arXiv:2601.10755v1 [math.HO] 13 Jan 2026

构造博伊曲面

Richard Evan Schwartz *

2026年1月19日

1 引言

博伊曲面 [B] 是射影平面在 $\boldsymbol{R}^3$中的一个著名浸入像。我曾多次尝试理解博伊曲面，但不知为何，这些努力始终未能带来乐趣。偶尔，我也能集中精神，直到它那些疯狂的扭转与曲折在脑海中拼合起来（或者说似乎拼合起来），但很快，这个图像便消失得无影无踪。Moira Chas最近送给我一个她制作的精美博伊曲面金属丝编织模型 [C] ，这激励我再次尝试。如今，我终于弄明白了。关于博伊曲面一种简洁优美的替代描述，请参见 [K]。

这些笔记以较为概念化的方式描述博伊曲面，并不太依赖三维可视化。正如我在第7节中所讨论的，我采用的方法在很大程度上受益于一段由塞尔维亚科学院制作的精美YouTube视频 [S]，视频中一架飞机绕行并构造博伊曲面。你可以把这些笔记看作是对该视频的进一步阐述。

我将说明如何用简单的部件构造博伊曲面。除了最后一个部件外，其他部件都很容易用卡纸和带状物制作；最后一个部件则通过锥化过程自动由其他部件确定。为了让锥化过程进行得最顺畅，最好把博伊曲面看作位于三维球面中，而我将三维球面建模为 $\boldsymbol{R}^3 \cup \infty$。

我会附上一套材料，你可以用它打印并组装除最后一块之外的所有部件。这套材料确实可行。Katherine Williams Booth 用它制作了一个模型。这是她拍摄的模型照片。

*由美国国家科学基金会资助项目 DMS-2505281 支持



图0：组装好的套件！

以下是这些笔记的提纲。

- 在§2中，我将较为详细地讨论八面体图。这一讨论从组合学角度解释了为什么图0中的浸入曲面的边界是一条单独的环路。当然，你也可以直接把它组装起来，用手指沿着边界绕一圈。

- 在§3中，我定义八角十字。这个部件与3个坐标平面的并集同胚。它是图0中的中心部件。
- 在§4中，我定义交叉桥。这个部件与2个坐标平面的并集同胚。3个交叉桥就是图0中的大环。
- I在第5节中，我组装了大部分博伊曲面：将3个交叉桥连接到八交叉上，然后 e

粘合上3个圆盘。这些圆盘在图0中清晰可见。这7个部分的并集 M 最终构成了一条浸入的莫比乌斯带。这就是图0所展示的内容。

- 在第6节中，我接上最后一块 P，并将其称为披萨。结果发现，边界 ∂M 适于锥化：每条经过原点的射线与∂M 至多相交一次。我们设 $P = \{tp | \ p \in \partial M, \ t \geq 1\}$。这里， P 是将 ∂M 锥化到 ∞上得到的拓扑圆盘。这个名称的由来是， ∂M 具有18边形的组合结构，相应地， P 由18片披萨片组成，每片都是一个拓扑三角形。博伊曲面是 $M \cup P$。
- 在第7节中，我将这些笔记与YouTube视频 [S]进行比较和对照。我还联系到纸莫比乌斯带 [Sch] ，并提出一个与此处构造相关的优化问题。
- 在第8节中，我附上了一个工具包，可用来制作 M，如图0所示。
- 在第9节中，我介绍了一种使用直线块的替代模型。

感谢 Moira Chas、Peter Doyle 和 Dan Margalit 就这些笔记提供了有益的讨论。最后，感谢 Katherine Williams Booth 制作了图0中的模型。

2 八面体图

设 G 为八面体图。这个图由八面体的顶点和边组成。对于 G，完美匹配是 G 的 3 条边的集合，其中 G 的每个顶点恰好属于集合中的一条边。图1以对称的方式画出了 G 的一个完美匹配。

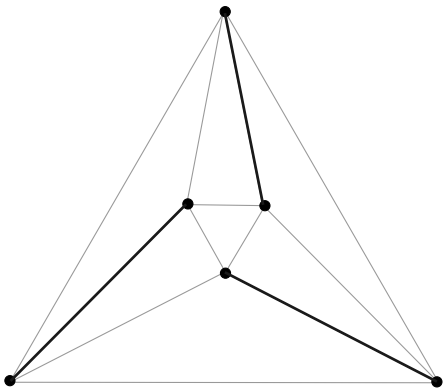


图1：八面体图的一个完美匹配

我们把匹配中的 3 条边称为桥，其余 9 条边称为道路。之所以这样命名，是因为每座桥 e 都连接着 e 两侧顶点所关联的道路。我们可以稍微加宽 e，然后用三个平行副本替换 e。（我喜欢把这些平行副本想成桥上的车道。）这样便定义出 3 条长度为 3 的路径，每条路径的形式都是“道路-桥-道路”。图 2 展示了这一点。

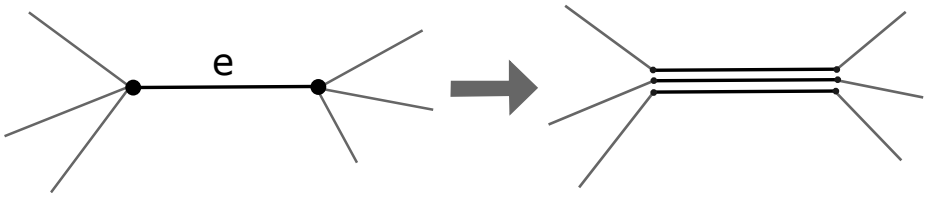


图 2：两条相交道路之间的一座桥

图 3 展示了当我们同时对所有三座桥进行这一构造时会发生什么。结果是一个长度为 18 的回路，在道路和桥之间交替延伸。我为道路标上了数字和方向，以便你沿着回路追踪。

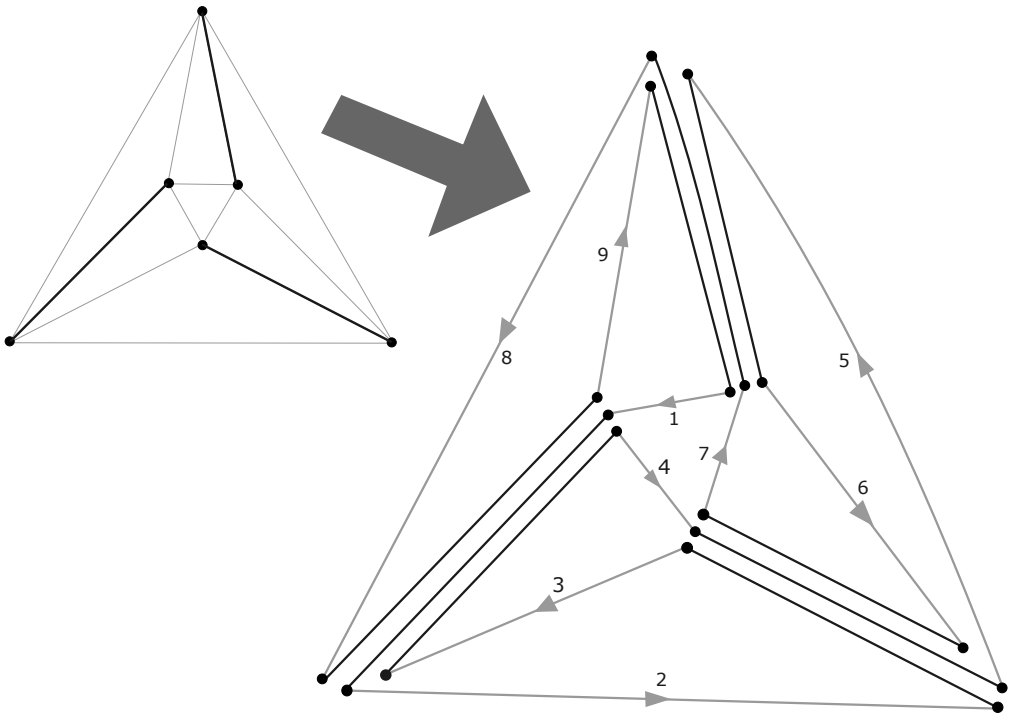


图 3：长度为 18 的回路

图4与图 3 相同，但标签不同。这些标签对应于通常对八面体的选取方式，其顶点为 $(\pm 1, 0, 0)$、$(0, \pm 1, 0)$ 和 $(0, 0, \pm 1)$。从几何上看，你正沿着轴 $X = Y = Z$ 观察这个八面体。顶点 $(\pm 1, 0, 0)$ 标记为 $(\pm, 0, 0)$，等等。道路的标签则根据道路上各点坐标的符号来确定。

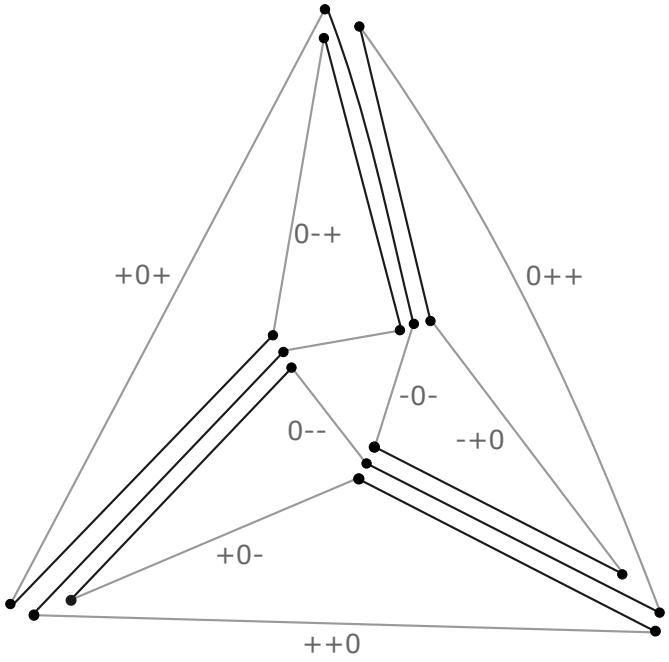


图4：与图3相同的路径，但标签不同

下面的所有构造都在绕轴 $X = Y = Z$ 的三阶旋转下保持不变，即映射 $(X, Y, Z) \to (Y, Z, X)$。同样，所有构造在分别固定直线 $X + Y = 0$、$Y + Z = 0$ 和 $Z + X = 0$ 的二阶旋转下也保持不变。其中第一个旋转由映射 $(X, Y, Z) \to (-Y, -X, -Z)$ 给出。图4中的标记体现了这些对称性。

参见图0，图4中的18个顶点对应曲面边界上的18个非光滑点，也就是八交叉连接到交叉桥上的18个点。带状物大多出现在这些点周围。

3 八角十字

我们先介绍一些将反复使用的记号。

- 给定集合 A_{XY}，通过循环置换坐标可得 A_{YZ}和 A_{ZX}。
- $D_r(p)$ 表示以 p为圆心、半径为 r 的闭圆盘。
- A^o 和 ∂A 分别表示 A的内部和边界。

如图5所示，定义

$$O_{XY} = \left([-1,1]^2 - \bigcup D^o_{2/3}(\pm 1, \pm 1)\right) \times \{0\}. \tag{1}$$

对所有符号的取值进行组合，得到的 4 个圆盘的并集。

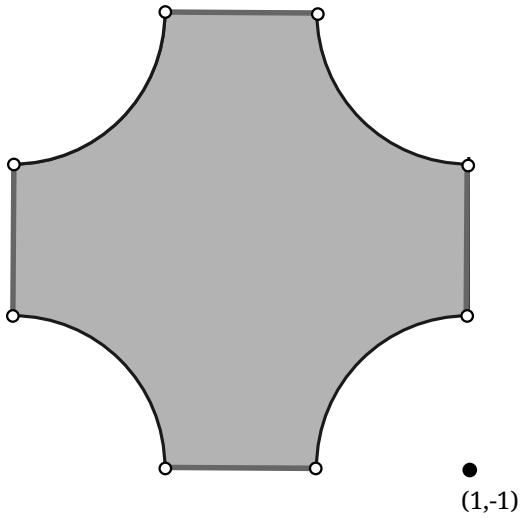


图5：集合 O_{XY}

集合 O_{XY}是一个由8条边组成的八边形，曲边和直边交替排列。八交叉是

$$O_{XYZ} = O_{XY} \cup O_{YZ} \cup O_{ZX}. \tag{2}$$

八交叉有 24 条边，其中 12 条是曲边，12 条是直边。我们把曲边称为道路。12 条直边两两相交，形成 6 个交叉，每条坐标轴上各有两个。如果将这些交叉压缩成点，得到的图就是八面体图。

4 交叉桥

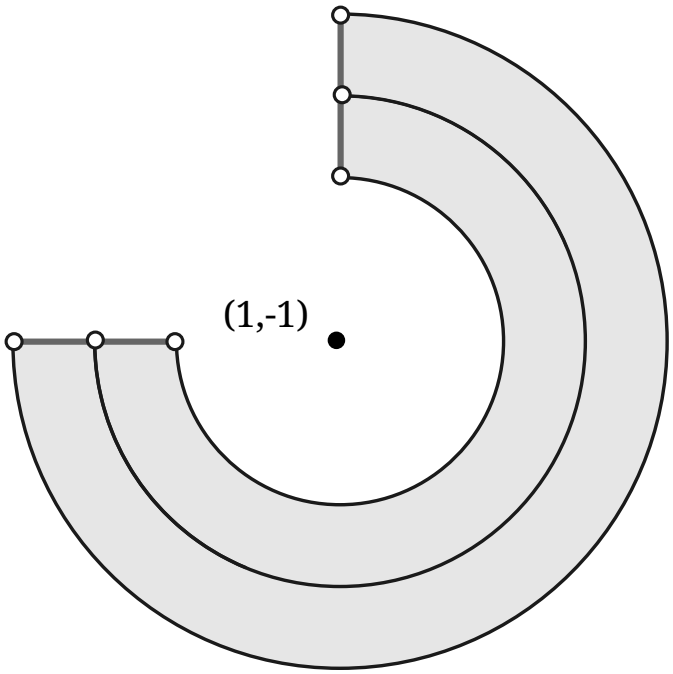
Let

$$A_{XY} = \Big(D_{4/3}(1,-1) - D^o_{2/3}(1,-1)\Big) \times \{0\},$$
$$B_{XY} = \partial D_1(1,-1) \times [-1/3, 1/3]. \tag{3}$$

A_{XY}和 B_{XY}是环域，它们相交于单位圆 $\partial D_1(1,-1) \times \{0\}$。其中一个交叉桥是

$$Q_{XY} = \{(x,y,t) \in A_{XY} \cup B_{XY} |\ \max(|x|,|y|) \geq 1\}. \tag{4}$$

我们从 $A_{XY} \cup B_{XY}$中切去一个象限，以构造 Q_{XY}。图6显示了 Q_{XY} 在 XY 平面上的投影。



XY： Q_{XY}的 XY投影。

Q_{XY}是将一条交叉形状沿圆周的四分之三扫掠而成的。 Q_{XY} 的边界由4条曲边和4条直边组成。我们称这些曲边为桥。边界上的直边两两交叉，形成2个交叉。这些交叉与八交叉中的2个交叉相对应。

其他交叉桥是 Q_{YZ}和 Q_{ZX}。

5 组装

图7展示了八交叉 O_{XYZ} 和交叉桥Q_{XY}的 XY投影。这幅图有点像一个戴着一只圈形耳环的头部。

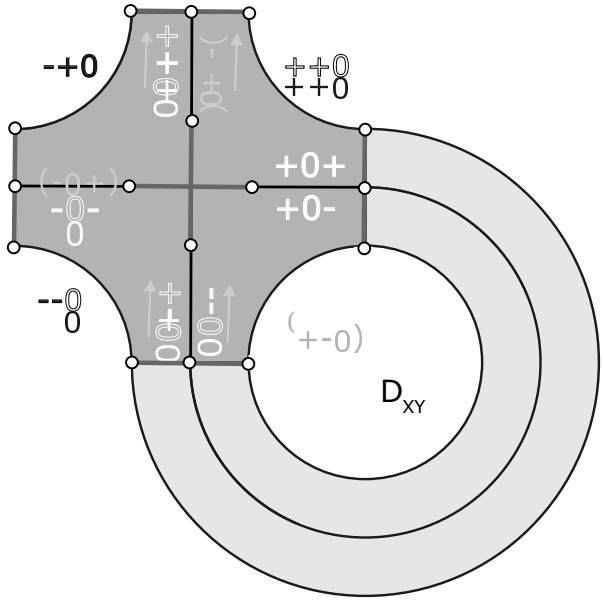


图7： $O_{XYZ} \cup Q_{XY}$的 XY-投影。

集合

$$H = O_{XYZ} \cup Q_{XY} \cup Q_{YZ} \cup Q_{ZX} \tag{5}$$

就像一个戴着3只圈形耳环的头部。再看图0。如图7所示， ∂H 包含3个圆，每个圆都由一个道路-桥梁对构成，每个坐标平面各有一个。我们将圆盘 D_{XY}、D_{YZ} 和 D_{ZX} 粘合进去，它们分别由这些圆围成。也就是说，我们定义

$$M = O_{XYZ} \cup Q_{XY} \cup Q_{YZ} \cup Q_{ZX} \cup D_{XY} \cup D_{YZ} \cup D_{ZX}. \tag{6}$$

∂M 有 $9 = 12 - 3$ 条道路和 $9 = 12 - 3$ 座桥。它们共同构成一个嵌入环，也就是一个组合长度为18的回路，其中道路和桥交替出现。从组合结构上看，这与图4中的回路相同。例如，观察图7可见，道路 $(++0)$、$(--0)$ 和 $(+0+)$、$(0-+)$ 和 $(+0-)$、$(0--)$ 穿过图中所示的交叉桥相连。这与图4相符。（如箭头所示，垂直标签应从下往上阅读。）

现在我来证明 M 是一个浸入的莫比乌斯带。令 M_{XY} 表示 M 与 XY 平面的交集。这里， M_{XY} 是一个拓扑矩形，其直边和曲边交替排列。见图 8。$M - M_{XY} - M_{YZ} - M_{ZX}$ 的闭包是交叉桥的 B部分的并集，即 B_{XY}、 B_{YZ}和 B_{ZX}。这些部分各自也是拓扑矩形，其直边和曲边交替排列。我们有一个由6个部分组成的循环，相邻部分共享一条直边:

$$\begin{array}{ccccc} M_{XY} & \leftrightarrow & B_{YZ} & \leftrightarrow & M_{ZX} \\ \updownarrow & & & & \updownarrow \\ B_{ZX} & \leftrightarrow & M_{YZ} & \leftrightarrow & B_{XY} \end{array}$$

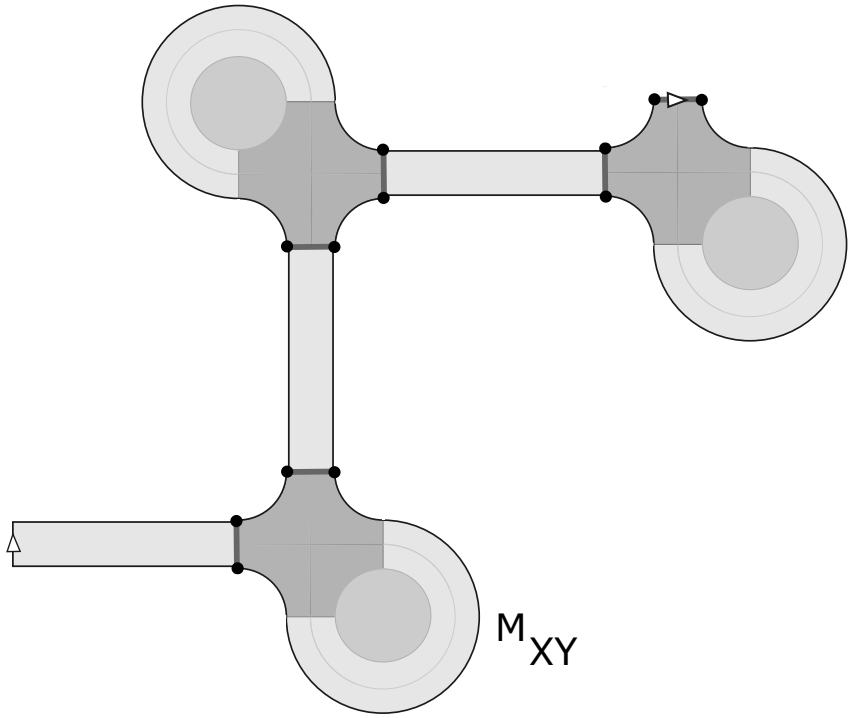


图 8： M_{XY} 和莫比乌斯带 M^*。

我们将每一块视为一个独立的空间，然后沿共同的直线边界边进行粘合，从而形成粘合空间。这样就得到一个抽象的莫比乌斯带 M^* ，它被分解为 6 个拓扑矩形。图 8 展示了 M^*的一个基本域。带箭头的边表示需要进行粘合。显然的映射 $M^* \to M$ 是一个等距浸入。

6 添加披萨

我们在三维球面 $S^3 = \boldsymbol{R}^3 \cup \infty$中进行研究。令 M 表示我们的浸入莫比乌斯带，如方程6所示。正如我们在引言中提到的， ∂M 是适合锥结构的，这意味着每条经过原点的射线与 ∂M 的交点至多有一个。我们将披萨定义为从 ∂M 到 ∞的锥：

$$P = \{tp |\ p \in \partial M,\ t \geq 1\} \cup \{\infty\}. \tag{7}$$

我们有 $M \cap P = \partial M$。并集 $M \cup P$ 是博伊曲面。我们将一个嵌入圆盘沿拓扑圆 $\partial M = M \cap P$ 粘到一条浸入的莫比乌斯带上，从而得到博伊曲面。因此，$M \cup P$ 是一个浸入射影平面。 $M \cup P$ 具有 §2 末尾讨论的六重对称性。

现在我们更仔细地考察 P，以便更清楚地展现 ∂M 对锥的友好性。P 由 18 个拓扑三角形组成，也就是披萨片，每条 ∂M 的边对应一片。

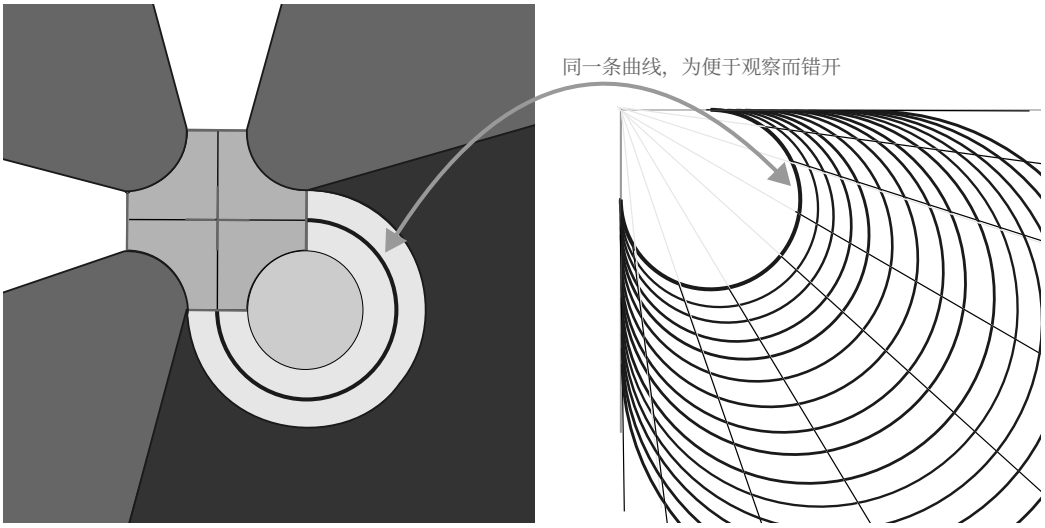


图 9： XY 平面中的 4 片，以及非平面切片的一点示意 e

其中有 12 个位于坐标平面内，另有 6 个不在其中。每个非平面的部分都位于一个椭圆锥内，而每个锥又分别位于不同的卦限中。图 9 展示了 XY 平面内的 4 个披萨片。图 9 还展示了包含在 $+-+$ 卦限内的非平面披萨片。我们将这个披萨片按（向上延伸的）射线和（3/4）圆进行双重叶状分解，再将其投影到 XY 平面上。其余披萨片可由这 5 个经过第 2 节末尾所述对称变换得到。

7 讨论

飞机电影：飞机绕行并生成一个集合 H'，该集合在拓扑上与 H （来自方程 5）相同，在几何上也与之接近。随后，电影将三个圆盘填充起来，形成集合 M'，它同样接近 M。最后，电影明确地用嵌入的（弯曲）圆盘 $P' \subset \boldsymbol{R}^3$ 封住 M'。这些笔记与电影有几个方面的不同。

- 飞机构造 H' 的顺序与我们构造 H的顺序不同。沿着图 8 中的走廊从下往上走，你走的就是飞机的路径。

- 这部电影没有解释为什么 M'是莫比乌斯带，也没有解释为什么 $\partial M'$是连通的。（一般来说，电影里什么都没有解释、定义或讨论；一切都只是展示出来。）

- 圆盘 P'和 P有几处不同。首先， P'位于 $\boldsymbol{R}^3$中。这打破了 §2 末尾讨论的六重对称性。其次， P'似乎比 P更光滑。对于 P， ∞ 处的锥点相当复杂。

我并不是想暗示这些没有解释的内容是这部电影的缺陷。这部电影令人惊叹，而且它的目标与这些笔记不同。

内蕴平坦性：抽象的莫比乌斯带 M^* 是一个可展曲-$\widetilde{\ }$面，如图 8 所示。M^* 的普遍覆盖 M^* 是一条无限延伸的拓扑条带。§2 末尾讨论的对称性都对应于 $\widetilde{M^*}$的对称性。例如， $\boldsymbol{R}^3$ 的三阶等距变换循环置换 $\widetilde{\ }$这些坐标后，提升为 M^*的滑移反射。这个滑移反射的立方是覆盖变换群的生成元。

当我们将 ∂M^* 视为内蕴平坦的莫比乌斯带边界上的一条曲线时，它的总测地曲率为 9π。特别是， ∂M^* 并非 [Sch] 意义上的纸莫比乌斯带。不过，这里的情形确实引出了一个优化问题：对 $\boldsymbol{R}^3$ 施加环境同胚，同时保留 M^*的内蕴平坦性和 ∂M的锥友好性，最多能使总测地曲率降低多少?

还值得一提的是，交集 $P \cap \boldsymbol{R}^3$ 本身也是内蕴平坦的。不过，在非平面的披萨片上， ∂P相对于 P的测地曲率相当复杂。因此， $M \cup P$沿着 $M \cap P$的某些部分呈现出奇特的内蕴几何。

8 自制

本节包含一套工具包，可用于制作你自己的莫比乌斯带M。这套工具包的设计方式让你无需粘贴3个圆盘，它们已经预先连接在交叉桥上。

步骤 0：接下来的两页包含了你需要打印的所有材料。每页各打印 3 份。我建议使用卡纸。

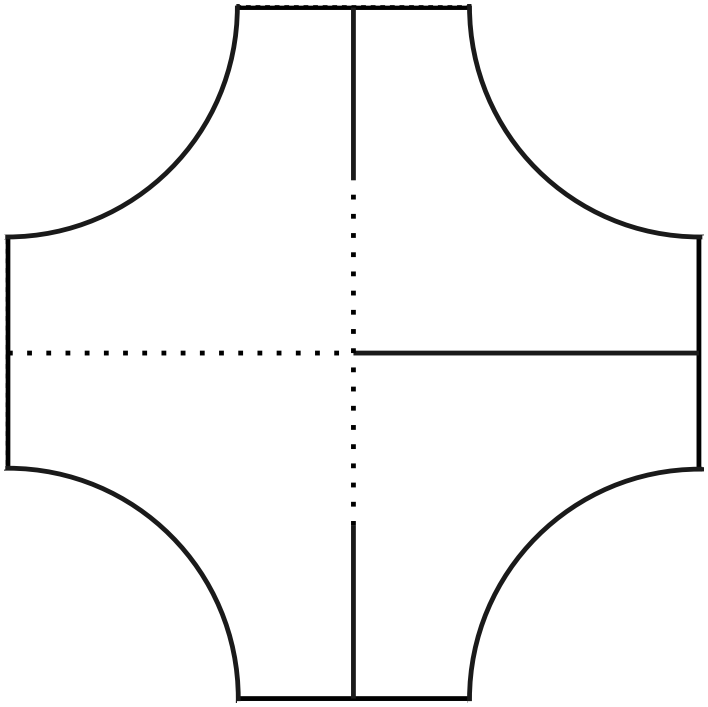
步骤 1A：剪下所有 3 份与图5相对应的部件。第一份沿所有实线剪开。第二份只沿长实线剪开。将第三份水平对半剪开，然后沿竖直虚线剪开。我发现把切口稍微延长一点很有用，这样更容易将各部件完全拼合在一起。

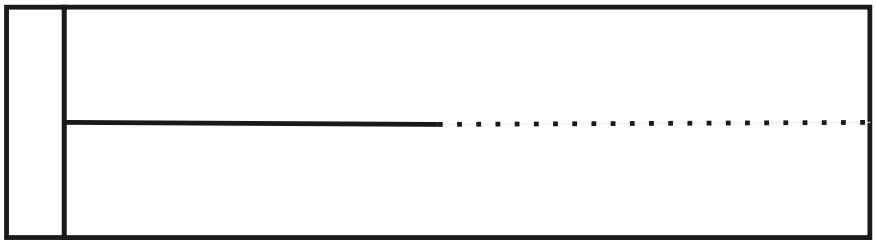
步骤 1B：将两块完整的中央部件沿切缝滑动拼合。用带状物粘牢。然后插入中央部件的两半，完成八交叉。按需将所有部分粘牢，使其稳固。

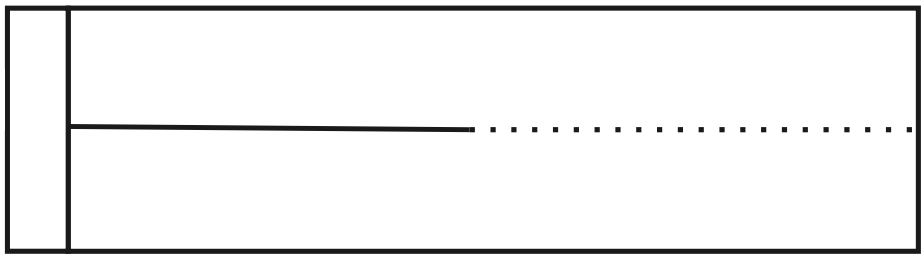
步骤 2A：剪下 6 条带，然后沿虚线剪开。确保每条带左侧的细长矩形也一并剪下。下一步我会解释这些矩形的用途。剪下由 C形环带和中央圆盘组成的 3 个部件，然后沿所有虚线曲线剪开。（注意：不要将中央圆盘与环带分开。）每个环带上的短横切口只是入口切口，用来帮助你剪出较长的弧形切口。

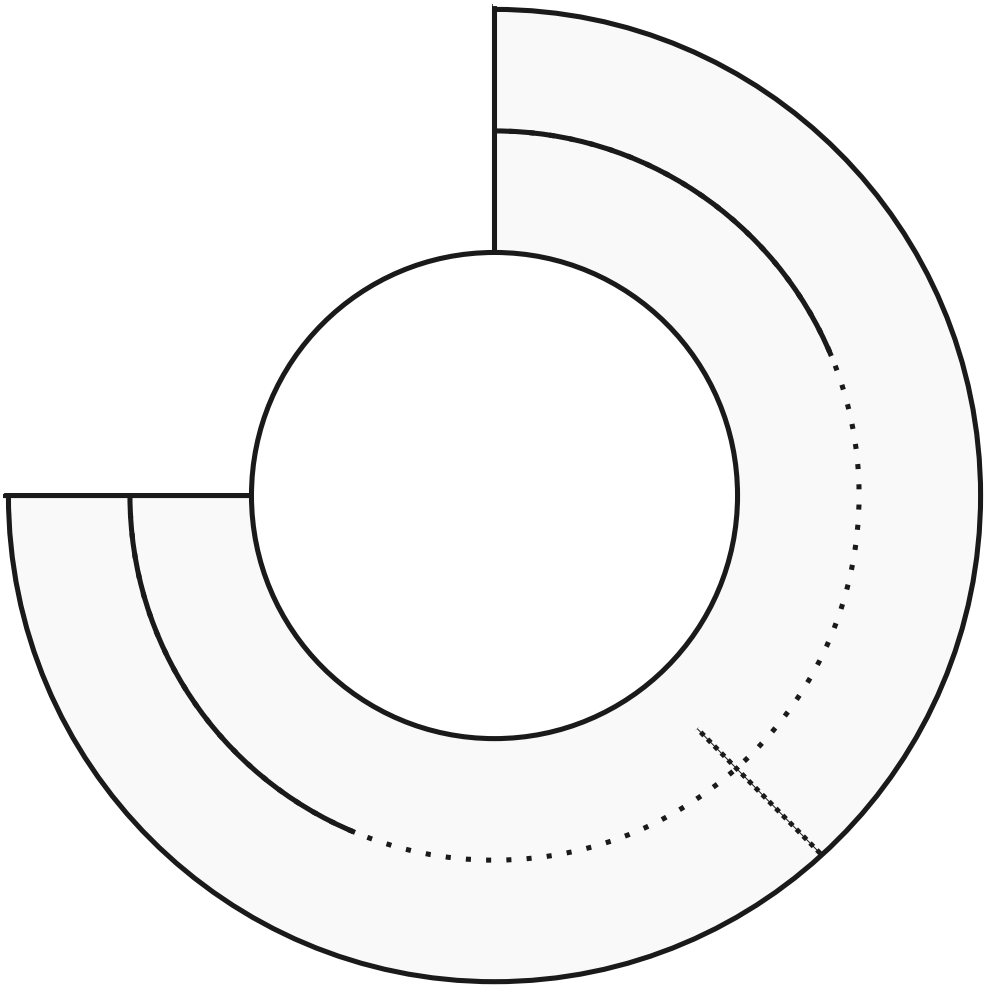
步骤 2B：沿着切缝，将两条条带插入一个 C 形环域中，然后视需要用带状物粘合。最后，用带状物封住入口切口。这样就制成了一个交叉桥，并已连接好中央圆盘。现在对另外两个交叉桥重复上述操作。技术说明：条带末端多出的细长矩形有点像接片。条带的长度与核心曲线一半的长度并不完全相同，多出的接片就是用来弥补这一差异的。

步骤 3：按照第5节所述，将每个交叉桥连同圆盘一起连接到八交叉上。视需要用带状物粘合。交叉桥连同圆盘的圆盘部分应与八交叉上相应的曲边贴合。









9 一个直线模型

图10展示了图7的一个版本，其中八交叉、交叉桥和圆盘采用了不同的直线模型。

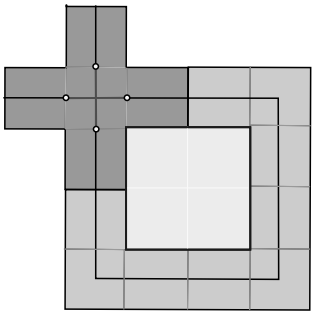


图10：八交叉、交叉桥和圆盘的直线模型。

直线块的加厚体尤其漂亮：

- 八角十字位于7个立方体的并集内。
- 每个交叉桥都位于由9个立方体组成的 C形链内。
- 每个正方形圆盘都位于若干 $4 = 2 \times 2$ 立方体的并集中。

由这 7 个部分构成的并集 Ω 是一个由 46 个立方体组成的拓扑球。令 $M^{\square}$表示我们为 M构造的直线模型，则有 $M^{\square} \subset \Omega$ 和$\partial M^{\square} \subset \partial\Omega$。下面给出显式描述。令 Q_r 表示边长为 r 、中心位于 (3, −3) 的正方形。适当缩放后，我们有

$$\Omega = \Omega_{XY} \cup \Omega_{YZ} \cup \Omega_{ZX}, \qquad M^{\square} = M^{\square}_{XY} \cup M^{\square}_{YZ} \cup M^{\square}_{ZX}, \tag{8}$$

$$\Omega_{XY} = Q_4 \times [-1, 1], \qquad M^{\square}_{XY} = (Q_4 \times \{0\}) \cup (\partial Q_3 \times [-1, 1]).$$

Ω 是三个 $8 \times 8 \times 2$ 板体的并集，它们的交集是以原点为中心的 $2 \times 2 \times 2$立方体。Ω 看起来像一个带有 3 只大耳朵的立方体头部。

这一分析指出，在添加最后一个圆盘以封闭博伊曲面时，我们有一定的灵活性。补集 $S^3 - \Omega$ 也是一个球，而 $\partial M^{\square}$ 是边界上的一个嵌入环。因此，从拓扑角度来说，将 $\partial M^{\square}$延伸为 $S^3 - \Omega$ 中的一个嵌入圆盘并不困难。同样适用于这一模型的锥化构造，能够以一种规范的方式完成这一点。

Ω由 $368 = 46 \times 8$ 单位立方体铺成，这些立方体与 $M^{\square}$ 的交集是由1、2或3个相邻面组成的并集。因此，只需取368个立方体，适当地给它们的面涂色，再将它们拼接起来，就能构造出（Ω $M^{\square}$）。

10 参考文献

.[B]W. Boy 关于闭曲面的积分曲率与拓扑学，《数学年刊》第57卷（1903），151–184。

[C]M. Chas，Instagram，www.instagram.com/reel/C-n6ExptzhI/?igsh=MTl0NGd4ZTg0YThveg

[K] R. Kirby，《什么是……博伊曲面》，《美国数学会通报》，第54卷，第10期。（2007）

[S] 塞尔维亚科学院，Ziva Mathematica 项目，YouTube视频 www.youtube.com/watch?v=9gRx66xKXek

[Sch] R. E. Schwartz，《最优纸莫比乌斯带》，《数学年刊》，2025。