 是 $\mathrm{K}^{\ell-i}$. 的良定义一维表示。此外，对于 $i \geq \ell/2$，阿贝尔群 K^i 与 $\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell-i})$ 满足以下对偶关系。

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell-i}) \cong \widehat{\mathrm{K}^i}\ ; A \mapsto \psi_A \text{ where, } \psi_A(\mathrm{I} + \pi^i B) = \psi(\pi^i \boldsymbol{tr}(\tilde{A}B))\ \forall\ \mathrm{I} + \pi^i B \in \mathrm{K}^i. \tag{2.3}$$

我们借助 [Hil95] 和 [KOS18] 回顾 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的正则元素和正则特征的概念，另见 [PS22, 引理 2.3]。元素 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell)$ 是正则的，当且仅当 $\rho_{\ell,1}(A) \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_1)$ 是正则矩阵（即 $\rho_{\ell,1}(A)$ 的特征多项式等于其最小多项式）。在共轭作用下，正则 A 在 $G(\mathfrak{o}_{\ell-i})$ 中的稳定子为 $\{xI + yA \mid x, y \in R_{\ell-i}\} \cap G(\mathfrak{o}_{\ell-i})$。对于 $i \geq \ell/2$，表示 $\psi_A \in K^i$ 称为正则的，当且仅当 $\psi_A|_{K^{\ell-1}}$ 是正则的；$G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的不可约表示 ρ 称为正则的，当其在 $K^{\ell-1}$ 上的限制的伴随轨道由一维正则表示组成时。根据 [PS22, 引理 2.3]，$\psi_A \in K^i$ 是正则的，当且仅当 A 是正则的。

下面的引理描述了 $\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell)$在$G(\mathfrak{o}_\ell)$的伴随作用下的轨道。

引理 2.1. 在$(\mathfrak{g})$ 的伴随作用下，$\mathfrak{o}_\ell$的所有$G(\mathfrak{o}_\ell)$ 轨道代表元均可由以下形式的矩阵 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell)$ 给出：

(a) $xI + \pi C$*(b)* $\left(\begin{smallmatrix} x & \epsilon\pi\beta \\ \epsilon & x \end{smallmatrix}\right)$*(c)* $\left(\begin{smallmatrix} x-r\epsilon^2 & 0 \\ 0 & x+r\epsilon^2 \end{smallmatrix}\right)$ 其中 $r \in \mathfrak{o}_\ell^\times$*.(d)* $\left(\begin{smallmatrix} x & \epsilon\sigma \\ \epsilon & x \end{smallmatrix}\right)$ 其中 $\sigma \in (\mathfrak{o}_\ell^\times)^2$ 对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gu}_2$ 以及 $\sigma \in \mathfrak{o}_\ell^\times \setminus (\mathfrak{o}_\ell^\times)^2$ 对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2$.

证明。 对于GL_2, 证明可由 [BLCW10第 2] 节推出。对于GU_2, , 注意到 $A \in \mathfrak{gu}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 当且仅当A 是反厄米的。如果 A 模 π是标量，那么 A 属于(a)型。否则，结论由引理 [AKOV16，引理35] 得出。 □

定义 t：若 $\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell) \to$ {nreg, sns, ss, cus} 等价于上文 (a)（(b)、(c)、(d)）中给出的矩阵，则称 $t(A)$ = nreg（sns、ss、cus）。我们注意到，这些分别对应于 $\rho_{\ell,1}(A)$ 为非正则、分裂非半单、半单和尖点的情形。请注意，$A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell)$ 可以是正则的，也可以是标量的。回想一下，若群 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的表示 ρ 是 ρ' 的扭曲，即存在 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的一维表示 χ，使得 $\rho \cong \chi \otimes \rho'$，则称其为 ρ' 的扭曲。对于 $\rho_{\ell,1}(A)$ 为标量的情形，$G(\mathfrak{o}_\ell)$ 中位于 ψ_A 之上的不可约表示称为 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的非正则表示。等价地，若群 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的不可约表示 ρ 满足 ρ，或其任一扭曲可由 $G(\mathfrak{o}_{\ell-1})$ 得到，则称其为非正则表示。

对于 $\ell \geq 2$，我们分别用 ℓ_1和 ℓ_2表示 $\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor$ 和 $\lceil \frac{\ell}{2} \rceil$–如果一个 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的正则表示 ρ满足以下条件，则称其为**分裂半单**（**sns**、**cus**）：其在 $K^{\ell-1}$ 上的限制的伴随轨道由一维表示组成$\psi_A \in K^{\ell_2}$，其中 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$ 满足 $t(A)$ = **分裂半单**（**sns**、**cus**）。

现在我们非常简要地概述 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的正则表示的构造，重点介绍本文所需的结论。

2.1. ℓ 为偶数时 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的正则表示的构造。设 $\psi_A \in K^{\ell/2}$ 是 $K^{\ell/2}$ 的一个正则一维表示，其中 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell/2})$。下面给出此情形下的构造。设 $S_A = \{g \in G(\mathfrak{o}_\ell) \mid \psi_A^g \cong \psi_A\}$ 是 ψ_A 在 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的惯性群。设 $\tilde{A} \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell)$ 是A的一个提升，并令 $C_{G(\mathfrak{o}_\ell)}(\tilde{A})$ 表示其在 Ad 伴随作用下于 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的稳定子。于是 $S_A = C_{G(\mathfrak{o}_\ell)}(\tilde{A})K^{\ell/2}$. 设$\rho \in \mathrm{Irr}(G(\mathfrak{o}_\ell) \mid \psi_A)$ 是 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的一个正则表示，则存在一个将 ψ_A 扩张到 S_A的扩张 ψ_A，使得 $\rho \cong \mathrm{Ind}_{S_A(\psi_A)}^{G(\mathfrak{o}_\ell)}$。每个 $\rho \in \mathrm{Irr}(G(\mathfrak{o}_\ell) \mid \psi_A)$ 的维数为 $\frac{|\mathfrak{o}_\ell|}{|A|} |G()\, C^{G(\mathfrak{o}_{\ell/2})}()|K^{\ell/2}|$.

2.2. **正则表示的构造** $G(\mathfrak{o}_\ell)$ **当** ℓ <style id="7}为奇数时。 我们简要说明 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 在 ℓ 为奇数时不可约表示的构造，这类似于 [Sta09] 中针对 $G = GL_2$所给出的构造。该构造也见于 [BLCW10 的第 3] 节，其中讨论了 $GL_2(\mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z})$，以及 [Cam19 的第 4.H.2]节，其中讨论了 $G = GU_2$。K^{ℓ_2} 的每个正则特征都具有 ψ_A 的形式。ψ_A 在 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的惯性群满足$S_A = C_{G(\mathfrak{o}_\ell)}(\tilde{A})K^{\ell_1}$.。根据克利福德理论，要描述 $\mathrm{Irr}(G(\mathfrak{o}_\ell) \mid \psi_A)$，只需描述 $\mathrm{Irr}(S_A \mid \psi_A)$。

2.2.1. 奇数ℓ时，$G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的分裂非半单表示与分裂半单表示的构造。回顾引理 2.1，任意满足 $t(A)$ = sns 的 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$，在共轭意义下，均具有形式 $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \epsilon\pi\beta \\ \epsilon & \alpha \end{smallmatrix}\right)$；类似地，任意满足 $t(A)$ = ss 的 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$ 均具有形式 $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)$。那么，很容易看出，$N = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1+\pi^{\ell_1}x & \pi^{\ell_2}z \\ \pi^{\ell_1}y & 1+\pi^{\ell_1}w \end{smallmatrix}\right) \mid x, y, z, w \in R_\ell \right\} \cap G(\mathfrak{o}_\ell)$ 是 S_A 的正规子群。考虑 A 的提升 $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} \tilde{\alpha} & \epsilon\pi\tilde{\beta} \\ \epsilon & \tilde{\alpha} \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell)$，使得 $t(A)$ = sns；以及满足 $t(A)$ = ss 的 A 的提升 $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} \tilde{\alpha} & 0 \\ 0 & \tilde{\beta} \end{smallmatrix}\right)$。

如下定义 ψ_A 到 N 的扩张 $\psi_{\tilde{A}}$：

$$\psi_{\tilde{A}}\left(\begin{smallmatrix}1+\pi^{\ell_1}x & \pi^{\ell_2}z\\ \pi^{\ell_1}y & 1+\pi^{\ell_1}w\end{smallmatrix}\right) := \psi\left(\pi^{\ell_1}\boldsymbol{tr}\left(\tilde{A}\left(\begin{smallmatrix}x & \pi z\\ y & w\end{smallmatrix}\right) - \frac{\pi^{\ell_1}}{2}\tilde{A}\left(\begin{smallmatrix}x & \pi z\\ y & w\end{smallmatrix}\right)^2\right)\right). \tag{2.4}$$

$\tilde{}$ $\psi_{\tilde{A}}$ 在 S_A 中的稳定子由 $\mathrm{NC}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}(A)$ 给出。为便于记号，我们用 $C_{\tilde{A}}$ 表示 $\tilde{}$ $\tilde{}\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}(A)$。由于 $C_{\tilde{A}}$ 是阿贝尔群，特征 $\psi_{\tilde{A}}$ 可延拓为 $\mathrm{NC}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}(A)$ 的一个特征 $\psi'_{\tilde{A}}$，而 $\mathrm{NC}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}(A)$ 中位于 $\psi_{\tilde{A}}$ 之上的每个$\tilde{}$特征都是一维的。利用群 S_A、其正规子群 N 以及形如 $\psi_{\tilde{A}}$的特征的克利福德理论，我们得到 $\mathrm{Ind}^{S_A}{}_{\mathrm{NC}_{\tilde{A}}}\psi'_{\tilde{A}}$ 是 S_A 的一个维数为 q的不可约表示。此外，对于 $\mathfrak{t}(A) \in \{\mathbf{sns},\mathbf{ss}\}$，每个表示 $\phi \in \mathrm{Irr}(S_A \mid \psi_A)$ 都满足

$$\phi \cong \mathrm{Ind}_{\mathrm{NC}_{\tilde{A}}}^{S_A}\psi'_{\tilde{A}} \tag{2.5}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$对某个 A 及某个 $\psi'_{\tilde{A}}$. 成立。此外，如果 A_1 和 A_2 是 A 的两个提升，并分别导出 N 的不同特征 $\psi_{\tilde{A}_1}$和 $\psi_{\tilde{A}_2}$，则诱导表示 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)\ \mathrm{NC}_{\tilde{A}}}\ \psi'_{\tilde{A}_1}$ 和 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)\ \mathrm{N}}{}_{C_{\tilde{A}}}\ \psi'_{\tilde{A}_2}$不同构。我们将需要以下关于群 $\mathrm{N}C_{\tilde{A}}$ 及其特征 $\psi'_{\tilde{A}}$.的结果

引理 2.2. 对于 $\mathfrak{t}(A)$ =**分裂半单** 取 $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix}\tilde{\alpha} & 0\\ 0 & -\tilde{\alpha}\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell)$，对于 $\mathfrak{t}(A)$ =**sns** 取 $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix}0 & \epsilon\pi\tilde{\beta}\\ \epsilon & 0\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell)$。那么该公式

$$\bigoplus_{h\in \mathrm{NC}_{\tilde{A}}\backslash \mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)/(\mathrm{NC}_{\tilde{A}})^g} \psi'_{\tilde{A}} \otimes (\psi'_{\tilde{A}})^{hg} = \mathbf{1}\ on\ \mathrm{NC}_{\tilde{A}} \cap (\mathrm{NC}_{\tilde{A}})^{gh}$$

在 $C_{\tilde{A}}$ 上等价于 $\psi'_{\tilde{A}} \otimes \psi'^{g}_{\tilde{A}} = \mathbf{1}$，其中对于 $\mathfrak{t}(A)$ =**分裂半单**， $g = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$；对于$\mathfrak{t}(A)$ =**sns**，则为 $g = \left(\begin{smallmatrix}z & 0\\ 0 & -z\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$。

证明。为证明该引理，我们分别考察 $\mathfrak{t}(A)$ =分裂半单和 $\mathfrak{t}(A)$ = sns。首先考虑分裂半单情形。在这种情况下， $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix}\tilde{\alpha} & 0\\ 0 & -\tilde{\alpha}\end{smallmatrix}\right)$ 和 $g = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$。首先我们断言 $\mathrm{N}C_{\tilde{A}}\backslash S_A/(\mathrm{N}C_{\tilde{A}})^g = \mathrm{I}$。对于 $\left(\begin{smallmatrix}a & \pi^{\ell_1}b\\ \pi^{\ell_1}c & d\end{smallmatrix}\right) \in S_A$，取 $X = \left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ \pi^{\ell_1}c & (d-\pi^{2\ell_1}cba^{-1})\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{N}C_{\tilde{A}}$和 $Y = \left(\begin{smallmatrix}1 & \pi^{\ell_1}a^{-1}b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in (\mathrm{N}C_{\tilde{A}})^g$.。于是，通过直接计算可得 $XY = \left(\begin{smallmatrix}a & \pi^{\ell_1}b\\ \pi^{\ell_1}c & d\end{smallmatrix}\right)$，这证明了我们的第一个断言。接下来我们断言$\psi'_{\tilde{A}} \otimes (\psi'_{\tilde{A}})^g = \mathbf{1}$ 在 N $\cap$N^g 上。注意， $\psi'_{\tilde{A}} = \psi_{\tilde{A}}$ 在 N 上。取 $\left(\begin{smallmatrix}1+\pi^{\ell_1}a & \pi^{\ell_2}b\\ \pi^{\ell_2}c & 1+\pi^{\ell_1}d\end{smallmatrix}\right) \in$N $\cap$N^g.。利用公式 2.4 进行直接计算可得 $(\psi_{\tilde{A}} \otimes (\psi_{\tilde{A}})^g)$ $(X) = 1$.。这两个断言以及 $\mathrm{N}C_{\tilde{A}} \cap \mathrm{N}C_{\tilde{A}}^g = (\mathrm{N} \cap \mathrm{N}^g)C_{\tilde{A}}$ 这一事实，证明了该情形下的引理。

现在我们考虑分裂非半单情形。在这种情况下， $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix}0 & \epsilon\pi\tilde{\beta}\\ \epsilon & 0\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell)$ 和 $g = \left(\begin{smallmatrix}z & 0\\ 0 & -z\end{smallmatrix}\right) \in$G$(\mathfrak{o}_\ell)$。首先注意到 $(\mathrm{N}C_{\tilde{A}})^g = \mathrm{N}C_{\tilde{A}}$. $\mathrm{N}C_{\breve{A}}\backslash S_A/\mathrm{N}C_{\breve{A}}$ 的双陪集代表元集合为

$$\Gamma = \{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1 & \epsilon\pi^{\ell_1}w\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), w \in \mathfrak{o}_1^\times\}.$$

给定的等式变为

$$\bigoplus_{h\in\Gamma} \psi'_{\tilde{A}} \otimes (\psi'_{\tilde{A}})^{hg} = \mathbf{1}\ \text{on}\ \mathrm{NC}_{\tilde{A}} \tag{2.6}$$

现在我们断言， $\psi'_{\tilde{A}} \otimes (\psi'_{\tilde{A}})^{hg} = \mathbf{1}$ 在 N 上成立，当且仅当 $h = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$。注意，若此断言成立，则由公式 2.6可得引理。首先注意，对 $h = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$，此断言成立。现在我们继续证明另一方向。取 $h = \left(\begin{smallmatrix}1 & \epsilon\pi^{\ell_1}w\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$. 利用 $\psi'_{\tilde{A}} = \psi_{\tilde{A}}$ 在 N 上以及公式 2.4 ，我们得到

$$\psi'_{\tilde{A}} \otimes (\psi'_{\tilde{A}})^{hg}\left(\begin{smallmatrix}1+\pi^{\ell_1}a & \pi^{\ell_2}b\\ \pi^{\ell_1}c & 1+\pi^{\ell_1}d\end{smallmatrix}\right) = \psi(\pi^{2\ell_1}\epsilon^2 w(d-a))$$

对于 G $=$GL$_2$,，利用 $\pi^{\ell-1}\mathfrak{o}_\ell \not\subseteq \ker(\psi)$，我们得到： $\psi(\pi^{2\ell_1}\epsilon^2 w(d-a)) = 1$ 当且仅当对所有 $\left(\begin{smallmatrix}1+\pi^{\ell_1}a & \pi^{\ell_2}b\\ \pi^{\ell_1}c & 1+\pi^{\ell_1}d\end{smallmatrix}\right) \in$N 都有 $w = 0 \bmod (\pi)$。对于 G $=$GU$_2$,，由 GU$_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的定义条件，$\left(\begin{smallmatrix}1+\pi^{\ell_1}a & \pi^{\ell_2}b\\ \pi^{\ell_1}c & 1+\pi^{\ell_1}d\end{smallmatrix}\right) \in$N 蕴含 $(1+\pi^{\ell_1}a)(1+\pi^{\ell_1}d^\circ) = 1$.。由此我们得到 $\pi^{2\ell_1}(d-a) = \pi^{2\ell_1}(d+d^\circ)$。将其代入$\psi(\pi^{2\ell_1}\epsilon^2 w(d-a))$，得到 $\psi(\pi^{2\ell_1}\epsilon^2 w(d+d^\circ))$。由于 $\epsilon^2 w(d+d^\circ) \in \mathfrak{o}_\ell$，利用 $\pi^{\ell-1}\mathfrak{o}_\ell \not\subseteq \ker(\psi)$，我们得到 $w = 0 \bmod (\pi)$。这就证明了该断言。□

2.2.2. 奇数 ℓ 时 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的尖点表示：本节将列出一些关于构造 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的尖点表示的结果，这些结果是我们后续论证所需的。设 $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \epsilon\alpha \\ \epsilon & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$ 是一个正则矩阵，且 $\mathfrak{t}(A) = \mathbf{cus}$。定义 $D^{\ell_i}(\tilde{A}) := (C_{G(\mathfrak{o}_\ell)}(\tilde{A}) \cap K^1)K^{\ell_i}$，其中 $i \in \{1, 2\}$。令 $\mathbb{Z}_\ell$ 表示 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的中心。特征 ψ_A 可以扩展到 $\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A})$，记为 $\widetilde{\psi_A}$。我们有$\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A}) \trianglelefteq \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}(\tilde{A})$，且 $\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}(\tilde{A})$ 的每个元素都会稳定 $\widetilde{\psi_A}$。通过考察海森堡提升，存在 $\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}(\tilde{A})$ 的唯一不可约表示，它可扩展到 S_A. 。由此，我们得到每个 $\phi \in \mathrm{Irr}(S_A \mid \psi_A)$ 的构造，详见 [GHS25，第 4 节。以下结果适用于 ϕ 的特征 χ_ϕ 。

命题 2.3. 设 ℓ 为奇数，且 $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \epsilon\alpha \\ \epsilon & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$ 为正则，使得 $\mathfrak{t}(A) = \mathbf{cus}$。对于 $\phi \in \mathrm{Irr}(S_A \mid \psi_A)$， ϕ 的特征标 χ_ϕ 满足以下条件：

(1) 对所有 $g \in \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A})$， $\chi_\phi(g) = q\widetilde{\psi_A}(g)$，其中 $\widetilde{\psi_A} \in \mathrm{Irr}(\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A}) \mid \psi_A)$，满足 $\langle \mathrm{Res}^{S_A}_{\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A})}(\phi), \widetilde{\psi_A} \rangle \neq 0$.*(2)* 对所有 $g \in \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}(\tilde{A}) \mid \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A})$， $\chi_\phi(g) = 0$ 。

(3) 对所有 $g \in S_A \mid \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}(\tilde{A})$， $|\chi_\phi(g)| = 1$ 。

证明。关于此结论的证明，请参见 [GHS25，命题 5。2]。 □

如前所述，对于 $m \in \mathbb{N}$，在共轭作用下， $\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_m)$ 中正则 A的稳定子为 $\{xI + yA \mid x, y \in R_m\} \cap G(\mathfrak{o}_m)$。对于 $G = GL_2,$，利用这一事实很容易计算稳定子基数 $|C_{GL_2(\mathfrak{o}_\ell)}(A)|$. 。对于 $G = GU_2,$，这些稳定子的基数见 [Cam19，第 4.H.1、4.H.2] 节。

引理 2.4。 对于 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_\ell)$，我们有 $|C_{G(\mathfrak{o}_\ell)}(A)| = \begin{cases} (q+1)(q-\partial_G)q^{2\ell-2}; \mathfrak{t}(A) = \mathbf{cus}, \\ (q-\partial_G)q^{2\ell-1}; \mathfrak{t}(A) = \mathbf{sns}, \\ (q-1)(q-\partial_G)q^{2\ell-2}; \mathfrak{t}(A) = \textbf{分裂半单}。 \end{cases}$

3. $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的实类与强实类

本节将描述并枚举 $G(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的实类与强实类。我们还将证明，$GL_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的每个实元素都是强实的。

3.1. **$GL_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的实类**。 关于 $GL_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的共轭类的以下结果已在 [AOPV09，定理 2 中得到证明。2]。

定理 3.1。 任意 $A \in M_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 都与下列形式的唯一矩阵相似：

$$M(d, i, \alpha, \beta) \quad = \quad dI + \pi^i \left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{smallmatrix}\right), \tag{3.1}$$

其中 $i \in \{0、1、...、\ell\}$ $d = \sum_{k=0}^{i-1} d_k \pi^k$，且 $d_i \in \mathfrak{o}_1$； α、β 模 $(\pi^{\ell-i})$ 确定。此外，$M(d、i、\alpha、\beta) \in GL_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 当且仅当 $d_0 \in \mathfrak{o}_1^\times$ 对于 $i \neq 0$ 成立，且 $\alpha \in \mathfrak{o}_\ell^\times$ 对于 $i = 0$ 成立。

我们利用这一结果描述 $GL_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的实元素和强实元素。根据定义， $A \in GL_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 是实的，当且仅当 A 与 A^{-1}. 共轭。因此， A 是实的意味着 $\det(A) = \det(A^{-1})$ 且 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^{-1})$。在下一个结果中，我们证明对于 $GL_2(\mathfrak{o}_\ell)$，反之亦然。

定理 3.2。 令 $A \in GL_2(\mathfrak{o}_\ell)$。以下陈述是等价的：

(1) A是实的。*(2)* A是强实的。*(3)* $\det(A) \in \{\pm 1\}$，且 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^{-1})$。*(4)* A 共轭于以下矩阵之一：

(a) $M(0, 0, 1, 0)$； *(b)* $M(0, 0, -1, \beta)$，其中 $\beta \in \mathfrak{o}_\ell$；

(c) $M(1, i, \alpha, \pi^i\alpha)$，其中 $1 \leq i \leq \ell$ 和 $\alpha \in \mathfrak{o}_\ell$； (

d) $M(-1, i, \alpha, -\pi^i\alpha)$，其中 $1 \leq i \leq \ell$ 和 $\alpha \in \mathfrak{o}_\ell$。

证明。 蕴含 (1) $\implies$ (3) 是显然的，而 (2) $\implies$ (1) 可直接由定义得出。等价性 (3) $\iff$ (4) 可由 公式 3.1中的参数化得到，因为行列式和迹条件恰好描述了 (4) 中列出的各个族。因此，剩下只需证明 (4) 中出现的每个矩阵都是强实的。

对于 $M(d,\ i,\ \alpha,\ \beta)$ 中 $i=0$ 的矩阵（见 (4)），对合 $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 满足

$$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) M(0,0,\alpha,\beta) \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)^{-1} = M(0,0,\alpha,\beta)^{-1}.$$

对于 $M(d,\ i,\ \alpha,\ \beta)$ 中 $i>0$ 的矩阵（见 (4)），对合 $\left(\begin{smallmatrix}1&\beta\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ 满足

$$\left(\begin{smallmatrix}1&\beta\\0&-1\end{smallmatrix}\right) M(d,i,\alpha,\beta) \left(\begin{smallmatrix}1&\beta\\0&-1\end{smallmatrix}\right)^{-1} = M(d,i,\alpha,\beta)^{-1}.$$

因此，(4) 中的每个矩阵都是强实的，证明完毕。 □

注意到 $M(d,\ i,\ \alpha,\ \beta)$ 为正则（非正则）当且仅当 $i=0\,(1\le i\le \ell)$。作为定理 3.2的直接推论，我们得到以下推论。

推论 3.3。 *(1)* $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的实正则类和实非正则类的总数分别为 $q^\ell+1$和 $2\sum_0^{\ell-1} q^i$.*(2)* $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的实类（强实类）总数为 $1+q^\ell+2\sum_0^{\ell-1} q^i$.

3.2. **GU**$_2(\mathfrak{o}_\ell)$中的实共轭类。 关于 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的共轭类，以下结果由 [Cam19，第 4.K 节]得出。

定理 3.4 ([Cam19，第 69])。 *GU*$_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的每个元素都共轭于下列某个矩阵：
(A) $\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&x\end{smallmatrix}\right)$，其中 $xx^\circ=1$。*(B)* $\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&x^{-1\circ}\end{smallmatrix}\right)$，其中 $xx^\circ\neq 1$。*(C)* $\left(\begin{smallmatrix}x&y\\y&x\end{smallmatrix}\right)$，其中 $y\neq 0$ 满足 $xx^\circ+yy^\circ=1$ 且 $xy^\circ+x^\circ y=0$.*(D)* $\left(\begin{smallmatrix}x&\pi^{i+1}\beta y\\\pi^i y&x\end{smallmatrix}\right)$，其中 $0\le i\le \ell-1$、 $\beta\in\mathfrak{o}_{\ell-i-1}$和 x、 y是 $\mathfrak{O}_\ell$ 中的单位元，满足 $xx^\circ+\pi^{2i+1}\beta yy^\circ=1$ 且 $\pi^i(xy^\circ+x^\circ y)=0$.

我们的下一个结果刻画了 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的实元素。

定理 3.5。 令 $A\in\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$。以下陈述等价：

(1) A 是实的。*(2)* $\det(A)\in\{\pm1\}$ 且 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^{-1})$。 (3) 在共轭意义下， A 具有以下形式之一：
(a) $\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&x\end{smallmatrix}\right)$，其中 $x\in\{\pm1\}$。 *(b)* $\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&x^{-1\circ}\end{smallmatrix}\right)$，其中 $x\in\mathfrak{o}_\ell^\times$ 使得 $x^2\neq1$。 *(c)* $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 或 $\left(\begin{smallmatrix}x&y\\y&x\end{smallmatrix}\right)$，其中 $y\neq0$ 使得 $xx^\circ+yy^\circ=1$、 $xy^\circ+x^\circ y=0$和 $x^2-y^2=1$。 *(d)* $\left(\begin{smallmatrix}x&\pi^{i+1}\beta y\\\pi^i y&x\end{smallmatrix}\right)$，其中 $0\le i\le\ell-1$、 $\beta\in\mathfrak{o}_{\ell-i-1}$、 $x\in\mathfrak{o}_\ell^\times$ 和 $y\in\mathfrak{O}_\ell^\times$ 使得 $x^2+\pi^{2i+1}\beta yy^\circ=1=x^2-\pi^{2i+1}\beta y^2$ 且 $\pi^i(xy^\circ+x^\circ y)=0$.

证明。 这里，(1) $\implies$ (2) 根据实元素的定义成立。现在我们证明 (2) $\implies$ (1)。为此，我们根据 定理 3.4 确定满足 (2) 的共轭类，并证明每个共轭类也满足 (1)。

(A) 考虑 $A=\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&x\end{smallmatrix}\right)$，其中 $xx^\circ=1$ 满足 (2)。那么 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^{-1})$ 意味着 $x=\pm1$。因此 A满足 (1)。(B) 考虑 $A=\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&x^{-1\circ}\end{smallmatrix}\right)$，其中 $xx^\circ\neq1$ 满足 (2)。那么 $\det(A)=xx^{-1\circ}\in\{\pm1\}$，所以 $x=x^\circ$ 或$x=-x^\circ$。由 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^{-1})$，我们得到

$$(xx^\circ+1)(x-x^\circ)=0.$$

情形 $x=-x^\circ$ 给出 $x^2=1$，这与 $xx^\circ\neq1$矛盾。因此 $x=x^\circ$，于是

$$A=\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&x^{-1}\end{smallmatrix}\right),\quad x\in\mathfrak{o}_\ell^\times,\ x^2\neq1.$$

对合 $\tau=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 满足 $\tau A\tau^{-1}=A^{-1}$。因此 A满足 (1)。

(C) 考虑 $A = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$，其中 $y \neq 0$、$xx^\circ + yy^\circ = 1$ 和 $xy^\circ + x^\circ y = 0$ 满足 (2)。则 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^{-1})$ 得出两种情况：**情况 1：** $\det(A) = -1$。这里 $x = 0$，因此 $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{smallmatrix}\right)$，其中 $y \in \{\pm 1\}$。因此 A 在 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中与对合 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 共轭，故满足 (1)。

情形 2： $\det(A) = 1$。于是 $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ -y & x \end{smallmatrix}\right)$。对于任意满足 $u,\ v \in \mathfrak{o}_\ell$ 且使得 $(u+v\epsilon)(u+v\epsilon)^\circ = -1$ 的 $u + v\epsilon \in \mathfrak{O}_\ell$，有

$$\left(\begin{smallmatrix} v\epsilon & u \\ -u & -v\epsilon \end{smallmatrix}\right) A \left(\begin{smallmatrix} v\epsilon & u \\ -u & -v\epsilon \end{smallmatrix}\right)^{-1} = A^{-1}.$$

由范数映射的满射性可知这样的元素存在。因此 A 满足 (1)。

(D) 考虑满足 $x,\ y$ 为 $\mathfrak{O}_\ell$ 中满足 (2) 的单位元的 $A = \left(\begin{smallmatrix} x & \pi^{i+1}\beta y \\ \pi^i y & x \end{smallmatrix}\right)$。那么 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^{-1})$ 意味着 $\det(A) = 1$。与情形 C 中一样，对于任意满足 $\omega\omega^\circ = -1$ 的 $\omega \in \mathfrak{O}_\ell^\times$，都有 $\left(\begin{smallmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{smallmatrix}\right) A \left(\begin{smallmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{smallmatrix}\right)^{-1} = A^{-1}$。因此 A满足 (1)。

因此，(2) $\Longrightarrow$ (1)。对情形 (A)–(D) 的上述分析也证明了 (2) 与 (3) 等价。证明完毕。□

与 $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 不同，$\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中并非每个实元素都是强实的。以下结果刻画了 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的强实元素，并表明定理 3.5 的情形 (d) 不含强实元素。

定理 3.6。 *$GU_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的实元素 是强实的，当且仅当它共轭于定理 3.5第 (a)–(c) 部分所述的某个元素。*

证明。 由于实性在共轭下保持，对于充分性部分，我们考察定理 3.5证明中构造的对合，它们将定理 3.5第 (a)–(c) 部分所述的元素共轭到其逆元。

对于必要性部分，只需证明：若 A是 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的一个实元素，且与 定理 3.5 的 (d) 部分所描述的矩阵共轭，则 A 不是强实的。证明如下。

考虑 $A = \left(\begin{smallmatrix} x & \pi^{i+1}\beta y \\ \pi^i y & x \end{smallmatrix}\right)$，其中 $0 \leq i \leq \ell - 1$、$\beta \in \mathfrak{o}_{\ell-i-1}$、$x \in \mathfrak{O}_\ell^\times$ 和 $y \in \mathfrak{O}_\ell^\times$ 满足

$$x^2 + \pi^{2i+1}\beta y y^\circ = 1 = x^2 - \pi^{2i+1}\beta y^2 \quad \text{and} \quad \pi^i(xy^\circ + x^\circ y) = 0.$$

假设存在 $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$，使得 $g^2 = \mathrm{I}_2$ 且 $gAg^{-1} = A^{-1}$.。那么我们有

$$g^2 = \mathrm{I}_2 \iff a^2 + bc = 1, \quad a^2 = d^2, \quad \text{and} \quad b(a+d) = 0 = c(a+d)$$

and

$$gA = A^{-1}g \iff \pi^i y(a+d) = 0 \quad \text{and} \quad \pi^i y(b + \pi\beta c) = 0.$$

设 $a + d = \pi^k u$ 和 $b + \pi\beta c = \pi^m v$，其中 $0 \leq k,\ m \leq \ell$ 和 $u,\ v \in \mathfrak{O}_\ell^\times$。根据 k 和 m 的取值，我们考虑以下情形：**C**

情形 1： $k = 0$ 或 $m = 0$。由 $gA = A^{-1}g$，我们得到 $\pi^i y = 0$。这意味着 A 是一个数量矩阵 x, 矛盾。

情形 2： $1 \leq k \leq \ell - 1$。由 $b(a+d) = 0 = c(a+d)$，我们有 $b = \pi^{\ell-k}b'$ 和 $c = \pi^{\ell-k}c'$，其中 $b',\ c' \in \mathfrak{O}_\ell^\times$。由于 $1 \leq k$ 和 $1 \leq \ell - k$，方程 $a^2 + bc = 1$ 和 $ad^\circ + cb^\circ = 1$ 推出

$$a^2 = 1 \pmod{\pi} \quad \text{and} \quad -aa^\circ = 1 \pmod{\pi}.$$

这意味着 $a = -a^\circ$ (模 π)，因此对于某个 $a' \in \mathfrak{o}_\ell^\times$，有 $a = \epsilon a'$。由于 $a^2 = 1$ (模 π)，我们推得 ϵ^2模 (π) 有一个平方根。回忆一下，剩余域的特征为奇数。因此 $\epsilon^2 \in (\mathfrak{o}_\ell^\times)^2$ 当且仅当 $\rho_{\ell,\ 1}(\epsilon^2) \in (\mathfrak{o}_1^\times)^2$. 由此我们得到 $\epsilon^2 \in (\mathfrak{o}_\ell^\times)^2$,, 矛盾。

情况 3： $k = \ell$ 和 $1 \leq m \leq \ell$。因此，$a = -d$ 和 $b = \pi^m v - \pi\beta c$，其中 $v \in \mathfrak{O}_\ell^\times$。方程$a^2 + bc = 1$ 和 $ad^\circ + cb^\circ = 1$ 与情况 2 一样导出矛盾。

因此，A 不是强实的，证明完成。 □

下述结果给出了 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中实共轭类与强实类的数量。

命题 3.7. 以下结论成立：

(1) $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的实正则类与实非正则类的数量，分别与$\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$中的数量相同；因此，这两个群的实共轭类总数相同，为 $1+q^\ell+2\sum_0^{\ell-1}q^i$.*(2)* 在$\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$中，强实类的数量等于实正则类的数量。
(3) $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的实正则类与实非正则类的数量分别为

$$q^\ell+1 \quad and \quad 2\sum_{i=0}^{\ell-1}q^i,$$

分别。

证明。 我们考虑以下情形，以计算 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中实正则类和实非正则类的总数，使用定理3.5中得到的实共轭类刻画。

情形（i）： 令 $A=\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&x\end{smallmatrix}\right)$，其中 $x=\pm1$。这两个实共轭类均为非正则类。
情形（ii）： 令 $A=\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&x^{-1}\end{smallmatrix}\right)$，其中 $x\in\mathfrak{o}_\ell^\times$ 满足 $x^2\neq1$。此情形下不同实共轭类的总数为

$$\frac{|\mathfrak{o}_\ell^\times|-2}{2}=\frac{q^\ell-q^{\ell-1}}{2}-1.$$

此外， A 是正则的当且仅当 x^2-1 是单位。因此，不同实正则类和实非正则类的总数为

$$\frac{(q-3)q^{\ell-1}}{2} \quad \text{and} \quad q^{\ell-1}-1, \quad \text{respectively.}$$

情形（iii）： 设 $A=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 或 $A=\left(\begin{smallmatrix}x&y\\y&x\end{smallmatrix}\right)$，其中 $y\neq0$ 满足 $xx^\circ+yy^\circ=1$、 $xy^\circ+x^\circ y=0$和$x^2-y^2=1$。对于 $A=\left(\begin{smallmatrix}x&y\\y&x\end{smallmatrix}\right)$，利用 $x^2-y^2=1$、 $xx^\circ+yy^\circ=1$和 $xy^\circ+x^\circ y=0$，可得 $x+y$和 $x-y$是 A的范数为 1 的特征值。这意味着

$$x=a \text{ and } y=b\epsilon \text{ such that } a^2-b^2\epsilon^2=1,$$

其中 $a,\ b\in\mathfrak{o}_\ell$和 $b\neq0$。定义范数映射 $\mathcal{N}\colon\mathfrak{O}_\ell^\times\to\mathfrak{o}_\ell^\times$，使得对所有$a,\ b\in\mathfrak{o}_\ell$，$\mathcal{N}(a+b\epsilon)=a^2-b^2\epsilon^2$。那么，$\mathcal{N}$是满射，其核的阶为 $q^\ell+q^{\ell-1}$。因此，满足 $a,\ b\in\mathfrak{o}_\ell$和 $b\neq0$且使得 $a^2-b^2\epsilon^2=1$成立的矩阵$\left(\begin{smallmatrix}a&b\epsilon\\b\epsilon&a\end{smallmatrix}\right)$总数为 $q^\ell+q^{\ell-1}-2$。

注意，$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$是一个行列式为 -1的正则元素，而 $\left(\begin{smallmatrix}a&b\epsilon\\b\epsilon&a\end{smallmatrix}\right)$是正则的，当且仅当 b 是一个单位。此外，非零 $b\in\pi\mathfrak{o}_\ell$有 $q^{\ell-1}-1$ 种选择；对于每个这样的 b，通过从 $a\equiv\pm1$ （模 π）提升，恰有两个 $a\in\mathfrak{o}_\ell$ 满足 $a^2-b^2\epsilon^2=1$。因此，在满足 $a^2-b^2\epsilon^2=1$ 且 $a\in\mathfrak{o}_\ell$的矩阵$\left(\begin{smallmatrix}a&b\epsilon\\b\epsilon&a\end{smallmatrix}\right)$中， $b\in\pi\mathfrak{o}_\ell\setminus\{0\}$ 的矩阵数量为 $2\left(q^{\ell-1}-1\right)$，而具有 $b\in\mathfrak{o}_\ell^\times$ 的矩阵数量为

$$(q^\ell+q^{\ell-1}-2)-2\left(q^{\ell-1}-1\right)=q^\ell-q^{\ell-1}=(q-1)q^{\ell-1}.$$

由于范数映射 $\mathcal{N}$ 是满射，我们可以选择 $\delta\in\mathfrak{O}_\ell^\times$ 使得 $\delta\delta^\circ=-1$。利用 $\left(\begin{smallmatrix}\delta&0\\0&-\delta\end{smallmatrix}\right)$，可知$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$和$\left(\begin{smallmatrix}x&y\\y&x\end{smallmatrix}\right)$在$\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$中分别与 $\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$ 和 $\left(\begin{smallmatrix}x&-y\\-y&x\end{smallmatrix}\right)$共轭。因此，在这种情况下，实正则、实非正则以及实共轭类的不同个数总和为

$$\frac{(q-1)q^{\ell-1}}{2}+1, \quad q^{\ell-1}-1, \quad \text{and} \quad \frac{q^\ell+q^{\ell-1}-2}{2}+1,$$

分别**情形（iv）：** 令 $A=\left(\begin{smallmatrix}x&\pi^{i+1}\beta y\\\pi^i y&x\end{smallmatrix}\right)$，其中 $0\leq i\leq\ell-1$、 $\beta\in\mathfrak{o}_{\ell-i-1}$、 $x\in\mathfrak{o}_\ell^\times$，且 $y\in\mathfrak{O}_\ell^\times$ 使得 $x^2+\pi^{2i+1}\beta yy^\circ=1=x^2-\pi^{2i+1}\beta y^2$，并且 $\pi^i\left(xy^\circ+x^\circ y\right)=0$。

利用方程 $\pi^i\left(xy^\circ+x^\circ y\right)=0$，我们得到 $\pi^i y=\pi^i r\epsilon x$，其中 $r\in\mathfrak{o}_{\ell-i}^\times$。因此， A 具有如下形式：

$$A=\begin{pmatrix}x&\pi^{i+1}r\epsilon\beta x\\\pi^i r\epsilon x&x\end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

其中 $x\in\mathfrak{o}_\ell^\times$ 、 $r\in\mathfrak{o}_{\ell-i}^\times$和 $\beta\in\mathfrak{o}_{\ell-i-1}$，使得 $x^2\left(1-\pi^{2i+1}r^2\epsilon^2\beta\right)=1$。

为了计算式（3.2）中矩阵的不同共轭类，我们断言，共轭类仅取决于 i、 x 和 β。为此，注意对于固定的 i，对 $r^2\beta$的每一种取值，恰有两个 x 的值满足 $x^2(1-\pi^{2i+1}r^2\epsilon^2\beta)=1$。此外，由于 $r^2\in\mathfrak{o}_{\ell-i}^\times$和 $\ell-i-1<\ell-i$,

映射 $\beta \mapsto r^2\beta$ 是 $\mathfrak{o}_{\ell-i-1}^{\times}$上的一个双射。因此， $r^2\beta$ 的可选总数等于 β的可选总数，即 $|\mathfrak{o}_{\ell-i-1}|$。由此，不同实共轭类的总数为

$$2\left(\sum_{i=0}^{\ell-1}|\mathfrak{o}_{\ell-i-1}|\right)=2\left(\sum_{j=0}^{\ell-1}q^j\right).$$

注意， A 是正则的当且仅当 $i=0$。因此，这种形式的不同实正则类和实非正则类的总数为

$$2q^{\ell-1}\quad\text{and}\quad 2\left(\sum_{i=0}^{\ell-2}q^i\right),\quad\text{respectively.}$$

根据上　　述四种情况，我们得出实正则类、实非正则类以及　　d 实共轭类是

$$q^\ell+1,\quad 2\sum_{i=0}^{\ell-1}q^i,\quad\text{and}\quad 1+q^\ell+2\sum_{i=0}^{\ell-1}q^i,\quad\text{respectively.}$$

此外，定理 3.6 意味着强实类的总数为 $q^\ell+1$. 证明现在可由上述观察、定理 3.2以及推论 3.3得出。□

我们可以将上述证明的主要观察结果总结如下表:

T表 1. GU$_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中实正则、实非正则和强实类的数量

Type	实共轭类代表元	实正则	实非正则	强实
1	$\begin{pmatrix} x & & \\ & x & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $x=\pm1$	0	2	2
2	$\begin{pmatrix} x & & \\ & x^{-1} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$, $x\in\mathfrak{o}_\ell^{\times}$, $x^2\neq1$	$\frac{(q-3)q^{\ell-1}}{2}$	$q^{\ell-1}-1$	$\frac{(q-1)q^{\ell-1}}{2}-1$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & b\epsilon \end{pmatrix}$, $a\in\mathfrak{o}_\ell$, $b\in\mathfrak{o}_\ell^{\times}$, $\mathcal{N}(a+b\epsilon)=1$	1	0	1
4	$\begin{pmatrix} a & b\epsilon & \\ b & a & \\ & & \end{pmatrix}$, $\mathcal{N}(a+b\epsilon)=1$	$\frac{(q-1)q^{\ell-1}}{2}$	$q^{\ell-1}-1$	$\frac{(q+1)q^{\ell-1}}{2}-1$
5	$\begin{pmatrix} x & & \pi^{i+1}\beta y \\ & \ddots & \\ \pi^i y & & \end{pmatrix}$, $\beta\in\mathfrak{o}_{\ell-i-1}$, $x\in\mathfrak{o}_\ell^{\times}$ $y\in\mathfrak{O}_\ell^{\times}$ $x^2-\pi^{2i+1}\beta y^2=1$	$2q^{\ell-1}$	$2\sum_{i=0}^{\ell-2}q^i$	0
总计	$1+q^\ell+2\sum_{i=0}^{\ell-1}q^i$	$q^\ell+1$	$2\sum_{i=0}^{\ell-1}q^i$	$q^\ell+1$

4. $\ell\geq2$ 上 G$(\mathfrak{o}_\ell)$ 的实特征标与正交特征标

回顾一下，有限群 G 的不可约表示 σ 具有实特征，当且仅当 σ 是自对偶的。众所周知， G 的表示 σ 是自对偶的，当且仅当 $\langle\sigma\otimes\sigma,\mathbf{1}_G\rangle\neq0$。若 σ 不可约，则 $\langle\sigma\otimes\sigma,\mathbf{1}_G\rangle\leq1$。因此，不可约表示 σ 具有实特征，当且仅当 $\langle\sigma\otimes\sigma,\mathbf{1}_G\rangle=1$。我们将使用这一判据来确定 G$(\mathfrak{o}_\ell)$ 的实特征。

我们的目标是刻画满足 $\langle\sigma\otimes\sigma,\mathbf{1}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}\rangle=1$ 的 G$(\mathfrak{o}_\ell)$ 的所有正则与非正则不可约表示 σ 。下一个引理描述 G$(\mathfrak{o}_\ell)$ 的实非正则特征标。

引理 4.1。 非正则表示 $\sigma\in\mathrm{Irr}(\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell))$ 具有实特征，当且仅当存在$\sigma'\in\mathrm{Irr}(\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell-1}))$ 具有实特征，使得 $\sigma=\sigma'\circ\rho_{\ell,\ell-1}$。

证明。 显然，如果存在具有实特征的 $\sigma'\in\mathrm{Irr}(\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell-1}))$，使得 $\sigma=\sigma'\circ\rho_{\ell,\ell-1}$ 那么σ 具有实特征。我们证明其逆命题。假设 $\sigma\in\mathrm{Irr}(\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell))$ 是一个具有实特征的非正则表示。那么 $\sigma|_{\mathrm{K}^{\ell-1}}$ 必定是 $\mathrm{K}^{\ell-1}$ 的实特征。根据非正则表示的定义，对于数量矩阵 $A\in\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_1)$，我们有 $\sigma|_{\mathrm{K}^{\ell-1}}=\dim(\sigma)\psi_A$。因此 ψ_A 具有实特征。

由于 $\mathrm{K}^{\ell-1}$ 是一个奇数阶群，$\mathrm{K}^{\ell-1}$ 的唯一实特征是平凡特征。这意味着 $\psi_A = \mathbf{1}_{\mathrm{K}^{\ell-1}}$。因此$\sigma = \sigma' \circ \rho_\ell$, </style}对于某个 $\sigma' \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell-1}))$。 □

因此，问题归结为考察 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的实正则特征。对于任意正则 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_m)$，考虑行列式映射 $\det : \mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_m)}(A) \to R_m^\times$。对于 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$，定义

$$\mathrm{Z}_A = \{x\mathrm{I} \in \mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell) \mid x \in R_\ell^\times,\ \rho_{\ell,\ell_1}(x) \in \det(\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell_1})}(A))\}.$$

于是 Z_A 是由 A 确定的 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的中心子群。关于群 Z_A，以下结论成立

引理 4.2. 对于正则 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$：以下结论成立：

(1) 对于满足 $\mathfrak{t}(A) \in$ ***{分裂半单,cus}*** 的 A，有 $\mathrm{Z}_A = \mathbb{Z}_\ell$. *(2)* 对于满足 $\mathfrak{t}(A) \in$ ***{sns}*** 的 A，群 Z_A 是 $\mathbb{Z}_\ell$. 的指数为二的子群

证明。 定义集合 $S_\ell \subseteq R_\ell^\times$ 如下

$$S_\ell = \begin{cases} \mathfrak{o}_\ell^\times & \text{for } \mathrm{G} = \mathrm{GL}_2 \\ \{z \in \mathfrak{O}_\ell^\times \mid zz^\circ = 1\} & \text{for } \mathrm{G} = \mathrm{GU}_2. \end{cases}$$

定义 $z_A = \{x \in S_\ell \mid \rho_{\ell,\ell_1}(x) \in \det(\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell_1})}(A))\}$。由于对于任意 $g \in \mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$，$\det(g) \in S_\ell$，且从 S_ℓ 到 S_{ℓ_1} 的投影映射是满射，因此集合 z_A 定义良好。接着容易看出$[\mathbb{Z}_\ell : Z_A] = [S_\ell : z_A]$. 。由于 $\ker(\rho_{\ell,\ell_1}: S_\ell \to S_{\ell_1}) \subseteq z_A$，我们有 $= [S_\ell : z_A] = [S_{\ell_1} : \det(\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell_1})}(A))]$.。现在我们断言 $[S_{\ell_1} : \det(\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell_1})}(A))] = [S_1 : \rho_\ell,1(\det(\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell_1})}(A)))]$。为证明这一点，只需证明 $\ker(\rho_{\ell_1},1 : S_{\ell_1} \to S_1) \subseteq \det(\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell_1})}(A))$。考虑元素 $1 + \pi w \in S_{\ell_1}$.。由亨泽尔引理，方程 $1 + \pi w = x^2$ 在某个 $x \in R_{\ell_1}^\times$ 处有解，其中 $x^2 \in S_{\ell_1}$。对于 $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_2$，有 $x^2 = \det(x\mathrm{I}) \in \det(\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell_1})}(A))$，因此 $\ker(\rho_{\ell_1},1 : S_{\ell_1} \to S_1) \subseteq \det(\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell_1})}(A))$。对于 $\mathrm{G} = \mathrm{GU}_2$，$1 + \pi w = x^2$，得到 $x = \pm 1 \bmod (\pi)$，且由于 $1 + \pi w \in S_{\ell_1}$，我们也有 $\mathcal{N}(x) = \pm 1$. 。这两个观察结果意味着 $\mathcal{N}(x) = 1$，也就是说 $x \in S_{\ell_1}$. 。因此 $x^2 = \det(x\mathrm{I}) \in \det(\mathrm{C}_{\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_{\ell_1})}(A))$，从而证明 $\ker(\rho_{\ell_1},1 : S_{\ell_1} \to S_1) \subseteq \det(\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell_1})}(A))$。这就证明了该断言。根据 [KOS18，命题 4.5]，当 $\mathfrak{t}(A) =$ 为分裂半单、cus 时，有 $[S_1 : \rho_\ell,1(\det(\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell_1})}(A)))] = 1$；若$\mathfrak{t}(A) =$sns，则 $[S_1 : \rho_\ell,1(\det(\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell_1})}(A)))] = 2$。这就证明了该引理。

□

定义 4.3.（可切实表示）对于 $\ell \geq 2$，$\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的不可约正则表示 σ 称为可切实表示，若对于任意满足 $\langle \sigma, \psi_A \rangle_{\mathrm{K}^{\ell_2}} \neq 0$ 的 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$，以下条件成立：

(T1) 对某个 $g \in$，$A + gAg^{-1} = 0$ $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$。

(T2) $\langle \sigma,\mathbf{1} \rangle_{\mathrm{Z}_A} \neq 0$.

引理 4.4. 设 $\ell \geq 2$ 和 $\mathbf{m}_\star$ 分别表示类型为$\star \in$ ***{分裂半单,sns cus}*** 的 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的可切实表示的总数。那么

$$\mathbf{m}_\star = \begin{cases} \frac{1}{2}q^{\ell-2}(q-1)^2; & \star = \mathbf{ss}, \\ \frac{1}{2}q^{\ell-2}(q^2-1); & \star = \mathbf{cus}, \\ 2q^{\ell-1}; & \star = \mathbf{sns}. \end{cases}$$

证明。 设 σ 是一个可切实表示，且 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$ 满足 $\langle \sigma, \psi_A \rangle \neq 0$。根据可切实表示的定义，我们得到 $\mathfrak{tr}(A) = 0 \bmod (\pi^{\ell_1})$。接下来，假设 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$ 具有 引理 2.1 中提到的形式，并且满足 $\mathfrak{tr}(A) = 0 \bmod (\pi^{\ell_1})$。 我们分别考虑 ℓ 为偶数和 ℓ 为奇数的情形。

ℓ **偶数：** 令 $\ell = 2m$。根据 $\ell = 2m$ 的正则表示的构造，我们有 $\sigma =$诱导$_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)S_A}$ $\widetilde{\psi_A}$ 对于某个一维表示 $\psi_A \in \mathrm{Irr}(S_A \mid \psi_A)$。对于可切实表示的 σ，条件 $\langle \sigma,\mathbf{1} \rangle_{\mathrm{Z}_A} \neq 0$ 等价于 $\psi_A = \mathbf{1}$ 在 Z_A. 我们有如下结论：

(1) 位于 ψ_A 之上且满足 $\widetilde{\psi_A} = \mathbf{1}$ 在 Z_A 的特征标数量为 $\frac{|S_A|}{|A|}\mathrm{ZK}^m|$。

(2) 导致 K^m 的非共轭特征标 ψ_A 的矩阵 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_m)$ 的数量为 $\frac{|\mathfrak{o}_m^\times|}{2}$对于 $\mathfrak{t}(A) =$ **分裂半单**、**cus** 以及 $|\mathfrak{o}_{m-1}|$ 对于 $\mathfrak{t}(A) =$ **sns**。

我们注意到 $\mathbf{m}_\star$ =个不共轭的 ψ_A 类型为 $\star \times {}_{|}{}^{|S_A|}{}_{A}\,\mathrm{ZK}^{m}|$，当 ℓ为偶数时。现在利用 引理 2.4 和引理 4.2可通过直接计算得到该结果。

ℓ **奇数：** 我们首先考虑满足 $\star \in \{\mathbf{sns},\mathbf{ss}\}$. 的 ℓ **odd: We first consider** $\mathbf{m}_\star$ 。在这种情况下，根据 公式 2.5，任何可实现特征都具有 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}{}_{\mathrm{N}C_{\tilde{A}}}(\psi'_{\tilde{A}})$. 的形式。

N 中形如 $\psi_{\tilde{A}}$（定义见公式 2.4）的不同特征标的数量分别为 $\mathfrak{t}(A) = \mathbf{ss}$ 时的 $\frac{1}{2}(q^{\ell_2} - q^{\ell_2-1})$，以及 $\mathfrak{t}(A) = \mathbf{sns}$ 时的 q^{ℓ_2-1}。此外，对于给定的 $\psi_{\tilde{A}}$，满足条件 $\sigma, 1_{\mathrm{Z}_A} \neq 0$ 的不同 $\psi'_{\tilde{A}}$ 的数量为 $|\mathrm{N}_{C_{\tilde{A}}}\mathrm{NZ}_A| = {}_{|}{}^{|C_{\tilde{A}}|}{}_{A|}\mathrm{Z}$ mod (π^{ℓ_1})。结合引理 2.4 和引理 4.2，可得 $\mathbf{m_{sns}} = 2q^{\ell-1}$ and $\mathbf{m_{ss}} = \frac{1}{2}q^{\ell-2}(q-1)^2$.

现在考虑 $\star = \mathbf{cus}$。对可实现特征有贡献的 K^{ℓ_2} 的非共轭特征标数量为 $\frac{1}{2}(q^{\ell_1} - q^{\ell_1-1})$。位于满足条件 $\langle\sigma,\mathbf{1}\rangle_{\mathrm{Z}_A} \neq 0$ 的 K^{ℓ_2} 特征标 ψ_A 之上的可切实表示 σ 的数量为 $\frac{|S_A|}{|\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}(\tilde{A})|} \times {}_{(}{}^{|\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A})|}{}_{|\mathbb{Z}_\ell \mathrm{K}^{\ell_2}|}$.因此，

$$\mathbf{m_{cus}} = \frac{|S_A|}{|\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}(\tilde{A})|} \times \frac{|\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A})|}{|\mathbb{Z}_\ell \mathrm{K}^{\ell_2}|} \times \frac{1}{2}(q^{\ell_1} - q^{\ell_1-1}) = \frac{1}{2}q^{\ell-2}(q^2-1).$$

□

现在我们可以刻画 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的实正则特征了。

定理 4.5. 对于 $\ell \geq 2$，$G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的任意正则不可约表示当且仅当它可切实表示时才是自对偶的。

证明。 设 σ 是 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的一个正则自对偶表示。根据 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的正则表示的构造，存在一个特征标 $\psi_A \in \mathrm{K}^{\ell_2}$，对应于正则 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$，以及一个不可约表示$\phi \in \mathrm{Irr}(S_A \mid \psi_A)$，使得 $\sigma \cong \mathrm{Ind}^{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}{}_{S_A}(\phi)$。 由麦基限制定理和弗罗贝尼乌斯互反律可得，

$$\langle\sigma\otimes\sigma,\mathbf{1}\rangle = \langle\mathrm{Ind}_{S_A}^{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}\phi\otimes\mathrm{Ind}_{S_A}^{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}\phi,\mathbf{1}\rangle_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)} = \bigoplus_{h\in S_A\backslash\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)/S_A}\langle\phi\otimes\phi^h,\mathbf{1}\rangle_{S_A\cap S_A^h} \tag{4.1}$$

由于 σ 不可约，我们有 $\langle\sigma\otimes\sigma,\mathbf{1}\rangle \leq 1$。因此， σ 具有实特征，当且仅当存在唯一的 $g \in S_A\backslash\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)/S_A$，使得

$$\langle\phi\otimes\phi^g,\mathbf{1}\rangle_{S_A\cap S_A^g} = 1. \tag{4.2}$$

由于 $\mathrm{K}^{\ell_2} \subseteq S_A \cap S_A^g$，我们注意到 $\langle\phi\otimes\phi^g,\mathbf{1}\rangle_{S_A\cap S_A^g} = 1$ 蕴含 $\langle\phi\otimes\phi^g,\mathbf{1}\rangle_{\mathrm{K}^{\ell_2}} \neq 0$。根据 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$的正则表示的构造，我们有 $\phi_{|_{\mathrm{K}^{\ell_2}}} = q^{\ell_2-\ell_1}\psi_A$。因此

$$\langle\phi\otimes\phi^g,\mathbf{1}\rangle_{\mathrm{K}^{\ell_2}} \neq 0 \text{ if and only if } \langle\psi_{A+gAg^{-1}},\mathbf{1}\rangle_{\mathrm{K}^{\ell_2}} \neq 0.$$

根据 ψ_A的定义，我们得到 $A + gAg^{-1} = 0$ 模 (π^{ℓ_1})。这证明了 (T1)。

为证明 (T2)，我们选取 引理 2.1中给出的 Ad轨道代表元 $A \in \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$。不失一般性，我们可以固定 $g = \left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & -z \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$，其中 A 满足 $\mathfrak{t}(A) \in \{\mathbf{sns},\mathbf{cus}\}$，并将 g 固定为 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$，其中任意 A 满足 $\mathfrak{t}(A) = \mathbf{ss}$。以下我们将假设 g具有此形式。对于 A 的任意 Serre 提升 A 以及上述 g，以下结论成立：

(a) $\tilde{A} + g\tilde{A}g^{-1} = 0$.˜

(b) 迹$(A) = 0$.(c)

$S_A \cap S_A^g = S_A$.

现在我们分别考虑 ℓ 偶数和奇数的情形。

ℓ **偶:** 在这种情况下，存在 $\widetilde{\psi_A}$ 的一个一维表示 S_A，使得 $\sigma \cong \mathrm{Ind}^{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}{}_{S_A}(\widetilde{\psi_A})$。因此，根据Mackey限制公式，当且仅当 $\widetilde{\psi_A}\otimes\widetilde{\psi_A}^g|_{S_A\cap S_A^g} = \mathbf{1}_{S_A\cap S_A^g}$（其中 g如上所选）时， σ 是自对偶的。由(a)-(c)，我们必须有

$$\widetilde{\psi_A}\otimes\widetilde{\psi_A}^g = \mathbf{1} \text{ on } S_A. \tag{4.3}$$

由于 $A+gAg^{-1}=0$，我们有 $\widetilde{\psi_A}\otimes\widetilde{\psi_A}^{g}=\psi_A\otimes\psi_A{}^{g}=\psi_{A+gAg^{-1}}=\mathbf{1}$ 作为K的特征标$^{\ell_2}$。由于 ℓ 是偶的，我们有 $S_A=\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}(\tilde{A})\mathrm{K}^{\ell_2}$ 对于任意提升 $\tilde{A}$ 属于 A。因此公式4.3 等价于

$$\widetilde{\psi_A}\otimes\widetilde{\psi_A}^{g}=\mathbf{1}\text{ on }\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}(\tilde{A}).$$

由上式可得

$$\widetilde{\psi_A}(x\mathrm{I}+y\tilde{A})\widetilde{\psi_A}^{g}(x\mathrm{I}+y\tilde{A})=1\text{ for all }x\mathrm{I}+y\tilde{A}\in\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}(\tilde{A}).$$

˜我们假设 A 是 A的 Serre 提升。由 (a) 可得

$$\widetilde{\psi_A}(x\mathrm{I}+y\tilde{A})\widetilde{\psi_A}(x\mathrm{I}-y\tilde{A})=1\text{ for all }x\mathrm{I}+y\tilde{A}\in\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}(\tilde{A}).$$

因此，对于所有 $x\mathrm{I}+y\tilde{A}\in\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}(\tilde{A})$，我们得到 $\widetilde{\psi_A}(x^2\mathrm{I}-y^2\tilde{A}^2)=1$。现在，注意到当 $\mathrm{tr}(\tilde{A})=0$时，$\mathrm{Z}_A=\{x^2\mathrm{I}-y^2\tilde{A}^2\mid x\mathrm{I}+y\tilde{A}\in\mathrm{C}_{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}(\tilde{A})\}$，即可推出 (2)。

˜为证明逆命题，设 $A\in\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$是正则的，且$\sigma,\psi_A\neq0.$。设 A 是 A的一个提升。利用$\widetilde{\psi_A}(x^2\mathrm{I}-y^2\tilde{A}^2)=1$，对所有满足 $x\mathrm{I}+y\tilde{A}\in\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 且 $A+gAg^{-1}=0$ 模 π^{ℓ_1} 的 x,y （其中某个 $g\in\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$）成立，可得 $\widetilde{\psi_A}\otimes\widetilde{\psi_A}^{g}=\mathbf{1}$ 在 S_A上。于是，由等式 4.1 可知 σ 是自对偶的。这就证明了偶数 ℓ时的定理 4.5。

ℓ 奇数：

我们首先利用**sns**和**ss** 情形的结果证明我们的结论。根据小小节2.2.1中的结果，任意分裂半单或分裂非半单表示 ϕ 在 S_A上均满足$\phi\cong\mathrm{Ind}^{S_A}_{\mathrm{N}C_{\tilde{A}}}\psi'_{\tilde{A}}$，其中 $\tilde{A}$ 是 A的 Serre 提升。因此，根据公式 4.2，必有

$$\langle\mathrm{Ind}^{S_A}_{\mathrm{N}C_{\tilde{A}}}\psi'_{\tilde{A}}\otimes(\mathrm{Ind}^{S_A}_{\mathrm{N}C_{\tilde{A}}}\psi'_{\tilde{A}})^{g},\mathbf{1}\rangle_{S_A}=1,\tag{4.4}$$

如上所述，对 g 成立。这等价于

$$\bigoplus_{h\in\mathrm{N}C_{\tilde{A}}\backslash\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)/(\mathrm{N}C_{\tilde{A}})^{g}}\langle\psi'_{\tilde{A}}\otimes(\psi'_{\tilde{A}})^{hg},\mathbf{1}\rangle=1\text{ on }\mathrm{N}C_{\tilde{A}}\cap(\mathrm{N}C_{\tilde{A}})^{gh}.$$

由于 $\psi'_{\tilde{A}}$ 是一维的，上述等式等价于

$$\bigoplus_{h\in\mathrm{N}C_{\tilde{A}}\backslash\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)/(\mathrm{N}C_{\tilde{A}})^{g}}\psi'_{\tilde{A}}\otimes(\psi'_{\tilde{A}})^{hg}=\mathbf{1}\text{ on }\mathrm{N}C_{\tilde{A}}\cap(\mathrm{N}C_{\tilde{A}})^{gh}.\tag{4.5}$$

取 $A=\left(\begin{smallmatrix}\alpha&0\\0&-\alpha\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$，使得 $\mathfrak{t}(A)=$**分裂半单**，且 $g=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$和 $A=\left(\begin{smallmatrix}0&\epsilon\pi^{\beta}\\\epsilon&0\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$，使得$\mathfrak{t}(A)=$**sns**，且 $g=\left(\begin{smallmatrix}z&0\\0&-z\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$。利用引理 2.2，公式4.5 等价于

$$\psi'_{\tilde{A}}\otimes\psi'_{\tilde{A}}{}^{g}=\mathbf{1}\text{ on }C_{\tilde{A}}.\tag{4.6}$$

˜根据 A 和 $\psi'_{\tilde{A}}$的定义，这等价于在 Z_A. 上满足 $\psi'_{\tilde{A}}=\mathbf{1}$。由于 σ 位于 $\psi'_{\tilde{A}}$ 之上，且 Z_A 是中心子群，因此在这种情况下，我们得到 (T2)。因此，类型为**分裂半单**或 **sns**的每个正则自对偶表示都是可切实表示。

接下来证明，类型为分裂半单或 sns 的每个可切实表示都是自对偶的。设 $A\in\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$ 是正则的，满足 $\sigma,\psi_A\neq0.$。根据引理 2.1，我们可以假设：当 $\mathfrak{t}(A)=$ 时，$A=\left(\begin{smallmatrix}\alpha&0\\0&-\alpha\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$ 为分裂半单；当 $\mathfrak{t}(A)=$ 时，$A=\left(\begin{smallmatrix}0&\epsilon\pi^{\beta}\\\epsilon&0\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$ 为 sns。此外，S_A的任意表示 ϕ都满足 $\phi\cong\mathrm{Ind}^{S_A}\mathrm{N}_{C_{\tilde{A}}}\psi'_{\tilde{A}}$，其中˜是小小节2.2.1中提到的 A 的某个提升 A。因此，我们必须在 Z_A. 上满足 $\psi'_{\tilde{A}}=\mathbf{1}$。于是，当 $\mathfrak{t}(A)=$为分裂半单时，$\psi'_{\tilde{A}}$对 $g=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 满足公式 4.6（因而也满足公式 4.2）；当 $\mathfrak{t}(A)=$为 sns 时，$\psi'_{\tilde{A}}$对 $g=\left(\begin{smallmatrix}z&0\\0&-z\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 满足这些公式。这说明 σ 是自对偶的。

最后，我们考虑尖点正则表示的情形。设 σ 是一个可切实表示的尖点表示。由引理 2.1，存在 $A=\left(\begin{smallmatrix}0&\epsilon\tilde{\alpha}\\\epsilon&0\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{g}(\mathfrak{o}_{\ell_1})$，使得 $\mathfrak{t}(A)=$cus 且$\sigma,\psi_A\mathrm{K}^{\ell_2}\neq0.$。为了证明 $\sigma\cong\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)}{}_{S_A}(\phi)$ 是自对偶的，我们证明对于 $g=\left(\begin{smallmatrix}z&0\\0&-z\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$，$\phi\otimes\phi^{g},1=1$在 S_A 上。由 (T2) 以及对 $\mathfrak{t}(A)=$cus 有 $\mathrm{Z}_A=\mathbb{Z}_\ell$ 这一事实（引理 4.2），可得对所有 $z\in\mathbb{Z}_\ell$ 都有 $\phi(z)=\mathrm{I}$。我们有

$$\langle\phi\otimes\phi^{g},\mathbf{1}\rangle_{S_A}=\frac{1}{|S_A|}\sum_{h\in S_A}\chi_\phi(h)\chi_\phi(g^{-1}hg).\tag{4.7}$$

根据 S_A， $\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}$ 以及 $\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}$，我们有 $S_A = \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A}) \sqcup (\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}(\tilde{A}) \setminus \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A})) \sqcup (S_A \setminus \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}(\tilde{A}))$。由命题 2.3(2) 可得

$$\chi_\phi(h) = 0 \quad \text{for all} \quad h \in \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}(\tilde{A}) \setminus \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A}). \tag{4.8}$$

现在我们断言

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A})} \chi_\phi(h)\chi_\phi(g^{-1}hg) = q^2 |\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A})|. \tag{4.9}$$

为证明这一点，考虑 $h = zab \in \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A})$，其中 $z \in \mathbb{Z}_\ell$， $a \in \mathbf{K}^1 \cap S_A$ 和 $b \in \mathbf{K}^{\ell_2}$。然后，利用 $\phi(z) = \mathrm{I}$，我们得到

$$\phi(h) = \phi(zab) = \phi(a)\phi(b).$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$由命题 2.3(1)，我们有， $\phi(a) = \psi_A(a)\mathrm{I}$。再由上式， $\phi(h) = \psi_A(a)$ $\phi(b)$。这$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$意味着 $\chi_\phi(h) = \psi_A(a)\chi_\phi(b)$。再次由命题 2.3(1)，我们有 $\chi_\phi(b) = q\psi_A(b) = q\psi_A(b)$，因为$b \in \mathbf{K}^{\ell_2}$. 由此得到 $\chi_\phi(h) = q\widetilde{\psi_A}(a)\psi_A(b)$。用类似的论证，我们可以容易地推出 $\chi_\phi(g^{-1}hg) = \sim q\psi_A(g^{-1}ag)\psi_A(g^{-1}bg)$。令 $a = \mathrm{I} + \pi\left(\begin{smallmatrix} x & \epsilon y\tilde{\alpha} \\ \epsilon y & x \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{K}^1 \cap S_A$ 和 $b = \mathrm{I} + \pi^{\ell_2} B \in \mathbf{K}^{\ell_2}$. 由此可得

$$\begin{aligned}
\chi_\phi(h)\chi_\phi(g^{-1}hg) =& q^2 \widetilde{\psi_A}(a)\widetilde{\psi_A}(g^{-1}ag)\psi_A(b)\psi_A(g^{-1}bg) \\
=& q^2 \widetilde{\psi_A}(ag^{-1}ag)\psi_A(bg^{-1}bg) \\
=& q^2 \widetilde{\psi_A}(((1+\pi x)^2 - \pi^2\epsilon^2 y^2 \tilde{\alpha})\mathrm{I})\psi(\pi^{\ell_2}\mathrm{tr}(\tilde{A} + g^{-1}\tilde{A}g)B) = q^2.
\end{aligned}$$

$\widetilde{\ }$最后一个等式成立，是因为 $\psi_A(((1+\pi x)^2 - \pi^2\epsilon^2 y^2\tilde{\alpha})\mathrm{I}) = 1$ （利用对所有 $z \in \mathbb{Z}_\ell$， $\phi(z) = \mathrm{I}$）且模 π^{ℓ_1}，其中 $\tilde{A}$ 是 A. 的 Serre 提升。因此我们得到，$\sum_{h \in \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A})} \chi_\phi(h)\chi_\phi(g^{-1}hg) = q^2 |\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}(\tilde{A})|$. 接下来我们证明

$$\sum_{h \in S_A \setminus \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}(\tilde{A})} \chi_\phi(h)\chi_\phi(g^{-1}hg) = |S_A \setminus \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}(\tilde{A})|. \tag{4.10}$$

为证明这一点，令 $h = x\mathrm{I} + y\tilde{A} \in S_A \setminus \mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}(\tilde{A})$。我们有 $(x\mathrm{I} + y\tilde{A})(x\mathrm{I} - y\tilde{A}) = (x^2 - y^2\tilde{\alpha})\mathrm{I}$。这给出$\phi(x\mathrm{I}+y\tilde{A})(x\mathrm{I}-y\tilde{A}) = \phi((x^2-y^2\tilde{\alpha})\mathrm{I}) = \mathrm{I}$。这意味着 $\phi(x\mathrm{I}-y\tilde{A}) = \phi(x\mathrm{I}+y\tilde{A})^{-1}$. 由于 $\chi_\phi(h)\chi_\phi(g^{-1}hg) = \chi_\phi(x\mathrm{I} + y\tilde{A})\chi_\phi(x\mathrm{I} - y\tilde{A})$, 因此有 $\chi_\phi(h)\chi_\phi(g^{-1}hg) = \chi_\phi(x\mathrm{I} + y\tilde{A})\chi_\phi(x\mathrm{I} + y\tilde{A})^{-1}$. 根据命题 2.3(3)， $\chi_\phi(x\mathrm{I} + y\tilde{A})^{-1} = \overline{\chi_\phi(x\mathrm{I} + y\tilde{A})} = 1$。由此得到 $\chi_\phi(h)\chi_\phi(g^{-1}hg) = \overline{\chi_\phi(x\mathrm{I} + y\tilde{A})}\chi_\phi(x\mathrm{I} + y\tilde{A}) = 1$. 这就证明了我们的断言。此外， $\overline{|\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_i}(\tilde{A})|} = (q + \Delta)$ $q^{4\ell - 2\ell_i - 2}$ 对 $i \in \{1, 2\}$ 而言，在 $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_2$的情形下很容易证明；对于 $\mathrm{G} = \mathrm{GU}_2$，则可由 Cam19 第 4.H.2 节第 53–54] 页推出。利用方程 4.8、方程 4.9、方程 4.10 以及方程 4.7 中的 $\frac{|\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_1}\ \tilde{A}\ |}{|\mathbb{Z}_\ell D^{\ell_2}\ \tilde{A}\ |}() = q^2$，得到 $\phi \otimes \phi^g, 1_{S_A} = 1$. 因此， σ 是自对偶的。这证明了对于 ℓ 为奇数的情形，$\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的任何可触知尖点表示都是自对偶的。

为证明每个自对偶尖点表示都是可触知的，我们证明 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的自对偶尖点表示总数与可触知尖点表示（记作 $\mathbf{m_{cus}}$ ， 见引理 4.4）的数量相同。记 $\mathbf{n}_\star$为 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 中类型为 $\star$. 的自对偶表示的数量。我们已经证明，当且仅当一个分裂半单**ss(sns)**表示是可切实表示的，它才是自对偶的。因此，由引理 4.4，可得 $\mathbf{n_{ss}} = \frac{1}{2}(q-1)^2 q^{\ell-2}$， 且 $\mathbf{n_{sns}} = 2q^{\ell-1}$.

由引理 4.1可知，$\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 中非正则自对偶表示的数量（记作 $\mathbf{n^{nreg}}$）等于 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_{\ell-1})$ 中自对偶表示的数量。由命题 3.7， $\mathbf{n_{nreg}} = 1 + q^{\ell-1} + 2\sum_{i=0}^{\ell-2} q^i$.$\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 中自对偶表示的数量与 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 中实共轭类的数量相同。，由命题 3.7， 可得

$$\mathbf{n_{ss}} + \mathbf{n_{sns}} + \mathbf{n_{cus}} + \mathbf{n_{nreg}} = 1 + q^\ell + 2\sum_{i=0}^{\ell-1} q^i$$

代入$\mathbf{n_{ss}}$， $\mathbf{n_{sns}}$和$\mathbf{n^{nreg}}$， 可得$\mathbf{n_{cus}} = \frac{1}{2}(q^2-1)q^{\ell-1} = \mathbf{m_{cus}}$. 因此， $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 的每个自对偶尖点表示都是可切实表示的。这就完成了该结果的证明。□

5. 正交特征

本节中，对于 $\ell \geq 2$，我们证明 $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的每个实特征都是正交的，并且存在一个 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的实特征不是正交的。

设 ϕ 是群 G 的一个表示，令 $\nu(\phi)$ 表示其弗罗贝尼乌斯–舒尔指标。回忆一下，不可约表示 ϕ 是自对偶且正交，当且仅当 $\nu(\phi)$ 分别为 ± 1 和 1。我们将使用以下著名结果来判定每个实特征是否正交：

$$\sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(G)} \nu(\phi)\dim(\phi) = |\{g \in G \mid g^2 = e\}|. \tag{5.1}$$

回忆一下，若元素 $g \in \mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 满足 $g^2 = e$，则称其为对合。我们首先确定 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 中对合的数量。

引理 5.1. $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的对合数量为 $(q - \partial_{\mathrm{G}})q^{2\ell-1} + 2$。

证明。 对合这一概念是共轭类不变量，因此，为了确定 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的对合，我们使用 $\mathrm{G}(\mathfrak{o}_\ell$ 的共轭类代表元，如定理 3.1 和定理 3.4所述。

根据定理 3.1，$\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的任意元素都共轭于矩阵 $M(d, i, \alpha, \beta)$，其中 $d, i, \alpha, \beta.$ 需满足某些条件。矩阵 $M(d, i, \alpha, \beta)$ 是对合，当且仅当满足以下两个条件：

$$2\pi^i d + \pi^{2i}\beta = 0, \tag{5.2}$$

$$d^2 + \pi^{2i}\alpha = 1. \tag{5.3}$$

对于 $i = 0$，上述条件给出 $d = \frac{-\beta}{2}$ 和 $\alpha = 1 - \frac{\beta^2}{4}$.由此得到一个类代表元 $\begin{pmatrix} \frac{-\beta}{2} & 1-\frac{\beta^2}{4} \\ 1 & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$，它对所有 $\beta.$ 都代表共轭类（$0\,1\,1\,0$）。此类类型的对合总数为 $\frac{|\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)|}{|\mathrm{GL}()\mathrm{C}^{\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)}()|} = \frac{q^{4\ell-3}}{(q-1)(q^2-1)\ (q-1)} = {}^{2}q^{2\ell-2} = (q+1)q^{2\ell-1}$。对于 $i \geq 1$，由方程 5.2 易知$i = \ell.$。将其代入 $d^2 + \pi^{2i}\alpha = 1$，得到 $d = \pm 1.$。因此我们得到两个不同的共轭类代表元$\pm$（$1\,0\,0\,1$），此类类型的对合总数为 2。由此可得，$(q+1)q^{2\ell-1} + 2\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中的对合数量。

接下来我们考虑群 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的共轭类代表元，如定理 3.4所示。

(1) $g = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$：在这种情况下，$g^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 意味着 $x = \pm 1$。因此，这些类型的共轭类中的对合总数为 2。(2) $g = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$，$x \neq y$： $g^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 意味着 $x^2 = y^2 = 1$。条件 $x \neq y$ and$x^2 = y^2 = 1$ 不会在此类类型中产生任何对合。(3) $g = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & x \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$，$y \neq 0$：在这种情况下，$g^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 当且仅当 $xy = 0$ and $x^2 + y^2 = 1$。由于$y \neq 0$，利用 $xy = 0$ 可得 $y \in \mathfrak{O}_\ell^\times$ and $x = 0$ 或 $y \in \pi\mathfrak{O}_\ell$ and $x \in \pi\mathfrak{O}_\ell$。 $y \in \pi\mathfrak{O}_\ell$and $x \in \pi\mathfrak{O}_\ell$ 的情况不可能成立，因为 $\det(g) \neq 0 \mod(\pi)$。因此，我们必须有 $x = 0$。所以$x^2 + y^2 = 1$ 给出 $y^2 = 1$。对应的唯一类代表元为 $g = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$。此类共有 $\frac{|\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)|}{|\mathrm{GU}()\mathrm{C}^{\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)}()|} = \frac{q^{4\ell-3}}{(q-1)(q+1)^2\,(q+1)^2 q^{2\ell-2}} = (q-1)q^{2\ell-1}$ 个对合。

(4) $g = \begin{pmatrix} x & \pi^{i+1}\beta y \\ \pi^i y & x \end{pmatrix}$
$\in \mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ $y \in \mathfrak{O}_\ell^\times$：在此情况下，$g^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$给出 $\pi^{i+1}xy = 0$。由于 $y \in \mathfrak{O}_\ell^\times$，我们得到 $x \in \pi\mathfrak{O}_\ell$，而这是不可能的，因为 $\det(g) \neq 0$ 模（π）。因此，这种类类型不产生任何对合。

由上述讨论可知，$\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$中的对合总数为（$q-1$）$q^{2\ell-1} + 2$。引理得证。□

定理 5.2。 设 $\ell \geq 1$。以下结论成立：

（*1*）具有实值特征标的 $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的任意不可约复表示都是正交的。（*2*）存在一个 $\mathrm{GU}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的自对偶表示，但它不是正交的。对于 $\ell \geq 2$，存在一个正则辛表示。

证明。 为证明（1），我们说明 $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的自对偶表示的维数总和，等于 $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_\ell)$中的对合数目。 由公式 5.1 即可得到该结果。

我们通过归纳法进行证明。对于 $\ell = 1$，这是一个众所周知的结果，参见 [Gow76] 和 [OY76]。我们假设该结论对 $k \le \ell - 1$ 成立，并证明其对 $k = \ell$成立。我们将 $G(\mathfrak{o}_k)$ 的自对偶表示分为四类，即分裂半单（$\Sigma^{\mathbf{ss}}$）、分裂非半单（$\Sigma^{\mathbf{sns}}$）、尖点（$\Sigma^{\mathbf{cus}}$）和非正则（ $\Sigma^{\mathbf{nreg}}$）表示。如前所述，$G(\mathfrak{o}_\ell)$ 的非正则自对偶表示与 $G(\mathfrak{o}_{\ell-1})$ 的自对偶表示相同。 因此，由归纳假设，

$$\sum_{\phi \in \Sigma^{\mathbf{nreg}}} \dim(\phi) = (q+1)q^{2\ell-3} + 2.$$

$GL_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的分裂半单、sns 和尖点表示的维数分别为 $(q+1)q^{\ell-1}$、$(q^2-1)q^{\ell-2}$ 和 $(q-1)q^{\ell-1}$ 。由定理 4.5，得到 $|\Sigma^{\mathbf{ss}}| = \frac{1}{2}(q^2-1)q^{\ell-2}$, $|\Sigma^{\mathbf{sns}}| = 2q^{\ell-1}$ 和 $|\Sigma^{\mathbf{cus}}| =$1 $2(q-1)^2q^{\ell-2}$。由此易见，$GL_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的所有自对偶表示的维数之和为 $(q+1)q^{2\ell-1}+2$，这与引理 5.1 给出的 $GL_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的对合数相同。这就证明了 (1)。

对于 (2)，设 a_ℓ 为 $GU_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中 Frobenius–Schur 指标为 1 的特征标的次数之和， b_ℓ 为 $GU_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 中 Frobenius–Schur 指标为 -1 的特征标的次数之和。由 [FV14，第 27] 页可得 $a_1 = q^2+1$ 和 $b_1 = q-1$。结合引理 4.4 和定理 4.5，得到$a_\ell + b_\ell = (q+1)q^{2\ell-1}$. 。由公式 5.1，得到 $a_\ell - b_\ell = (q-1)q^{2\ell-1}+2$. 。因此 $a_\ell = q^{2\ell}+1$和 $b_\ell = q^{2\ell-1}-1$. 。注意，$GU_2(\mathfrak{o}_\ell)$ 的非正则辛特征标的次数之和为 $b_{\ell-1} = q^{2\ell-3}-1$. 。观察到对于 $\ell \ge 1$ 有 $b_\ell \ge 1$ ，且对于 $\ell \ge 2$ 有$b_\ell - b_{\ell-1} = (q^2-1)q^{2\ell-3} \ge 1$ ，即可得出结论。□

致谢：第三位署名作者感谢 Amritanshu Prasad 就本项目进行的有益讨论，并感谢印度 SERB 通过资助项目 SPG/2022/001099 提供的经费支持。

参考文献

[AKOV16] Nir Avni、Benjamin Klopsch、Uri Onn 和 Christopher Voll，《离散赋值环上整 p-进矩阵的相似类与 A 型群的表示 ζ 函数》。《伦敦数学会会刊》 (3) 112 (2016)，第 2 期，267–350。MR3471251[AOPV09] Nir Avni、Uri Onn、Amritanshu Prasad 和 Leonid Vaserstein，《局部主理想环上矩阵的相似类》。《代数通讯》 **37** 2009 8, 2601 2615 2543507 ( )，第 – 期。MR BLCW Robert [10] Barrington Leigh、Gerald Cliff 和 Qianglong Wen，《GL(2, $\mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z}$) 的特征标值》。《代数学杂志》323 (2010)，第 5 期，1288–1320。MR2584957[Cam19] John Campbell，《二次环扩张上的酉矩阵群的特征标》，博士学位论文，2019。可见 https://doi.org/10.7939/r3-9jmq-1j39。[CMO24] Tyrone Crisp、Ehud Meir 和 Uri Onn，《紧离散赋值环上一般线性群表示的归纳方法》。《数学进展》 **440** 2024 109516, 58 4704476 ( )，论文编号：。MR FV [14] Jason Fulman 和 C. Ryan Vinroot，《有限一般线性群与酉群的实特征标次数和生成函数》。《代数与组合数学杂志》40 (2014)，第 2 期，387–416。MR3239291[GHS25] Archita Gupta、M Hassain 和 Pooja Singla，《有限长度主理想局部环上二阶一般线性群与酉群的正则特征张量积》，2025。[Gow76] R. Gow，《某些李型群的舒尔指标》。《代数学杂志》42 (1976)，第 1 期，102–120。MR466330[Gow81] ,《有限域上非退化双线性形式与半双线性形式的等价类数》。《线性代数及其应用》 **41** 1981 175 181 649725 ( )，–。MR GS Nick Gill 和 Anupam Singh，《SL [11] $_n$ q **14** 2011 3, ( ) 中的实类与强实 437 459 2794377 类》。《群论杂志》( )，第 – 期。MR[GSV14] Zachary Gates、Anupam Singh 和 C. Ryan Vinroot，《奇特征有限酉群中的强实类》。《群论杂志》 **17** 2014 4, 589 617 3228935 ( )，第 – 期。MR Had Itamar [24] Hadas，《主理想局部环上光滑群概形的谱等价性》。《代数学杂志》647 (2024 858 883 4719887)，–。MR Hil [95] Gregory Hill，《$GL_n(\mathcal{O})$ 的正则元素与正则特征》。《代数学杂志》174 (1995)，第 2 期，610–635。MR1334228[HS22] M. Hassain 和 Pooja Singla，《二阶紧特殊线性群的表示增长》。《数学进展》 **396** 2022 108164, 61 4362775 ( )，论文编号：。MR Hup [98] Bertram Huppert，《有限群的特征标理论》，德格鲁伊特数学论丛，第 25 卷，Walter de Gruyter & Co.，柏林，1998 1645304 。MR Isa I. Martin Isaacs，《有限群的特征标理论》，学术出版社 [Harcourt [76] Brace Jovanovich 出版社], 纽约，1976。纯粹与应用数学，第 69 号。MR0460423 (57 #417)

[JL93] Gordon James 和 Martin Liebeck，《群的表示与特征标》，剑桥数学教材，剑桥大学出版社，剑桥，1993 1237401 。MR KK Dilpreet Kaur 和 Amit Kulshrestha，《强[15]实特殊群》。《代数通讯》43 (2015)，第 3 期，1176–1193。MR3298127[KOS18] Roi Krakovski、Uri Onn 和 Pooja Singla，《离散赋值环上 A 型群的正则特征》。《代数学杂志》**496** 2018 116 137 3737836 ( )，–。MR OS Anthony G. O'Farrell 和 Ian Short，《动力系统与群论中的可逆性》，伦敦数学会讲义系列，第[15]416，2015 3468569 卷，剑桥大学出版社，剑桥，。[76]MR OY Zyozyu Ohmori 和 Toshihiko Yamada，《GL(,) 与 GL(3, q) 特征标的舒尔指标》。《数学杂志》**146** 1976 1, 93 100 387425 ( )，第 – 期。MR Pra Dipendra Prasad，《李型有限群的自对偶表示》。《代数[98]学杂志》210 1，298 1998 310 1656426 ( )，第 – 期。MR[PS22] Shiv Prakash Patel 和 Pooja Singla，《离散赋值环上 A 型群的重数一定理》。《美国数学会会刊》**150** 2022 6, 2309 2322 4399251 ( )，第 – 期。[09]MR Sta Alexander Stasinski，《GL ( ) 的光滑表示》。《代数通讯》37 (2009)，第 12 期，4416–4430。MR2588859[Vin20] C. Ryan Vinroot，《全正交有限单群》。《数学杂志》294 (2020)，第 3–4 期，1759–1785。MR4074058

印度理工学院坎普尔分校数学与统计学系，印度坎普尔 208016电子邮箱地址： architagup20@iitk.ac.in印度统计研究所理论统计与数学部，德里中心，印度新德里 110016电子邮箱地址： tejbirlohan70@gmail.com

印度理工学院坎普尔分校数学与统计学系，印度坎普尔 208016电子邮箱地址：
psingla@iitk.ac.in