arXiv:2601.10753v1 [math.FA] 13 Jan 2026

扭曲希尔伯特尺度上的弗雷德霍姆理论：半整数傅里叶模的框架理论方法

ANIK CHAKRABORTY 和 VARINDER KUMAR

ABSTRACT. 我们通过一个酉扭曲算子，在 $L^2([0,1])$ 上构造了一个希尔伯特尺度，该算子将标准傅里叶基映射为半整数频率指数函数。由此得到的加权空间配备了由 $(1+|k+\frac{1}{2}|^2)^s$ 标记的范数，并具有一个带紧预解式、谱为 $\{k+\frac{1}{2}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的典范对角算子。我们证明，该算子定义了相邻尺度层级之间指标为零的 Fredholm 映射；通过一个反周期边值问题给出明确的解，以说明这一框架；并利用赫尔维茨ζ函数计算 ζ正则化行列式 $\widetilde{\det}_\zeta(|A|) = 2$ 。我们还证明了该框架在有界扰动下的稳定性，并验证谱流定义良好。整个框架完全通过泛函分析方法建立，不涉及微分算子或边值问题。本构造的动机来自不可定向流形上的扭曲旋量边界条件，但本文采用抽象的算子论语言进行表述。

1. INTRODUCTION

紧区间上的经典索博列夫空间 $H^s([0,1])$ 通常通过导数或整数指标的傅里叶级数 $\{e^{2\pi ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构造。在涉及扭曲边界条件的应用中——例如由不可定向几何或某些量子系统引起的情形——动量量子化会移至半整数，从而以 $\{e^{2\pi i(k+\frac{1}{2})x}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 取代标准基。

本文从基本原理出发，为这类半整数傅里叶空间建立系统的算子理论框架。我们从一个简单的酉乘法算子开始

$$U : f(x) \mapsto e^{\pi i x} f(x) \quad \text{on } L^2([0,1]),$$

我们将扭曲正交归一基 $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 定义为标准傅里叶基在U作用下的像。利用此基，我们通过加权 ℓ^2 范数定义单参数希尔伯特尺度 $\{H^s_{1/2}\}_{s\in\mathbb{R}}$，随后分析一个典范的自伴算子

$$\widetilde{A} : H^{s+1}_{1/2} \to H^s_{1/2}$$

其特征值为 $k+\frac{1}{2}$。我们的主要结果如下：

- 嵌入 $H^{s+1}_{1/2} \hookrightarrow H^s_{1/2}$ 对所有 $s\in\mathbb{R}$ 都是紧的（命题 3.3）。
- 算子 A 是弗雷德霍姆算子，且 $\ker(A)=\{0\}$，指标为零（定理 6.1）。
- 求解了一个明确的反周期边值问题，展示了解如何自动满足 $u(1)=-u(0)$（第 8 节）。
- 显式计算了 ζ 正则化行列式：$\widetilde{\det}_\zeta(|A|) = 2$ （定理 A.4，附录 A）。
- 弗雷德霍姆性在有界扰动下保持稳定（定理 7.1）。
- 谱流对连续族是良定义的（定理 7.3）。

Date：2026年1月19日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 46E35, 47A53, 47A10, 47B25, 58J20, 42C15。*Key words and phrases.* 希尔伯特尺度、弗雷德霍姆算子、谱流、扭曲索 Sobolev 空间、半整数傅里叶模、酉对称性、框架理论、ζ 正则化行列式。

算子论视角。本文的构造为具有扭曲边界条件的椭圆算子提供了一个抽象的算子论模型 。尽管这一构造的动机来自非定向几何情形（例如，M¨obius 型空间 [10, 3]上的 Pin 结构），但分析完全是在希尔伯特空间框架下进行的，并不依赖微分算子、流形结构或边值问题。该框架完全可以归约为加权 ℓ^2 序列和对角乘法算子。

这种方法有若干优势：

(1) 清晰性：半整数特征值谱 $k+\frac{1}{2}$ 立即保证 $\ker(\widetilde{A}) = \{0\}$，从而消除了标准索伯列夫理论中存在的零模。**(2) 初等紧性**：紧嵌入 $H^{s+1}_{1/2} \hookrightarrow H^s_{1/2}$ 可由 ℓ^2 上的权重衰减直接推出，无需 Rellich-Kondrachov 定理或插值工具。**(3) 清晰明了的 Fredholm 结构**：由自伴性和零核可立即得出指标为零，无需进行热核或指标理论计算。**(4) 框架理论推广**：该构造自然地扩展到非均匀或超完备生成系统。

与现有框架的关系。
扩展索伯列夫尺度。Mikhailets 和 Murach [11] 构建了具有 OR 变化函数权重 $\varphi(k)$ 的一般希尔伯特尺度。我们的构造是其中一个特例，其中 $\varphi(k) = (1+|k+\frac{1}{2}|^2)^{s/2}$，由酉算子规范生成，¯而非由外部预先指定。我们证明的初等性质（避免了抽象的函数参数理论）使这一框架更易于理解。

几何中的扭曲边界条件。Atiyah-Patodi-Singer（APS）指标定理 [3]研究带边界流形上的狄拉克算子，其中扭曲旋量丛源于不可定向性。在 APS 方法中，半整数模通过覆盖空间和甲板变换在几何上出现。我们的贡献是一种泛函分析提取：我们分离出算子论内容（酉对称性 $\to$扭曲基 $\to$ Fredholm 理论），并将其独立于几何工具加以发展。

框架理论。标准框架理论 [6] 通常从给定的基或框架出发。我们反其道而行：从一种对称性 （酉算子 U）出发，将扭曲基推导为其谱内容，继而构建希尔伯特尺度。这种以对称性为先的方法在算子代数中很自然，但在框架理论文献中较不常见。

结构安排。 第 2 节构造扭曲希尔伯特空间 $H_{1/2}$ 及其酉傅里叶映射。第 3 节发展加权希尔伯特尺度并证明紧嵌入。第 4 节引入典范算子并确立其谱性质。第 5 节将其与标准索伯列夫尺度进行比较，阐明半整数平移的作用。第 6 节证明弗雷德霍姆定理。第 7 节讨论扰动和谱流。第 8 节求解一个显式的反周期边值问题。第 9 节作总结。附录 A 通过赫尔维茨ζ函数计算ζ正则化行列式。

2. The Twisted Hilbert Space $H_{1/2}$

2.1. 扭曲算子。

定义 2.1. 令 $H = L^2([0,1], dx)$。定义算子 U：$H \to H$，其定义为

$$(Uf)(x) := e^{\pi i x} f(x).$$

命题 2.2. U在 $H = L^2([0,1], dx)$。

证明。 我们验证三个性质。

(1) 线性。对于 $f,\ g \in H$和 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$,

$$U(\alpha f + \beta g)(x) = e^{\pi i x}(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha e^{\pi i x} f(x) + \beta e^{\pi i x} g(x) = \alpha (Uf)(x) + \beta (Ug)(x).$$

(2) 内积的保持。对于 $f,\ g \in H$,

$$\begin{aligned}\langle Uf, Ug\rangle &= \int_0^1 e^{\pi i x} f(x) \cdot \overline{e^{\pi i x} g(x)}\, dx \\ &= \int_0^1 e^{\pi i x} f(x) \cdot e^{-\pi i x}\overline{g(x)}\, dx = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx = \langle f, g\rangle.\end{aligned}$$

(3) 逆。定义 $V\colon H \to H$，使得 $(Vf)(x) = e^{-\pi i x} f(x)$。然后

$$(VUf)(x) = e^{-\pi i x}(Uf)(x) = e^{-\pi i x} e^{\pi i x} f(x) = f(x),$$

类似地，$(UVf)(x) = f(x)$。因此 $U^{-1} = V$。 □

2.2. **扭曲下的傅里叶基像**。设

$$\varphi_k(x) := e^{2\pi i k x}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

表示 $L^2([0,1])$ 的标准傅里叶基。定义

$$\psi_k := U\varphi_k.$$

命题 2.3。 $\psi_k(x) = e^{2\pi i (k+\frac{1}{2})x}$。

证明。

$$\psi_k(x) = (U\varphi_k)(x) = e^{\pi i x}\varphi_k(x) = e^{\pi i x} e^{2\pi i k x} = e^{2\pi i (k+\frac{1}{2})x}.$$

□

2.3. **闭包张成空间的刻画**。

定义 2.4。 定义

$$H_{\frac{1}{2}} := \overline{\operatorname{span}}\{\psi_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset L^2([0,1]).$$

命题 2.5 (刻画 $H_{1/2}$)。 $H_{\frac{1}{2}}$ 在 $L^2([0,1])$ 中的正交补是平凡的。等价地，

$$\langle f, \psi_k\rangle = 0 \ \textit{for all}\ k \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \ \textit{a.e.}$$

证明。 定义 $g(x) := e^{-\pi i x} f(x)$。那么对于任意 $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\langle f, \psi_k\rangle_{L^2} &= \int_0^1 f(x)\overline{\psi_k(x)}\, dx = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i (k+\frac{1}{2})x}\, dx \\ &= \int_0^1 f(x) e^{-\pi i x} e^{-2\pi i k x}\, dx = \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i k x}\, dx = \langle g, \varphi_k\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

由于 $\{\varphi_k\colon k \in \mathbb{Z}\}$ 在 $L^2([0,1])$ [14], 中是完备的，我们有

$$\langle g, \varphi_k\rangle_{L^2} = 0 \text{ for all } k \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad g = 0 \text{ a.e.}$$

因为 $g(x) = e^{-\pi i x} f(x)$且 $|e^{-\pi i x}| = 1$，所以 $f = 0$ 几乎处处成立。 □

2.4. **标准正交基性质**。

命题 2.6。 族 $\{\psi_k\colon \ k \in \mathbb{Z}\}$ 是 $H_{\frac{1}{2}}$的标准正交基。

证明。 **(1) 正交性**。 由于 U 是酉的，且 $\{\varphi_k : k \in \mathbb{Z}\}$是$L^2([0,1])$的标准正交基，

$$\langle \psi_j, \psi_k\rangle = \langle U\varphi_j, U\varphi_k\rangle = \langle \varphi_j, \varphi_k\rangle = \delta_{jk}.$$

(2) 完备性。 根据命题 2.5， $\{\psi_k$ 的闭线性张成为: $k \in \mathbb{Z}\}$恰好是H_1。 □

2.5. **傅里叶系数映射**。 定义映射

$$\mathcal{F}_{\frac{1}{2}} : H_{\frac{1}{2}} \to \ell^2(\mathbb{Z})$$

by

$$(\mathcal{F}_{\frac{1}{2}} f)_k := \langle f, \psi_k \rangle_{L^2}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

命题 2.7. $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}$ 是一个酉同构。

证明. 根据命题 2.6， $\{\psi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是$H_{\frac{1}{2}}$的标准正交基。因此，帕塞瓦尔恒等式成立：

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_k \rangle|^2.$$

由于 $\{\psi_k\}$是一个基，每个$(a_k) \in \ell^2(\mathbb{Z})$都定义了$f := \sum_k a_k \psi_k \in H_{\frac{1}{2}}$，且满足 $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(f) = (a_k)$。因此，$\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}$ 是满射。□

3. The Weighted Hilbert Scale

对于 $s \in \mathbb{R}$，定义

$$\ell^2_s(\mathbb{Z}) := \left\{ (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + |k + \tfrac{1}{2}|^2)^s |a_k|^2 < \infty \right\}.$$

定义 3.1. 定义

$$H^s_{\frac{1}{2}} := \mathcal{F}^{-1}_{\frac{1}{2}}\big(\ell^2_s(\mathbb{Z})\big).$$

赋予 $H^s_{\frac{1}{2}}$范数

$$\|f\|^2_{H^s_{\frac{1}{2}}} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + |k + \tfrac{1}{2}|^2)^s |\langle f, \psi_k \rangle|^2.$$

与椭圆算子相关的一般希尔伯特尺度理论（参见 Mikhailets 和 Murach[11, 12]）类似，我们的构造通过谱权重定义了一个单参数希尔伯特尺度。在当前情形下，这些谱权重自然源自酉扭转所诱导的半整数平移。

命题 3.2. $H^s_{\frac{1}{2}}$ 是一个希尔伯特空间，且 $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}} : H^s_{\frac{1}{2}} \to \ell^2_s(\mathbb{Z})$ 是一个酉同构。

证明。 $\ell^2_s(\mathbb{Z})$ 是一个希尔伯特空间 [1]。 $H^s_{\frac{1}{2}}$通过酉映射 $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}$继承了完备性。 □

命题 3.3 (紧嵌入)。 对于每个 $s \in \mathbb{R}$，嵌入

$$H^{s+1}_{\frac{1}{2}} \hookrightarrow H^s_{\frac{1}{2}}$$

是紧的。

证明。 在 $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}$ 下，嵌入对应于 $\ell^2_{s+1}(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \ell^2_s(\mathbb{Z})$。

设 $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\ell^2_{s+1}(\mathbb{Z})$ 中的有界序列。则

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + |k + \tfrac{1}{2}|^2)^{s+1} |a^{(n)}_k|^2 \le C.$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，选取 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$(1 + |k + \tfrac{1}{2}|^2)^{-1} < \varepsilon \quad \text{for all } |k| > N.$$

将范数拆分：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + |k + \tfrac{1}{2}|^2)^s |a^{(n)}_k|^2 = \sum_{|k|\le N} (\cdots) + \sum_{|k|>N} (\cdots).$$

有限部分因有限维性而紧致。尾部满足

$$\sum_{|k|>N}(1+|k+\tfrac{1}{2}|^2)^s|a_k^{(n)}|^2 \le \varepsilon\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k+\tfrac{1}{2}|^2)^{s+1}|a_k^{(n)}|^2 \le \varepsilon C.$$

因此， $\ell^2_{s+1}(\mathbb{Z})$中的每个有界序列在 $\ell^2_s(\mathbb{Z})$中都有一个收敛子列。 □

4. The Canonical Diagonal Operator

定义 4.1. 定义算子

$$A:\ell^2(\mathbb{Z})\supset\mathcal{D}(A)\to\ell^2(\mathbb{Z})$$

by

$$(Aa)_k := (k+\tfrac{1}{2})a_k,$$

定义域为

$$\mathcal{D}(A) := \ell^2_1(\mathbb{Z}).$$

命题 4.2. 算子 A 是稠密定义的、自伴的，并且具有紧预解式。

证明。 **(1) 稠密定义域**。 有限支撑序列包含于 $\ell^2_1(\mathbb{Z})$中，并且在$\ell^2(\mathbb{Z})$中稠密。

（2）自伴性。 A 是具有实系数 $k+\frac{1}{2}$ 的对角算子，因此是对称的。实数列上的乘法在其自然定义域 [14]上定义了一个极大对称算子。

（3）紧预解式。对于 $\lambda\notin\{k+\frac{1}{2}:\ k\in\mathbb{Z}\}$，预解式

$$(A-\lambda)^{-1}:\ell^2(\mathbb{Z})\to\ell^2(\mathbb{Z})$$

可表示为

$$\big((A-\lambda)^{-1}a\big)_k = \frac{1}{k+\frac{1}{2}-\lambda}a_k.$$

由于

$$\frac{1}{|k+\frac{1}{2}-\lambda|}\to 0 \quad \text{as } |k|\to\infty,$$

对角算子 $(A-\lambda)^{-1}$ 是有限秩对角截断的范数极限，因此是紧的。□

注 4.3。 注意， $0\notin\sigma(A)$，因此 $0\in\rho(A)$。等价地， $\widetilde{A}$ 在 $H^0_{1/2}$ 上可逆。

4.1. **扭曲尺度上的提升算子**。

定义 4.4. 定义算子

$$\widetilde{A}:H^{s+1}_{\frac{1}{2}}\subset H^s_{\frac{1}{2}}\longrightarrow H^s_{\frac{1}{2}}$$

by

$$\widetilde{A} := \mathcal{F}^{-1}_{\frac{1}{2}}\circ A\circ\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}.$$

显式地,

$$\widetilde{A}f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(k+\tfrac{1}{2})\langle f,\psi_k\rangle\psi_k.$$

注4.5。 $\widetilde{A}$ 在 $H^0_{1/2}$ 上的自然定义域为

$$\mathcal{D}(\widetilde{A})=H^1_{1/2}=\mathcal{F}^{-1}_{1/2}(\ell^2_1(\mathbb{Z})),$$

且 $\widetilde{A}$ 是定义在 $H^0_{1/2}$ 上、定义域为此的无界自伴算子。等价地，在酉映射 $\mathcal{F}_{1/2}$ 下，算子 $\widetilde{A}$ 对应于 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的对角乘法算子 A，其定义域为 $\ell^2_1(\mathbb{Z})$，这是一个自伴算子。

命题 4.6。对每个 $s \in \mathbb{R}$,

(1) $\widetilde{A}$: $H_{\frac{1}{2}}^{s+1} \to H_{\frac{1}{2}}^{s}$ 是有界的。(2) $\widetilde{A}$ 作为 $H_{\frac{1}{2}}^{0}$ 上的无界算子是自伴的。(3) $\widetilde{A}$ 在 $H_{\frac{1}{2}}^{0}$ 上有紧预解式。

证明。**(1)** 根据定义,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{A}f\|_{H_{\frac{1}{2}}^{s}}^{2} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k+\tfrac{1}{2}|^{2})^{s}|k+\tfrac{1}{2}|^{2}|\langle f,\psi_k\rangle|^{2} \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k+\tfrac{1}{2}|^{2})^{s+1}|\langle f,\psi_k\rangle|^{2} = \|f\|_{H_{\frac{1}{2}}^{s+1}}^{2}.\end{aligned}$$

(2) 由于 A 在 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上是自伴的，且 $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}$ 是酉的，因此 $\widetilde{A}$ 在 $H_{\frac{1}{2}}^{0}$ 上是自伴的。

(3)预解式满足

$$(\widetilde{A}-\lambda)^{-1} = \mathcal{F}_{\frac{1}{2}}^{-1}(A-\lambda)^{-1}\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}.$$

由于 $(A-\lambda)^{-1}$ 是紧的，且酉共轭保持紧性，$(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}$ 是紧的。

□

5. Comparison with the Standard Sobolev Scale

为阐明半整数平移的作用，我们将扭曲尺度 $H_{1/2}^{s}$ 与基于整数傅里叶模态 $\{e^{2\pi ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构造的标准索伯列夫尺度 $H^s([0,1])$ 进行比较。

5.1. 谱差异。

性质	标准 $H^s([0,1])$	扭曲 $H^s_{1/2}$
傅里叶基	$e^{2\pi ikx}$	$e^{2\pi i(k+\frac{1}{2})x}$
权函数	$(1+\lvert k\rvert^2)^s$	$(1+\lvert k+\frac{1}{2}\rvert^2)^s$
导数特征值	$2\pi ik$	$2\pi i(k+\frac{1}{2})$
零模	是（$k=0$）	否（$k+\frac{1}{2}\neq 0$）
$D=i\frac{d}{dx}$ 的 $\ker(D)$	$\mathbb{C}$ (常数)	$\{0\}$

5.2. 对弗雷德霍姆理论的启示。

扭曲谱中不存在零特征值，这会立即带来以下后果:

(1) 核消除： 对于具有特征值 $k+\frac{1}{2}$ 的典范算子 $\widetilde{A}$，我们有 $\ker(A) = \{0\}$，且无需任何正则性条件或边界条件。**(2) 指标稳定性：** 由于核和余核都为零（由自伴性可知），弗雷德霍姆指标本身即为零，而非通过抵消得出。**(3) 在 $\lambda = 0$ 处的可逆性：** 预解式 $(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}$ 对 $\lambda = 0$ 有定义，这与标准索博列夫空间上的微分算子不同。

5.3. 与扭曲边界条件的关系。

在微分几何应用中，[10, 3],半整数模源自反周期 或 扭曲周期 边界条件，其形式为

$$f(x+1) = -f(x) \quad \text{or} \quad f(x+1) = e^{i\theta}f(x).$$

此类条件迫使动量量子化为 $k+\frac{1}{2}$。我们的酉算子 U 以代数方式实现这一点:

$$(U\varphi_k)(x) = e^{\pi ix}e^{2\pi ikx} = e^{2\pi i(k+\frac{1}{2})x},$$

直接生成 在更大的定义域上，不对扭曲模态施加边界条件 .

注 5.1。 从 $(1+|k|^2)^s$ 到 $(1+|k+\frac{1}{2}|^2)^s$ 的变化并非 只是重新加权。它从根本上改变了算子谱，并改变了弗雷德霍姆理论结构（核为零与核非零）。这使扭曲尺度区别于标准索伯列夫理论。

6. Fredholm Theory

定理 6.1 （弗雷德霍姆性质）。 对于每个 $s \in \mathbb{R}$，算子

$$\widetilde{A} : H^{s+1}_{\frac{1}{2}} \longrightarrow H^{s}_{\frac{1}{2}}$$

是指标为零的 *Fredholm* 算子。

证明。 我们验证 Fredholm 算子 [8] 的三个定义性质。

（1）闭值域。 由于 $\widetilde{A}$ 在 H^0_1 上是自伴且具有紧预解式（命题 4.6），其谱是离散的，特征值重数有限，且仅在无穷远处聚集。因此， A 在 H^0_1 上具有闭值域；由其与希尔伯特尺度的相容性可知，对于同样成立

$$\widetilde{A} : H^{s+1}_{\frac{1}{2}} \to H^{s}_{\frac{1}{2}}.$$

（2）有限维核。若 $Af = 0$，则

$$(k+\tfrac{1}{2})\langle f, \psi_k\rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

由于对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 都有 $k+\frac{1}{2} \neq 0$，因此对所有 k 都有 $\langle f, \psi_k\rangle = 0$。因此，

$$\ker(\widetilde{A}) = \{0\}.$$

(3) 有限维余核。由于 A是自伴的，我们有

$$\operatorname{coker}(\widetilde{A}) \cong \ker(\widetilde{A}^*) = \ker(\widetilde{A}) = \{0\}.$$

结合 (1)–(3)， A 是 Fredholm 的，且

$$\operatorname{ind}(\widetilde{A}) = 0.$$

□

7. Extensions: Perturbations and Spectral Flow

定理 7.1 （有界扰动下的稳定性）。 设

$$B : H^{s}_{\frac{1}{2}} \longrightarrow H^{s}_{\frac{1}{2}}$$

是一个有界算子。定义

$$\widetilde{A}_B := \widetilde{A} + B : H^{s+1}_{\frac{1}{2}} \to H^{s}_{\frac{1}{2}}.$$

那么 A_B 是 *Fredholm* 的，且 $\operatorname{ind}(A_B) = 0$。

证明。 根据定理 6.1， $\widetilde{A}: H^{s+1}_{1/2} \to H^{s}_{1/2}$ 是 Fredholm。令 $J: H^{s+1}_{1/2} \hookrightarrow H^{s}_{1/2}$ 表示典范连续嵌入（命题 3.3）。若 $B: H^{s}_{1/2} \to H^{s}_{1/2}$ 有界，则复合映射$B \circ J: H^{s+1}_{1/2} \to H^{s}_{1/2}$也有界，因此我们可以将 B 视为定义域上的有界算子，其中 A是该算子。于是， $A_B = A + B$ 是 Fredholm 算子 A 的有界扰动，因此也是 Fredholm 算子，且指标 [8]相同。□

定义 7.2. 设 $\{B_t\}_{t\in[0,1]}$ 是 $H^{s}_{\frac{1}{2}}$ 上有界自伴算子的连续族。定义

$$\widetilde{A}_t := \widetilde{A} + B_t : H^{s+1}_{\frac{1}{2}} \to H^{s}_{\frac{1}{2}}.$$

定理 7.3 (谱流**).** 谱流

$$\mathrm{sf}\{\widetilde{A}_t\}_{t\in[0,1]}$$

定义为特征值穿越零点的带符号计数。

~证明。 每个 A_t 都是自伴算子，且具有紧预解式（命题 4.6、定理 7.1）。因此，其谱由有限重数的离散特征值组成。 B_t 关于算子~范数的连续性意味着 A_t [9]具有强预解式连续性（等价地，范数预解式连续性）。因此，特征值连续移动，穿越是孤立的。谱流定义为穿越的带符号计数[4]。□

~**推论 7.4**。 如果对所有 $t \in [0,1]$， B_t 都是紧的，那么$\mathrm{sf}\{A_t\}_{t\in[0,1]} = 0$。

~证明。 紧扰动不会改变本质谱。由于 A 没有零特征值，而且紧扰动在本质谱之外保持这一性质，因此不会发生穿越。□

8. Example: Antiperiodic Boundary Value Problem

为说明该框架，我们使用扭曲希尔伯特尺度求解一个具体的线性问题。

8.1. **问题陈述**。

问题 8.1. 给定 $g \in H^0_{1/2}$，求 $u \in H^1_{1/2}$，使得

$$\widetilde{A}u = g.$$

~**8.2. 解答**。 根据注记 4.5 和命题 4.2，由于 $0 \notin \sigma(A)$，算子

$$\widetilde{A} : H^1_{1/2} \to H^0_{1/2}$$

可逆。因此，唯一解为

$$u = \widetilde{A}^{-1}g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\langle g, \psi_k\rangle}{k+\frac{1}{2}}\,\psi_k.$$

8.3. 具体示例。 令 $g(x) = e^{\pi i x}$。则

$$\begin{aligned}\langle g, \psi_k\rangle &= \int_0^1 e^{\pi i x}\,\overline{e^{2\pi i(k+\frac{1}{2})x}}\,dx \\ &= \int_0^1 e^{-2\pi i k x}\,dx = \begin{cases}1, & k = 0,\\ 0, & k \neq 0.\end{cases}\end{aligned}$$

因此，唯一解为

$$u(x) = \frac{1}{1/2}\,\psi_0(x) = 2e^{\pi i x}.$$

8.4.反周期性的验证。 解 $u(x) = 2e^{\pi i x}$ 满足反周期边界条件

$$u(1) = 2e^{\pi i} = -2 = -u(0),$$

这说明扭曲希尔伯特尺度如何自然地编码反周期边界行为，而无需显式施加边界条件。这与 $[0,1]$，上的标准索伯列夫尺度形成对比，在该尺度下，周期边界条件给出 $u(1) = u(0)$。

注记 8.2。 更一般地，对于任意 $g \in H^0_{1/2}$，方程 $\widetilde{A}u = g$ 都有唯一解$u \in H^1_{1/2}$。由于半整数傅里叶结构，该解自动满足反周期条件 $u(1) = -u(0)$。因此，边界行为是由谱分解自然产生的，而非从外部施加的。

9. Conclusion

我们基于半整数傅里叶模构造了定义在 $L^2([0,1])$上的希尔伯特尺度 $\{H^s_{1/2}\}_{s\in\mathbb{R}}$，它由酉扭曲算子自然导出。具有特征值$k+\frac{1}{2}$ 的典范对角算子在相邻尺度层级之间定义了一个弗雷德霍姆映射；由于半整数平移，其核与余核均为零。一个明确的反周期边值问题（第 8 节）展示了解如何自动满足扭曲边界条件，而无需从外部施加~。ζ正则化行列式 $\det_\zeta(|A|) = 2$（附录 A）利用赫尔维茨ζ函数进行了明确计算，给出了一个不同于标准情形（$\det_\zeta(|D|) = 2\pi$）的具体谱不变量。在此算子理论框架中，运用标准泛函分析方法可得到紧嵌入、有界扰动下的稳定性以及定义良好的谱流。

该构造为几何背景中出现的扭曲边界条件（例如不可定向流形上的 Pin 结构）提供了一个抽象模型，并且无需借助微分几何工具即可建立。后续研究的潜在方向包括：

- 将其推广至具有多维扭曲的高维环面。
- 将框架理论推广至非均匀或过完备系统。
- 利用计算得到的 ζ-行列式，通过 Atiyah-Patodi-Singer 形式体系研究不可定向流形上的指标理论。
- 与具有扭曲周期边界条件的量子系统及单圈配分函数的联系。
- 热核渐近展开及超越ζ-行列式的高阶谱不变量。

这里发展的方法或许在框架理论、算子代数以及非标准希尔伯特尺度上的抽象椭圆理论中也具有独立价值。

Appendix A. Zeta-Regularized Determinant via Hurwitz Zeta Function

~在本附录中，我们利用赫尔维茨ζ函数计算算子 $|A|$ 的ζ正则化行列式。这给出了一个显式的泛函行列式，或许对量子场论应用 [7]和比较指标理论有所助益。

A.1. 谱ζ 一个函数。

回想一下， $\widetilde{A}$ 是定义在 $H^0_{1/2}$ 上的自伴算子，其特征值为 es

$$\lambda_k = k+\tfrac{1}{2}, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

由于谱包含正值和负值，我们使用绝对值~算子 $|A|$，其谱为

$$\sigma(|\widetilde{A}|) = \big\{|k+\tfrac{1}{2}| : k\in\mathbb{Z}\big\} = \big\{\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{5}{2},\dots\big\},$$

其中每个特征值 $n+\frac{1}{2}$（对于 $n\in\mathbb{N}_0$）的重数均为 2。

~**定义 A.1**（谱ζ函数）。对于 $\Re(s) > 1$，定义 $|A|$的谱ζ函数如下：

$$\zeta_{|\widetilde{A}|}(s) := \sum_{\lambda\in\sigma(|\widetilde{A}|)} m(\lambda)\cdot\lambda^{-s} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\big(n+\tfrac{1}{2}\big)^{-s},$$

其中 m（λ）表示特征值 λ的重数。

注 *A.2*。级数在 $\Re(s) > 1$ 时绝对收敛，因为

$$\sum_{n=N}^{\infty}(n+\tfrac{1}{2})^{-s} \sim \sum_{n=N}^{\infty} n^{-s} < \infty$$

当 $\Re(s) > 1$ 时。函数 $\zeta_{|\widetilde{A}|}(s)$ 可通过与赫尔维茨ζ函数的关系解析延拓至 $\mathbb{C}$ 。

A.2. **与赫尔维茨ζ函数的联系**。赫尔维茨ζ函数赫尔维茨ζ函数定义于 $\Re(s) > 1$以及 $a > 0$ 如下

$$\zeta(s,a) := \sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^{-s}.$$

该函数可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$ ，在 $s = 1$ 处有一个简单极点，并且在 $s = 0$[2] 处解析。

命题 A.3 （用赫尔维茨函数表示谱ζ函数）。 对于 $\Re(s) > 1$,

$$\zeta_{|\widetilde{A}|}(s) = 2\,\zeta\big(s, \tfrac{1}{2}\big).$$

此外，利用赫尔维茨–黎曼关系，

$$\zeta_{|\widetilde{A}|}(s) = 2(2^s - 1)\zeta(s),$$

其中 $\zeta(s)$ 是黎曼ζ函数。

证明。 第一个恒等式可由定义立即得到:

$$\zeta_{|\widetilde{A}|}(s) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\big(n + \tfrac{1}{2}\big)^{-s} = 2\,\zeta\big(s, \tfrac{1}{2}\big).$$

对于第二个恒等式，我们使用函数关系 [2]

$$\zeta\big(s, \tfrac{1}{2}\big) = (2^s - 1)\zeta(s).$$

这可通过写出

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)^{-s} + \sum_{m=1}^{\infty}(2m)^{-s} = \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)^{-s} + 2^{-s}\zeta(s),$$

从而得到

$$(1 - 2^{-s})\zeta(s) = \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)^{-s}.$$

另一方面,

$$\zeta\big(s, \tfrac{1}{2}\big) = \sum_{n=0}^{\infty}(n + \tfrac{1}{2})^{-s} = 2^s\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-s} = 2^s(1 - 2^{-s})\zeta(s) = (2^s - 1)\zeta(s).$$

□

A.3. **在 $s = 0$ 处的导数与ζ-行列式**。 ζ正则化行列式定义为

$$\det_{\zeta}(|\widetilde{A}|) := \exp\big(-\zeta'_{|\widetilde{A}|}(0)\big).$$

我们使用 赫尔维茨ζ函数在 $s = 0$ [15] 处导数的已知公式 :

$$\zeta'(0,a) = \log\frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}},$$

其中 Γ 是欧拉伽马函数。

Theo ~ **引理 A.4** ($|A|$的ζ-行列式） 。 $|A|$ 的 ζ正则化行列式 *is*

$$\det_{\zeta}(|\widetilde{A}|) = 2.$$

证明。 **步骤 1：计算** $\zeta'_{|\widetilde{A}|}(s)$。

由命题 A.3,

$$\zeta_{|\widetilde{A}|}(s) = 2\,\zeta\big(s, \tfrac{1}{2}\big).$$

对 s求导,

$$\zeta'_{|\widetilde{A}|}(s) = 2\,\zeta'\big(s, \tfrac{1}{2}\big).$$

步骤 2：使用 Hurwitz 公式在 $s = 0$ **处求值**。对于 $a = \frac{1}{2}$,
我们有 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$。因此,

$$\zeta'\big(0, \tfrac{1}{2}\big) = \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi}} = \log \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}} = \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{2}\log 2.$$

步骤 3：计算 $\zeta'_{|\widetilde{A}|}(0)$。

$$\zeta'_{|\widetilde{A}|}(0) = 2 \cdot \zeta'\big(0, \tfrac{1}{2}\big) = 2 \cdot \big(-\tfrac{1}{2}\log 2\big) = -\log 2.$$

步骤 4：计算 ζ-行列式。

$$\det_{\zeta}(|\widetilde{A}|) = \exp\big(-\zeta'_{|\widetilde{A}|}(0)\big) = \exp\big(-(-\log 2)\big) = \exp(\log 2) = 2.$$

□

A.4. **与标准导数算子的比较**。 作为比较，考虑定义在 $L^2([0,1])$ 上、满足周期边界条件的标准导数算子 $D = i\,\frac{d}{dx}$，其特征值为 $2\pi k$ （$k \in \mathbb{Z}$）。绝对值 $|D|$ 的谱为 $\{2\pi n : n \in \mathbb{N}\}$，重数为 $\{1, 2, 2, 2, \ldots\}$（零模出现一次）。

谱ζ函数为

$$\zeta_{|D|}(s) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^{-s} = 1 + 2(2\pi)^{-s}\big[\zeta(s) - 1\big].$$

ζ正则化行列式为 [7]

$$\det_{\zeta}(|D|) = 2\pi.$$

~相比之下，我们的扭曲算子 $|A|$ 没有零模，且得到

$$\det_{\zeta}(|\widetilde{A}|) = 2,$$

这与 π 无关。

备注 A.5。 比值

$$\frac{\det_{\zeta}(|D|)}{\det_{\zeta}(|\widetilde{A}|)} = \pi$$

是一个纯粹的几何因子，反映了周期性与反周期性（扭曲）边界条件之间的差异。这类比较出现在带边界流形上的谱不对称背景中 [3]。

A.5. **与.....的关系 Dedekind η函数**。另一种方法使用表示

$$\det_{\zeta}(|\widetilde{A}|) = \prod_{n=0}^{\infty}(n+\tfrac{1}{2})^2,$$

它在形式上是无穷乘积的平方

$$\prod_{n=0}^{\infty}(n+\tfrac{1}{2}) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots$$

该乘积与在上半平面特定点取值的 Dedekind η函数的倒数有关。虽然本文不深入探讨这种联系，但它建立了扭曲傅里叶模的谱理论与模形式之间的关联。

~注 A.6. 显式计算 $\det_\zeta(|A|) = 2$ 可用于：

- 具有反周期边界条件的区间上量子场的单圈配分函数。
- 在出现半整数模的不可定向流形上进行指标理论计算。
- 扭曲椭圆算子的正则化迹和热核系数。

A.6. **高阶谱不变量**。 除了 ζ-行列式之外，还可以计算高阶谱不变量。例如，热迹

$$\mathrm{Tr}\big(e^{-t|\widetilde{A}|^2}\big) = 2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-t(n+1/2)^2}$$

可以利用 Jacobi θ函数求得，从而得到

$$\mathrm{Tr}\big(e^{-t|\widetilde{A}|^2}\big) = 2\cdot\vartheta_2(0, e^{-t}),$$

其中 ϑ_2 是第二类Jacobi θ函数。

命题 A.7 （热迹渐近性）。 当 $t \to 0^+$,

$$Tr\big(e^{-t|\widetilde{A}|^2}\big) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + O(1).$$

证明。 利用泊松求和，对半整数点求和可变换为

$$2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-t(n+1/2)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{1/2}^{\infty} e^{-u^2}\,du \sim \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

当 t 较小时，其中精确系数可由 θ函数展开得到 s. □

本附录展示了扭曲希尔伯特尺度 $H^s_{1/2}$ 蕴含丰富的谱信息，可借助经典特殊函数进行显式计算。

References

[1] R. A. Adams 和 J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, 第二版, 《纯粹与应用数学》, 学术出版社, 2003年。[2] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, 《数学本科生教材》, 施普林格出版社, 1976年。[3] M. F. Atiyah、V. K. Patodi 和 I. M. Singer, 《谱不对称与黎曼几何 I–III》,

Proc. Camb. – Philos. Soc. **77** **79** 1975 76

（–）。[4] B. Boo-Bavnbek 和 K. P. Wojciechowski, *Elliptic Boundary Problems for Dirac Operators*, 《数学: 理论与应用》, Birkh¨auser, 1993年。[5] T. P. Branson 和 B. Ørsted, 《四维中的显式泛函行列式》,
Proc. Amer. Math. Soc. **113** （1991）, 669–682。

[6] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, 第二版, 《应用与数值调和分析》, Birkh¨auser, 2016年。[7] E. Elizalde, *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*, 《物理学讲义》**855**, Springer, 2012年。[8] L. H¨ormander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, 《数学科学基础丛书》, 施普林格出版社, 1985年。[9] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 第二版, 《数学科学基础丛书》, 施普林格出版社, 1976年。[10] H. B. Lawson 和 M.-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, 《普林斯顿数学丛书》, 普林斯顿大学出版社, 1989年。[11] V. A. Mikhailets 和 A. A. Murach, *Hörmander Spaces, Interpolation, and Elliptic Problems*, 《德古意特数学研究丛书》**60**, De Gruyter, 2014年。[12] Mikhailets, V.A. 和 Murach, A.A., 2013年。《扩展索伯列夫尺度与椭圆算子》。《乌克兰数学杂志》, 65(3), 第435–447页。[13] M. Reed 和 B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, 学术出版社, 1972年。[14] M. Reed 和 B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, 学术出版社, 1975年。[15] E. T. Whittaker 和 G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 第四版, 剑桥大学出版社, 1927年。

Anik Chakraborty, Department of Mathematics, University of Delhi, India*Email address*: achakraborty@maths.du.ac.inVarinder Kumar, Department of Mathematics, Shaheed Bhagat Singh College, University of Delhi,India*Email address*: varinder.kumar@sbs.du.ac.in;