模曲线上的顶点算子代数向量丛及其相关模形式

DANIEL BARAKE、OWEN CHUCHMAN、Cameron Franc、Geoffrey Mason 和 BRETT NASSERDEN

摘要。本文介绍与顶点算子代数 V（VOA）或更一般的拟顶点算子代数（QVOA）相关联的椭圆模曲线上的向量丛，旨在为未来研究 VOA 特征标的应用奠定基础。我们阐明， V的截面的模如何自然地产生 V值拟模形式。 $Q(V)$的 V值拟模形式空间具有双重 QVOA 的结构，特别是，拟模形式代数 Q 本身就是一个双重 QVOA。 $Q(V)$还具有一个自然的导数算子，它源于由 V 定义的向量丛上的联络以及模导数，我们称之为升算子。我们在 $Q(V)$上引入一个相应的降算子 Λ，它具有这样的性质： V值模形式 $M(V) \subseteq Q(V)$是 Λ的核。这推广了标量值拟模形式的经典理论。我们给出了 $M(V)$与 $M \otimes V$的一个显式同构。最后，顶点算子的坐标不变性意味着 $M(V)$具有自然的赫克理论；我们利用该同构完整描述了赫克本征系统：它们与标量值拟模形式所产生的特征值系统相同。

arXiv:2601.10686v1 [math.NT] 15 Jan 2026

目录

1. 引言 2 1.1. 记号 5 2. 模形式 6 2.1. 模形式的几何定义 6 2.2. 紧化模曲线 7 3. 模曲线上的 VOA 8 3.1. 主要构造 8 3.2. 1-余循环 $K(\gamma, \tau)$ 12 3.3. 向紧化曲线的延拓 13 3.4. 顶点算子代数值模形式 14 4. 联络 15 4.1. 证明 ∇ 是联络 15 5. QVOA 值准模形式 17 5.1. 一些动机 17 5.2. V值准模形式的定义与初步性质 18 5.3. 模形式的模 20 6. $Q(V)$ 拟 QVOA 23 6.1. $Q^{(1/2)}$ 拟 QVOA 24 6.2. 转到 $Q(V)$ 26 7. $Q(V)$上的一些附加算子 26 7.1. 降算子与主要定理 26 7.2. 降算子的满射性 28 1

7.3. 保权算子 P 30 7.4. 一些分次维数 32 7.5. 重新考察联络 33 8. 海克算子 36 8.1. 经典海克算子 36 8.2. 算子 T'_m 37 8.3. 另一种海克作用 39 8.4. 海克本征态 41 附录 A. 标量值拟模形式 42 附录 B. 顶点代数 44 参考文献 48

1. 引言

顶点算子最初起源于物理学，是一种代数工具，用于辅助共形场论及统计力学、弦理论等相关领域的计算。物理学文献的参考资料见 [4] 。从一开始，研究中便出现了与模形式之间令人惊讶的联系。后来，数学家开始将顶点算子代数（VOA）的新生理论加以形式化并拓展，其视角也主要是代数的 [13]。这些研究的主要动力在于解释怪兽月光，并阐释某些无限维李代数表示研究中的若干有趣现象。模形式和拟模形式也不可避免地以令人惊讶的方式与这些研究产生联系 [17], [12]。

自这些早期研究以来，模形式之谜已有部分揭开，这在很大程度上归功于对VOA及启发其研究的理论所作的几何解释。事实上， [11], 中清楚地讨论了VOA的数据如何与某种向量丛（通常是无限秩的）在任意光滑曲线、甚至更理想的情况下在曲线模空间上的数据相同。这些向量丛带有联络，并以有趣的方式与顶点运算相互作用。由于模形式是椭圆曲线模空间上向量丛的截面，这种几何视角为理解模形式在VOA理论中的出现，提供了一种有力而便捷的方式。

受早期关于 VOA 的 p-进工作 [10], 启发，我们开始探究 VOA 在何种意义上也可能在算术曲线上产生向量丛，例如伊古萨塔或志村曲线的其他极限。显然，深入理解有限层模曲线上的 VOA 几何理论将大有裨益。本文旨在将这一理论阐述得精确明晰，使熟悉模形式理论的读者也能理解。具体而言，下文将清楚地构造附属于 VOA，或更一般地说，拟 VOA（QVOA） V 的向量丛 $\mathcal{V}/X(1)$，它定义在一级椭圆曲线的模曲线 $X(1)$ 上；所用方法基于一致化，例如讲义 [14] 中所介绍的方法。这种方法使我们能够清晰地描述 $\mathcal{V}$ 的截面。这些截面是定义在复上半平面上的全纯函数 $\mathcal{H}$

$$f\colon \mathcal{H} \to V$$

其取值于 V的某个有限维子空间，并满足模变换律。这些具有不同权的函数共同刻画了一个 V-值模形式的模 $M(V)$。关于 V-值模形式及其空间 $M(V)$ 的精确定义，参见第 3.4 节。

在讨论我们的结果之前，我们先说明为何下文将拟 VOA 而非 VOA 视为一项基础研究对象。首先，我们研究的是椭圆曲线的模空间，而非一般亏格的情形，因此在我们的构造中，Virasoro 作用于 V 的 $\mathfrak{sl}_2$ 部分才真正发挥作用。这一观察在文献中以多种形式出现，参见例如 [13, Page 20]。其次，我们下文引入的 $Q(V)$，即取值于 V 的拟模形式空间，只有拟 VOA 的结构，而非完整 VOA 的结构。因此，在这一领域中，拟 VOA 不可避免，也是自然的研究对象。

本文较为完整地描述了 $M(V)$ 及其相关的各种结构。为了阐述我们的结果，自然且方便的做法是引入一个更一般的拟模 V 值形式空间 $Q(V)$，参见第 5 节第 5.2 小节。引入取值于 V 的拟模形式的原因很简单：空间 $M(V)$ 对自然的逐点双线性乘积并不封闭，而这些乘积是 $M(V)$ 从 V 继承而来的。这一断言正是顶点算子代数类比：模形式代数 M 对算子 $\theta = qd/dq$ 并不封闭，因此应扩展到拟模形式代数 Q，以获得一个良好的、在 θ 下不变的函数空间。尽管我们将 $Q(V)$ 引入为满足某些拟模变换律的函数空间，但我们在定理 5.5 中证明存在一个自然的分次同构：

$$Q(V) \cong Q \otimes_{\mathbf{C}} V^{(2)}, \tag{1}$$

其中，$V^{(2)}$ 表示与 V 相同的底层向量空间，但其分次加倍。空间 $Q(V)$ 在 $Q(V)$ 从 V 继承的自然双线性乘积下封闭。此外，我们将在第 6 节说明，$Q(V)$ 如何通过方程 (1) 的识别，从中继承一种自然的（分次加倍的）拟顶点算子代数结构。该拟 VOA 结构尤其包含定义李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 表示的升算子和降算子。

颇具讽刺意味的是，我们在此将拟模形式与顶点代数结合起来讨论，但在这一框架中，Rankin-Cohen（RC）括号似乎毫无用武之地；然而，人们早已预期，RC 括号与（拟）模形式及顶点代数之间应当存在联系。或许可以通过对 Q 或 $Q(V)$ 适当地进行变形量子化，并将其视为拟顶点算子代数，从而建立这种联系。此类研究在模形式文献中已有充分探讨，例如 [2],[3]；在顶点算子代数文献中也并非全然陌生 [9],[20],，我们希望将来能再探讨这一主题。

我们的第一个主要结果利用迄今为止所描述的工具，刻画了 V-值模形式$M(V) \subseteq Q(V)$ 包含于 V-值拟模形式空间中的情形。回忆一下，每个拟模形式都可以表示为艾森斯坦级数 E_2、E_4、E_6 的多项式（见 [24]），这使得 $\frac{\partial}{\partial E_2}$ 成为 Q 上自然的降权线性算子。另一方面，$L(1)$ 是 V 上自然的降权算子。结合这些降算子可得：

定理 1.1。 模形式空间 M（V） 是降算子的核

$$\Lambda := \frac{12}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial E_2} \otimes 1 + 1 \otimes L(1)$$

作用于 $Q(V)$。

定理 1.1 是定理 7.1 的推论（参见推论 7.2）；定理 7.1 描述了 $Q(V)$ 中元素的模变换行为。对于定理 1.1，可以从几个角度来看。首先，从模形式这一侧看，它自然类似于经典模形式理论中的一个结果：模形式空间 $Q = \mathbf{复数域}[E_2, E_4, E_6]$ 中的子空间 $M = \mathbf{复数域}[E_4, E_6]$，即模形式空间，正是降算子 $\partial/\partial E_2$ 的核。只要知道 M 和 Q 用艾森斯坦级数表示的形式，这个标量结果便显而易见；然而，证明定理 1.1 还需要更多工作。另一方面，众所周知，VOA V 的准初级态 $QP(V)$ 在某种意义上是最容易处理的（参见第 2.6 节）；对于 VOA V，我们有（根据定义） $QP(V)$ =核 $L(1)$。因此，从 VOA 的角度来看，定理 1.1 表明， $M(V)$ 可以视为 $Q(V)$ 中准初级态构成的空间。

事实证明，可以将 $M(V)$ 非常具体地描述为一个在 M 上的无限秩自由模。这是我们的第二个主要结果：

定理 1.2。 存在一个显式的 M-线性分次空间同构：

$$P\colon M \otimes_{\mathbf{C}} V^{(2)} \cong M(V)$$

一个微妙之处在于，由定理 1.2 得到的同构 P^{-1} 并不是 方程 (1) 中逐点同构在子空间 $M(V) \subseteq Q(V)$ 上的限制。 P 的定义及定理 1.2 的证明见第 7.3 节。

综合方程 (1) 中的同构以及定理 1.1 和定理 1.2，我们得以详细了解空间 $M(V)$。由于向量丛的截面能够刻画向量丛本身，这进而为与拟顶点算子代数或顶点算子代数 V 相关联的向量丛 $\mathcal{V}/X(1)$ 提供了一个具体的自守描述；例如参见 [11]。

现在我们概述本文的结构。第 2 节回顾模形式的几何定义。随后，第 3.4 节按照 [14] 的轨形方法，介绍如何将 [11] 应用于椭圆曲线模空间上的拟顶点算子代数 QVOA，从而构造向量丛 $\mathcal{V}/X(1)$。第 4 节接着介绍向量丛 $\mathcal{V}/X(1)$ 上的联络。该联络是模理论中的升算子，我们还提供了详细的基础证明，帮助初学者入门。接下来，第 5 节介绍拟模形式，并说明研究它们的一些动机。在与之密切相关的第 6 节中，我们将讨论 $Q(V)$ 作为拟顶点算子代数 QVOA 的一般代数结构。随后，第 7 节介绍证明主要定理所需的算子，并讨论一些例子、维数计算，以及将平凡化 P 应用于空间 $M(V)$ 时联络的行为。最后，第 8 节讨论 $M(V)$ 上某些自然的海克算子，这些算子源自拟顶点算子代数丛构造的坐标不变性。我们利用定理 1.2 中的同构 P，证明源自 $M(V)$ 和 $Q(V)$ 的海克本征系统，分别与源自 M 和 Q 的海克本征系统相同，且重数适当。

我们还附有两个附录。第一个附录 A 概述了拟模形式的一些基本结果，也讨论了作用于

拟模形式的海克算子，并说明如何通过微分，从一级模形式的海克本征系统轻松得到在 Q 中找到的海克本征系统。专家们早已知道这一结果，但我们未能找到合适的参考资料，因此为求完整起见，附上了证明。这有助于根据 M 中的海克特征形式，确定空间 $M(V)$ 和 $Q(V)$ 中的所有海克特征形式。第二个也是最后一个附录 B 概述了顶点代数的一些背景知识，特别强调了有关拟 VOA 的一些重要背景知识。

1.1. 记号 。 这里列出一些常用的记号和术语。

1.1.1. 一般记号。

— $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+ =$ 实数域上正行列式矩阵构成的群。 — $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$。 — $S := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $T := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 是 Γ 的标准生成元。 — $\mathfrak{sl}_2$ 表示无迹复 2×2 矩阵的李代数。 — $\mathcal{H} := \{\tau \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} \tau > 0\}$ 是复上半平面。 — $q := e^{2\pi i \tau}$。

1.1.2. 顶点代数。

更多背景知识请参见附录 B。 $V = (V, Y, \mathbf{1})$ 表示一个按 $\mathbf{Z}$ 分级的顶点代数（福克空间）；其分解为齐次部分记作 $V = \oplus_{n \in \mathbf{Z}} V_n$。若 V 是 CFT 型，我们将此记为

$$V = \mathbf{C}\mathbf{1} \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots$$

— 元素 $v \in V$ 称为态，元素 $v \in V_n$ 是共形次数为 n 的态。— $v \in V$ 的顶点算子为 $Y(v, z) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} v(n) z^{-n-1}$，而 $v(n) \in \mathrm{End}(V)$ 是 v 的 n^{th} 模。— 倍增顶点代数 $V^{(2)}$ 具有相同的福克空间 V，但其分次加倍： $V^{(2)} = \oplus_{n \in \mathbf{Z}} V(2)_{2n}$，其中 $V(2)_{2n} := V_n$。 — $F_N V := \oplus_{n \le N} V_n$ 表示 V 的 N^{th} 截断。— 若 V 是拟顶点代数，则 $L(-1)$、 $L(1)$、 $L(0)$ 分别表示其在 V 上的典范 $\mathfrak{sl}_2$ 作用的升算子、降算子和欧拉算子。

1.1.3. 余循环与作用。

对于 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$,

— $j(\gamma, \tau) := c\tau + d$。 — $X = X(\gamma) = X(\gamma, \tau) := \frac{c}{c\tau + d}$。 — $GL_2(\mathbf{R})^+$ 对平凡拟顶点算子代数丛 $\mathcal{H} \times V$ 作（取值于 $\mathrm{End}(V)$）的典范1-余循环为

$$K(\gamma, \tau) := \exp\left(-c \det \gamma^{-1} j(\gamma, \tau) L(1)\right) j(\gamma, \tau)^{-2L(0)} (\det \gamma)^{L(0)}.$$

对于亚纯函数 $f\colon \mathcal{H} \to U$ 以及整数 k，其中 U 是一个有限维复向量空间，

— $f|_k \gamma(\tau) := j(\gamma, \tau)^{-k} (\det \gamma)^{k/2} f(\gamma\tau)$。 — 如果 U 包含在一个拟顶点算子代数中，那么

$$f||_k \gamma(\tau) := j(\gamma, \tau)^{-k} K(\gamma, \tau)^{-1} f(\gamma\tau).$$

1.1.4. 模形式。
— 伯努利数 B_k 由生成级数 $\frac{t}{e^t-1}$ =定义：$\sum_{k\geq 0}\frac{B_k}{k!}t^k$.— 对于整数 $k\geq 1$, E_{2k} .. $=1-\frac{4k}{B_{2k}}\sum_{n\geq 1}\sigma_{2k-1}(n)q^n$，是 Γ 上的权为 $2k$ 的艾森斯坦级数，常数项为 1。— 特别地，$E_2(\tau)=1-24\sum_{n\geq 1}\sigma_1(n)q^n$ 是拟模形式。— $M=$ **复数域**
$[E_4,E_6]=\oplus_k M_{2k}$ 是 Γ上全纯模形式的分次代数。— Q =**复数域**
$[E_2,E_4,E_6]=\oplus_k Q_{2k}$是 Γ 上全纯拟模形式的分次代数（参见附录 A）。— 拟模形式的半分次代数为 $Q^{(1/2)}=\oplus_{k\geq 0}Q_k^{(1/2)}$，其中$Q_k^{(1/2)}$ ..= Q_{2k}。

2. 模形式

关于由椭圆曲线模空间定义的轨形上的向量丛基础知识，请参见 [14]。

2.1. 模形式的几何定义。 令 $Y(1)$ 为与 Γ 相关的一级（开）模曲线，并令 $p\colon \mathcal{E}\to Y(1)$ 为 $Y(1)$ 上的通用椭圆曲线。我们回顾其定义：在 $\mathcal{H}\times$**复数域** 上定义 Γ 和 $\mathbf{Z}^2$ 的左作用与右作用如下：

$$\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)(\tau,z)=\left(\tfrac{a\tau+b}{c\tau+d},(c\tau+d)^{-1}z\right),$$
$$(\tau,z)\cdot(m,n)=(\tau,z+m\tau+n).$$

商空间 E ..= $(\mathcal{H}\times$**复数域**$)/\mathbf{Z}^2$ 是一个椭圆曲线族，通过投影到第一个因子，它位于 $\mathcal{H}$ 上。$\tau\in\mathcal{H}$ 上的纤维为 E_τ ..= **复数域**$/(\mathbf{Z}\tau\oplus\mathbf{Z})$。双商

$$\mathcal{E}=\Gamma\backslash E$$

因此是 $Y(1)=\Gamma\backslash\backslash\mathcal{H}$ 上的通用椭圆曲线。

定义 2.1。 令 $\omega_{\mathcal{E}/Y(1)}=p_*\Omega^1_{\mathcal{E}/Y(1)}$ 为 $Y(1)$ 上的一个可逆层。

这个定义的重要性在于，在一致化下，$\omega_{\mathcal{E}/Y(1)}$ 的整体截面就是上半平面上的权为一的全纯模形式，且在尖点处没有施加任何条件。为准确说明这一点，注意到层 $\Omega^1_{\mathcal{E}/Y(1)}$ 可以通过在覆盖空间 $\mathcal{H}\times$**复数域**$/\mathcal{H}$ 上进行研究，并具体描述 $\Omega^1_{\mathcal{H}\times\text{复数域}/\mathcal{H}}$来刻画：$\Omega^1_{\mathcal{H}\times\mathbf{C}}$的截面不过是微分 $\alpha d\tau+\beta dz$，其中 α,β是 $\mathcal{H}\times$**复数域**上的全纯函数。根据这一描述，$\Omega^1_{\mathcal{H}\times\text{复数域}/\mathcal{H}}$就是由 dz 张成的 $\mathcal{H}\times$**复数域**上的线丛。也就是说，

$$\Omega^1_{\mathcal{H}\times\mathbf{C}/\mathcal{H}}(\mathcal{H}\times\mathbf{C})=\{\alpha(\tau,z)dz\mid\alpha\text{ is holomorphic on }\mathcal{H}\times\mathbf{C}\}.$$

那么，由于 E 是 $\mathcal{H}\times$**复数域** 对 $\mathbf{Z}^2$, 取商所得，我们可以通过取该作用下的不变量，得到 $\Omega^1_{E/\mathcal{H}}$ 整体截面的描述：

$$\begin{aligned}\Omega^1_{E/\mathcal{H}}(E)&=\Omega^1_{\mathcal{H}\times\mathbf{C}/\mathcal{H}}(\mathcal{H}\times\mathbf{C})^{\mathbf{Z}^2}\\&=\{\alpha(z,\tau)dz\mid\alpha(\tau,z+m\tau+n)=\alpha(\tau,z)\text{ for all }m,n\in\mathbf{Z}\}.\end{aligned}$$

这是雅可比形式的一条公理。

注记 2.2。 如果我们在 $\Omega^1_{\mathcal{H}\times\mathbf{C}}$ 上工作，那么 $\mathbf{Z}^2$ 对 dz 的作用就不会是平凡的：我们会有 $dz\cdot(m,\ n) = dz + md\tau$；但在相对微分 $\Omega^1_{\mathcal{H}\times\mathbf{C}/\mathcal{H}}$ 上工作时，$d\tau$ 项会消失。

我们可以对左侧关于模群 Γ 取商，继续进行分析。在此作用下保持不变，等价于满足函数变换律：

$$\alpha\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},(c\tau+d)^{-1}z\right)\frac{dz}{c\tau+d} = \alpha(\tau,z)dz$$

也就是说，$\alpha(\tau,\ z)$ 是权 1、指标 0 的弱雅可比形式；这里的“弱”是指我们不对其傅里叶展开作任何要求：

$$\Omega^1_{\mathcal{E}/Y(1)}(\mathcal{E}) = \{\alpha(\tau,\ z)dz \mid \alpha \text{ 是权 1、指标为 } 0.\} \text{ 的弱雅可比形式}$$

现在，投影映射 $p\colon \mathcal{E}\to Y(1)$ 可根据一致化具体描述为 $p(\tau,\ z) = \tau$。接下来需要确定空间

$$\omega_{\mathcal{E}/Y(1)}(Y(1)) = (p_*\Omega^1_{\mathcal{E}/Y(1)})(Y(1))$$

与权 1 弱全纯模形式空间之间的关系。根据定义，当且仅当 $f\in\omega_{\mathcal{E}/Y(1)}(Y(1))$ 时，$f\circ p\in\Omega^1_{\mathcal{E}/Y(1)}(Y(1))$。先假设$f\circ p\in\Omega^1_{\mathcal{E}/Y(1)}(Y(1))$，于是

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) &= (f\circ p)\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},(c\tau+d)^{-1}z\right)\\ &= (c\tau+d)(f\circ p)(\tau,z)\\ &= (c\tau+d)f(\tau), \end{aligned}$$

其中我们使用了 $f\circ p$ 所满足的雅可比形式变换律。因此，每个截面 $f\in\omega_{\mathcal{E}/Y(1)}(Y(1))$ 都可以通过这种方式解释为权 1 的模形式。

反过来，设 f 是一个权 1 的（弱全纯）模形式。那么 $f\circ p$ 与 z 无关，并且显然，由于 z 中的这一常值性以及 f 的变换律，我们可以得到一个权为 1、指标 0 的雅可比形式 $f\circ p$。因此，我们确实验证了 $\omega_{\mathcal{E}/Y(1)}$ 的整体截面可以与权 1 的（弱全纯）模形式对应起来。权为 k 的模形式则是 $\omega^k_{\mathcal{E}/Y(1)}$ 的截面。

2.2. 紧化模曲线。 现在令 $X(1)$ 表示添加了尖点的一级紧化模曲线。令$\mathbf{D}$ 表示单位圆盘，并令$\mathbf{D}^\times$ 表示穿孔单位圆盘。赋予这两个空间以 2 阶循环群 C_2 的平凡作用。于是，紧化模曲线 $X(1)$ 作为一个轨形，可以通过在图表下粘合 $Y(1)$ 和 $C_2\setminus\setminus\mathbf{D}$ 来具体定义：

$$\begin{array}{ccccc} & & \langle -1,T\rangle\setminus\setminus\mathcal{H} & \xrightarrow{\tau\mapsto q} & C_2\setminus\setminus\mathbf{D}^\times \\ & \overset{\iota_1}{\swarrow} & & & \overset{\iota_2}{\searrow} \\ \Gamma\setminus\setminus\mathcal{H} & & & & C_2\setminus\setminus\mathbf{D} \end{array}$$

其中，左侧的对角映射是自然覆盖，最右侧的对角映射则是自然包含。

这样， $\mathcal{V}$ 上的向量丛 $X(1)$可以具体描述为三元组$\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \phi)$，其中 $\mathcal{V}_1$ 是 $Y(1)$上的向量丛， $\mathcal{V}_2$ 是$\mathbf{D}$上的向量丛，而 ϕ 是一个丛同构

$$\phi\colon \iota_1^*\mathcal{V}_1 \to \iota_2^*\mathcal{V}_2.$$

线丛的情形请参见 [14] ，高秩情形请参见 [1] 的第 2 节和第 3 节。

在我们的设定中，我们将有一个拟顶点算子代数 V，或它的某个有限维截断，以及向量丛

$$\mathcal{V}_1 = \Gamma \backslash\backslash (\mathcal{H} \times V),$$
$$\mathcal{V}_2 = C_2 \backslash\backslash (\mathbf{D} \times V)$$

这里的记号表示， $\mathcal{H} \times V$ 和 $\mathbf{D} \times V$ 都赋有作用，且这些作用分别提升了 $\Gamma(1)$ 在 $\mathcal{H}$ 上以及 C_2 在 $\mathbf{D}$ 上的作用。于是

$$\iota_1^*\mathcal{V}_1 = \langle -1, T\rangle \backslash\backslash (\mathcal{H} \times V),$$
$$\iota_2^*\mathcal{V}_2 = C_2 \backslash\backslash (\mathbf{D}^\times \times V)$$

因此， $\iota_1^*\mathcal{V}_1$ 无非是赋有 $\Gamma(1)$ 在 $\langle -1, T\rangle$ 上的作用之限制的平凡丛 $\mathcal{H} \times V$，而 $\iota_2^*\mathcal{V}_2$ 无非是赋有 C_2 的受限作用的 $\mathbf{D}^\times \times V$。于是， ϕ 是如下形式的映射

$$\phi(\tau, v) = (q, \phi_0(\tau, v))$$

它交织这两个作用。

事实证明，下面所涉及的 Γ 在 V 上的作用会导致 $\langle -1, T\rangle$ 的平凡作用，以及类似的 C_2 在 V 上的平凡作用。因此，可以通过取 $\phi_0(\tau, v) = v$，以一种典范方式将这些向量丛粘合起来。这样便得到了紧模曲线上拟顶点算子代数丛的具体描述。当从 $\mathcal{H}$ 变换到由 q-圆盘$\mathbf{D}$提供的坐标时，通过 Huang 坐标变换公式， [27] 的方括号形式体系（另见 [6, 22]）自然出现，参见 [11] 的引理 5.4.6。因此，在这个意义下，在非紧模曲线 $Y(1)$ 上与 V 相关联的向量丛，通过在尖点处、在方括号形式体系下粘合 V，补全为紧模曲线 $X(1)$ 上的向量丛。接下来的内容不会过多采用这一观点，因为我们将通过 q-展开，使用一种更“平凡”的延拓到尖点的概念来定义模形式。我们将指出，这种平凡的尖点处全纯性概念与由顶点算子代数丛构造的坐标不变性所产生的自然概念之间有何不同。

3. 模曲线上的 VOA

3.1. 主要构造。本文旨在以同样具体的方式说明，拟顶点算子代数 V 如何在几何上描述为所有模曲线上的向量丛族。为简单起见，我们将只考虑一级情形。这样便能给出一种简化的表述，其中尤其涉及一个唯一尖点。

令 $\mathcal{V}_{Y(1)}$ 表示如 [11] 中所述，与 V 在 $Y(1)$ 上关联的向量丛。我们希望像上一节那样，将其描述为 $\mathcal{H}$ 上带有 Γ 的作用的平凡丛，使得

$$\mathcal{V}_{Y(1)} \coloneqq \Gamma \backslash\backslash (\mathcal{H} \times V).$$

也就是说，首先我们考虑平凡丛 $\mathcal{H}\times V$，但必须对由线性分式变换下的坐标变换所产生的模群作用取商。

3.1.1. 局部坐标挠子。根据 [11], , 令 $\mathcal{O}$ 表示以一个变量为元的**复数域**上的幂级数环，并令 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}$ 表示其自同构群。作为集合，我们将其识别为

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}} := \left\{ \sum_{n\geq 1} a_n X^n \mid a_1 \neq 0 \right\},$$

乘法定义为 $(f*g)(X) = g(f(X))$.

我们从局部坐标的覆盖挠子开始

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$$

令 z 表示**复数域**上的通常变量，它是**复数域**中 $z=0$ 处的局部坐标。将这个全局变量限制到 $\mathcal{H}$。注意， z 不是 $\mathcal{H}$ 中任何一点处的局部坐标。然而，在点 $\tau\in\mathcal{H}$ 处，我们在 $\mathcal{H}$ 上的全局变量 z 给出了 τ 处的局部坐标 $X=z-\tau$。采用这一记号，我们通过如下识别将局部坐标挠子平凡化

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\times \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}\,.$$

现在我们描述 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$ 在此向量丛上的作用。给定

$$f(z)=\sum_{n\geq 1} a_n (z-\tau)^n$$

用全局变量 z 表示 τ 处的局部坐标，接着

$$f(\gamma^{-1}z)=\sum_{n\geq 1} a_n (\gamma^{-1}z-\tau)^n$$

是 $\gamma\tau$ 处的局部坐标。这赋予 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{H}}$ 一个 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$ 的自然左作用，它提升了在 $\mathcal{H}$ 上的作用：

$$\gamma(\tau, f(z)) := (\gamma\tau, f(\gamma^{-1}z)).$$

这提供了所需的额外数据，使其能够下降为 $Y(1)$ 上的向量丛。

注记 3.1。能够通过 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$ 中不属于模群的矩阵来改变坐标，这种额外的灵活性将在下文用于定义海克算子。

为了更具体地说明，我们令 $X=z-\tau$，从而将 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{H}}$ 的所有纤维相互识别。现在设

$$\mathrm{Aut}_{Y(1)} := \mathcal{H}\times \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}\,.$$

这个向量丛具有如下 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$ 的左作用；在对纤维重新参数化后，该作用是上述作用的结构迁移：

$$\gamma(\tau, f(X)) = (\gamma\tau, f(\gamma^{-1}(X+\gamma\tau)-\tau)).$$

我们可以将上述作用中介入的新局部坐标写成如下幂级数：在 $\gamma\tau$上方的纤维中，我们有关系式 $X=z-\gamma\tau$，并且

因此，如果 $c \neq 0$我们有

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}(X+\gamma\tau)-\tau &= \frac{d(X+\gamma\tau)-b}{-c(X+\gamma\tau)+a}-\tau \\ &= \frac{1}{\det\gamma}\frac{(c\tau+d)^2X}{1-\frac{c(c\tau+d)}{\det\gamma}X} \\ &= \sum_{n\geq 1} c^{n-1}(c\tau+d)^{n+1}\det\gamma^{-n}X^n\end{aligned}$$

回顾 $\alpha=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2^+\mathbf{R}$ 中的 1-余循环 $j(\alpha,\ \tau)$，可得

$$\gamma^{-1}(X+\gamma\tau)-\tau=\sum_{n\geq 1} c^{n-1}j(\gamma,\tau)^{n+1}\det\gamma^{-n}X^n. \tag{2}$$

3.1.2. 顶点算子代数丛。现在考虑纤维积

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}}=(\mathcal{H}\times \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}})\times_{\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}} V,$$

其中 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}$ 按照 [11] 中的方式作用于 V。具体而言，

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}}=\{(\tau,f(X),v)\in\mathcal{H}\times\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}\times V\}/(\tau,f(X)*g(X),v)\sim(\tau,f(X),R(g)v).$$

特别地，在 $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ 中我们总有

$$(\tau,f(X),v)=(\tau,X,R(f)v)$$

其中 $R(f)$ 表示 $f\in\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}$ 对拟顶点算子代数 V 的左作用。这意味着，$\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ 在 $\tau\in\mathcal{H}$ 上的每个纤维都可以使用 τ，X，v（$v\in V$ 的代表元）与 V 进行识别。由此我们得到一个平凡化

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}}\cong\mathcal{H}\times V.$$

注 3.2。由 [11] 可知，定义 $R(f)$ 所需的全部数据，就是作用在 V 上的 $n\geq 0$ 的 Virasoro 算子 $L(n)$。事实上，我们将在下文看到，在这个通过线性分式变换进行坐标变换的简单情形中，只有 $L(0)$ 和 $L(1)$ 发挥作用，因此这实际上是由规范 $\mathfrak{sl}_2$-作用的某个子代数在 V 上诱导出的作用于 V 的作用。稍后，当我们描述 $\mathcal{V}_{Y(1)}$ 上的一个联络时，算子 $L(-1)$ 也将发挥作用，从而得到 $\mathfrak{sl}_2$ 的完整作用。这一情况正是我们将 V 取为拟顶点算子代数而非顶点算子代数的主要原因。

尽管 $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ 可以像上面那样平凡化，但它作为纤维积的更复杂表达式，对于赋予 $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ 一个 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$ 的作用至关重要；该作用提升了 $\mathcal{H}$ 上的分式线性变换。随后，将此作用限制到模群上，我们便可以将 $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ 下降为 $Y(1)$ 上的一个向量丛。由此得到如下定义：

定义 3.3。与拟顶点算子代数 V 相关联的模曲线上的向量丛 $\mathcal{V}_{Y(1)}$ 定义为以下商空间

$$\mathcal{V}_{Y(1)}:=\Gamma\backslash\backslash(\mathcal{H}\times V)$$

在作用下

$$\gamma(\tau,v):=(\gamma\tau,R(\gamma^{-1}(X+\gamma\tau)-\tau)v).$$

为了描述下文中出现的各种算子 $R(\rho)$（对于 $\rho(X)\in\mathrm{Aut}\,\mathcal{O}$），我们先准备一个基本的众所周知的引理。

引理 3.4。如果 $\rho(X) = \sum_{m\geq 1} \alpha^{m-1} X^m$，那么

$$\rho(X) = \exp\left(\alpha X^2 \partial_X\right) X.$$

证明。 我们直接验证如下：首先用归纳法可知

$$(X^2\partial_X)^m X = m! X^{m+1}.$$

由此很容易得出

$$\exp\left(\alpha X^2\partial_X\right) X = \sum_{m\geq 0} \frac{\alpha^m}{m!} (X^2\partial_X)^m X = \sum_{m\geq 0} \alpha^m X^{m+1} = \rho(X),$$

如所需。 □

我们的下一个目标是理解 QVOAV 上的算子 $R(\gamma^{-1}(X + \gamma\tau) - \tau)$。为此，我们将考虑 $\gamma \in \mathbf{GL}_2^+(\mathbf{R})$，而不仅仅是模群中的矩阵，以便在下文定义海克算子。鉴于上面的方程(2)，按照[11], ，我们必须求出标量 v_i ，使得

$$\sum_{n\geq 1} c^{n-1} j(\gamma,\tau)^{n+1} \det(\gamma)^{-n} X^n = \exp\left(\sum_{i\geq 1} v_i X^{i+1}\partial_X\right) v_0 X.$$

引理 3.4 意味着

$$\sum_{n\geq 1} c^{n-1} j(\gamma,\tau)^{n+1} \det\gamma^{-n} X^n = \exp\left(\det\gamma^{-1} c j(\gamma,\tau) X^2\partial_X\right) j(\gamma,\tau)^2 \det\gamma^{-1} X.$$

这就给出了 $\mathbf{GL}_2^+(\mathbf{R})$ 通过线性分式变换对向量丛 $\mathcal{H}\times V$ 的作用的具体描述：

$$\gamma(\tau, v) = (\gamma\tau, e^{-\det\gamma^{-1} c j(\gamma,\tau) L(1)} j(\gamma,\tau)^{-2L(0)} (\det\gamma)^{L(0)} v). \tag{3}$$

3.1.3. 对 *(3)* 的初等处理。由于我们遵循了[11], 的规定，(3) 必然给出 $\mathbf{GL}_2^+(\mathbf{R})$ 的左群作用。这里我们将为不熟悉前述内容的读者，另行给出对此事实的初等验证。

证明 (3) 是左群作用的初等证明。设

$$\alpha := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right),\ \beta := \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ t & u \end{smallmatrix}\right)$$

是 $\mathbf{GL}_2^+(\mathbf{R})$ 中的两个矩阵。回顾第 1.1 节中 X 的含义，直接计算可得

引理 3.5。有

$$X(\alpha)|_2\beta = X(\alpha\beta) - X(\beta).$$

□

转向 (3) 的证明，令 $v \in V_k$。于是我们有

$$\begin{aligned}
\beta(\tau, v) &= (\beta\tau, e^{-\det\beta^{-1} t j(\beta,\tau) L(1)} j(\beta,\tau)^{-2L(0)} (\det\beta)^{L(0)} v) \\
&= (\beta\tau, e^{-\det\beta^{-1} t j(\beta,\tau) L(1)} j(\beta,\tau)^{-2k} \det\beta^k v) \\
&= \left(\beta\tau, \det\beta^k j(\beta,\tau)^{-2k} \sum_{n\geq 0} \frac{(-t)^n j(\beta,\tau)^n}{\det\beta^n \cdot n!} L(1)^n v\right).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\alpha(\beta(\tau,v))\\
&=\left(\alpha(\beta\tau), e^{-c\det\alpha^{-1}j(\alpha,\beta\tau)L(1)}j(\alpha,\beta\tau)^{-2L(0)}(\det\alpha)^{L(0)}\det\beta^k j(\beta,\tau)^{-2k}\sum_{n\geq 0}\frac{(-t)^n j(\beta,\tau)^n}{\det\beta^n\cdot n!}L(1)^n v\right)\\
&=\left(\alpha\beta\tau, e^{-c\det\alpha^{-1}j(\alpha,\beta\tau)L(1)}\det(\alpha\beta)^k j(\beta,\tau)^{-2k}j(\alpha,\beta\tau)^{-2k}\sum_{n\geq 0}\frac{(-t)^n j(\beta,\tau)^n j(\alpha,\beta\tau)^{2n}}{\det(\alpha\beta)^n\cdot n!}L(1)^n v\right)\\
&=\left(\alpha\beta\tau, \det(\alpha\beta)^k j(\alpha\beta,\tau)^{-2k}e^{-c\det\alpha^{-1}j(\alpha,\beta\tau)L(1)}\sum_{n\geq 0}\frac{(-t)^n j(\alpha\beta,\tau)^n j(\alpha,\beta\tau)^n}{\det(\alpha\beta)^n\cdot n!}L(1)^n v\right)\\
&=\left(\alpha\beta\tau, \det(\alpha\beta)^k j(\alpha\beta,\tau)^{-2k}e^{-(c+tj(\alpha\beta,\tau)\det\beta^{-1})\det\alpha^{-1}j(\alpha,\beta\tau)L(1)}v\right)
\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)(\tau,v)&=\left(\alpha\beta\tau, e^{-(\det\alpha\beta)^{-1}(cr+dt)j(\alpha\beta,\tau)L(1)}j(\alpha\beta,\tau)^{-2L(0)}(\det\alpha\beta)^{L(0)}v\right)\\
&=\left(\alpha\beta\tau, \det(\alpha\beta)^k j(\alpha\beta,\tau)^{-2k}e^{-\det(\alpha\beta)^{-1}(cr+dt)j(\alpha\beta,\tau)L(1)}v\right)
\end{aligned}$$

因此可见，只要对所有 α， $\beta\in\mathbf{GL_2^+(R)}$ 满足以下恒等式，(3) 就定义了一个作用：

$$(\det\alpha\beta)^{-1}(cr+dt)j(\alpha\beta,\tau)=(c+tj(\alpha\beta,\tau)\det\beta^{-1}j(\alpha,\beta\tau)\det\alpha^{-1},$$

进一步推演表明，这等价于引理 3.5 的恒等式。因此，这就对 (3) 确实定义了 $\mathbf{GL_2^+(R)}$ 在 $\mathcal{H}\times V$ 上的左作用给出了一个初等验证。□

3.2. **1-余循环** $K(\gamma,\ \tau)$。 根据定义，顶点算子代数丛 $\mathcal{V}_{Y(1)}$ 的截面是取值于 V 的模形式，它们按照作用 (3) 在 Γ 下变换。也就是说，截面 f 是满足以下条件的函数 $f\colon\ \mathcal{H}\to V$

$$f(\gamma\tau)=e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)}j(\gamma,\tau)^{-2L(0)}f(\tau)$$

对所有 $\gamma\in\Gamma$ 均成立。稍作推广，我们引入以下记号：

定义 3.6。 对于 $\tau\in\mathcal{H}$ 和 $\gamma\in GL_2(\mathbf{R})^+$，定义取值于 $\mathrm{End}(V)$ 的函数

$$K(\gamma,\tau):=e^{-\det\gamma^{-1}cj(\gamma,\tau)L(1)}j(\gamma,\tau)^{-2L(0)}(\det\gamma)^{L(0)}.$$

注意，由于 $L(1)$ 和 $L(0)$ 不可交换，此表达式中各因子的顺序很重要。

Lem引理 3.7。 K 是 1-余循环，定义在 $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$上。也就是说，对于 $\alpha,\beta\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$，我们有 e

$$K(\alpha\beta,\tau)=K(\alpha,\beta\tau)K(\beta,\tau)$$

证明。 这等价于断言 (3) 是一个群作用。 □

$K(\gamma,\ \tau)$在某些 γ的取值下形式更为简单。例如，若 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & a\end{smallmatrix}\right)$，则 $K(\gamma,\ \tau)=\mathrm{Id}_V$。我们将特别关注 $\gamma\in\Gamma$ 的情形，在这种情形下，定义 3.6 自然写作

$$K(\gamma,\tau):=e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)}j(\gamma,\tau)^{-2L(0)}\qquad(\gamma\in\Gamma).$$

由引理 3.7 可知，$\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$ 在第 1.1 节中的截面 f 上有一个右作用 $f||_k\gamma$。鉴于它对我们的研究至关重要，我们在此重述其定义：

$$f||_k\gamma(\tau) := j(\gamma,\tau)^{-k}(\det\gamma)^{k/2}K(\gamma,\tau)^{-1}f(\gamma\tau). \tag{4}$$

我们将此作用的 Γ-不变量称为权为 k 的 弱 V-值模形式。形容词“弱”表示我们不对 $f(\tau)$ 施加任何解析条件。这里我们仅指出，根据前面的讨论，在满足适当解析条件时，这样一个 V-值形式 f 将具有 q-展开，因为它是周期函数：

$$f(\tau) = (f||_k \pm T)(\tau) = f(\tau+1). \tag{5}$$

3.3. 向紧化曲线的延拓。 本小节将 $\mathcal{V}_{Y(1)}$ 的构造延拓到紧化模曲线。注意，(3) 中定义的作用满足 $(\pm T)(\tau,v) = (\tau+1,v)$。因此，正如第 2.2 节末尾所述，存在一个将 $\mathcal{V}_{Y(1)}$ 延拓到紧化模曲线 $X(1)$ 的典范延拓 $\mathcal{V}_{X(1)}$。

令 ι_1 和 ι_2 为与 $\mathcal{V}_{X(1)}$ 相关的覆盖映射，如第 2.2 节所述。为简便起见，我们将 $\mathcal{V}_{X(1)}$ 在 $Y(1)$ 和 $C_2 \setminus\setminus \mathbf{D}$ 上各部分的拉回分别记为 $\iota_1^*\mathcal{V}_{X(1)}$ 和 $\iota_2^*\mathcal{V}_{X(1)}$。给定 $v \in V$，函数 $f(\tau) = (\tau, v)$ 是一个映射 $\mathcal{H} \to \mathcal{H}\times V$，并且它关于 $\pm T$ 的作用是等变的：

$$f(\pm T\tau) = (\tau+1, v) = \pm T(\tau,v) = \pm T f(\tau).$$

因此，每个元素 $v \in V$ 都定义了 $\iota_1^*\mathcal{V}_{X(1)}$的一个截面 $(\tau,\ v)$。

现在，我们的目标是在尖点邻域内重新表达 $\mathcal{V}_{Y(1)}$ 的截面，从而定义 q-展开。为此，我们先研究 $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$；回忆一下，它是 $\mathcal{H}\times \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}\times V$ 的商空间。在 $\mathbf{D}^\times$ 上的坐标中，点 τ映射到 $q = e^{2\pi i\tau}$。再选取 $\mathbf{D}^\times$ 上的另一个全局坐标 $q_z = e^{2\pi iz}$，使得 q 处的局部坐标为$q_z - q$。这个局部坐标经指数映射拉回后，得到一个新坐标

$$e^{2\pi iz} - e^{2\pi i\tau} = q^{-1}(e^{2\pi iX} - 1)$$

在 τ处的 $\mathcal{H}$上，因为 $X = z-\tau$在 $\mathcal{H}$上。因此，在映射 q给出的坐标变换下，我们有

$$(\tau, q^{-1}(e^{2\pi iX}-1), v) \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}} \mapsto (q, q_z - q, v) \in \mathcal{V}_{\mathbf{D}^\times}.$$

在 $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ 中，我们有如下对应关系

$$(\tau, q^{-1}(e^{2\pi iX}-1), v) = (\tau, X, R(q^{-1}(e^{2\pi iX}-1))v).$$

因此，在尖点附近，$\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$的截面 $(\tau,\ v)$ 在穿孔的 q-圆盘$\mathbf{D}^\times$上呈现为 $(q,\ R(q^{-1}(e^{2\pi iX}-1))^{-1}v)$。注意，有

$$R(q^{-1}(e^{2\pi iX}-1))^{-1}v = q^{-L(0)}R(e^{2\pi iX}-1)^{-1}v = q^{-L(0)}R\left(\tfrac{1}{2\pi i}\log(X+1)\right)v.$$

因此，在 $\mathcal{H}$ 的尖点附近，截面 (τ,v) 对应于 q-圆盘 $\mathbf{D}^\times$ 中 $q=0$ 附近的 $(q,\ q^{-L(0)}R(\frac{1}{2\pi i}\log(X+1))v)$。特别是在将 $\mathcal{V}_{Y(1)}$ 典范坐标不变扩张到尖点时，$\mathcal{H}$ 上 $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ 的常值截面 (τ,v) 会由于因子 $q^{-L(0)}$ 而在 $q=0$ 处出现有限阶极点。这类似于这样一个事实：在模形式的经典标量情形下，艾森斯坦级数若从几何角度解释为模曲线上的典范丛截面，则严格来说会在尖点处有极点。

因此，正如通常的模理论中一样，我们以通常的朴素方式定义 q-展开。

定义 3.8。 $\mathcal{V}_{Y(1)}$ 的全纯截面 f 称为在尖点处全纯，如果它存在一个全纯的 q-展开

$$f(q) \in V[\![q]\!].$$

尖点处的亚纯性定义类似。

注 3.9：注意，由于向量丛 $\mathcal{V}_{Y(1)}$ 是由有限秩向量丛的归纳极限构造的， q-展开将属于某个滤过子空间 $F_N V[\![q]\!]$，其中某个 $N \geq 0$。

3.4. 顶点算子代数值模形式。 上述内容引出了以下定义。固定一个拟顶点算子代数 V。

定义 3.10。 假设对于某个 N,

$$f : \mathcal{H} \to F_N V$$

是一个全纯映射。若 f 是一个弱全纯 V值模形式，其权为 k （且共形次数至多为 N），则称其满足

$$f||_k\gamma = f \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

注记 3.11。由于 V 上分次的性质（参见附录 B.0.5）， $F_N V$ 是有限维的，因此要求 f 是全纯的才有意义。

定义 3.12。弱全纯的 V 值模形式 f，若在定义 3.8 的意义下在尖点处是亚纯或全纯，则分别称为亚纯或全纯。

现在我们引入 V 值模形式空间。令 $M_k(V)$ 表示权为 k V 的值全纯形式集合，并定义

$$M(V) := \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} M_k(V).$$

每个 $M_k(V)$ 都带有一个递增的共形滤过，其共形次数为 N 的部分 $F_N M_k(V)$ 由取值于 $F_N V$ 的形式组成。这使 $M(V)$ 带有一个递增的共形滤过

$$F_N M(V) = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} F_N M_k(V).$$

由于假定每个 V 值模形式的共形次数都是有限的， $M(V)$ 上的共形滤过是穷尽的:

$$M(V) = \bigcup_{N \geq 0} F_N M(V).$$

为便于参考，我们总结一下 $M_k(V)$ 中元素的定义。 $M_k(V)$ 中的一个元素由一个共形次数有界的全纯函数构成

$$f\colon \mathcal{H} \to F_N V$$

满足以下性质:

(1) 模性： $f(\gamma\tau) = j(\gamma, \tau)^k K(\gamma, \tau) f(\tau)$，即 $f||_k\gamma = f$对所有 $\gamma \in \Gamma$成立；(

2) 尖点处全纯性： f 可展开为全纯的 q级数 $f(q) \in F_N V[\![q]\!]$。

4. 联络

向量丛 $\mathcal{V}_{Y(1)}$ 赋有一个联络

$$\nabla\colon \mathcal{V}_{Y(1)} \to \mathcal{V}_{Y(1)} \otimes \Omega^1_{Y(1)}$$

在截面上由公式 $\nabla = d + L(-1) \otimes d\tau$ 局部定义。正文 [11] 将这一对象是联络的证明推迟到论述较后的部分，此时相关准备工作已经完成，可以给出更为简明的概念性论证。因此，为方便刚接触这一材料的读者，我们在下面的第4.1节中给出这一事实的初等证明。

4.1. 证明 ∇ 是一个联络。 为验证这一点，我们首先确定 df 满足什么变换律。为了为定义高权下模导数的类似物奠定基础，我们允许 f 成为一个取值于 V、权 k 可能非零的模形式。因此，我们假设 f 满足变换律

$$f(\gamma\tau) = e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} j(\gamma,\tau)^{k-2L(0)} f(\tau). \tag{6}$$

对方程（6）的左侧求导可得:

$$d(f(\gamma\tau)) = j(\gamma,\tau)^{-2} df(\gamma\tau).$$

另一方面，对方程（6）的右侧求导可得

$$\begin{aligned}
&-c^2 L(1) e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} j(\gamma,\tau)^{-2L(0)} f(\tau) + c e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} (k-2L(0)) j(\gamma,\tau)^{k-2L(0)-1} f(\tau) + \\
&e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} j(\gamma,\tau)^{-2L(0)} df(\tau) \\
=&e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} (-c^2 L(1) j(\gamma,\tau)^{k-2L(0)} f(\tau) + c(k-2L(0)) j(\gamma,\tau)^{k-2L(0)-1} f(\tau) + j(\gamma,\tau)^{k-2L(0)} df(\tau)) \\
=&\left(\frac{c(k-2L(0))}{j(\gamma,\tau)} - c^2 L(1) \right) f(\gamma\tau) + e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} j(\gamma,\tau)^{k-2L(0)} df(\tau)
\end{aligned}$$

因此，我们发现 df 满足变换律

$$df(\gamma\tau) = \left(cj(\gamma,\tau)(k-2L(0)) - (cj(\gamma,\tau))^2 L(1) \right) f(\gamma\tau) + e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} j(\gamma,\tau)^{k+2-2L(0)} df(\tau)$$

因此,

$$\begin{aligned}
(\nabla f)(\gamma\tau) = &\left(cj(\gamma,\tau)(k-2L(0)) - (cj(\gamma,\tau))^2 L(1) + L(-1) \right) f(\gamma\tau) + \\
&e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} j(\gamma,\tau)^{k+2-2L(0)} df(\tau)
\end{aligned}$$

回顾一下， $E_2(\tau)$满足变换律

$$E_2(\gamma\tau) = j(\gamma,\tau)^2 E_2(\tau) + \frac{12cj(\gamma,\tau)}{2\pi i}. \tag{7}$$

定义 4.1。 相对于拟顶点算子代数 V 的第 k 阶模导数是算子 ∇_k，它通过以下公式作用于函数 $f\colon \mathcal{H} \to V$

$$\nabla_k f = \nabla f - \frac{2\pi i k}{12} E_2 f.$$

如果 f 满足方程 (6) 的变换律，那么根据上述计算以及 E_2的变换律，我们得到

$$\begin{aligned}
(\nabla_k f)(\gamma\tau) = &\left(L(-1) - 2cj(\gamma,\tau)L(0) - (cj(\gamma,\tau))^2 L(1) \right) f(\gamma\tau) + \\
&e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} j(\gamma,\tau)^{k+2-2L(0)} df(\tau) - \frac{2\pi i k}{12} j(\gamma,\tau)^2 E_2(\tau) f(\gamma\tau)
\end{aligned}$$

我们要证明它按照以下变换律变换

$$(\nabla_k f)(\gamma\tau) = e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} j(\gamma,\tau)^{k+2-2L(0)} (\nabla_k f)(\tau). \tag{8}$$

上述计算表明，在 ∇_k 的定义中加入 E_2 这一因子后，(8) 的证明实质上可归结为零权情形；在这种情况下，方程 (8) 仅仅意味着 ∇ 确实是一个联络。因此，根据 [11] 中概述的一般理论，方程 (8) 得证。

下面给出 (8) 的直接证明：根据上述计算，确立 (8) 等价于确立以下单位元：

$$\begin{aligned} L(-1) =& j(\gamma,\tau)^{2L(0)-2} e^{cj(\gamma,\tau)L(1)} L(-1) e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} j(\gamma,\tau)^{-2L(0)} \\ & - c^2 j(\gamma,\tau)^{2L(0)-2} L(1) j(\gamma,\tau)^{2-2L(0)} - 2cj(\gamma,\tau)^{-1} L(0) \end{aligned}$$

我们将逐个分次分量验证这一点。

设 $f_N \in V_N$，则根据线性性，要确立方程 (8)，只需确立以下单位元：

$$\begin{aligned} L(-1) f_N =& j(\gamma,\tau)^{2L(0)-2N-2} e^{cj(\gamma,\tau)L(1)} L(-1) e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} f_N - c^2 j(\gamma,\tau)^{-2} L(1) f_N \\ & - 2Ncj(\gamma,\tau)^{-1} f_N \end{aligned} \tag{9}$$

方程 (9) 的左端在次数 $N+1$ 中等于 $L(-1)f_N$，而在所有其他次数中均为零。方程 (9) 的右端在大于 $N+1$ 的次数中为零。方程 (9) 右端的次数 $N+1$ 部分为

$$j(\gamma,\tau)^{2L(0)-2N-2} L(-1) f_N,$$

而这等于 $L(-1)f_N$，因为这是齐次次数为 $N+1$ 的齐次项。因此，方程 (9) 在齐次次数 $\geq N+1$ 上成立。

还需证明，当 $n \leq N$ 时，方程 (9) 右边的次数为 n 的项消失。方程 (9) 右边次数为 N 的项等于

$$\begin{aligned} & j(\gamma,\tau)^{2L(0)-2N-2} cj(\gamma,\tau)(L(1)L(-1) - L(-1)L(1)) f_N - 2Ncj(\gamma,\tau)^{-1} f_N \\ =& j(\gamma,\tau)^{-1} c((L(1)L(-1) - L(-1)L(1)) - 2N) f_N \end{aligned}$$

根据维拉索罗代数中的对易子关系 $[L(1)\ L(-1)] = 2L(0)$，该项为零，因为 f_N 是次数为 N 的齐次项。因此，这证实了我们的单位元在次数 N 上成立。

现在计算 (9) 右边次数为 $N-1$ 的项。这次我们得到

$$c^2 j(\gamma,\ \tau)^{-2} (\tfrac{1}{2} L(-1)L(1)^2 + \tfrac{1}{2} L(1)^2 L(-1) - L(1)L(-1)L(1)) f_N - c^2 j(\gamma,\tau)^{-2} L(1) f_N$$

维拉索罗关系蕴含

$$\tfrac{1}{2} L(-1)L(1)^2 + \tfrac{1}{2} L(1)^2 L(-1) - L(1)L(-1)L(1) = L_1,$$

因此这确实抵消为零，也验证了次数 $N-1$ 时的方程 (9)。

最后，在 $N-n < n-1$ 次（因此 $2 \leq n \leq N$）时，所需的消失性可由维拉索罗代数中以下算子的消失性推出：

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \frac{1}{j!(n-j)!} L(1)^j L(-1) L(1)^{n-j} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} L(1)^j L(-1) L(1)^{n-j}.$$

同样，为求完整起见，我们在此给出详细说明。当 $n=2$ 时，我们必须证明以下表达式为零：

$$\begin{aligned}&L(-1)L(1)^2-2L(1)L(-1)L(1)+L(1)^2L(-1)\\=&(L(1)L(-1)-2L(0))L(1)-2L(1)L(-1)L(1)+L(1)(L(-1)L(1)+2L(0))\\=&0.\end{aligned}$$

因此，当 $n=2$ 时，我们的消失结果成立。一般而言，对于 $n\geq 3$，我们写作：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}L(1)^jL(-1)L(1)^{n-j}\\=&(-1)^nL(1)^nL(-1)+L(-1)L(1)^n+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}L(1)^jL(-1)L(1)^{n-j}\\=&(-1)^nL(1)^nL(-1)+L(-1)L(1)^n+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\left(\binom{n-1}{j-1}+\binom{n-1}{j}\right)L(1)^jL(-1)L(1)^{n-j}\\=&(-1)^nL(1)^nL(-1)+L(-1)L(1)^n+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j-1}L(1)^jL(-1)L(1)^{n-j}+\\&\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}L(1)^jL(-1)L(1)^{n-j}\\=&-L(1)\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n-1}{j-1}L(1)^{j-1}L(-1)L(1)^{n-j}\right)+\\&\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}L(1)^jL(-1)L(1)^{n-1-j}\right)L(1)\end{aligned}$$

上面最后一行中的每个求和均可由归纳法得出为零，由此证明了方程 (9)。这既得到方程 (8)，也说明 $\nabla=d+L(-1)\otimes d\tau$ 在 $\mathcal{V}_{Y(1)}$ 上定义了一个联络。

5. 拟顶点算子代数值准模形式

5.1. 一些动机。 固定一个拟顶点算子代数 $V=(V,\ Y,\ \mathbf{1},\ \rho)$。在本小节中，我们考察 $M(V)$ 空间的一些基础性质，其中的元素是 V 值模形式。这些简单的思想将为后面的各节提供启发，并预示一些主要结果。回顾第 1 小节中 $X=X(\gamma,\ \tau)$ 的含义。

例 5.1。 从一个共形次数为 m 的态 $v\in V_m$ 开始。我们首先考察常值映射是否

$$f:\mathcal{H}\to V_m,\qquad \tau\mapsto v$$

属于 $M(V)$。显然， f 是全纯的。对于 $\gamma \in \Gamma$，我们计算

$$\begin{aligned} f||_{2m}\gamma(\tau) &= j(\gamma,\tau)^{-2m}K(\gamma,\tau)^{-1}f(\tau) \\ &= j(\gamma,\tau)^{2L(0)-2m}e^{cj(\gamma,\tau)L(1)}v \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{c^n j(\gamma,\tau)^{n-2m+2(m-n)}}{n!}L(1)^n v \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}X^n L(1)^n v. \end{aligned} \tag{10}$$

对于最后一个等式，我们使用了 $L(1)^n v \in V_{m-n}$。由此可知， $f \in M_{2m}(V)$ 当且仅当 $L(1)v = 0$，也就是说， v 是一个拟初级态。注意，(10) 让人联想到权为 $2m$ 的拟模形式的定义。事实上，令 $Q_n(f) := \frac{1}{n!} L(1)^n f$，便得到（至少形式上）拟模形式的定义，只不过其取值在 V 中，而非**复数域**。

在讨论第二个说明性例子之前，先考虑任意一对元素 $f,\ g \in M(V)$。对于整数 n，我们可以逐点定义 n^{th} 乘积 $f(n)g$：

$$(f(n)g)(\tau) := f(\tau)(n)g(\tau). \tag{11}$$

这样，我们便为 $M(V)$ 配备了适用于所有 n 的 n^{th} 乘积，因此自然会问 $M(V)$ 本身是否也是某种顶点代数。答案是否定的，原因很简单： $M(V)$ 对这些乘积而言并不封闭 。

例 5.2。 考虑一对常值映射

$$f : \mathcal{H} \to u, \qquad g : \mathcal{H} \to v$$

并假设 u 和 v 都是 V 中的准初级态，而 $u(n)v$ 不是。这是很常见的情形：例如，在秩一海森堡顶点算子代数中，典范权 1 态 h 是准初级的，而 $h(-2)h$ 不是。于是我们刚刚在前一个例子中看到， f 和 g 都属于 $M(V)$。另一方面，由于假设 $u(n)v$ 不是准初级的，同一个例子表明， $f(n)g$不属于 $M(V)$。因此，一般而言， $M(V)$ 在方程 (11) 的自然逐点模下并不封闭。

这些例子促使我们引入拟模形式。

5.2. **值拟模形式的定义及其第一批性质**。 关于前面的讨论，我们从以下基本定义开始。

定义 5.3。 一个 V 值的亚纯拟模形式，其权为 k，深度至多为 s，是一个全纯映射

$$f\colon \mathcal{H} \to F_N V$$

对于某个 N，使得

$$f||_k\gamma(\tau) = \sum_{n=0}^{s} X^n Q_n(f)$$

对于某些全纯映射 $Q_n(f)\colon \mathcal{H} \to F_N V$，且 f 在尖点处是亚纯的。按照惯例，若 f 在尖点处的 q- 展开没有极点，我们就称其为全纯。

在此设定下，我们作一些标准观察。考察 $\gamma = \pm T$ 的情形（当 $K(\gamma,\ \tau) = \mathrm{Id}$ 时），可得 $f(\tau+1) = f(\tau)$，因此 f 有 q-展开，定义也就有意义。此外，若 k 为奇数，则 $Q_0(f) = f$，且 $f = 0$。

例 5.4. 设 $v \in V_m$，并令 $f\colon\ \mathcal{H} \to v$ 为例 5.1 中所述的常值函数。于是我们的计算(10)表明

$$f||_{2m}\gamma(\tau) = e^{XL(1)}v.$$

因此，f 是一个权为 $2m$ 的全纯 V-值拟模形式，其深度是满足 $L(1)^s v \neq 0$ 的最大整数 s。注意，s 存在，因为 $L(1)$ 是一个降算子，且对于 $n \ll 0$，$V_n = 0$。

令 $Q_k(V)$ 表示权为 k 的全纯 V-值拟模形式空间，并设 $Q(V) = \bigoplus_{k\geq 0} Q_{2k}(V)$。则 $Q(V)$ 按深度具有一个递增滤子。

定理 5.5. 设 V 是任意拟顶点算子代数，并将 $Q \otimes V^{(2)}$ 视为带有张量积分次的$2\mathbf{Z}$-分次线性空间。则存在一个$2\mathbf{Z}$-分次Q-模的典范同一

$$\begin{aligned} \iota : Q \otimes V^{(2)} &\xrightarrow{\cong} Q(V), \\ f(\tau)\otimes v &\mapsto f(\tau)v. \end{aligned}$$

这里，$V^{(2)}$ 是加倍 *VOA*，参见第 *1.1* 节和附录 *B*。

证明。任取 $f(\tau) \in Q_{2k}$以及 $v \in V_{(2)_{2m}} = V_m$。首先我们断言，$f(\tau)v \in Q_{2(k+m)}(V)$。证明是例 5.1 的详细展开。因此，存在全纯函数 $Q_n(f)$，使得

$$f|_{2k}\gamma(\tau) = \sum_{n=0}^{s} X^n Q_n(f),$$

并且我们计算得到

$$\begin{aligned} &(f(\tau)v)||_{2k+2m}\gamma(\tau) \\ &= j(\gamma,\tau)^{-2k-2m+2L(0)} e^{cj(\gamma,\tau)L(1)} f(\gamma\tau)v \\ &= j(\gamma,\tau)^{-2k-2m+2L(0)} \sum_{r\geq 0} \frac{c^r j(\gamma,\tau)^r}{r!} L(1)^r f(\gamma\tau)v \\ &= j(\gamma,\tau)^{-2k-2r} \sum_{r\geq 0} \frac{c^r j(\gamma,\tau)^r}{r!} L(1)^r f(\gamma\tau)v \\ &= j(\gamma,\tau)^{-2k} \sum_{r\geq 0} \frac{X^r}{r!} L(1)^r f(\gamma\tau)v \\ &= \sum_{r\geq 0} \frac{X^r}{r!} L(1)^r f|_{2k}(\tau)v \\ &= \sum_{r\geq 0}\sum_{n=0}^{s} \frac{X^{r+n}}{r!} Q_n(f) L(1)^r v, \end{aligned}$$

由此便证明了这一断言。映射 ι 显然是单射，而我们的计算表明它是一个 Q-模的分次映射。因此，接下来只需证明其满射性。

鉴于此，固定 $g \in Q_{2k}(V)$。于是存在全纯函数 $Q_d(g) : \mathcal{H} \to F_N V$，其中某个 N 满足

$$g||_{2k}\gamma(\tau) = \sum_{d=0}^{s} X^d Q_d(g).$$

设 $(v_{ij})_{j=1}^{n_i}$ 是每个 i 的 V_i 的一组基，使得 $g = \sum_{i,\ j} g_{ij} v_{ij}$ 对于标量值函数 g_{ij}，并记

$$Q_d(g) = \sum_{i \le N} \sum_{j=1}^{n_i} Q_d(g)_{ij} v_{ij}.$$

对于标量值函数 $Q_d(g)_{ij}$。我们必须证明每个 g_{ij} 都是拟模形式。因此，令我们计算：

$$\begin{aligned} g(\gamma\tau) &= \sum_{d=0}^{s} X^d \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{n_i} Q_d(g)_{ij}(\tau) j(\gamma,\tau)^k e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} j(\gamma,\tau)^{-2L(0)} v_{ij} \\ &= \sum_{d=0}^{s} X^d \sum_{i=0}^{N} j(\gamma,\tau)^{k-2i} \sum_{j=1}^{n_i} Q_d(g)_{ij}(\tau) e^{-cj(\gamma,\tau)L(1)} v_{ij} \\ &\equiv \sum_{d=0}^{s} X^d j(\gamma,\tau)^{k-2N} \sum_{j=1}^{n_N} Q_d(g)_{Nj}(\tau) v_{Nj} \pmod{F_{N-1}V} \end{aligned}$$

由此可知，对每个 j，都有

$$g_{Nj}|_{2N-k}\gamma(\tau) = \sum_{d=0}^{s} X^d Q_d(g)_{Nj}(\tau).$$

也就是说，g_{Nj} 的最高共形次数坐标 g 是权为 $2N-k$ 的拟模形式。因此，若令 $g = \sum_{j=1}^{N_n} f_{Nj} v_{Nj}$，则有 $g \in Q \otimes V$，且$f - g \in Q(V)$ 的共形次数为 $\le N-1$。现在我们可以继续归纳，完成定理的证明。□

5.3. **模形式的模**。设 f 和 g 是某个顶点算子代数 V 的两个 V 值拟模形式，权分别为 k 和 ℓ。由命题 5.5 可知，f 和 g 均属于 $Q \otimes V^{(2)}$，因此逐点模

$$(f(m)g)(\tau) \coloneqq f(\tau)(m)g(\tau)$$

给出了 $Q \otimes V^{(2)}$ 中一个定义良好的元素，其权为 $k+\ell-2m-2$。我们已经说明，进一步假设 f 和 g 都是模的，并不意味着 $f(m)g$ 一定是模的；它通常只是准模的。

当 $m \ge -1$ 时，可以使用 Huang 的变换公式 [15, 11]，进一步精确描述 $f(m)g$ 的准模变换性质。我们首先考虑一个二变量模

$$f(\tau_1)(m)g(\tau_2)$$

对于两个相互独立且不同的点 $\tau_1,\ \tau_2 \in \mathcal{H}$。我们限制模 $m \ge -1$，以便无需分情况讨论即可对下一个结果给出统一的证明。

命题 5.6。 若 f 和 g 是权分别为 k 和 ℓ 的顶点算子代数值模形式，则对于 $m \geq -1$， m 模 $f(\tau_1)(m)g(\tau_2)$ 满足变换律

(12)

$$\begin{aligned}&f(\gamma\tau_1)(m)g(\gamma\tau_2)\\ =&j(\gamma,\tau_1)^k j(\gamma,\tau_2)^{\ell-2m-2}K(\gamma,\tau_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m+1}{m+1}(-X(\gamma,\tau_2))^2 f(\tau_1)(n+m)g(\tau_2)\right).\end{aligned}$$

其中 τ_1、 $\tau_2 \in \mathcal{H}$ 是不同的点，且 $\gamma \in \Gamma$。

证明。 首先，令 $A \in V$ 为任意一个态。若将 τ_2 视为固定，而让 τ_1 变化，则在 $\tau_1 = \tau_2$ 处有一个局部坐标 $\tau_1 - \tau_2$ 。对于 $\gamma \in \Gamma$，我们在 $\tau_1 = \gamma\tau_2$ 处有两个坐标：一个是 $\tau_1 - \gamma\tau_2$，另一个是 $\gamma^{-1}\tau_1 - \tau_2$。这两个坐标相差一个变量替换，我们将通过比较关于这两个局部坐标的 Huang 变换公式来证明定理。回忆一下，他的公式如下：若 $z = \tau_1 - \gamma\tau_2$ ，则

$$Y(A,z) = R(\rho)Y(R(\rho_z)^{-1}A, \rho(z))R(\rho)^{-1}$$

其中 $\gamma^{-1}\tau_1 - \tau_2 = \rho(z)$。回忆一下，我们先前看到

$$\gamma^{-1}\tau_1 - \tau_2 = \sum_{n\geq 1} c^{n-1} j(\gamma,\tau_2)^{n+1}(\tau_1 - \gamma\tau_2)^n.$$

因此

$$R(\rho) = e^{-cj(\gamma,\tau_2)L(1)} j(\gamma,\tau_2)^{-2L(0)}.$$

我们还需要确定 $R(\rho_z)$，其中 $z = \tau_1 - \gamma\tau_2$。由于我们可以写成

$$\rho(X) = \gamma^{-1}(X + \gamma\tau_2) - \tau_2,$$

我们发现

$$\begin{aligned}\rho_z(X) &= \rho(X+z) - \rho(z)\\ &= \gamma^{-1}(X + z + \gamma\tau_2) - \tau_2 - (\gamma^{-1}(z+\gamma\tau_2) - \tau_2)\\ &= \gamma^{-1}(X+\tau_1) - \gamma^{-1}\tau_1\end{aligned}$$

因此，根据先前在 $\tau = \gamma^{-1}\tau_1$ 条件下的计算，我们有

$$\rho_z(X) = \sum_{n\geq 1} c^{n-1} j(\gamma,\gamma^{-1}\tau_1)^{n+1} X^n.$$

由此可得

$$R(\rho_z) = e^{-cj(\gamma,\gamma^{-1}\tau_1)} j(\gamma,\gamma^{-1}\tau_1)^{-2L(0)}.$$

因此，用我们的记号 $K(\gamma,\tau) = e^{-cj(\gamma,\tau)} j(\gamma,\tau)^{-2L(0)}$，我们有

$$\begin{aligned}R(\rho) &= K(\gamma,\tau_2),\\ R(\rho_z) &= K(\gamma,\gamma^{-1}\tau_1).\end{aligned}$$

综上，Huang 公式就是单位元：

(13) $$Y(A,\tau_1 - \gamma\tau_2) = K(\gamma,\tau_2)Y(K(\gamma,\gamma^{-1}\tau_1)^{-1}A, \gamma^{-1}\tau_1 - \tau_2)K(\gamma,\tau_2)^{-1}.$$

这对 $\tau_1 \neq \gamma\tau_2$ 成立。

回顾一下，用我们的新记号表示时，取值于顶点算子代数的模形式满足变换律

$$f(\gamma\tau) = j(\gamma,\tau)^k K(\gamma,\tau) f(\tau).$$

特别地，取 $\tau = \gamma^{-1}\tau_1$，这说明

$$f(\tau_1) = j(\gamma,\gamma^{-1}\tau_1)^k K(\gamma,\gamma^{-1}\tau_1) f(\gamma^{-1}\tau_1).$$

因此，若在 Huang 的公式 (13) 中令 $A = f(\tau_1)$，其中 f 是一个取值于顶点算子代数的模形式，则可推得

$$Y(f(\tau_1),\tau_1-\gamma\tau_2) = j(\gamma,\gamma^{-1}\tau_1)^k K(\gamma,\tau_2) Y(f(\gamma^{-1}\tau_1),\gamma^{-1}\tau_1-\tau_2) K(\gamma,\tau_2)^{-1}. \tag{14}$$

现在，若 $g(\tau_2)$ 是另一个取值于顶点算子代数的模形式，我们可以在右侧乘以 $g(\gamma\tau_2)$，从而推得

$$Y(f(\tau_1),\tau_1-\gamma\tau_2)g(\gamma\tau_2) = j(\gamma,\gamma^{-1}\tau_1)^k j(\gamma,\tau_2)^\ell K(\gamma,\tau_2) Y(f(\gamma^{-1}\tau_1),\gamma^{-1}\tau_1-\tau_2) g(\tau_2). \tag{15}$$

现在，我们通过比较方程 (15) 两边的主部来完成证明。额外的增权自守因子来自将方程 (15) 右侧的 $\gamma^{-1}\tau_1-\tau_2$ 用 $\tau_1-\gamma\tau_2$ 表示。

事实上，为简化记号，若令 $B = f(\gamma^{-1}\tau_1)$、$E = \mathrm{End}(V)$ 和 $T = \tau_1-\gamma\tau_2$，则可得

$$\begin{aligned}
&Y(B,\gamma^{-1}\tau_1-\tau_2)\\
\equiv&\sum_{n\geq -1} B(n)(\gamma^{-1}\tau_1-\tau_2)^{-n-1} \pmod{TE[\![T]\!]}\\
\equiv&\sum_{n\geq -1} B(n)\left(\sum_{m\geq 1} c^{m-1} j(\gamma,\tau_2)^{m+1} T^m\right)^{-n-1} \pmod{TE[\![T]\!]}\\
\equiv&\sum_{n\geq -1} j(\gamma,\tau_2)^{-2n-2} B(n) T^{-n-1}\left(\sum_{m\geq 1}(cj(\gamma,\tau_2)T)^{m-1}\right)^{-n-1} \pmod{TE[\![T]\!]}\\
\equiv&\sum_{n\geq -1} j(\gamma,\tau_2)^{-2n-2} B(n) T^{-n-1}(1-cj(\gamma,\tau_2)T)^{n+1} \pmod{TE[\![T]\!]}\\
\equiv&\sum_{n\geq -1}\sum_{m=0}^{n+1}(-1)^{n+1-m}\binom{n+1}{m} c^{n+1-m} j(\gamma,\tau_2)^{-m-n-1} B(n) T^{-m} \pmod{TE[\![T]\!]}\\
\equiv&\sum_{m=0}^{\infty}(-c)^{-m} j(\gamma,\tau_2)^{-m}\left(\sum_{n=m-1}^{\infty}\binom{n+1}{m}(-c)^{n+1} j(\gamma,\tau_2)^{-n-1} B(n)\right) T^{-m} \pmod{TE[\![T]\!]}\\
\equiv&\sum_{m=-1}^{\infty} j(\gamma,\tau_2)^{-2m-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m+1}{m+1}(-c)^n j(\gamma,\tau_2)^{-n} B(n+m)\right) T^{-m-1} \pmod{TE[\![T]\!]}
\end{aligned}$$

因此，将这一结果与方程 (15) 结合，我们得到 $m \geq -1$:

$$\begin{aligned}
&f(\tau_1)(m)g(\gamma\tau_2)\\
=&j(\gamma,\gamma^{-1}\tau_1)^k j(\gamma,\tau_2)^{\ell-2m-2} K(\gamma,\tau_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m+1}{m+1}(-c)^n j(\gamma,\tau_2)^{-n} f(\gamma^{-1}\tau_1)(n+m) g(\tau_2)\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

最后，如果我们用 $\gamma\tau_1$ 替换 τ_1，便证明了该命题。 □

我们的下一个目标是说明，对于 $m \geq -1$，上述变换律如何延拓到对角线 $\tau_1 = \tau_2$。

定理 5.7。若 f 和 g 分别是权为 k 和 ℓ 的 V 值模形式，则对于 $m \geq -1$，由 $(f(m)g)(\tau) = f(\tau)(m)g(\tau)$ 定义的 m 阶模 $f(m)g$ 在 $\mathcal{H}$ 上解析，并且满足

$$(f(m)g)(\gamma\tau) = j(\gamma,\tau)^{k+\ell-2m-2}K(\gamma,\tau)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n+1}{m+1}(-X)^n f(\tau)(m+n)g(\tau)\right). \tag{17}$$

对所有 $\tau \in \mathcal{H}$ 和 $\gamma \in \Gamma$ 均成立。

特别地，若 f 和 g 的共形次数分别为 M 和 N，则 $f(m)g$ 满足一个权为 $k+\ell-2m-2$、深度至多为 $M+N-m-1$ 且共形次数至多为 $M+N-m-1$ 的 V 值准模函数的变换律

证明。由于 f 和 g 的共形次数有限，设为 N，因此我们可以将它们乘积中出现的 m 阶模视为一个双线性映射

$$(m)\colon F_N V \times F_N V \to F_{N-m}V.$$

这是有限维复向量空间之间的双线性映射，因此对于这些空间上的典范复结构而言是解析的。由于 f 和 g 是解析函数 $\mathcal{H} \to F_N V$，它们的乘积同样定义了一个解析映射

$$f \times g\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to F_N V^2,$$

因此，复合映射：

$$f(m)g\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to F_{N-m}V$$

在整个 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 上都是复解析的。命题 5.6 的变换律此前仅针对 $\tau_1 \neq \tau_2$ 得到了证明，随后通过解析延拓扩展到 $\mathcal{H}^2$ 的对角线上。这就证明了结果的第一部分。

关于深度和共形次数的论述，请注意，$f(\tau)(n+m)g(\tau)$ 的最高次数部分的共形次数至多为 $M+N-m-n-1$。当 $n=0$ 时，这给出了 $f(m)g$ 的共形次数上界。接着，由于对于 $s<0$ 有 $V_s=0$，可得 $f(m+n)g=0$ 对于 $n \geq M+N-m$ 成立。因此，$f(m+n)g$ 的深度至多为 $M+N-m-1$。□

注记 5.8。我们强调，根据命题 5.5，对于 $f,g \in Q(V)$，模 $f(m)g$ 对所有 $m \in \mathbf{Z}$ 都有定义，而定理 5.7 的重要意义在于方程 (17) 说明了当 $m \geq -1$ 时，模 $f(m+n)g$ 如何参与 $f(m)g$ 的拟模变换律。下文不需要定理 5.7，因此我们没有针对所有整数 m 给出一个完整的表述。

6. $Q(V)$ QUA QVOA

本节旨在描述取值于拟顶点算子代数 V 的拟模形式空间 $Q(V)$ 的代数结构。关于拟顶点算子代数及相关结构的更多细节，请参阅附录 B。

我们已经考察过 n^{th} 取值的模形式（11）以及 V 取值的拟模形式的逐点乘积。通过这种方式，$Q(V)$ 配备了对所有整数 n 都适用的乘积，而且显然所有这些乘积都是 Q 线性的。此外，V 中乘积满足的任何恒等式，在 $Q(V)$ 中也成立。因此

雅可比恒等式在 $Q(V)$ 中成立，当然真空向量是 1。最后，出于类似的原因，创造性质在 $Q(V)$ 中成立，因此 $Q(V)$ 是 Q 上的顶点代数。事实上，很容易看出，定理 5.5 中的映射 ι 是 Q 上顶点代数的同构；这里我们将交换代数 Q 视为一个顶点代数，其顶点算子满足

$$Y(f,z)g := fg$$

并且， $Q \otimes V$ 是顶点代数的张量积。

尽管这种构造很自然，但对我们来说并 不那么有用。原因在于它忽略了关于 Q、V 和 Q（V）的分次的所有考量，而这些正是我们希望追踪的、这些结构的基本方面。换句话说，如果我们用不同的名称重新引入同一个映射：

$$\iota' : Q \otimes V \xrightarrow{\cong} Q(V), \qquad f(\tau) \otimes v \mapsto f(\tau)v \tag{18}$$

那么，我们在此希望将 $Q \otimes V$ 视为分次顶点代数的张量积，并将 ι' 视为此类对象之间的态射。 ι 与 ι' 的区别在于，它们是不同范畴中的态射。

6.1. $Q^{(1/2)}$ **作为拟顶点算子代数**。 我们将发展 Q（V） $\cong Q \otimes V^{(2)}$ 上的代数结构，该结构兼具顶点代数结构和分次。我们不妨从 Q着手，或者更确切地说，从 $Q^{(1/2)}$ 开始（参见附录 B.0.9）。以下是本小节的主要结果。

定理 6.1。 $Q^{(1/2)}$ 是拟顶点算子代数的底层福克空间

$$(Q^{(1/2)}, Y, 1, \rho).$$

（Y和 ρ 将在证明过程中加以描述。）

证明。 回想一下， $Q^{(1/2)}$ 不过是对 Q的重新分次：

$$Q^{(1/2)} = \oplus_{k \geq 0} Q_k^{(1/2)}, \qquad Q_k^{(1/2)} := Q_{2k},$$

特别地， $Q^{(1/2)}$ 是一个交换结合代数，并且它具有一个分次导子 $\theta := q\frac{d}{dq}$ ，它是权 1 的升算子。于是存在一个顶点代数（$Q^{(1/2)}$， Y，1， θ），使得

$$Y(f,z) := e^{z\theta} f = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \theta^n f \qquad (f \in Q^{(1/2)}). \tag{19}$$

（参见附录 B.0.4 的例 1。）因此， $Q^{(1/2)}$ 中的 n^{th} 乘积满足：对于所有的$n \geq 0$ ，我们有 $f(n)g = 0$ ，并且

$$f(-n-1)g := \frac{1}{n!}(\theta^n f)g.$$

注意，从最后一个公式可见， $f(-2)1 = \theta f$，因此 θ 是该顶点代数的典范导子。

接下来我们证明这个顶点代数是**Z**-分次的。分次已经显而易见，我们需要证明，若 f, g 的共形次数分别为 k 和 ℓ ，那么 $f(n)g$的共形次数为 $k+\ell-n-1$。当 $n \geq 0$时，这显然成立。现在取 $n \geq 0$，并考虑上文给出的 $f(-n-1)g$。由于 θ会使权增加 1，因此 $f(-n-1)g$的共形次数为 $k+\ell+n = k+\ell-(-n-1)-1$ ，这正是所需的结果。

现在我们来谈核心内容：李代数表示

$$\rho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(Q^{(1/2)}).$$

这在拟模形式理论中是众所周知的，其中 $\mathfrak{sl}_2$ 在 Q 上的作用已有描述，例如见 [26]。按照（同上文献）的记号，$Q = \oplus_k Q_{2k}$ 带有一个权为 2 的降算子 $\delta = \partial/\partial E_2$、一个权为 2 的升算子 $D = q\frac{d}{dq}$，以及欧拉算子 E。下列关系成立：

$$[D, \delta] = E, \quad [E, D] = 2D, \quad [E, \delta] = -2\delta.$$

若将此作用转移到 $Q^{(1/2)}$ 上，并将 D 替换为 θ，同时保留记号 δ, E，分别表示作用于 $Q^{(1/2)}$ 上的降算子和欧拉算子（希望这不会造成混淆），我们便得到 ρ 的定义，即：

$$\rho : L(1) \mapsto -\delta, \quad L(0) \mapsto E, \quad L(-1) \mapsto \theta \tag{20}$$

正如我们在拟顶点算子代数的定义中所规定的那样。

最后，我们必须验证 $a \in Q_k^{(1/2)}$ 满足以下两条公理：

(i)（平移协变性）。$(L(-1)a)(n) = -na(n-1) = [L(-1)\ a(n)]$,(ii) $[L(1)\ a(n)] = (L(1)a)(n) + (2k-n-2)a(n+1)$,

这里我们采用 (20) 中的记号。先证明 (i)。若 $n \geq 0$，则这是因为$a(n) = 0$，只要 $n \geq 0$ 即可。设 $n < 0$。那么

$$(L(-1)a)(n) = (\theta a)(n) = \tfrac{1}{(-n-1)!}\theta^{-n-1}\theta a = -\tfrac{n}{(-n)!}\theta^n a = -na(n-1),$$

这就是 (i) 中的第一个等式。至于第二个等式，

$$[L(-1), a(n)]b = \theta(a(n)b) - a(n)\theta b = (\theta a(n))b = (L(-1)a)(n)b,$$

这里，为了得到第二个等式，我们用到了这样一个事实：θ 是顶点代数 $Q^{(1/2)}$ 的规范导子，因此对于所有乘积 $a(n)b$，它都是一个导子。由此完成了平移协变性的证明。

剩下需要证明 (ii)。照例，当 $n \geq 0$ 时结论显然，因此设 $n = -m < 0$。我们有

$$[L(1), a(n)]b = \tfrac{-1}{(m-1)!}[\delta, \theta^{m-1}a]b = \tfrac{-1}{(m-1)!}\delta(\theta^{m-1}a)b \tag{21}$$

这里，为了得到第二个等式，我们用到了这样一个事实：δ 是 Q 的导子。接下来需要下面这个结果，其证明可用归纳法完成：

引理 6.2。若 $a \in Q_{2k}$ 则

$$\delta\theta^m a = -m(2k+m-1)\theta^{m-1}a + \theta^m \delta a.$$

□

由此引理可从式（21）看出

$$\begin{aligned}
[L(1), a(n)] &= \tfrac{-1}{(m-1)!}\delta(\theta^{m-1}a) \\
&= \tfrac{-1}{(m-1)!}\left\{((-(m-1)(2k+m-2)\theta^{m-2}a + \theta^{m-1}\delta a\right\} \\
&= \tfrac{2k+m-2}{(m-2)!}\theta^{m-2}a - \tfrac{1}{(m-1)!}\theta^{m-1}\delta a \\
&= (2k-n-2)a(n+1) + (L(1)a)(n).
\end{aligned}$$

这表明条件（ii）确实满足，定理的证明至此完成。□

6.2. **过渡到** $Q(V)$。在本小节中，$Q^{(1/2)}$ 表示定理 6.1 中所述的拟顶点算子代数。我们可以构造拟顶点算子代数的张量积，参见附录 B.0.8。特别地，对于一个拟顶点算子代数 V，我们有拟顶点算子代数

$$\begin{aligned} Q^{(1/2)} \otimes V &:= (Q^{(1/2)}, Y, 1, \rho) \otimes (V, Y, \mathbf{1}, \rho') \\ &= (Q^{(1/2)} \otimes V, Y \otimes Y, 1 \otimes \mathbf{1}, \rho \otimes \rho'). \end{aligned} \tag{22}$$

若令（但愿不会造成更多混淆） $L(0)$ 和 $L(\pm 1)$ 分别表示 V 上通常的 Virasoro 算子，那么 $Q^{(1/2)} \otimes V$ 上相应的 Euler 算子、升算子和降算子分别为

$$\begin{aligned} &E \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes L(0), \\ &\theta \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes L(-1), \\ &\delta \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes L(1). \end{aligned} \tag{23}$$

容易看出，$1 \otimes V$ 和 $Q^{(1/2)} \otimes \mathbf{1}$ 是张量积的子准顶点算子代数；后者相对于 -1 乘积是一个与 $Q^{(1/2)}$ 同构的交换代数，而后者相对于 -1 乘积又是前者的一个模。因此，（18）的观点并未丢失；我们可以从 $Q^{(1/2)} \otimes V$ 作为拟顶点算子代数的结构中恢复这一观点。

最后只需指出，将 $Q^{(1/2)} \otimes V$ 的分次加倍后，我们得到 $Q \otimes V_{(2)}$，根据定理 5.5，我们将其与 $Q(V)$ 等同。因此我们有

定理 6.3. 设 V 是一个拟顶点算子代数。那么，V 值拟模形式空间 $Q(V)$ 具有双倍准顶点算子代数的结构。□

7. S关于 $Q(V)$ 的一些附加算子

张量积 $Q^{(1/2)} \otimes V$，或 $Q \otimes V_{(2)}$，除了前一节中用于定义拟顶点算子代数结构的“对角”$\mathfrak{sl}_2$-作用外，还允许其他作用。它允许 $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ 的作用。接下来的几节中，我们将使用其中一些附加算子。事实证明，它们对我们当前的目标至关重要，即理解嵌入

$$M(V) \subseteq Q(V).$$

我们已经看到，$Q(V)$ 在以下导数算子作用下封闭：

$$\begin{aligned} \theta &= qd/dq, \\ D_k &= \theta - \tfrac{k}{12} E_2, \\ \nabla_k &= 2\pi i D_k + L(-1), \end{aligned}$$

不过，只有最后一个算子使 $M(V)$ 保持不变，参见第4.1节。这些算子都会使共形次数增加 2。

7.1. **降算子与主要定理**。我们将Λ 上的降算子 $Q \otimes V^{(2)}$ 定义如下：

$$\Lambda = \frac{12}{2\pi i} \delta \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes L(1).$$

本节中，我们主要将 $Q(V)$ 视为定义在上半平面上的函数。于是，Λ 可以更简洁地表示为：

$$\Lambda = \frac{12}{2\pi i} \delta + L(1) = \frac{12}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial E_2} + L(1). \tag{24}$$

我们的主要结果包括下一个定理及其推论，它们将 $M(V)$ 刻画为 Λ 的核，这一刻画非常有用。

定理 7.1。 设 $f(\tau) \in Q_k(V)$。则

$$f||_k\gamma(\tau) = \exp(X\Lambda)f(\tau). \tag{25}$$

在证明该定理之前，我们先记录一些重要的推论：

推论 7.2。 我们有

$$M(V) = \ker \Lambda.$$

证明。 根据定义，当且仅当 $f \in M(V)$ 时， $f||_k\gamma(\tau) = f$。因此，根据 (25)，当且仅当 $\exp(X\Lambda)f(\tau) = f(\tau)$ 时， $f \in M(V)$。由于 Λ 使权降低 2，最后这个等式成立当且仅当 $\Lambda f = 0$，推论得证。□

推论 7.3。 设

$$f||_k\gamma = \sum_{n\geq 0} X^n Q_n(f)$$

对于取值于 V 的全纯函数 $Q_n(f)$。那么

$$Q_n(f) = \frac{1}{n!}\Lambda^n(f). \tag{26}$$

注记 7.4。 方程 (26) 是著名的标量拟模形式结果的顶点算子代数类比：若 $g \in Q_k$ 满足 $g|_k\gamma = \sum_{n\geq 0} X^n Q_n(f)$，则有

$$Q_n(f) = \frac{1}{n!}\partial^n f/\partial E_2^n.$$

定理 7.1 的证明： 由于 $f \in Q_k(V)$，且 $k = 2n$，因此存在如下形式的等式

$$f = \sum_{m=0}^{n} E_2^m \sum_{\ell=0}^{n-m} f_{m,\ell} v_{m,\ell}, \tag{27}$$

其中 $f_{m,\ell} \in M_{2\ell}$ 和 $v_{m,\ell} \in V_{n-m-\ell_\circ}$ 令 j 代替 $j(\gamma,\ \tau)$。于是

$$\begin{aligned}
f||_k\gamma(\tau) &= j^{-k}K(\gamma,\tau)^{-1}f(\gamma\tau) \\
&= j^{-k+2L(0)}e^{cjL(1)}f(\gamma\tau) \\
&= j^{-k+2L(0)}e^{cjL(1)}\sum_{m,\ell} E_2^m(\gamma\tau)f_{m,\ell}(\gamma\tau)v_{m,\ell} \\
&= j^{-k+2L(0)}\sum_{r\geq 0}\frac{c^r j^r}{r!}L(1)^r\sum_{m,\ell} E_2^m(\gamma\tau)f_{m,\ell}(\gamma\tau)v_{m,\ell} \\
&= j^{-k+2L(0)}\sum_{r\geq 0}\frac{c^r j^r}{r!}\sum_{m,\ell} E_2^m(\gamma\tau)f_{m,\ell}(\gamma\tau)L(1)^r v_{m,\ell} \\
&= \sum_{r\geq 0}\sum_{m,\ell} j^{-k+2(n-m-\ell-r)+r}\frac{c^r}{r!}E_2^m(\gamma\tau)f_{m,\ell}(\gamma\tau)L(1)^r v_{m,\ell} \\
&= \sum_{m,\ell} j^{-2m-2\ell-r}\sum_{r\geq 0}\frac{c^r}{r!}E_2^m(\gamma\tau)f_{m,\ell}(\gamma\tau)L(1)^r v_{m,\ell} \\
&= \sum_{r\geq 0} j^{-r}\frac{c^r}{r!}\sum_{m,\ell}(j^{-2}E_2(\gamma\tau))^m(j^{-2\ell}f_{m,\ell}(\gamma\tau))L(1)^r v_{m,\ell} \\
&= \sum_{r\geq 0}\frac{(XL(1))^r}{r!}\sum_m\left(E_2(\tau)+\frac{12X}{2\pi i}\right)^m\sum_\ell f_{m,\ell}(\tau)v_{m,\ell}.
\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
\exp(X\Lambda)f(\tau) &= \sum_{s\geq 0}\frac{X^s\Lambda^s}{s!}\sum_{m,\ell}E_2^m f_{m,\ell}v_{m,\ell} \\
&= \sum_{s\geq 0}\frac{1}{s!}\left(\frac{12X}{2\pi i}\partial/\partial E_2 + XL(1)\right)^s\sum_{m,\ell}E_2^m f_{m,\ell}v_{m,\ell} \\
&= \sum_{s\geq 0}\frac{1}{s!}\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\left(\frac{12X}{2\pi i}\partial/\partial E_2\right)^{s-t}(XL(1))^t\sum_{m,\ell}E_2^m f_{m,\ell}v_{m,\ell} \\
&= \sum_{s\geq 0}\frac{1}{s!}\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\sum_{m,\ell}\frac{m!}{(m-s+t)!}\left(\frac{12X}{2\pi i}\right)^{s-t}(XL(1))^t E_2^{m-s+t}f_{m,\ell}v_{m,\ell} \\
&= \sum_{s\geq 0}\sum_{m,\ell,t}\frac{1}{t!}\binom{m}{s-t}\left(\frac{12X}{2\pi i}\right)^{s-t}(XL(1))^t E_2^{m-s+t}f_{m,\ell}v_{m,\ell} \\
&= \sum_{t\geq 0}\sum_{m,\ell}\frac{(XL(1))^t}{t!}\left(E_2+\frac{12X}{2\pi i}\right)^m f_{m,\ell}v_{m,\ell}.
\end{aligned}$$

比较这些表达式即可完成定理的证明。 □

7.2. 降算子的满射性。 我们探讨$\Lambda:\ \ Q(V) \to Q(V)$ 是否为满射的问题。这相当于询问 $L(1)$ 是否为 V 上的满射。对于 V，其答案见 [7] 的描述，并在下文的引理 7.6 中重述；该答案取决于 V 的技术性质。

我们从一个简单的观察开始。

引理 7.5. 对于任意拟顶点算子代数 V，我们有

$$\dim Q_{2k+2}(V) - \dim Q_{2k}(V) \leq \dim M_{2k+2}(V).$$

当且仅当.....时，等号成立。

$$\Lambda : Q_{2k+2}(V) \to Q_{2k}(V)$$

是一个满射。

证明。 由于 Λ 使权降低 2，因此存在一个线性同构

$$\Lambda(Q_{2k+2}(V)) \cong Q_{2k+2}(V)/M_{2k+2}(V).$$

这是因为，根据推论 7.2，$M_{2k+2}(V) = Q_{2k+2}(V) \cap \ker \Lambda$. 因此

$$\dim Q_{2k}(V) \geq \dim \Lambda(Q_{2k+2}(V)) = \dim Q_{2k+2}(V) - \dim M_{2k+2}(V),$$

引理的两部分现在都得证。 □

为准备下一个结果，我们陈述上文提到的《[7] 》第 2.4 节中的命题。尽管该结果可能对任意拟顶点算子代数都成立，但我们只在 V 是顶点算子代数时陈述它，因为这是上述文献中的假设。

引理 7.6。 对于任意顶点算子代数 V，映射

$$L(1) : V_{k+1} \to V_k$$

是满射，除非可能有 $k = 0$。 □

本小节的第一个主要结果是该引理的 Q（V）类比。

定理 7.7。 对于任意顶点算子代数 V，映射

$$\Lambda : Q_{2k+2}(V) \to Q_{2k}(V)$$

是满射，除非可能有 $k = 0$。

证明。我们有

$$Q_{2k}(V) = \bigoplus_{r=0}^{k} Q_{2r} \otimes V_{k-r}.$$

任取 $k \neq 0$。我们对 r 使用归纳法，证明 $\operatorname{im}\Lambda \supseteq Q_{2r} \otimes V_{k-r}$。第一种情况是 $r = 0$，此时我们需要证明 $V_k \subseteq \operatorname{im}\Lambda$。我们有

$$\begin{aligned}\Lambda(V_{k+1}) &= \left(\frac{12}{2\pi i}\partial/\partial E_2 \otimes L(1)\right)(V_{k+1}) \\ &= L(1)V_{k+1} \\ &= V_k\end{aligned}$$

其中最后一个等式由引理 7.6 得出。因此，确有 $V_k \subseteq \operatorname{im}\Lambda$。

继续使用归纳法，取 $f \in Q_{2r}$ 和 $v \in V_{k-r}$。令 $w \in V_{k-r+1}$ 满足 $L(1)w = v$。只要 $k \neq r$，由引理 7.6 可知这样的 w 存在。暂且假设这一点成立。那么

$$\Lambda(f \otimes w) = \frac{12}{2\pi i}\partial f/\partial E_2 \otimes w + f \otimes v$$

根据归纳法，右侧的第一项属于 $\operatorname{im}\Lambda$。因此 $f \otimes v \in \operatorname{im}\ \Lambda$，从而 $Q_{2r} \otimes V_{k-r} \subseteq \operatorname{im}\Lambda$。

还需考虑 $k = r$ 的情形，此时我们需要证明 $Q_{2k} \subseteq \operatorname{im}\Lambda$。但显然， $\Lambda(Q_{2k+2}) = Q_{2k}$ ，由此完成了归纳法，也完成了定理的证明。□

推论 7.8。设 V 为 *CFT* 型（即 $V_0 = \mathbf{C1}$）。则 $\Lambda\colon\ Q(V) \to Q(V)$ 是一个满射。

证明。考虑映射 $\Lambda\colon\ Q_2(V) \to Q_0(V)$。我们有

$$\Lambda(Q_2(V)) \supseteq \left(\frac{12}{2\pi i}\partial/\partial E_2 \otimes 1 + 1 \otimes L(1)\right)(\langle E_2 \otimes \mathbf{1}\rangle) = \mathbf{C1}.$$

由于根据假设 $V_0 = \mathbf{C1}$ ，可得 $Q_0(V) = \mathbf{C1}$ ，因此 Λ 将 $Q_2(V)$ 满射到 $Q_0(V)$ 上。故推论的陈述由定理 7.7 得出。□

推论 7.9。对于任意 *VOA* V，我们有

$$\dim Q_{2k+2}(V) - \dim Q_{2k}(V) = \dim M_{2k+2}$$

除非可能 $k = 0$。若 V 为 *CFT* 型，则对所有 k 等式均成立。 □

注记 7.10。众所周知，参见 [8]，的引理 5.2，如果 V 是 CFT 型，即 $V_0 = \mathbf{C1}$，那么 $V_k = 0$ 对于 $k < 0$。

7.3. **保权算子** P。其定义如下：作为 $Q \otimes V^{(2)}$ 的一个自同态，它可描述为

$$P := \exp\left(-\frac{2\pi i}{12}E_2 \otimes L(1)\right). \tag{28}$$

也就是说，对纯张量 $f \otimes v$ ，有

$$P(f \otimes v) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\left(-\frac{2\pi i}{12}E_2\right)^n f\right) \otimes (L(1)^n v).$$

与 Λ 类似， P 属于作用于 $Q(V)$ 上的自然 $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ ，但并非对角的 $\mathfrak{sl}_2$。我们还用 P 表示 (28) 与 ι 的复合。这不会造成混淆。显然， P 是一个可逆的保权映射

$$P\colon Q \otimes V^{(2)} \xrightarrow{\cong} Q(V).$$

现在我们来到了本小节的主要结果。我们只对 CFT 型拟顶点算子代数陈述该结果，不过感兴趣的读者可以很容易地表述一般情形。

定理 *7.11. </style}*假设 V 是一个 *CFT* 型拟顶点算子代数。那么下图交换

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes V^{(2)} & \xrightarrow[\cong]{P} & Q(V) \\ \uparrow & & \uparrow \\ M \otimes V^{(2)} & \xrightarrow[\cong]{P|_{M\otimes V^{(2)}}} & M(V) \end{array}$$

其中，竖直映射是自然包含。

证明。该定理的要点在于，将 P 限制到 $M \otimes V^{(2)}$ 会诱导出到 $M(V)$ 的满射。由于 P保持权不变，只需证明 $P|_{M\otimes V^{(2)}}$在权 $k = 2n$处诱导出一个同构。

设 $f \in Q_k(V)$ 如 (27) 中所定义，并假设实际上 $f \in M_k(V)$。那么，根据推论 7.2，$\Lambda f = 0$。将其明确写出可得

$$0 = \left(\frac{12}{2\pi i}\partial/\partial E_2 \otimes 1 + 1 \otimes L(1)\right) . \sum_{m=0}^{n} E_2^m \sum_{\ell}^{n-m} f_{m,\ell} v_{m,\ell}$$
$$= \frac{12}{2\pi i} \sum_{m=0}^{n} m E_2^{m-1} \sum_{\ell}^{n-m} f_{m,\ell} v_{m,\ell} + \sum_{m=0}^{n} E_2^m \sum_{\ell}^{n-m} f_{m,\ell} L(1) v_{m,\ell}.$$

现在固定 $m \geq 1$，并比较 E_2^{m-1} 的系数，可得

$$\sum_{\ell}^{n-m} f_{m,\ell} v_{m.\ell} = -\frac{2\pi i}{12m} L(1) \sum_{\ell}^{n-m+1} f_{m-1,\ell} v_{m-1,\ell}.$$

由此可知，对于所有 $m \geq 0$，都有

$$\sum_{\ell}^{n-m} f_{m,\ell} v_{m,\ell} = \frac{(-2\pi i/12 L(1))^m}{m!} \sum_{\ell}^{n} f_{0,\ell} v_{0,\ell},$$

因此

$$f = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-2\pi i/12 E_2 L(1))^m}{m!} \sum_{\ell}^{n} f_{0,\ell} v_{0,\ell}.$$

现在 $v_{0,\ \ell}$ 在 V 中的共形权为 $n - \ell$。因此 $L(1)^{n+1} \in V_{-\ell-1}$，而这为零，因为 $\ell \geq 0$，并且 V 没有非零的负权态，因为它是 CFT 型。因此，最后一个显示的方程可改写为

$$f = P \sum_{\ell=0}^{n} f_{0,\ell} v_{0,\ell}.$$

这表明 $P(M \otimes V_{(2)}) \supseteq M(V)$。另一方面，若从一个态 $\sum_{\ell=0}^{n} f_{0,\ \ell} v_{0,\ \ell} \in M(V)$ 出发，并将上述论证反向进行，我们可知 $P(\sum_{\ell=0}^{n} f_{0,\ \ell} v_{0,\ \ell}) \in$ 属于 $\ker \Lambda$。因此，$P|_{M \otimes V^{(2)}}$ 是到 $M(V)$ 的满射，定理得证。□

这使我们能够计算 $M_k(V)$ 的维数，相较于先前的结果，计算过程更加明确。为简单起见，我们再次假设 V 是一个 VOA。通过上述指数映射给出的同构，我们有

推论 7.12. 若 V 是 *CFT* 型 *VOA*，则

$$\dim M_k(V) = \sum_{i=0}^{k/2} \dim M_{2i} \dim V_{\frac{k}{2}-i}$$

例 7.13. 考虑 $V = S$ 是由典范权 1 态 h 生成的秩一 Heisenberg 顶点算子代数的情形（参见附录 B.0.10）。$(M \otimes V^{(2)})_4$ 的一组基为

$$E_4 \otimes \mathbf{1}, \quad 1 \otimes h(-1)^2\mathbf{1}, \quad 1 \otimes h(-2)\mathbf{1}.$$

这三个态各自的 P-像为

$$E_4\mathbf{1}, \quad h(-1)^2\mathbf{1}, \quad h(-2)\mathbf{1} - \frac{2\pi i}{6} E_2 h,$$

这确实是 $M_4(S)$的一组基，正如我们从下方的表 2 中看到的那样。

7.4. 一些分次维数。定理 7.11 使我们能够轻松读出诸如 $Q(V)$ 和 $M(V)$ 等空间的分次维数（希尔伯特-庞加莱级数）。对于一个拟顶点算子代数$V = \oplus_n V_n$，我们记作

$$\dim_q V := \sum_n \dim V_n q^n.$$

引理 7.14. 设 V 是一个 *CFT* 型拟顶点算子代数。那么

(a)

$$\sum_{k\geq 0} \dim Q_{2k}(V) q^k = \frac{\dim_q V}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}$$

(b)

$$\sum_{k\geq 0} \dim M_{2k}(V) q^k = \frac{\dim_q V}{(1-q^2)(1-q^3)}.$$

证明。回顾一下，Q 和 M 的希尔伯特-庞加莱级数为（采用标准分次）

$$\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}, \quad \frac{1}{(1-q^4)(1-q^6)}$$

分别。由于存在分次同构 $Q(V) = Q \otimes V^{(2)}$，因此 (a) 部分得证。(b) 部分的证明类似，只是我们需要定理 7.11 将 $M(V)$ 识别为一个 Z- 分次线性空间。□

推论 7.15. 序列 {维数 $M_{2k}V$} 是 {维数 $Q_{2k}(V)$} 的一阶差分数列。

证明。 这是因为由引理 7.14 可得

$$(1-q)\sum_{k\geq 0} \dim Q_{2k}(V) q^k = \sum_{k\geq 0} \dim M_{2k}(V) q^k.$$

□

最后，我们再次专门讨论 $V = S$ 为秩一 Heisenberg 顶点算子代数的情形。我们给出了一个关于 {$\dim M_{2k}(S)$} 的一阶差分数列的奇特而出人意料的公式。这个结果最初是通过计算观察到的，并且有助于发现上文关于 $Q(V)$ 和 $M(V)$ 的一些结构性结果。我们尚未找到能够解释这一结果的显式组合双射。

引理 7.16. 我们有

$$\dim M_{2k}(S) - \dim M_{2k-2}(S) = \#\ \textit{doubletons in all partitions}\ \lambda \vdash k+2.$$

证明. 我们有

$$\dim_q S = \sum_{n\geq 0} p(n) q^n = \varphi(q) := \prod_{n\geq 1} (1-q^n)^{-1}.$$

因此，由引理 7.14(b) 可知，{$\dim M_{2k}(S)$} 的一阶差分数列等于

$$\frac{1}{(1+q)(1-q^3)\varphi(q)}.$$

现在，引理可由 n 的所有整数分拆中双重数的生成函数推出，该生成函数已知（OEIS A116646）为

$$\frac{q^2}{(1+q)(1-q^3)\varphi(q)}.$$

□

k	dim $Q_k(S)$	dim $M_k(S)$
0	1	1
2	2	1
4	5	3
6	10	5
8	19	9
10	33	14
12	57	24
14	92	35
16	147	55
18	227	80
20	345	118
22	512	167
24	752	240
26	1083	331
28	1545	462

表 1. Heisenberg 值拟模形式与模形式的维数

例 7.17. 我们说明上述构造如何出现在秩一海森堡代数 $S =$**复数域**$[h(-1)\ h(-2)\ \ldots]$ 的基本例子中。根据上述定义，我们定义了

$$Q(S) = \mathbf{C}[E_2, E_4, E_6, h(-1), h(-2), ...]$$

并配备如下分次： E_2 的权为 $k = 2$， E_4 的权为 $k = 4$， E_6 的权为$k = 6$，且 $h(-n)$ 的权为 $k = 2n$。我们将 $Q_k(S)$记为第 k个分次分量。由于拟模形式的存在，我们可以将 $Q(S)$的元素视为 $\mathcal{H}$上的函数。

定理 7.18。 维数 $\dim Q_k(S)$ 统计将 k 写成偶整数之和的方法数，但其中的部分 *2*、*4* 和 *6* 各有两种颜色。等价地，对于 $k = 2n$，$\dim Q_k(S)$ 因此是 n 的着色分拆数，其中部分1、2、3 有两种颜色。特别地，这是整数数列在线大全中的序列 $A000098$ 。

证明。 通过考察单项式基，这可由 $Q(S)$的分次立即得出。单项式 $E_2^a E_4^b E_6^c(\prod_{n\geq 1} h(-n)^{d_n})$（其中 $d_n = 0$ 对几乎所有 n都成立）对应于分拆 $k = 2a + 4b + 6c + \sum_{n\geq 1} 2nd_n$。 □

回想一下，上文已说明，取值于 S的模形式 $M_k(S) \subseteq Q_k(S)$是降算子(24)的核。表 1 列出了 $Q_k(S)$和 $M_k(S)$在较小 k取值下的维数，以及表 2 列出了 $M_k(S)$在较小 k 取值下的相应基。

7.5. 重新审视联系。 回想一下， ∇_k 是一个分次算子，其公式为

$$\nabla_k = 2\pi i D_k + L(-1) = 2\pi i\theta - \tfrac{2\pi ik}{12} E_2 + L(-1).$$

第 4 节还证明了， ∇_k 将模形式映射为模形式，并使权增加 2。本小节的目标是证明算子 ∇_k

k	$M_k(S)$的基向量
0	1
2	$h(-1)$
4	$E_4,\ h(-1)^2,\ E_2h(-1) - \frac{3}{\pi i}h(-2)$
6	$E_6,\ E_4h(-1),\ h(-1)^3,$ $E_2^2h(-1) - \frac{6}{\pi i}E_2h(-2) - \frac{12}{\pi^2}h(-3),$ $E_2h(-1)^2 - \frac{3}{\pi i}h(-2)h(-1)$
8	$E_4^2,\ E_6h(-1),\ E_4h(-1)^2,\ h(-1)^4,\ E_4h(-2) - \frac{\pi i}{3}E_4E_2h(-1),$ $h(-4) + \frac{\pi^3 i}{54}E_2^3h(-1) - \frac{\pi}{6}E_2^2h(-2) - \frac{2\pi i}{3}E_2h(-3),$ $h(-3)h(-1) - \frac{\pi^2}{12}E_2^2h(-1)^2 - \frac{\pi i}{2}E_2h(-2)h(-1),$ $h(-2)^2 - \frac{\pi^2}{9}E_2^2h(-1)^2 - \frac{2\pi i}{3}E_2h(-2)h(-1),$ $h(-2)h(-1)^2 - \frac{\pi i}{3}E_2h(-1)^3$

表 2. 海森堡值模形式 $M_k(S)$ 的空间 $k \in \{0,2,4,6,8\}$ 的基

可用于描述空间 $M_k(V)$ 的分解。我们需要以下结果:

定理 7.19. 设 V 是一个 *CFT* 型拟顶点算子代数。固定一个权 $k \geq 0$，并将 $f \in Q_k(V)$写成以下形式

$$f = \sum_{i+j=k} \alpha_i \beta_j$$

其中 α_i 具有模权 i，而 $\beta_j \in V$在 V 中具有 $L(0)$-权 $(k-i)/2$。假设对所有偶数 $0 \leq i \leq k$，$\alpha_i \in M_i$ 均成立。那么 $f \in M_k(V)$ 当且仅当 f 是准初级的。

证明。 首先，经过简单计算可得

$$\tau^{k-2L(0)} f = \sum_{i+j=k} \tau^i \alpha_i \beta_j = f(-1/\tau).$$

首先假设 f 是准初级的，即 $L(1)f = 0$。由此可得

$$e^{-\tau L(1)} \tau^{k-2L(0)} f(\tau) = e^{-\tau L(1)} \left(\sum_{i+j=k} \tau^i \alpha_i \beta_j \right) = \sum_{i+j=k} \tau^i \alpha_i \beta_j$$

这确实等于前一个公式中的 $f(-1/\tau)$，因此 $f \in M_k(V)$。现在，若 $f \in M_k(V)$，则

$$\sum_{i+j=k} \tau^i \alpha_i \beta_i = \left(\sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^\ell \tau^\ell}{\ell!} L(1)^\ell \right) \cdot \sum_{i+k=k} \tau^i \alpha_i \beta_j.$$

将此表达式按 ℓ展开，我们可知必须有

$$L(1) \sum_{i+j=k} \tau^i \alpha_i \beta_j = \left(\sum_{\ell \geq 2} \frac{(-1)^\ell \tau^\ell}{\ell!} L(1)^\ell \right) \cdot \sum_{i+j=k} \tau^i \alpha_i \beta_j$$

注意，由于对 $Q_k(V)$中的元素施加 $L(1)$不会引入 τ的因子，因此上述表达式仅在 $L(1)$ $f = 0$时成立，由此证明了该定理。 □

下文中，我们用 $M_k(QP)$表示 $M_k(V)$中属于 $L(1)$之核的元素集合，用 $QP_n(V)$表示 V 中属于 $L(1)$之核的元素集合。我们还通过与真空相乘，将 M_k 视为 $M_k(V)$的一个子空间。

定理 7.20. 设 V 是一个 *CFT* 型的顶点算子代数。那么，

$$M_k(V)/M_k(QP) = \nabla_{k-2}(M_{k-2}(V)/M_{k-2}) \oplus R_k$$

因此我们得到

$$M_k(V) = M_k(QP) \oplus \nabla_{k-2}(M_{k-2}(V)/M_{k-2}) \oplus R_k$$

此外 维数 $R_k =$ 维数 M_{k-2}(维数 $V_1 -$ 核的维数 $L(1)|_{V_1}$)。特别是，如果 V具有非退化不变形式，那么 $R_k = 0$。

证明。 由于 $\nabla_k = 2\pi i D_k + L(-1)$，我们有 $\nabla_k(M_k) \subseteq M_{k+2}(QP)$ 对任意 k 均成立。因此， $\nabla_k \colon M_k(V)/M_k \to M_{k+2}(V)/M_{k+2}(QP)$ 定义良好。经过简单计算可得

$$\ker \nabla_k = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq 12n \text{ for } n \geq 1 \\ \mathbf{C}[\Delta^n] & \text{if } k = 12n \text{ for } n \geq 1 \end{cases}$$

这里回顾一下， Δ 表示 Ramanujan 的 delta 函数。这是因为 Serre 导数会消去空间 **复数域**$[\Delta^n]$ ，对所有 $n \geq 1$均如此，因此 ker $\nabla_k \subseteq M_k$。现在，对于任意 $f \in M_k(V)$, 像 $\nabla_k(f)$ 属于 $L(1)$ 的核，当且仅当 $f \in M_k$。这是因为，如果 $f \in Q_k(V)$ 含有非平凡的顶点算子代数分量（即，如果 $L(0)f \neq 0$），联络会引入因子 E_2，而根据定理 7.19，这类元素不可能是准初级的。作为向量空间之间的映射，我们看到$\nabla_k : (M_k(V)/M_k) \to ($ $M_{k+2}(V)/M_k(QP))$ 是单射。由此可得

$$M_k(QP) \oplus \nabla_{k-2}(M_{k-2}(V)/M_{k-2}) \tag{29}$$

给出 $M_k(V)$ 的一个子空间。现在我们逐步计算它的维数。首先得到

$$\dim M_k(QP) = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \dim M_{2i} \dim QP(V)_{\frac{k}{2}-i}$$

在上面的求和中，请注意，当 $i = \frac{k}{2}$时, 根据假设有 dim $QP(V)_{\frac{k}{2}-i} = 1$。此外，若 $i < \frac{k}{2} - 1$ ，则根据 [7, 命题 3.4 (iii)] ，有

$$\dim QP(V)_{\frac{k}{2}-i} = \dim V_{\frac{k}{2}-i} - \dim V_{\frac{k}{2}-i-1}$$

因此

$$\begin{aligned}\dim M_k(QP) = \dim M_k + \dim M_{k-2}\cdot\dim QP(V)_1 \\ + \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-2} \dim M_{2i}(\dim V_{\frac{k}{2}-i} - \dim V_{\frac{k}{2}-i-1})\end{aligned}$$

我们还有

$$\begin{aligned}\dim \nabla_{k-2}(M_{k-2}(V)/M_{k-2}) &= \dim M_{k-2}(V) - \dim M_{k-2} \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} \dim M_{2i}\dim V_{\frac{k}{2}-i-1} - \dim M_{k-2}\end{aligned}$$

因此，空间 (29) 的维数为

$$\begin{aligned}\dim M_k + \dim M_{k-2}\cdot\dim QP(V)_1 + \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-2} \dim M_{2i}(\dim V_{\frac{k}{2}-i} - \dim V_{\frac{k}{2}-i-1}) \\ + \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} \dim M_{2i}\dim V_{\frac{k}{2}-i-1} - \dim M_{k-2}\end{aligned}$$

重新整理后得到公式

$$\dim M_k + \dim M_{k-2}\dim QP(V)_1 + \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-2} \dim M_{2i}\dim V_{\frac{k}{2}-i}$$

由于 $\sum_{i=0}^{2} \dim M_{2i}\dim V_{\frac{k}{2}-i} = \dim M_k(V)$，我们看到差值恰好为

$$\dim M_{k-2}(\dim V_1 - \dim\ker L(1)|_{V_1})$$

因此，如果 V_1 由拟初等元素生成，那么 ∇ 和 $M_k(QP)$ 的像分解为 $M_k(V)$。□

例如，若 V 是 CFT 型，且按照 Li 的意义由 QP 生成（见 [19]），则 [7, 页 10]给出

$$M_k(V)/M_k(QP) = \nabla_{k-2}(M_{k-2}(V)/M_{k-2}).$$

8. 海克算子

我们类比经典海克算子，为 $M(V)$ 引入海克算子。我们说明，所出现的海克特征值系统恰好与一级经典（拟）模形式的特征值系统相同。唯一取决于拟顶点算子代数 V 的是这些特征系统的重数，而重数由 V 的分次维数给出。

8.1. 经典海克算子。 首先我们回顾经典海克算子 T_m。T_m 在 $f \in M_{2k}$ 上的标准作用如下：

$$T_m f := m^{k-1}\sum_{[\alpha]} f|_{2k}\alpha.$$

这里，$[\alpha]$遍历 $\Gamma\backslash D_m$中的轨道，其中 D_m是行列式为 m的 2×2整数矩阵集合。我们可以不失一般性地选择以下矩阵作为代表元:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad ad = m, \quad 0 \le b < d.$$

接着我们计算

$$(T_m f)(\tau) = m^{2k-1} \sum d^{-2k} f(\alpha\tau).$$

T_m 在 q-展开上的诱导作用是众所周知的。若 $f = \sum_n b_n q^n$ 是权为 $2k$ 的模形式，则

$$(T_m f)(q) = \sum_n \sum_{a|(m,n)} a^{2k-1} b_{mn/a^2} q^n. \tag{30}$$

仿照 [23], ，我们利用方程 (30) 扩展 T_m 的含义，使其成为作用于权为 $2k$的拟模形式 q-展开上的算子，而不只是作用于模形式。

注 8.1. 方程 (30) 适用于权为 0 的常数 q-展开，此时它表明

$$T_m(1) = m^{-1}\sigma_1(m).$$

8.2. **算子 T'_m.** 现在我们转而讨论作用于 $M(V)$ 的 m^{th} 海克算子的作用。我们用 T'_m 表示它，以区别于 T_m。若 $f \in M_{2k}(V)$，则定义

$$T'_m f(\tau) := m^{k-1} \sum_{[\alpha]} f||_{2k}\alpha(\tau).$$

由于双斜线算子 $f||_{2k}\alpha$ 定义了 $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})^+$ 的右群作用，因此这是良定义的，并在 $M_{2k}(V)$ 上定义了一个算子。

另一方面，我们可以逐分量地将 T_m 扩展到 $Q \otimes V_{(2)} = Q(V)$，即

$$T_m\left(\sum g_{2r} \otimes v_\ell\right) := \sum T_m g_{2r} \otimes v_\ell \qquad (g_{2r} \in Q_{2r}, v_\ell \in V_\ell), \tag{31}$$

其中，如所示，我们继续使用符号 T_m ，而 $T_m g_{2r}$ 是在 q-展开式上的作用 (30)。

定理 8.2. 两个算子 T_m和 T'_m都保持子空间 $M(V) \subseteq Q(V)$，并且我们有恒等式

$$T'_m = m^{L(0)} T_m.$$

特别地， $T_m g_{2r} \in Q_{2r}$。

证明。 我们已经说明 T'_m作用于 $M(V)$。因此，我们对所示公式的证明将推出 T_m 也作用于此。令 $f \in M_{2k}(V)$。根据定义，我们有

$$\begin{aligned} T'_m f(\tau) &:= m^{k-1} \sum_{[\alpha]} f||_{2k}\alpha(\tau) \\ &= m^{k-1} \sum_{[\alpha]} j(\alpha,\tau)^{-2k} K(\alpha,\tau)^{-1} (\det\alpha)^k f(\alpha\tau) \\ &= m^{2k-1} \sum_{[\alpha]} d^{-2k} K(\alpha,\tau)^{-1} f(\alpha\tau). \end{aligned}$$

由于公式中出现的每个 α 都满足 $c=0$，因此 $K(\alpha,\ \tau)=j^{-2L(0)}(\det\alpha)^{L(0)}=\left(\frac{a}{d}\right)^{L(0)}$，于是

$$\begin{aligned}T'_m f &= m^{2k-1}\sum_{[\alpha]} d^{-2k}\left(\frac{d}{a}\right)^{L(0)} f(\alpha\tau)\\ &= m^{2k-1}\sum_{a,d}\left(\frac{d}{a}\right)^{L(0)} d^{-2k}\sum_{b} f((a\tau+b)/d).\end{aligned}$$

每个形式 $f\in M_k(V)$ 都是若干项 $g_{2r}\otimes v_\ell$ 的和，其中 $g_{2r}\in Q_{2r}$ 且 $v_\ell\in V_\ell$ 且 $r+\ell=k$。因此

$$f((a\tau+b)/d)=\sum_{*} g_{2r}((a\tau+b)/d)\otimes v_\ell$$

于是我们可以利用 $g_{2r}(\tau)$ 的 q 展开式 $..=\sum_n a_n^g q^n$，应用标准论证。因此

$$\sum_b g_{2r}((a\tau+b)/d)=\sum a_n^g e^{2\pi i a n\tau/d}\sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i b n/d}.$$

最内层的和除非 $d|n$ 否则均为零；在此情况下，它等于 d。因此 s

$$\sum_b g_{2r}((a\tau+b)/d)=\sum_{d|n} a_n^g d q^{an/d}.$$

现在我们有

$$\begin{aligned}T'_m f &= m^{2k-1}\sum_{g_{2r}\otimes v_\ell}\sum_{a,d}\left(\frac{d}{a}\right)^{L(0)} d^{1-2k}\sum_{d|n} a_n^{g_{2r}} q^{an/d}\otimes v_\ell\\ &= \sum_{g_{2r}\otimes v_\ell}\sum_{a|m}\left(\frac{m}{a^2}\right)^{L(0)}\left\{a^{2k-1}\sum_t a^g_{mt/a}q^{at}\right\}\otimes v_\ell\\ &= \sum_{g_{2r}\otimes v_\ell}\sum_{n}\sum_{a|(m,n)}\left(\frac{m}{a^2}\right)^{L(0)}\left\{a^{2k-1}a^g_{mn/a^2}q^n\right\}\otimes v_\ell\\ &= \sum_{g_{2r}\otimes v_\ell}\sum_{n}\sum_{a|(m,n)}\left(\frac{m}{a^2}\right)^{k-r}\left\{a^{2k-1}a^g_{mn/a^2}q^n\right\}\otimes v_\ell\\ &= \sum_{g_{2r}\otimes v_\ell}\sum_{n}\sum_{a|(m,n)} m^{L(0)}\left\{a^{2r-1}a^g_{mn/a^2}q^n\right\}\otimes v_\ell\\ &= m^{L(0)}\sum_{g_{2r}\otimes v_\ell} T_m g_{2r}\otimes v_\ell\\ &= m^{L(0)}T_m f.\end{aligned}$$

至此，定理的证明完成。 □

8.3. **另一种海克作用**。 回顾第 7.3 小节中引入的算子 P。考虑

$$\begin{array}{ccc} M\otimes V^{(2)} & \xrightarrow{\quad P\quad} & M(V) \\ {\scriptstyle m^{L(0)}T_m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T'_m} \\ M\otimes V^{(2)} & \xrightarrow[\quad P\quad]{} & M(V) \end{array} \tag{32}$$

定理 8.3。 图(32)可交换。

证明。 给定 $f\in M_{2k}(V)$，我们只需验证 $T'_m f$ 和 $Pm^{L(0)}T_mP^{-1}f$ 的模部分（深度 0 的部分）相等。

令 $f=\sum_n E_2^n\sum_\ell^{k-n} f_{n,\,\ell}\otimes v_{n,\,\ell}\in M_{2k}(V)$，并令 f^0 为 f 的模部分，即，

$$f^0:=\sum f_{0,\ell}\otimes v_{0,\ell}\in M\otimes V^{(2)}.$$

回想一下，这个记号意在表示 $f_{n,\,\ell}\in M_{2\ell}$, $v_{n,\,\ell}\in V_{k-n-\ell}$。根据 P 的定义，我们有 $P(f^0)=f$。因此

$$Pm^{L(0)}T_mP^{-1}f=Pm^{L(0)}T_mf^0$$

其模部分等于 $m^{L(0)}T_mf^0$。但根据定理 8.2，这正是 T'_mf 的模部分。至此，本定理得证。□

定理 8.3 中对 T'_m 的描述比定理 8.2 中的描述有一些优势。这是因为我们可以从海克算子在模形式上的作用关系（而非拟模形式）中读出 T'_m 之间的关系。例如

推论 8.4. 作用于 $M_{2k}(V)$ 的算子 $T'_m\,(m\geq 1)$ 彼此可交换。事实上，它们给出了海克代数 $\mathcal{H}$ 的一个作用，并且我们有

$$T'_mT'_n=T'_{mn}\ \textit{if}\ (m,n)=1.$$

□

类似地,

引理 8.5. 作用于 $M_{2k}(V)$ 时，对任意素数 p，我们有

$$T'_pT'_{p^n}=T'_{p^{n+1}}+p^{2k-1}T'_{p^{n-1}}.$$

证明。 众所周知，作用于 M_{2k} 的通常海克算子 T_{p^j} 满足相同的关系。因此，若 $f=g_{2r}\otimes v_\ell\in M\otimes V_{(2)}$，其中 $g\in M_{2r},v\in V_\ell$ 和 $k=r+\ell$ 同前，则我们有

$$\begin{aligned}(p^{n+1})^{L(0)}T_pT_{p^n}f&=(p^{n+1})^{L(0)}T_{p^{n+1}}f+p^{2r-1}p^{2L(0)}(p^{n-1})^{L(0)}T_{p^{n-1}}f\\&=(p^{n+1})^{L(0)}T_{p^{n+1}}f+p^{2k-1}(p^{n-1})^{L(0)}T_{p^{n-1}}f\end{aligned}$$

现在用 P 共轭此关系，并利用定理 8.3）完成引理的证明。□

通过标准论证，最后两个结果给出了形式狄利克雷级数的欧拉乘积表示

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T'_n}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{T'_p}{p^s}+\frac{p^{2k-1}}{p^{2s}}\right)^{-1}. \tag{33}$$

回顾一下，我们有联络 ∇： $M_k(V) \to M_{k+2}(V)$。另一方面，我们知道，通过同构 P， $M(V) \cong M \otimes V_{(2)}$。确定联络在 $M \otimes V^{(2)}$ 上的作用是自然的。更准确地说，我们希望描述适合下面图表的映射∇'_k

(34)
$$\begin{array}{ccc} M \otimes V^{(2)} & \xrightarrow{P} & M(V) \\ \downarrow{\scriptstyle \nabla'_k} & & \downarrow{\scriptstyle \nabla_k} \\ M \otimes V^{(2)} & \xrightarrow[P]{} & M(V) \end{array}$$

令 D_k： $M_k \to M_{k+2}$为 Serre 导数。回想一下， $D_k(F)$恰由 $\theta(F)$ 中不含 E_2 项的项组成。另一方面， P 将一个取值于 V 的模形式 F 表示为 $F = \exp(\mathfrak{c}E_2 L(1))F_0$ ，其中 $\mathfrak{c}$ 是一个显式常数，而 $F_0 = F \bmod E_2$ 是 F 中不含 E_2 项的部分。现在我们可以将联络计算为 $M \otimes V^{(2)}$ 上的函数。

定理 8.6。 采用上述记号，有

$$\nabla'_k = D_k \otimes \mathrm{id} - \mathfrak{c}\frac{E_4}{12} \otimes L(1) + \mathrm{id} \otimes L(-1)$$

证明。 根据上面的说明，要计算 ∇'_k ，只需计算 $\nabla_k(F) \bmod E_2$。用公式表示，我们有

$$\nabla_k(F) = \theta(F) - \frac{k}{12}E_2 F + L(-1)F.$$

显然，$-\frac{k}{12}E_2$ 对 $F \bmod E_2$ 没有贡献，并且 $L(-1)F \bmod E_2 = L(-1)(F \bmod E_2)$。因此，所有作用都发生在 $\theta(F)$ 中；当 F 为拟模形式时，只需计算 $\theta(F) \bmod E_2$ 。利用 Ramanujan 恒等式 35 和莱布尼茨法则，可得

$$\begin{aligned} \theta(E_2^i) \mod E_2 &= \begin{cases} -\frac{E_4}{12} & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases} \\ \theta(E_4^i) \mod E_2 &= -\frac{i}{3}E_4^{i-1}E_6 \\ \theta(E_6^i) \mod E_2 &= -\frac{i}{2}E_6^{i-1}E_4^2 \\ \theta(E_4^i E_6^j) \mod E_2 &= -\left(\frac{j}{2}E_4^{i+2}E_6^{j-1} + \frac{i}{3}E_4^{i-1}E_6^{j+1}\right) \end{aligned}$$

这些公式刻画了 Serre 导数。由此可知，若 $F = \sum_{i=0}^{p} E_2^i F_i$ 则

$$\theta(F) \mod E_2 = \frac{-F_1 E_4}{12} + D_k(F_0)$$

综合起来可得：若 $F = \sum_\ell F_\ell \otimes v_\ell$ 属于 $M \otimes V_{(2)}$ 则

$$P(F) = \exp(\mathfrak{c}E_2 L(1))F = \sum_{i \geq 0} \frac{\mathfrak{c}^i}{i!}(E_2^i \otimes L(1)) \sum_\ell F_\ell \otimes v_\ell$$

θ对 $\nabla_k(P(F))$的常数项的贡献因此为 $(-\mathfrak{c}\frac{E_4}{12}L(1))F + (D_k(F))$。综上

$$\nabla_k' = D_k \otimes \mathrm{id} - \mathfrak{c}\frac{E_4}{12} \otimes L(1) + \mathrm{id} \otimes L(-1)$$

□

以下结果类似于附录中对拟模形式的观察，并将其推广到顶点算子代数值模形式：

引理 8.7. 设 $f \in Q(V)$ 是权为 k 的特征形式，对所有 m，它都是 T_m' 的特征形式，特征值为 λ_m。那么 $\nabla_k(f) = 2\pi i\theta(f) + L(-1)f$ 是 T_m' 的特征形式，对所有 m，特征值为 $m\lambda_m$。

证明。 与定理 7.19 中一样，我们记

$$f = \sum_{i+j=k} \alpha_i\beta_j$$

其中 $\alpha_i \in Q_i$和 β_j具有 $L(0)$-权 $(k-i)/2$。由于 $T_m(f) = m^{-L(0)}\lambda_m f$，这意味着

$$T_m(\alpha_i) = m^{(i-k)/2}\lambda_m\alpha_i.$$

回想一下，若 g 是 T_m 的特征形式，特征值为 μ_m，则 $\theta(g)$ 是特征形式，特征值为 $m\mu_m$。这一事实在附录中的定理 A.1 得到了证明。利用这一点，我们得到

$$T_m'(\theta(f)) = m^{L(0)} \sum_{i+j=k} m^{(i-k)/2+1}\lambda_m\theta(\alpha_i)\beta_j = m\lambda_m\theta(f).$$

接下来，我们有

$$T_m'(L(-1)f) = \sum_{i+j=k} m^{(i-k)/2}\lambda_m m^{(k-i)/2+1}\alpha_i L(-1)\beta_i = m\lambda_m L(-1)f.$$

综上所述，上面的两个公式给出了

$$T_m'(\theta(f) + \tfrac{1}{2\pi i}L(-1)f) = m\lambda_m\theta(f) + \tfrac{1}{2\pi i}m\lambda_m L(-1)f = m\lambda_m(\theta(f) + \tfrac{1}{2\pi i}L(-1)f)$$

因此 $T_m'(\nabla_k(f)) = m\lambda_m\nabla_k(f)$，这正是我们想要证明的结论。 □

8.4. 海克特征态。 如果 $\{f\}$ 是作用于 $M \otimes V_{(2)}$ 的 $m^{L(0)}T_m$ 的一组完整的同时本征态，那么根据定理 8.3 $\{Pf\}$ 是作用于 $M(V)$ 的 T_m' 的一组完整的同时本征态。我们将这类对象称为海克特征态。

根据我们已经证明的结果，很容易写出这样的一组 $\{f\}$。最直接的情形是

$$1 \otimes V_k.$$

$m^{L(0)}T_m$ 以特征值 $m^{k-1}\sigma_1(m)$ 的标量矩阵形式作用（参见注 8.1）。$M(V)$ 中相应的海克特征态为，对于 $v \in V_k$,

$$P(1 \otimes v) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\frac{-12}{2\pi i}\right)^n E_2^n L(1)^n v.$$

一般情形

$$M_{2r} \otimes V_\ell \ \ (r + \ell = k, r \geq 2)$$

相似，但需要复数域 M_{2r} 上的海克算子经典理论。回忆一下，对于 $2r \geq 4$， M_{2r} 包含经典海克算子的唯一同时归一化特征形式基

经典海克算子 T_m。将此基记为 $e^1, \ldots, e^d$，并设 q-展开式为 e^i

$$e^i = \sum_{n \geq 0} e^i_n q^n.$$

“归一化”是指 $e^i_1 = 1$。这种选择总是可行的，并且我们有$T_m(e^i) = e^i_m e^i$。

任取 $u^1, \ldots . u^f$ 的一个基。则

$$\{e^i \otimes u^j\}$$

是 $M_{2r} \otimes V_\ell$ 中权为 $2k$ 的一组完备同时本征态，对应的算子为$m^{L(0)}T_m$ 和

$$m^{L(0)}T_m(e^i \otimes u^j) = m^\ell e^i_m e^i \otimes u^j.$$

对应的 $M_{2k}(V)$ 中的海克本征态为

$$P(e^i \otimes u^j) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{-2\pi i}{12} \right)^n E_2^n e^i(\tau) L(1)^n u^j.$$

由形式欧拉乘积 (33)，我们照常可以推出上述海克本征态的特征值所满足的欧拉乘积。例如，对于上述 $P(1 \otimes v)$，我们得到

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{k-1}\sigma_1(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{p^{k-1}\sigma_1(p)}{p^s} + \frac{p^{2k-1}}{p^{2s}} \right)^{-1} = \zeta(s-k)\zeta(s-k+1).$$

这是在 $s - k + 1$ 处取值的 $E_2(\tau)$ 的 L-函数。

类似地，对于 $P(e^i \otimes u^j)$，我们得到

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^\ell e^i_m}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{p^\ell e^i_p}{p^s} + \frac{p^{2k-1}}{p^{2s}} \right)^{-1}.$$

This 这正是在 $s - \ell$ 处取值的 $e^i(\tau)$ 的 L-函数，因为我们知道

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^i_m}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{e^i_p}{p^s} + \frac{p^{2r-1}}{p^{2s}} \right)^{-1}.$$

因此，我们将对 $M(V)$ 和 $Q(V)$ 上海克本征系统及其关联的 L-函数的研究，归结为对 M 和 Q 上海克本征系统的经典研究。

附录 A. 标量值拟模形式

关于模形式理论的背景知识，读者可参阅 [26], [5]。除特别提醒读者注意以下内容外，我们将沿用第 1.1 节的记号，不再赘述:

$$M := \mathbf{C}[E_4, E_6]$$

是全纯模形式的 2Z 分次代数。

下面简要讨论拟模形式，进一步的背景资料参见 [24], [26] 。权为 k 、深度至多为 s 的准模函数 是一个全纯映射 $f\colon \mathcal{H} \to$ **复数域** ，满足

$$f|_k\gamma(\tau) = \sum_{n=0}^{s} X^n Q_n(f)$$

对于某些全纯映射 $Q_n(f)\colon \mathcal{H} \to$**复数域** 以及所有 $\gamma \in \Gamma$。根据定义可知，若 k 为奇数或 $k < 0$, 则 $f = Q_0(f)$， $f = 0$，且 $f(\tau \pm 1) = f(\tau)$。特别地，f 有一个 q-展开。通常，若 f 在尖点处的 q-展开没有极点，我们就称其为全纯拟模形式（尽管我们对此术语的使用并不严格。）

设 Q_{2k} 为权 $2k$ 的拟模形式空间。那么

$$Q := \oplus_{k\geq 0} Q_{2k}$$

是一个 2**Z**-分次代数。例如， Q_2 由 E_2 张成，事实上我们有

$$Q = \mathbf{C}[E_2, E_4, E_6].$$

Q 的一个重要特征对本文至关重要： Q 在导数算子 $\theta = qd/dq = (1/2\pi i)d/d\tau$ 下封闭。事实上， θ 是 Q 的导子，并使权增加 2。例如，Ramanujan 著名地证明了以下恒等式

$$\begin{aligned} \theta(E_2) &= (E_2^2 - E_4)/12, \\ \theta(E_4) &= (E_2E_4 - E_6)/3, \\ \theta(E_6) &= (E_2E_6 - E_4^2)/2. \end{aligned} \tag{35}$$

众所周知，模导数是对 θ 的一种修正，其定义为

$$Df := \theta f - \frac{k}{12} E_2 f \quad (f \in M_k)$$

它是 M 上的一个导子，可使权增加 2。

定理 A.1. 每个权为 k 的拟模形式空间 Q_k 都有一个特征形式基，可描述如下：对于每个 $2 < \ell \leq k$，令 $\mathcal{B}_\ell$ 表示 M_ℓ 的特征形式基，并令 $\mathcal{B}_2 = \{E_2\}$。那么

$$\mathcal{E}_k := \bigcup_{0\leq \ell \leq k/2} \theta^\ell(\mathcal{B}_{k-2\ell})$$

是 Q_k的一个特征形式基。

证明。 首先证明，若 f 是一个权为 k 的拟模特征形式，则 $\theta(f)$ 是一个权为 $k+2$ 的拟模特征形式。首先，若 $f = \sum_{n\geq 0} a_n q^n \in Q_k$，则有表达式 $\theta(f)$ $= \sum_{n\geq 0} n a_n q^n \in Q_{k+2}$。 现在， $T_m(\theta(f))$ $= \sum_{n\geq 0} b_n q^n$，其中系数由下式给出

$$b_n = \sum_{\ell | gcd(m,n)} \ell^{(k+2)-1}(mn/\ell^2) a_{mn/\ell^2} = mn \sum_{\ell | gcd(m,n)} \ell^{k-1} a_{mn/\ell^2},$$

因此

$$T_m(\theta(f)) = \sum_{n\geq 0} mn\Big(\sum_{\ell | gcd(m,n)} \ell^{k-1} a_{mn/\ell^2}\Big) q^n = m \sum_{n\geq 0} n\Big(\sum_{\ell | gcd(m,n)} \ell^{k-1} a_{mn/\ell^2}\Big) q^n.$$

相比之下，我们可以轻松计算出这些表达式

$$T_m(f) = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{\ell \mid gcd(m,n)} \ell^{k-1} a_{mn/\ell^2}\Big)q^n$$

$$\theta(T_m(f)) = \sum_{n>0} n\Big(\sum_{\ell \mid gcd(m,n)} \ell^{k-1} a_{mn/\ell^2}\Big)q^n$$

这清楚地表明 $T_m(\theta(f)) = m\theta(T_m(f))$。现在假设 $f = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$是一个特征形式。那么，对于某个 $\lambda_m \in$ **复数域**，对所有 $m \geq 1$，都有 $T_m(f) = \lambda_m f$。根据上面的计算，我们可以看到

$$T_m(\theta(f)) = m\theta(T_m(f)) = m\theta(\lambda_m f) = m\lambda_m(\theta(f))$$

因此， $\theta(f)$ 是一个特征形式，其特征值为 $m\lambda_m$。现在我们证明 $\mathcal{E}_k$ 是 Q_k 中的一个线性无关向量集。假设 $f = \sum_{i\geq 0} c_n q^n \in Q_k$，其中 $k \geq 2$，且 $\theta(f) = 0$。展开这个关系可得 $\sum_{i\geq 0} i\cdot c_i q^i = 0$，这意味着对所有 $i \geq 0$，都有 $i\cdot c_i = 0$。由于对于 $k \geq 2$， $f \in Q_k$，因此不可能对所有 $i \geq 0$ 都有 $i = 0$。于是必有对所有 $i \geq 0$， $c_i = 0$，这说明 θ： $Q_k \to Q_{k+2}$ 是一个单射线性映射。

现在，对于任意 $k \geq 2$， $\mathcal{B}_k \subset M_k$ 是 M_k 的特征形式基，因此是一个线性无关集。θ 的单射性表明， $\theta(\mathcal{B}_k) \subset Q_{k+2}$ 也是一个线性无关集。同样，对于任意 $0 \leq \ell \leq k/2$，集合 $\theta^\ell(\mathcal{B}_{k-2\ell}) \subset Q_k$ 也是线性无关的，因为复合映射 θ^ℓ 也是单射。接下来只需证明这些集合的并

$$\bigcup_{0\leq \ell \leq k/2} \theta^\ell(\mathcal{B}_{k-2\ell})$$

在 Q_k中线性无关。这等价于证明，对于任意 $0 \leq \ell_1$， $\ell_2 \leq k/2$，若满足 $\ell_1 \neq \ell_2$，则有

$$\theta^{\ell_1}(\mathcal{B}_{k-2\ell_1}) \cap \theta^{\ell_2}(\mathcal{B}_{k-2\ell_2}) = \emptyset.$$

假设$f \in \theta^{\ell_1}(\mathcal{B}_{k-2\ell_1}) \cap \theta^{\ell_2}(\mathcal{B}_{k-2\ell_2})$。根据定义，这意味着存在$g_1 \in \mathcal{B}_{k-2\ell_1}$ 和 $g_2 \in \mathcal{B}_{k-2\ell_2}$，使得$f = \theta^{\ell_1}(g_1) = \theta^{\ell_2}(g_2)$。不失一般性，假设 $\ell_1 < \ell_2$，则 g_1 和 $\theta^{\ell_2-\ell_1}(g_2)$ 在单射映射 θ^{ℓ_1}下都映射到 f。但是 $g_1 \neq \theta^{\ell_2-\ell_1}(g_2)$，因为 $\theta^{\ell_2-\ell_1}(g_2)$ 是拟模的，而 g_1 是严格模的。由于θ^{ℓ_1} 是单射，我们必有$\theta^{\ell_1}(g_1) = \theta^{\ell_2}(g_2) = 0$，即$f = 0$。因此，$\mathcal{E}_k$ 是 Q_k中的一个线性无关向量集。

剩下要证明的是， $\mathcal{E}_k$ 的大小等于 $\dim Q_k$。我们可以将其表示为

$$Q_k = \bigoplus_{i=0}^{k/2} E_2^i M_{k-2i},$$

这立即表明

$$\dim Q_k = \sum_{i=0}^{k/2} \dim M_{k-2i} = |\mathcal{E}_k|.$$

因此， $\mathcal{E}_k$ 确实构成了 Q_k的特征基。 □

附录 B. 顶点代数

顶点代数这一概念有许多变体。本文只介绍我们所需的那些变体。它们主要是复数域上的顶点代数。关于任意交换基环上的顶点代数的一般介绍，参见 [21]。

B.0.1. 线性空间上的场。 取一个复数域线性空间 V，通常称为（即）福克空间。 V 中的向量常称为态。我们考虑线性空间$End(V)[[z,z^{-1}]]$，它由（双无限）幂级数组成

$$a(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a(n)z^{-n-1}$$

其中， $a(n)$ 是 V 的任意自同态。 V 上的场是 $End(V)[[z,z^{-1}]]$ 的线性子空间，定义为

$$\mathcal{F}(V):=\{a(z)\mid \forall b\in V \text{ we have } a(n)b=0 \text{ for } n\gg 0\}.$$

因此，对于场 $a(z)\in\mathcal{F}(V)$，我们有

$$a(z)b:=\sum_n a(n)bz^{-n-1}\in\mathbf{C}[z^{-1}][[z]].$$

B.0.2. 创造场。 我们固定一个非零的态 $\mathbf{1}\in V$，称为真空。如果场 $a(z)\in\mathcal{F}(V)$ 满足下式，则称其为创造的 场

$$a(n)\mathbf{1}=0 \text{ for all } n\geq 0.$$

换言之，

$$a(z).\mathbf{1}=a(-1)\mathbf{1}+a(-2)\mathbf{1}z+\ldots\in V[[z]].$$

在这种情况下，我们还说 $a(z)$ 创造了态 $a(-1)\mathbf{1}$，也就是说， $a(z)$ 的常数项。$\mathbf{1}$。

B.0.3. 顶点代数。 复数域 $\mathbf{C}$ 上的顶点代数是一个三元组 $(V,Y,\mathbf{1})$，由以下要素组成：

1. $(V,\mathbf{1})$ 是一个带有真空态 $\mathbf{1}$ 的线性空间。
2. $Y:\ V\to\mathcal{F}(V)\ \ a\mapsto Y(a,z)=\sum_n a(n)z^{-n-1}$ 是一个线性映射，使得 t
3. 每个场 $Y(a,z)$ 都是创造性的，并产生 $a\in V$，即 $a(-1)\mathbf{1}=a$。
4. 对所有态 $a,b,c\in V$ 以及所有整数 r,s,t，以下结构（Jacobi）恒等式成立：

$$\sum_{i\geq 0}\binom{r}{i}((a(t+i)b)(r+s-i)c=$$

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{t}{i}\left\{a(r+t-i)b(s+i)c-(-1)^t b(s+t-i)a(r+i)c\right\}.$$

由此可得由这些公理（同上）可知， $Y(\mathbf{1},\ z)=Id_V$，即 $\mathbf{1}(n)=\delta_{n,\ -1}Id_V$。

B.0.4. 典范导子。 设 $V=(V,\ Y,\ \mathbf{1})$ 是定义在 **复数域**上的顶点代数。创造性公理允许我们定义一列 $(D_0,\ D_1,\ D_2,\ .....)$ 自同态D_n，作用于 V：

$$\sum_{n\geq 0}D_n(a)z^n:=Y(a,z)\mathbf{1}$$

从而

$$D_n(a)=a(-n-1)\mathbf{1}\ (a\in V).$$

因此 $D_0=Id_V$。我们通常写作 $D=D_1$，即 $Da:=a(-2)\mathbf{1}$。可以证明（同上）， D 是 V 的一个导子，其含义是，对于每个 n，都有

(36) $$D(a(n)b)=(Da)(n)b+a(n)Db.$$

于是 $D_n\mathbf{1} = \delta_{n,\ 1}\mathbf{1}$ 且 $D_n = \frac{1}{n\ !}D^n$，因此

$$Y(a,z)\mathbf{1} = e^{zD}a.$$

D 称为 V的 典范导子 。如果要标明该导子，我们也可以将四元组 $(V, Y, \mathbf{1}, D)$ 称为一个顶点代数，这里默认 D 是 V的典范导子。

例 1。下面这个例子广为人知（同上，第 5.2 节）。设 V 是一个带单位元 $\mathbf{1}$ 的交换结合 **复数域**-代数，且 D 任意 导子作用于 V。将每个 $a \in V$ 视为由乘以 a定义的自同态。定义顶点算子为

$$Y(a,z) = e^{zD}a, \text{ i.e., } a(n) = 0\ (n \geq 0), a_n = \frac{1}{(-n-1)!}D^{-n-1}a\ (n < 0).$$

那么 $(V, Y, \mathbf{1}, D)$ 是一个顶点代数。

例 2。上述构造中可以取 $D = 0$。所得的是最简单的顶点代数例子，其中顶点算子 $Y(a,z) = a$ 与 z无关，而 $(V, Y, \mathbf{1}, 0)$ 无非就是 **复数域**-代数 V。

B.0.5. **Z**-分次顶点代数。 称复数域$\mathbf{C}$ 上的顶点代数（$V, Y, \mathbf{1}, D$）为**Z**-分次的，若其福克空间带有**Z**-分次

$$V = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} V_k$$

分解为满足以下条件的子空间

1)。 $a \in V_k,\ \ b \in V_\ell \Rightarrow a(n)b \in V_{k+\ell-n-1}$,

2)。 $V_k < \infty$ 的维数以及 $k \ll 0$ 的 $V_k = 0$ 。

我们称态 $a \in V_k$ 的共形次数为 k。（权 k 是更传统的说法，但我们将此名称保留给模形式和拟模形式。）

在**Z**-分次顶点代数 V 中，我们有 $\mathbf{1} \in V_0$，此外， D 是一个权 $\mathbf{1}$ 的升算子：

$$D : V_k \to V_{k+1}.$$

V还具有一个欧拉算子 E，定义如下：

$$E.a = ka\ (a \in V_k).$$

E 仅是关于 -1乘积的导子。

令 $End(V)^-$ 为由 $End(V)$ 构成、并配备通常算子括号的李代数。 E 和 D 张成 $End(V)^-$ 的一个二维子代数，满足$[E, D] = D.$

备注 B.1。 有一些重要的顶点代数不 满足条件 2).
例如，偶不定格的格顶点代数 V_L，其中格为不定 L [18]。

B.0.6. 拟顶点算子代数。 **复数域** 上的拟顶点算子代数（QVOA）是一个四元组 $(V, Y, \mathbf{1}, \rho)$，其组成如下：

1. $(V, Y, \mathbf{1}, D)$ 是一个带有典范导子 D 和欧拉算子 E 的 **Z**-分次顶点代数。

2. $\rho :\ \mathfrak{sl}_2 \to End(V)^-$ 是 $\mathfrak{sl}_2$ 的一个表示，使得

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \mapsto E, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto D, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \delta.$$

并且 $a \in V_k$满足以下结构恒等式：3.（平移协变性）。（Da）（n）$= -na$（$n-1$）$= [D, a$（n）$]$,4. $[\delta, a$（n）$] =$（δa）（n）$+$（$2k-n-2$）a（$n+1$）。

容易验证，δ： $V_k \to V_{k-1}$ 是一个权 1 的降算子。我们对拟顶点算子代数的公理本质上与 [13], 第 2 节 2.8 中的公理相同。在顶点算子代数理论中，通常将 E, D, δ 分别替换为 $L(0)$ $L(-1)$ $L(1)$，使得括号关系为$[L(m)\ L(n)] = (m-n)L(m+n)$，其中 $m, n \in \{0, \pm 1\}$。称态 $a \in V$ 为准初级，如果它满足 $L(1)a = 0$

如果拟顶点算子代数 V 满足 $V_0 = \mathbf{C1}$，则称其为*CFT* 型。这通常是一个非常方便的假设，例如它意味着 [8] $V_n = 0$ 对所有 $n < 0$均成立。

B.0.7. 顶点算子代数。复数域**复数域**上的顶点算子代数（VOA）是一种特殊类型的拟顶点算子代数（$V, Y, \mathbf{1}, \rho$），并具有以下附加要素：
1. 一个特殊的态 $\omega \in V$，其顶点算子为

$$Y(\omega, z) =: \sum_{n \in \mathbf{Z}} L(n) z^{-n-2}$$

使得 ω 的模满足维拉索罗关系

$$[L(m, L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{m^3 - m}{12} c Id_V \tag{37}$$

对于某个 $c \in$ **复数域**（V的中心荷）。
2. 算子 $L(n)$ 和 Id_V 张成李子代数 $Vir \subseteq End(V)^-$（中心荷为 c 的维拉索罗代数；这由（37）得出），并且 ρ 是 Vir 在由 $L(0)$ $L(\pm 1)$ 张成的 $\mathfrak{sl}_2$-子代数上的限制。

该 VOA 通常记作 $(V,\ Y,\ \mathbf{1},\ \omega)$，而 ω 通常称为共形或维拉索罗向量。我们有 $L(-2)\mathbf{1} = \omega$, $L(0)\omega = 2\omega$, $L(1)\omega = 0$。

B.0.8. 一些范畴。显然，这些顶点型对象定义了具体的范畴；特别地，我们有范畴 **QV**，其对象是拟顶点算子代数，态射 $f: (U,\ Y,\ \mathbf{1},\ \rho) \to (V,\ Y',\ \mathbf{1},\ \rho')$ 是保持真空的线性映射 $U \xrightarrow{f} V$，它们保持所有乘积 $(f(a(n)b) = f(a)(n)f(b))$，并交织 $\mathfrak{sl}_2$-表示 $(f\rho(g) = \rho'(g)f,\quad g \in \mathfrak{sl}_2)$。

类似地，VOA 的范畴**V** 以 VOA 为对象，其态射 $f : (U, Y, \mathbf{1}, \omega) \to (V, Y', \mathbf{1}, \omega')$ 是保持真空态和共形向量、并保持所有乘积（如 **QV** 中所示）的线性映射。

每个 VOA 都是拟顶点算子代数，并且存在一个遗忘函子**V** $\longrightarrow$ **QV**，它忽略共形向量的存在。

我们可以定义拟顶点算子代数的张量积（**QV**中的余积）。

$$(U, Y, \mathbf{1}, \rho) \otimes (V, Y', \mathbf{1}', \rho') := (U \otimes V, Y \otimes Y', \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}', \rho \otimes \rho').$$

张量积顶点算子为

$$(Y \otimes Y')(a \otimes b, z) = Y(a, z) \otimes Y'(b, z),$$

这意味着

$$(a \otimes b)(n) = \sum_{i+j+1=n} a(i) \otimes b(j)$$

（参见 [21], 第 6 节小节 6.5。）且 $\rho \otimes \rho'$ 是 $U \otimes V$ 上的 $\mathfrak{sl}_2$ 的张量积表示。因此

$$g \mapsto \rho(g) \otimes Id + Id \otimes \rho'(g).$$

特别地，$(\rho \otimes \rho')(L(0)) = L(0 \otimes Id + Id \otimes L(0)$ 是 $U \otimes V$ 的欧拉算子，而 $U \otimes V$ 具有张量积分次：

$$(U \otimes V)_n = \sum_{k+\ell=n} U_k \otimes V_\ell,$$

可以验证，$U \otimes V$ 的典范导子与 $L(-1)$ 在 $U \otimes V$ 上的作用相一致。

B.0.9. 加倍。设 $(V, Y, \mathbf{1})$ 是一个带有 $V = \oplus_k V_k$ 的 $\mathbf{Z}$-分次顶点代数。其加倍空间为 $(V_{(2)}Y, \mathbf{1})$，其中

$$V^{(2)} = \oplus_k V^{(2)}_{2k},\ V^{(2)}_{2k} := V_k.$$

$(V_{(2)}Y, \mathbf{1})$ 是一个顶点代数，但它可能不再是 $\mathbf{Z}$-分次的，因为小节 B.0.5 中的公理 1) 可能不成立。

B.0.10. 秩1 海森堡顶点算子代数。（参见 [16], [18]）。复海森堡李代数有一组基 $\{h(n)\ 0 \neq n \in \mathbf{Z}\} \cup \{k\}$，满足典范对易关系

$$[h(m), h(n)] = m\delta_{m,-n}k,\ [h(n), k] = 0. \tag{38}$$

存在一个顶点算子代数 $(S,\ Y,\ \mathbf{1},\ \omega)$，使得福克空间 S 是由一维空间**复数域1** 诱导出的维尔玛模，满足 $h(n).\mathbf{1} = 0 (n > 0)\ k.\mathbf{1} = \mathbf{1}$。$S$ 有一组由以下各态构成的基

$$h(-n_1)h(-n_2)\ldots h(-n_k).\mathbf{1}\ (n_1 \geq \ldots \geq n_k \geq 1).$$

V_m 由满足 $\{n_1, \ldots, n_k\} \vdash m$ 的那些态张成。特别地，S 是 CFT 型的，S_1 由 $h := h(-1)\mathbf{1}$（典范权 1 态）张成，其顶点算子为

$$Y(h, z) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} h(n) z^{-n-1}$$

模 $h(n)$ 在 S 上的作用由式 (38) 确定。维拉索罗向量为 $\omega := \frac{1}{2}h(-1)^2.\mathbf{1}$，中心荷（或秩）为 $c = 1$；h 是一个准初级态。

处理这个顶点算子代数的一种常见方法是令 $x_{-n} = h(-n)$。$\mathbf{1}$ $(n > 0)$，并将 V 与对称代数**复数域**$[x_{-1}, x_{-2}, \ldots]$ 等同（由此得名 S）。于是，对于 $n > 0$，算子 $h(-n)$ 就是乘以 x_{-n}，而 $h(n) = n\partial/\partial x_{-n}$。

参考文献

[1] Luca Candelori 和 Cameron Franc. 向量值模形式与椭圆曲线的模轨形。国际数论杂志，13(1):39–63，2017。[2] YoungJu Choie、Franc◌ois Dumas、Franc◌ois Martin 和 Emmanuel Royer。雅可比形式代数的形式变形与 Rankin-Cohen 括号。巴黎科学院数学报告，359:505–521，2021。[3] Alain Connes 和 Henri Moscovici。模海克代数及其霍普夫对称性。莫斯科数学杂志，4(1):67–109，310，2004。[4] Philippe Di Francesco、Pierre Mathieu 和 David S´en´echal。共形场论。当代物理学研究生教材。施普林格出版社，纽约，1997。[5] Fred Diamond 和 Jerry Shurman。模形式入门教程，《数学研究生教材》第228卷。施普林格出版社，纽约，2005。

[6] Chongying Dong、Haisheng Li 和 Geoffrey Mason。轨形理论与广义月光中的迹函数的模不变性。《数学物理通讯》，214(1):1–56，2000。[7] Chongying Dong、Zongzhu Lin 和 Geoffrey Mason。关于作为 sl_2-模的顶点算子代数。《群、差集与怪兽》（俄亥俄州哥伦布，1993），俄亥俄州立大学数学研究所出版物，4:349–362，1993。[8] Chongying Dong 和 Geoffrey Mason。移位顶点算子代数。载于《剑桥哲学学会数学学报》，第141卷，67–80页。剑桥大学出版社，2006。[9] Pavel Etingof 和 David Kazhdan。李双代数的量子化。V. 量子顶点算子代数。《Selecta Mathematica》（新系列），6(1):105–130，2000。[10]Cameron Franc 和 Geoffrey Mason。 p-进顶点算子代数。《数论研究》，9(2):论文编号27，41页，2023。[11] Edward Frenkel 和 David Ben-Zvi。顶点代数与代数曲线，《数学综述与专著》第88卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，第二版，2004。[12] Igor Frenkel、James Lepowsky 和 Arne Meurman。顶点算子代数与怪兽群，《纯粹与应用数学》第134卷。学术出版社，波士顿，1988。[13] Igor B. Frenkel、Yi-Zhi Huang 和 James Lepowsky。关于顶点算子代数及其模的公理化方法。《美国数学会回忆录》，104(494):viii+64，1993。[14] Richard Hain。椭圆曲线模空间讲义。载于《变换群与曲线模空间》，《高级数学讲义》第16卷，95–166页。国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2011。[15] Yi-Zhi Huang。二维共形几何与顶点算子代数，第148卷。施普林格科学与商业媒体，1997。[16] Victor Kac。《初学者的顶点代数》，《大学讲座丛书》第10卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，第二版，1998。[17] Victor G. Kac 和 Dale H. Peterson。无限维李代数、θ函数与模形式。《数学进展》，53(2):125–264，1984。[18] James Lepowsky 和 Haisheng Li。《顶点算子代数及其表示入门》，《数学进展》第227卷。波士顿 Birkh¨auser 出版公司，2004。[19] Hai Sheng Li。顶点算子代数上的对称不变双线性形式。《纯粹代数杂志》，96(3):279–297，1994。[20] Haisheng Li。 $\hbar$-进量子顶点代数及其模。《数学物理通讯》，296(2):475–523，2010。[21] Geoffrey Mason。顶点环及其皮尔斯丛。载于《顶点代数与几何》，《当代数学》第711卷，45–104页。美国数学会，[罗得岛州普罗维登斯]„ [2018]©2018。[22] Geoffrey Mason 和 Michael P. Tuite。自由玻色子和格顶点算子代数的环面手征 n-点函数。《数学物理通讯》，235(1):47–68，2003。[23] Hossein Movasati。与椭圆曲线相关的拟模形式：海克算子。《数论杂志》，157:424–441，2015。[24] Emmanuel Royer。拟模形式：导论。《布莱兹·帕斯卡数学年刊》，19(2):297–306，2012。[25]Don Zagier。模形式与微分算子。《印度科学院学报·数学科学》，104(1):57–75，1994。[26] Don Zagier。椭圆模形式及其应用。载于《模形式 1-2-3》，《Universitext》丛书，1–103页。施普林格出版社，柏林，2008。[27] Yongchang Zhu。顶点算子代数特征标的模不变性。《美国数学会杂志》，9(1):237–302，1996。