arXiv:2601.10815v1 [math-ph] 15 Jan 2026

分块雅可比矩阵、重心极限与流形

OLIVER KNILL

Abstract. 我们变形几何中出现的块三角雅可比矩阵，并考察多尺度的重心几何极限以及 Potts 网络中的液滴边界流形。

1. Introduction

1.0.1. 一个维数为 q 、带有外微分 d的**有限抽象单纯复形** G 定义了一个块三角**狄拉克矩阵** $D = d+d^*$，它是一个具有 $q+1$ 个块的分块雅可比矩阵。它是块对角霍奇拉普拉斯算子 $L = D^2 = dd^* + d^*d$的平方根。对于任意连续函数 g，连续对称性会以等谱**Lax变形** $\frac{d}{dt}D_t = [B_t, D_t]$ 的形式出现，其中 $B_t = g(D)^+ - g(D)^-$。这是一个非线性常微分方程。我们还可以从**QR分解** $e^{-tg(D_0)} = Q_t R_t$得到 $D_t = Q_t^* D Q_t$。常微分方程与QR图景一致:

定理1. *O* *DE*和*QR*给出相同的等谱 $D_t = c_t + c_t^* + m_t$ ，而 $c_t + c_t^*$ 是狄拉 $c.$

1.0.2. 有限抽象单纯复形上的**重心细分** 定义了一个由拓扑等价复形构成的序列$G = G_0$， G_1, G_2，. . . 。算子 $L(G_n)$的**态密度** $dk(G_n)$在每个维数 q =**维数**(G)下都满足**中心极限定理**： 对于任意 $q \geq 1$，都存在一个弱**极限分布** 。对于 $q > 1$，它似乎是奇异连续的。

定理2。对于 $q \geq 1$，弱极限 $\lim_{n\to\infty} dk(G_n)$ 存在，且与 G 无关。

1.0.3. 函数 f: $V(G) \to K_k = \{0, \ldots, k\}$ 定义了一个**网络气体**，其中包含 k 个不同的粒子。如果 $f(v) = j$，则粒子 j 位于 $v \in V$；如果 $f(v) = 0$，则 v 处没有粒子。可以将 f 看作网络上的 Ising 模型或 Potts模型中的一种构型。定义**水平集**$G_f = \{x \in G, f(x) = K_k\}$。 m**-流形**是这样一种单纯复形，其单位球面都是 $(m-1)$-球面。

定理 **3.** 如果 G 是一个 m-流形，那么 G_f 要么为空，要么是一个$(m-k)$-流形.

1.0.4. 让·迪厄多内 [4] 将**关联矩阵**、**重心细分**和**对偶性**列为**组合拓扑**的核心创新。定理 1)-3)阐述了这几项基石：**1)** 关联矩阵是狄拉克矩阵 D 的块；**2)** 重心细分 $G_n \to G_{n+1}$ 使离散情形通向连续极限。**3)** 对偶性体现为一种**双曲结构**：每个单位球面 $S(x)$ 都是对偶球面 $S^+(x) * S^-(x)$ 的**连接**。

1.0.5. 该主题与西蒙作品中的若干主题相关：1）属于**谱理论**、**带状雅可比矩阵**、散射等领域, 例如 [3]。2）联系到**奇异谱**、**多尺度分析**和线性代数 [24, 29]。3）涉及统计力学中的**晶格气体** 模型 [26]: 函数的水平集构成**液滴**的边界，而液滴是自旋取固定值的区域。这些主题借助**计算机代数**加以阐释；数十年前， [25, 27, 28] 曾比较过不同的计算机代数系统。

日期：2026年1月14日，谨以此文献给巴里·西蒙，祝贺他80岁生日。关键词与短语。 Lax变形，重心细分，离散流形。

2. Illustration

2.0.1. 八面体是二维单纯复形 $G = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{2,3,5\},\{2,3,6\},\{2,4,5\},\{2,4,6\}\}$。其霍奇拉普拉斯算子 $L = dd^* + d^*d = L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$ 包含以下分块：一个 6×6 矩阵 L_0、一个 12×12 矩阵 L_1 和一个 8×8 矩阵 L_2。欧拉示性数为 $\chi(G) = \mathrm{str}(e^{-0L}) = 6 - 12 + 8 = 2$，其中 $b_0 - b_1 + b_2 = \dim(\ker(L_0)) - \dim(\ker(L_1)) + \dim(\ker(L_2)) = \mathrm{str}(e^{-\infty L})$。McKean-Singer 证明了对所有 t，均有 $\chi(G) = \mathrm{str}(e^{-tL})$。

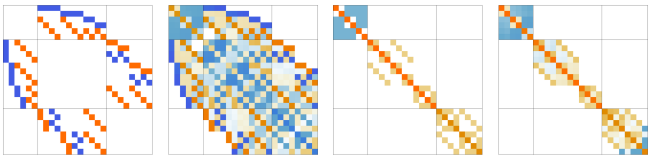

Figure 1. 变形前后的矩阵 D 和拉普拉斯算子 L 。

2.0.2. 我们先看到八面体的一些初始细分，接着看到其第 4 次细分 G_4的 Hodge 拉普拉斯算子的谱、积分态密度和李雅普诺夫指数。

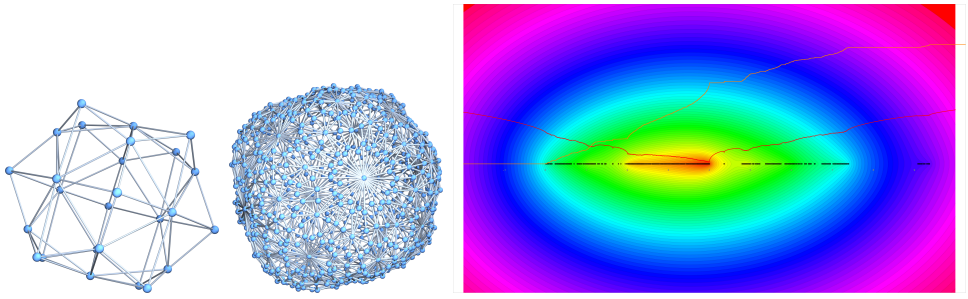

Figure 2. G 的重心细分以及 G_4的 Hodge 谱。

2.0.3. 为了说明最后一个主题，我们选取 G 一个4-球面 $S^2 * S^1$作为宿主流形，其中 S^2是**八面体**，S^1 是循环图 C_{15}，而 $*$ 是**连接**。现在将 $k = 2$种粒子类型放置在 G的一些顶点上。这个映射 $f\colon V \to \{0,1,2\}$ 定义了界面二维流形 G_f。

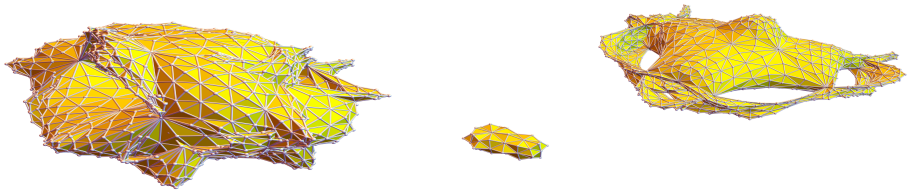

Figure 3. 一个四维流形的两个余维二曲面 G。它们是 2-流形，也是重心细分 G_1的子图。

3. Block Jacobi Matrices

3.0.1. 第一个故事虽然是**几何的**，但它涉及**分析学** [30]中的一个核心主题：给定由某种几何定义的一类算子中的特定元素 L ，我们可以探讨与 L等谱的算子集合的结构。对于有限雅可比矩阵或斯图姆-刘维尔算子，其底层几何为离散情形、连续区间或圆，这与**散射理论**和**正交多项式**有关。对于周期雅可比矩阵，这与代数几何相关，因为等谱集是一个环面，而环面上的点由阿贝尔-雅可比映射编码。由可积系统给出的等谱变形在其中发挥作用。 [12]。

3.0.2. 如果考察高维流形的拉普拉斯算子的等谱集，该等谱集通常是离散的。根据 Mumford 的一项结果（[35] 第 337 页），高维情形下一般不可能发生变形。有时则可以进行变形：例如，我们可以固定一个光滑紧流形，并考察所有使拉普拉斯算子 L具有相同谱的度量。例如，存在一个由等谱平坦环面构成的 16 维集合 [9]$\mathbb{R}^{16}/D_{16}^{+}$，$\mathbf{R}^{16}/(E_8 \oplus E_8)$，其中 D_{16}^{+}， $E_8 \oplus E_8$ 是整酉格。

3.0.3. 通过将拉普拉斯算子 L 写成平方 $L = D^2$ ，并允许算子 $D = d + d^*$ 产生对角部分，同时保持块三对角**块雅可比结构** $D_t = c_t + c_t^* + m_t$，我们可以获得更大的灵活性。这种做法在连续情形下也适用，但这里不作讨论，因为流形上的变形算子将成为**伪微分算子** $c_t + c_t * + m_t$。

3.0.4. 虽然 c_t 仍然是一个外微分，但它与标准外微分并非等谱；同样非等谱，且作为外微分的一种变形原型的是**维滕变形** [36, 3]。不过，新的**“电磁”狄拉克矩阵** $C_t = c_t + c_t^*$ 仍然通过**孔涅斯度量** [2] 定义了一个距离，可用于 G 上的 $d_{Connes}(x, y) = \sup_{f,\ |Df|_\infty = 1} |f(x) - f(y)|$。

3.0.5. 有限抽象单纯复形 G 上的外微分 d 定义了分块三角雅可比矩阵 $D = d + d^*$ 和一个矩阵 $L = D^2 = dd^* + d^*d$。由于 $d^2 = 0$ ，因此 $d*^2 = 0$，由此可知，对于任意多项式 g，矩阵 $g(D)$具有相同的雅可比分块结构。泛函演算由此允许为任意实连续函数 g定义 $g(D)$，且仍保有 $g(D)$具有雅可比分块结构这一性质。第k个分块的大小是维数为 k的单纯形数量 $f_k(G)$。给定这样一个分块雅可比矩阵，可将其写成形式 $A = A^+ + A^- + A^0$，其中 A^+ 是右上分块，A^- 是左下分块，而 A_0 是对角分块。这种分解反映出$A^+ = (A^-)^*$ 将 $l^2(G_k)$映射到 $l^2(G_{k+1})$，且 A^0 保持空间 $l^2(G_k)$不变。由此得到反对称矩阵 $B(A) = A^+ - A^-$。拉克斯微分方程 $D' = [B(g(D)),\ D]$ 可通过 $D_t = Q_t^* D_0 Q_t$求解，它来自热算子 $e^{-tg(D)}$的QR分解 $e^{-tg(D)} = Q_t R_t$ 。Symes最先在托达系统 [32]中观察到这一点，之后Deift、Li和Tomei对其进行了扩展和简化 [22, 32]。

3.1. **有限谱几何**。

3.1.1. 有限抽象单纯复形是一个有限集合 G，由非空集合组成，并且对取有限非空子集的运算封闭。如果 G 具有 n 个元素，则它定义了一个$n \times n$ 狄拉克矩阵 $D = d + d^*$，其中 d 是外微分 d：$l^2(G_k) \to l^2(G_{k+1})$，且$G_k = \{x, |x| = k + 1\}$。该上链复形中的关联矩阵 d_k 明确表示为 $df(x) = \sum_j (-1)^j f(\delta_j x)$，其中 δ_k： $G_{k+1} \to G_k$是δ集 $G = \bigcup_{k=0}^{q} G_k$的面映射。相对于分解 $l^2(G) = \oplus_{k=0}^{q} l^2(G_k)$，拉普拉斯算子 $L = D^2 = \oplus_{k=1}^{q} L_q$ 呈块对角形式。k-形式拉普拉斯算子 L_k 推广了基尔霍夫矩阵 L_0 =div(grad) $= d_0^* d_0$，后者是一种离散拉普拉斯算子。

3.1.2. 在连续情形中遵循 Hodge 的思想 [7]，在有限情形中遵循 Eckmann 的思想 [5],，第 H^k 个上同调 G 可以被识别为 $l^2(G_k)$ 上 L_k 的核。核 $b_k = \ker(H^k)$ 的维数是 G 的第 k 个贝蒂数。这得到贝蒂向量 $b(G)$ =$(b_0, b_1, \ldots, b_q)$。G_k 中的元素数量是 f- 向量 $f(G)$ =$(f_0, f_1, \ldots f_q)$ 的分量。欧拉-庞加莱′公式 $\chi(G) = \sum_k (-1)^k f_k = \sum_k (-1)^k b_k$ 可以通过热变形得到验证：对于左侧，e^{-tL}的迹为 $t = 0$，而极限 $t \to \infty$ 给出右侧。分块对角矩阵 $K = \oplus_{k=0}^{q} K_k$ 的超迹定义为$\sum_{k=0}^{q} (-1)^k \mathrm{tr}(K_k)$。由于 $L = (d + d^*)^2$ 是分块对角的，因此其超迹有定义。McKean-Singer 对称性表明，$\oplus_k l^2(G_{2k})$ 上 L 的非零谱与 G_{2k+1}($\oplus_k l^2$) 上的非零谱相同。这意味着 str(e^{-tL}) 与时间无关，而散射论证证明了欧拉-庞加莱′公式。热流将组合欧拉示性数变为上同调欧拉示性数。在变形情形下，该结论仍然成立；对于 e^{-tC_s} 也同样成立，其中 $C_s = (c_s + c_s^*)^2$ 是通过忽略 $D_s = d_s + d_s^* + m_s$ 的对角部分 m_s 得到的拉普拉斯算子（这里我们使用 s 表示 QR变形，因为 t 已用于热变形）。变形 $D = C_0 \to C_s$ 具有与维滕变形相似的性质。C_s 各分块的核仍然是贝蒂数，但算子的非零谱可能发生变化。

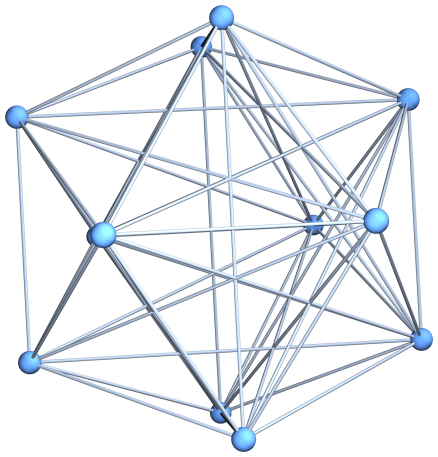

FIGURE 4.64-**胞体** 是离散的五维交叉多胞体。它是一个离散的5-球面。它导出一个单纯复形 G，其 f向量为 $f(G)$ =(12，60，160，240，192，64)，贝蒂向量为 $b(G)$ =(1，0，0，0，0，1)，欧拉示性数为0。

3.1.3. 算子 D 在代数 A 确定后，为 G定义了一个自然度量，因此可以得到一个符合 [2]意义的**谱三元组**(G，D，A)。一个自然的选择是 $A = l^\infty(G)$，即

G上的有界函数代数，配备上确界范数。Connes **伪距离** $d_{Connes}(x, y) = \sup_{f \in A, ||[D,f]||_\infty = 1} |f(x) - f(y)|$ 在 G 上，经过**Kolmogorov 识别**伪距离为零的点后，便成为度量。对于合理的狄拉克矩阵 D，条件 $d_{Connes}(x, y) = 0$ 蕴含 $x = y$，因此 Connes 距离本身就是距离。这样，通过改变 D，度量空间可以连续地变形；尽管 G 是有限的，这种变形仍然可行。该变形不会影响 G的其他拓扑性质，例如其拓扑维数。

3.2. **变形**。

3.2.1. 让我们更加仔细地考察**等谱拉克斯变形** $\frac{d}{dt} D_t = D' = [B, D]$ 的数学，其中 $B = g(D)^+ - g(D)^-$。它满足 $D_t = Q_t^* D Q_t$，其中 $d_t = Q_t^* d_0 Q_t$。我们可以写成 $d_t = c_t + n_t$，其中 c_t 将映射 k-形式映射为 $(k+1)$-形式，并且 n_t 保持k-形式和 $m_t = n_t + n_t^*$。我们得到 $D_t = d_t + d_t^* = c_t + c_t^* + m_t$。

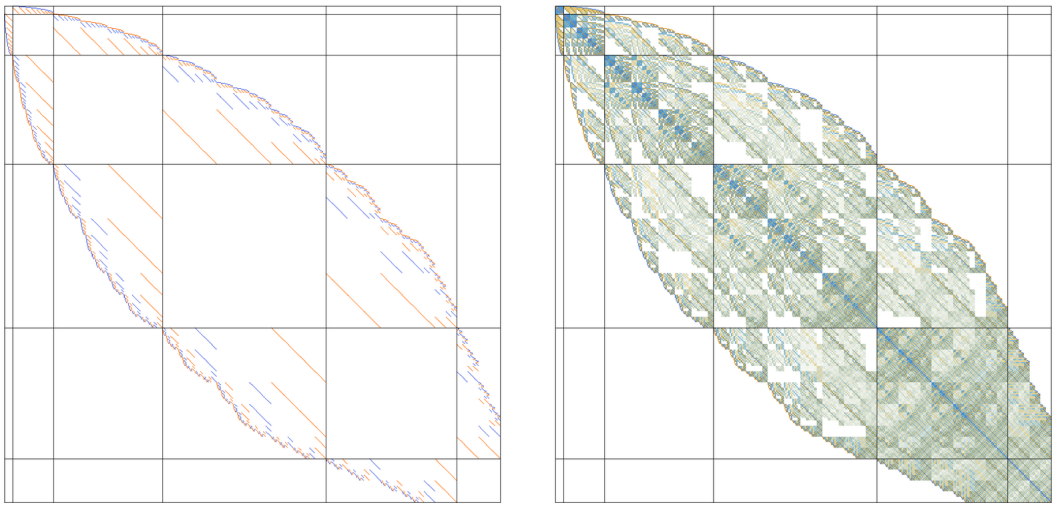

FIGURE 5. 我们看到了属于前面提到的**64 个胞腔**的狄拉克矩阵 D 。它是一个具有 6 个对角分块的 728×728 块三角雅可比矩阵。这些分块就是庞加莱´已经引入的关联矩阵。向右的等谱变形 $c_t + c_t^* + m_t$ 具有一个分块对角部分 m_t。这些分块 c_t 定义了新的外微分，从而得到具有相同贝蒂数的算子$C_t^2 = (c_t + c_t^*)^2$。与维滕变形一样，C_t 的谱发生变化，但 C_t 的核不变。

3.2.2. **托达链**（参见 [33, 34]）是一个**拉克斯对** [18] $L' = [B, L]$，其中包含 $B = a - a^*$ 和块三对角 $L = a + a^* + b$。如果 L 可逆，则可以写成 $L \oplus L_1 = D^2$，其中 D定义在加倍晶格上，而 L_1 是 L的 B¨acklund 变换。这里的情形要一般得多，因为我们可以在任意维数下对几何的拉普拉斯算子进行变形。这种变形适用于一般几何，也适用于紧黎曼流形 [10]。

3.2.3. 如 Lax情形 [22, 32], 所示，该流可以使用 QR流进行积分。Deift、Li 和 Tomei 的证明 [22] 在这里同样适用。我们将定理1重新表述如下：

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{If } \exp(-tg(D_0)) = Q_t R_t, \text{ then } D_t = Q_t^* D Q_t \text{ solves } D' = \\ [B, D], \text{ with } B = g(D)^+ - g(D)^-.\end{array}}$$

证明。 先观察 QR 图景：令 Q_t, R_t 由块三角 $e^{tg(D_0)} = Q_t R_t$的 QR分解得到。Gram-Schmidt过程表明， Q_t 是块三角的。由于 $e^{tg(D_0)}$ </style}可逆，QR分解是唯一的。定义 。现在我们得到 (, R_t, D_t)。下面看微分方程图景：考察

$$R_t' = [2g(D_t)^+ + g(D_t)^0]R_t, Q_t' = Q_t[g(D_t)^- - g(D_t)^+]$$

对于一对 R_t, Q_t，其中 $R(0) = Q(0) = 1$，并令 $D_t = Q_t^* D_0 Q_t$，使得 $D_t' = [g(D_t)^- - g(D_t)^+, D_t]$。这些方程意味着， R_t 保持上三角形式，而 Q_t 保持正交且 D_t 保持块三角形式。因此，我们又得到一种描述 (Q_t, R_t, D_t) 的方式。
为了说明这两个图景是相容的，我们证明 $H(Q, R) = e^{tg(D_0)} - Q_t R_t$ 是该微分方程的运动积分：只需对 $\frac{d}{dt} e^{tg(D_0)} = g(D_0) Q_t R_t$ 求导，并且

$$\frac{d}{dt}(Q_t R_t) = Q_t[g(D_t)^- - g(D_t)^+]R_t + Q_t[2g(D_t)^+ + g(D_t)^0]R_t = Q_t g(D_t) R_t \ .$$

由于 R_t 可逆， $g(D_0) Q_t R_t = Q_t g(D_t) R_t$ 可由 $Q_t^* g(D_0) Q_t = g(D_t)$ 得出。我们已经证明了 $\frac{d}{dt} H(Q(t) \ R(t)) = 0$。该微分方程与 QR 计算相容。□

3.2.4. 改变 g 会产生不同的流。所有这些流都像 Toda情形[32] 中那样彼此对易。$(c + c^*)^2$ 的核的维数与 $(d + d^*)^2$ 的核的维数相同。注意到若 $Du = (d + d^*)u = 0$ 且 $u_t = Qu$，则 $(Du)' = D'u + Du' = [D, B]u + DQ'u = DBu - BDu - DBu = -BDu$，当且仅当 $Du = 0$ 时其值为零，由此可见这一点。再次求导可得 $(Du)'' = -B'Du + B(Du)' = 0 + 0$，它也为零，依此类推。

3.2.5. **McKean-Singer公式**在变形情况下仍然成立。任意幂的超迹 $\mathrm{str}(L^n) = 0$ of any power L_t^k of $L_t = D_t^2$。这意味着 McKean-Singer公式 $\mathrm{str}(e^{-L_t}) = \chi(G)$。比较 $t = 0$ 和 $t = \infty$可得**Euler-Poincaré方程** $\chi(G) = \sum_k (-1)^k b_k(G)$。

3.2.6. 变形也适用于 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{H}$等除法代数。要在其中进行变形，请看

$$D' = [g(D)^+ - \overline{g(D)}^- + i\beta g(D)^0, D]$$

其中， i 是一个虚数单位或单位四元数。通过修改 R, Q的微分方程，仍然可以与之关联一个 QR分解

$$R_t' = [2g(D_t)^+ + g(D_t)^0 - i\beta g(D)^0]R_t, Q_t' = Q_t[\overline{g(D_t)}^- - g(D_t)^+ + i\beta g(D)^0]$$

现在， $Q(t)$是酉的，而 $R(t)$是分块上三角复矩阵。在极限 $t \to \infty$下，它越来越趋近于薛定谔波动方程$Q_t' = i m_t \beta Q_t$。

4. Singular spectra

4.0.1. 第二个主题讨论几何 [12]中的**尺度对称性** 。细分步骤是**重心细分**。尺度方面的考量在数学物理中无处不在。例如，若较小的部分通过替代扩展为较大的结构，并由此形成具有**自相似性**的几何，就会显现几乎周期性。在**替代动力系统** [20]等离散情形中也是如此。多尺度分析出现在固体物理学中，例如研究**安德森局域化**的数学理论时；安德森局域化是随机系统呈现点谱的现象。示例参见 [6]。

4.0.2. 缩放对称性也出现在数学物理的其他领域。它们在满足 $f(0) = 1$ $f''(x) < 0$且 $\lambda = f(1) < 0$ 的**单峰映射** $f \in C^2([-1,1],[-1,1])$中十分常见。**Feigenbaum-Cvitanovi´c 函数方程**有一个不动点 $T(g)(x) = \frac{1}{\lambda} g(g(\lambda x))$，这解释了普适性。示例参见 [8]。

4.0.3. 相似对称性也出现在概率论中。希尔伯特空间上的随机变量存在重整化映射 $X \to T(X) = X + X$，其中 Y是**中心化标准化版本**$(Y - \mathrm{E}[Y])/\sigma(Y)$，其**均值**为 0、方差为 1。**高斯分布**是 T 的不动点。对于任意初始随机变量 L^2， $T^n(X)$ 都收敛到这个不动点，这一事实称为**中心极限定理**。

4.1. 重心细分。

4.1.1. 有限抽象单纯复形 G 的**重心细分** 是一个新的复形$G_1 = \{x_1 \subset G, \forall x, y \in x_1$，可以是 $x \subset y$或 $y \subset x\}$。如果 G 是某个图的惠特尼复形，那么重心细分由细分后的图生成，其中完全子图是顶点；若一个新顶点包含于另一个新顶点中，则两者相连。例如，图 C_n 的重心细分是 C_{2n}。三角形 K_3 的重心细分是一个轮图。

4.1.2. 另一种变形的例子是**软重心细化** [16]。它的性质是，在维数为 $q = 2$时，最大顶点度保持有界。软细分避免出现包含在两个或更多 q维单纯形中的 $(q-1)$维单纯形。例如，从一个三角形 $G = K_3$ 开始时，所有 G_n 都属于**六边形格**。内部点的顶点度均为 6，因此是平坦点。从一个四面体 $G = K_4$开始时，我们得到图 G_n ，它们是三维球。它们的边界曲面是一个 2-球面，并经历重心细分 [16] ，与此处回顾的情形相似。在二维中，我们得到具有**范霍夫奇异性**的分段光滑极限态密度。

4.2. 态密度。

4.2.1. 给定作用于 G 上的一个算子，其非负特征值构成离散集合 λ_i，**谱函数** $F_G(x) = \lambda_{[nx]}$ 编码了这些特征值 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$。为了使其适用于$x \in [0,1]$，我们总是假设 $\lambda_0 = 0$ （且所有其他特征值均非负）。函数F 是分段常数，在特征值处跳跃，单调递增，并且 $F_G(0) = 0$ 且 $F_G(1) = \lambda_n$。**积分态密度** F^{-1} 是定义在 $[0,\infty)$上的单调 $[0,1]$值函数；这里将其视为分段常数函数，因此其**分布导数**是**态密度**概率测度 $dk = (F^{-1})'$ ，定义在 $\mathbb{R}^+$上，是一种离散的纯点测度，其支撑集位于 L的谱上。 F 的逐点收敛蕴含

F^{-1}，从而态密度测度弱-*收敛。函数 F^{-1} 在概率论中称为**累积分布函数**（CDF）。

4.2.2. 由于我们将考察一系列重心细分，其中第一次细分已经是一个图的惠特尼复形，因此不失一般性地假设单纯复形 G 来自图 $\Gamma = (V, E)$：各个单纯形于是就是 Γ 的完全子图的顶点集。

4.3. **距离**。

4.3.1. 对于顶点集相同的两个图，定义**图距离** $d(G, H)$ 为从 G 变为 H 所需修改的边数的最小值。如果没有预先给定宿主图，则令 $n(G, H)$ 为包含 G, H 的宿主图所能具有的最少顶点数。距离函数 $d(G, H)$ 可以扩展到顶点集不同的图；我们只需将 $d(G, H)$ 定义为通过将两者嵌入一个具有 $n(G, H)$ 个元素的公共图中所能达到的最小距离。

4.3.2. 将图距离定义为对称差$E(G)\Delta E(H)$的最小基数，若 G, H 均为 K_n 的子图，则有：

引理1. $||F_G - F_H||_1 \leq 4d(G,H)/n(G,H)$。
证明. 基尔霍夫拉普拉斯算子满足$\sum_{i,j} |L_{ij} - K_{ij}| \leq 4d(G,H)$，因为每条边$(i,j)$只影响四个矩阵元素 $L_{ij}, L_{ji}, L_{ii}, L_{jj}$。对于具有共同$n$个顶点的图的两个子图 G, H，其拉普拉斯算子为 L, H，特征值为 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$和 $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$，该不等式给出 $||\alpha - \beta||_1 \leq 4d(G,H)$，从而
$||F_G - F_H|| \leq 4d(G,H)/n$ □

4.3.3. 对于霍奇拉普拉斯算子，情况要稍微复杂一些。在每个 k-形式部分中，常数 4 需要替换为一个取决于 G 的最大 k-单纯形度的常数。不过，常数 $C_k(G,H)$ 的增长速度比 $d(G,H)$ 慢得多，呈指数级差异。若将 $d(G,H)$ 定义为图 $\Gamma(G) = (G, E(G))$ 与 $\Gamma(H) = (H, E(H))$ 之间的图距离，其中 $E(G) = \{(x,y) \in G^2, x \subset y$或 $y \subset x$和$x \neq y\}$，则仍有
$||F_G - F_H|| \leq C_k(G,H)d(G,H)$。为简便起见，我们将重点讨论 0-形式拉普拉斯算子。

4.4. **线性代数**。

4.4.1. 两个 $n \times n$ 矩阵 A, B 的特征值为 $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n$ 和 $\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_n$ 时的 **Lidskii–Last 不等式**为

引理 2. $||\alpha - \beta||_1 \leq \sum_{i,j=1}^{n} |A - B|_{ij}$ [29, 17] 对于任意两个复自伴 $n \times n$ 矩阵A, B 其特征值分别为 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$ 和 $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_n$。
证明。该表述以及将其化归为标准的 Lidksii 定理均归功于 Last[17]：记 $\gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_n$ 为自伴矩阵 C 的特征值：$= A - B$并令 U 为将 C 对角化的酉矩阵，使得 $\mathrm{Diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = UCU^*$：

$$\begin{aligned} \sum_i |\gamma_i| &= \sum_i (-1)^{m_i} \gamma_i = \sum_{i,k,l} (-1)^{m_i} U_{ik} C_{kl} U_{il} \\ &\leq \sum_{k,l} |C_{kl}| \cdot |\sum_i (-1)^{m_i} U_{ik} U_{il}| \leq \sum_{k,l} |C_{kl}| \,. \end{aligned}$$

Lidskii 不等式 [29] 给出 $\sum_j |\alpha_j - \beta_j| \leq \sum_j |\gamma_j|$。结合这两点可得 $\sum_j |\alpha_j - \beta_j| \leq \sum_{k,l} |C_{kl}|$。
□

4.4.2. 作为应用，我们看到，两个图的基尔霍夫谱之间的 l^1 距离G, H 可以用它们之间的距离来衡量：

推论1。 $\sum_j |\lambda_j(G) - \lambda_j(H)| \leq Cd(G, H)$ 。

证明。如果 A, B是两个图 G, H的基尔霍夫矩阵，且它们的距离为 $d(G, H)$，那么$\sum_{k,l} |A_{kl} - B_{kl}| \leq 4d(G, H)$。现在应用上述引理。□

4.5. **中心极限定理**。

4.5.1. 定理2的陈述可重述如下：

对于任意 G，弱极限 $\lim_{n\to\infty} dk(G_n)$存在且唯一，并且仅取决于 G的最大维数 q。

证明。(i) 如果 G 具有最大维数 q，则存在一个显式的 $(q+1)\times(q+1)$ 矩阵 A，它将 G_m的 f-向量映射到 G_{m+1}的 f-向量。该矩阵是上三角矩阵，其元素为 $A_{ij} = S(i,j)j!$ 其中， $S(i,j)$是第二类斯特林数 $S(i,j)$。对角线元素为$A_{kk} = k!$ 。因此，存在一个常数 C，使得对每个 $0 \leq k \leq q$, $f_q(G_0)((q+1)!)^m/C \leq f_q(G_m) \geq f_q(G_0)C((q+1)!)^m$，且 $f_k(G_0)(k+1)!)^m/C \leq f_k(G_m) \geq f_k(G_0)C(k+1)!)^m$。(ii) 如果 $G = K_{q+1}$ 是完全图，那么 F_{G_m} 在 $L^1[0,1]$ 中收敛，并在 (0, 1) 上逐点收敛。证明：对每个 m， G_{m+1}中有 $(q+1)!$ 个与 G_m同构的子图，它们构成对G_{m+1}的覆盖。它们的任意交集都处于更低维的集合中。由于该交集的顶点数以 $Cq!^m$ 为上界增长，因此有 $d(G_{m+1}, \bigcup_j G_m^{(j)}) \leq (q+1)!C(q!)^m$。这表明 $||F_{G_m} - F_{G_{m+1}}||_1 \leq C(q+1)!(q!)^m/((q+1)!)^m = C/(q+1)^{m-1}$。这个 $L^1([0,1])$ 中的柯西序列在该巴拿赫空间中有极限。

(iii) 重心细分在适当的度量下是压缩映射。每个 G_m 都是由有限个图的并集构成的，其中 H_m 是同构于 G_{m-1} 的子图，而剩余图 L 的维数小于 q。因此， F_{G_m} 和 F_{H_m} 具有相同的极限，因为 $F_{H_m} = F_{G_{m-1}}$。 K_{q+1} 的细分边界的重心演化，以及 L，都以指数速度变小。给定两个复形 A、B，则 $d(A_m, B_m) \leq C_q(d!)^m$，使得 $||F_{A_m} - F_{B_m}||_1 \leq 4C_q/(d+1)^m$。令 m_0 为 $c = C'/(q+1)^{m_0} < 1$。定义一个新的距离 $d'(A,B) = \sum_{k=0}^{m_0-1} d(A_k, B_k)$，使得 $d'(A_1, B_1) \leq cd'(A,B)$。应用巴拿赫不动点定理。

(iv) 函数 F_{G_m} 在 (0,1) 的每个紧子区间上都一致收敛：由于每个F_{G_m} 都是 $L^1([0,1])$ 中的单调函数，因此在 (0,1) 的紧子集上，指数收敛可由指数 L^1 收敛推出。（见 [19]）。在维数 q 下， $||F_{G_m}||_1 \to (q+1)!$ 以指数速度增长。事实上，由于边界单形的数量按 $(q!)^m$ 的速度增长，而内部单形的数量按 $((q+1)!)^m$ 的速度增长，收敛阶为 $1/(q+1)^m$。根据 **Courant-Fischer 极小极大原理** $F_G(1) = \lambda_n = \max(v, Lv)/(v, v) \geq \max(L_{xx}) = \max(\deg(x))$ 无限增长，因此在 (0,1) 的紧子区间上的 L^∞ 收敛无法延拓至 $L^\infty[0,1]$。□

4.5.2. 由此可知， G 的态密度依分布收敛到一个普适的态密度，它只取决于 q，因此得名“中心极限定理”。可以这样类比：将 G 或其拉普拉斯算子 L 视为随机变量，将拉普拉斯算子L的谱 $\sigma(L)$视为概率密度的对应物，而将重心细分操作视为两个独立同分布随机变量相加并归一化的对应物。

5. Manifolds

5.0.1. 第三个也是最后一个故事，是在过去10年 [11, 13, 15]间发展起来的。它融合了离散几何分析、离散微积分和离散代数几何。它可以看作莫斯-萨德定理**的** [21, 23]离散版本。如果将网络上取有限多个值的函数重新解释为自旋构型模型，它也涉及统计力学。在统计力学中，人们关注由期望给出的热力学量，通常还会取无限体积极限。我们也只考察所有可能的函数值都同时在一个单形上取得的界面结构。如果其宿主结构是流形，这就会产生子流形。

5.0.2. 我们在**离散流形**这一类中进行表述，无需引用连续情形即可做到这一点。流形在重心细分下保持不变。与之对应的**簇**是什么？在经典代数几何的框架中，我们在欧几里得空间或射影宿空间中寻找多项式方程组的解。在离散情形中，我们只需考察映射到一个含有 $(k+1)$ 个元素的有限集合的映射，然后找出所有取遍所有颜色值的单纯形。以 $k=1$ 为例，这意味着我们考察所有同时取到 0 和 1 两个值的单纯形。这些单纯形构成**界面情形**。

5.0.3. 令人惊讶的是，无论我们在 q-流形G上选择什么函数 $f\colon V(G) \to \{0,\dots,k\}$，只要水平曲面非空，它就是一个 $(q-k)$ 维流形。先验而言，这些水平曲面 H 是 G 中的开集（这意味着，如果 $x \in H$ 且 $x \subset y$，那么 $y \in H$）。但在重心细分后，它们又变成闭集（即子单纯复形）。

5.1. **拓扑学**。

5.1.1. 对任意有限抽象单纯复形 G，在 G 上都存在一种有限但非豪斯多夫的拓扑，它保留了 G 的连通性和维数性质。该拓扑由 G 上由包含关系 $x \subset y$给出的**偏序集结构**定义。这个**亚历山德罗夫拓扑** [1] $\mathcal{O}$ 在 G 上的**拓扑基**是**星形邻域** $U(x) = \{y \in G, x \subset y\}$ 的集合，它们是包含 x的最小开集。在正维情形下 $q > 0$，该拓扑永远不是豪斯多夫的，因为对于一条边 $x = (a,\ b)$，包含 $\{a\},\ \{b\}$ 的最小开集 $U(\{a\})$ $U(\{b\})$ 总有交集 $U(x)$。更多内容参见 [14]。

5.1.2. G 上的亚历山德罗夫拓扑带有双曲结构和对偶性。核$C(x) = \{y \subset x\}$ 是子单纯复形，因而是闭的。星形邻域 $U(x) = \{y \in G, x \subset y\}$是开的。开集的补集是闭的，反之亦然。这两个集合 $U(x)$ 和 $C(x)$ 将单位球面 $S(x) = U(x) \setminus U(x)$ 分成稳定球面 $S^-(x) = C(x) \setminus U(x)$ 和不稳定球面 $S^+(x) = U(x) \setminus C(x)$。事实上，$S(x) = S^-(x) \star S^+(x)$，其中 $A * B$ 是连接 $A \cup B \cup \{x \cup y, x \in A, y \in B\}$。函数 $f\colon G \to K_k = \{0,\dots,k\}$ 定义了一个开水平集 $G_f = \{x \in G, f(x) = K_k\}$。之所以称为双曲性，是因为流形上光滑映射的双曲不动点 x 具有稳定流形和不稳定流形，使得任意足够小的球面 $S_r(x)$ 都同胚于 $S_r^+(x) * S_r^-(x)$，其中 $S_r^\pm$ 是稳定流形或不稳定流形与 $S_r(x)$的交集。

5.2. **离散流形**。

5.2.1. 我们可以归纳地将**离散 q-流形** 定义为一种有限抽象单纯复形，其中所有单位球面 $S(x)$ 都是（ $q-1$ ） - 球面。 q- 球面是一个 q- 流形，去掉一个顶点后它是可缩的。一个复形 G 若满足以下归纳定义，则称为**可缩的**：存在一个单形 x ，使得 $G \setminus U(x)$ 和 $S(x)$ 都是可缩的。空复形 $\emptyset$ 被假定为（-1）-球面，而单点复形 $K = \{\{1\}\}$ 被假定为可缩的。

5.2.2. 所有这些内容都可以用图论重新表述，而且本质上是等价的，因为一个图定义了一个惠特尼复形，而一个复形定义了一个图。复形的图所对应的惠特尼复形就是重心细分。一个**离散 q-流形**是一个有限简单图$G = (V, E)$，其中每个单位球面 $S(v)$都是一个离散$(q-1)$-球面。对于一个顶点 $v \in V$，**单位球面** $S(v)$是由直接连接到 v的顶点生成的子图。一个**离散 m-球面**是一个离散 q-流形，具有这样的性质：移除某个顶点后，它就变成可缩的。归纳地说，如果存在一个顶点 $v \in V$，使得 $S(v)$和 $S \setminus v$都是可缩的，那么这个图就称为**可缩**。单点图 $K_1 = 1$ 是可缩的。空图是(-1)-球面。

5.2.3. 令 G_k 表示 K_{k+1} 子图的集合。它们也称为 k-单纯形，而 $f_k = |G_k|$是其基数。我们有 $G_0 = V, G_1 = E$。随后，Schl¨afli 将 G 的**欧拉示性数**定义为 $\chi(G) = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k f_k = f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots + (-1)^q f_q$。对于 2-流形，它是 $\chi(G) = f_0 - f_1 + f_2 = V - E + F$。

5.2.4. 无边的图是一个0-流形。如果 $V = 2,\ E =$0（移除一个顶点后得到 K_1 ，按定义是可缩的），那么0-流形就是一个0-球面。每个连通的1-流形都是一个1-球面，即一个 C_n 且 $n \geq 4$的圆图。每个有限的2-流形要么是一个2-球面 S^2，要么是环面或射影平面的连通和：$M = S^2,\ M = \mathbb{T}^2\# \cdots \#\mathbb{T}^2$ 或$M = \mathbb{P}^2\# \cdots \#\mathbb{P}^2$。2-球面是唯一欧拉示性数为2的2-流形。16胞体和600胞体是3-球面的例子。两个1-球面的连接是一个3-球面。一个k-球面与一个m-球面的连接是一个(k+m+1)-球面。将 G 与0-球面连接称为**悬挂**。

5.2.5. 欧拉公式 $\chi(G) = V - E + F = 2$ 对 2-球面的推广适用于高维。0-球面满足 $\chi(M) = V = 2$, 每个 1-球面都满足 $\chi(M) = V - E = 0$。每个 2-球面都满足$\chi(M) = V - E + F = 2$。这一规律继续成立：如果 M 是一个 q-球面，那么 $\chi(M) = 1 + (-1)^q$。这就是一般欧拉宝石公式。证明通过关于维数 q的归纳法进行：对于 $q = 0$，我们有 $\chi(M) = 2$。归纳假设是，所有 $(q-1)$-球面 S 都满足 $\chi(S) = 1 + (-1)^{q-1}$。取一个顶点 v。由于单位球面 $S(v)$ 是一个 $(q-1)$-球面，并且 $S(v) = B(v) \cap G \setminus v$，其中单位球 $B(v)$ 和 $G \setminus v$ 均为可缩空间，且欧拉示性数为 1，因此利用归纳假设可得 $\chi(M) = \chi(G \setminus v) + \chi(B(v)) - \chi(G \setminus v \cap B(v)) = 2 - (1 - (-1)^{q-1}) = 1 + (-1)^q$。

5.3. **水平曲面**。

5.3.1. 在连续情形中，流形可以构造为函数的水平曲面。例如 $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 是一个由 2 个圆组成的非连通一维簇。在离散情形中也可以模拟这一构造。取定义在顶点上的任意函数 V，其取值属于 $Z_k = \{0, \ldots, k\}$。它定义了一个新图 G_f，其顶点是函数 f 在其上取得所有 k 值的完全子图集合。如果其中一个点包含于另一个点，就用一条边连接这两个点。新图 G_f 是 M 的**重心细分**的子图：

5.3.2. 如果 G 是一个单纯复形，且 $x \in G$，则定义核 $S^-(x) = \{y \in G, y \neq x, y \subset x\}$和星 $S^+(x) = \{y \in G, y \neq x, x \subset y\}$。单位球面 $S(x)$ 是在由所有 $S^+(x)$生成的亚历山德罗夫拓扑中， $S^+(x)$ 的边界。

引理 3。 ***a)*** 若 G 是一个复形且 H 是可缩的，则 $G * H$ 是可缩的。
b) k-球面与 m-球面的连接是一个 $k+m+1$-球面。***c)*** 若 H 是一个复形，且 G、$G * H$ 是球面，则 H 是一个球面。***d)*** 对任意单纯复形 G 及任意 $x \in G$，都有 $S(x) = S^-(x) * S^+(x)$。***e)*** 若 G 是一个 q-流形，则其重心细分是一个 q-流形。

证明。 a) 对 $G * H$中的元素个数使用归纳法。若 G 和H 各只有一个元素，结论显然。对于 G 中的 v，有 $S_{G*H}(v) = S_G(v) * H$ 以及 $G * H \setminus v = (G \setminus v) * H$。对于 H中的 v，有 $S_{G*H}(v) = G * S_H(v)$ 和 $G * H \setminus v = G * (H \setminus v)$。因为它们都更小，根据归纳法可知它们都是可缩的。

b) 对 $n = k+m$ 使用归纳法。归纳假设是，对于 $k = 0$， $m = 0$连接是 C_4，它是一个 1-球面。假设该命题对所有 $k+m$ 都成立。取一个 $(k+1)$-球面 G 和一个 m-球面 H。给定 $v \in G$，我们有 $S_{G*H}(v) = S_G(v) * H$。右边是一个球面，因为 $S_G(v)$ 是一个 k 球面，而 H 是一个 m-球面。同样的论证表明，如果$w \in H$，那么 $S_{G*H}(w) = G * S_H(w)$ 是一个球面。由于 $G * H$ 中的每个单位球面都是球面，因此我们得到一个流形。要证明 $G * H \setminus w$ 在 $w \in H$ 下是可缩的，可利用 $G * H \setminus w = G * (H \setminus w)$ 和 a)。 $v \in G$ 的情形类似。
c) 对维数使用归纳法。由于 G， $S_H(x) * G$也是球面，所以 $S_H(x)$也是球面。d) 根据定义，每个 $y \in S(x)$要么严格包含于 x ，要么严格包含 x。 $S^-(x)$中的每个元素都包含于 x，因而也包含于 $S^+(x)$，所以确实有一个连接。
e) 我们需要证明，重心细分中的每个 $S(x)$都是一个$(q-1)$-球面。由于$S(x) = S^-(x) * S^+(x)$，我们只需证明 $S^-(x)$和 $S^+(x)$是球面。但是， $S^-(x)$是 x 的边界球面，因此若 x 是 k维的，它就是一个$(k-1)$-球面。鉴于 $^-(x)$和 $S(x)$都是球面，d)表明 $S^+(x)$是球面。□

5.3.3. 现在我们证明定理 3):

如果 G 是一个 m-流形，且 $f\colon G \to \{0, 1, \ldots, k\}$ 是任意函数，那么 G_f 要么为空，要么 G_f 是一个 $(m-k)$-流形。

证明。设 x 是一个 n-单形，在其上 f 取遍所有值。这意味着 $f(x) = \{0, 1, \ldots, k\}$。图 $S^-(x) = \{y \subset x, y \neq x\}$ 是 M 的重心细分中的一个 $(n-1)$-球面。 $S^-(x)$ 中 f 仍然达到 $\{0, 1, \ldots, k\}$ 的单纯形，根据归纳法是一个 $(n-1-k)$-流形。由于我们处于一个单形中，它必定是一个 $(n-1-k)$-球面。重心细分中的每个单位球面 $S(x)$ 都是一个 $(m-1)$-球面，因为它是 $S^-(x)$ 与 $S^+(x) = \{y, x \subset y, x \neq y\}$ 的连接。我们使用了上面的引理，该引理表明两个球面的连接始终是球面。 G_f 中的球面 $S_f^+(x)$ 与 M 中的 $S^+(x)$ 相同，因为 M 中包含 x 的每个单纯形 z 自动具有 $f(z) = Z_k$ 的性质。因此，G_f 中的单位球面 $S(x)$ 是一个 $(n-k-1)$-球面与 $m-n$-球面的连接，因而是一个 $(m-k-1)$-球面。既然已经证明 G_f 中的每个单位球面都是 $(m-k-1)$-球面，我们就看到 G_f 是一个 $(m-k)$-流形。□

5.4. **高斯-博内**。

5.4.1. 离散情形中的微分几何要容易得多，尤其是在高维情形下；在那里，高斯-博内-切恩定理已经相当难以证明。将任意单纯复形 G 或图中的顶点 v 的曲率定义为 $K(v) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k f_{k-1}(S(v))/(k+1)$。在二维流形的情形下，这归结为 $1 - f_0(S(v))/2 + f_1(S(v))/3 = 1 - d(v)/6$，其中 $d(v)$ 是顶点度。对于奇数维流形，曲率 $K(v)$ 恒为零。

5.4.2. 一般的高斯-博内定理为

定理 4. $\sum_{v \in V} K(v) = \chi(M)$

证明。将能量 $\omega(x) = (-1)^{\dim(x)}$ 赋给图中的每个单形 x，则欧拉示性数为 $\chi(M) = \sum_x \omega(x)$。现在将这些能量平均分配给一个 k-单形 x 所包含的 $k+1$ 个顶点。由于 $S(v)$ 中有 f_{k-1} 个单形与包含 v的单形相对应，因此每个顶点 v都会增加 $(-1)^k f_{k-1}(S(v))/(k+1)$。现在只需将顶点 v 处的所有项加总，即可得到曲率 $K(v)$。能量的转移保留了总能量 =欧拉示性数。□

5.4.3. 这是高斯-博内-切恩定理的离散类比（见 [3]）。

6. Three questions

6.1. **等谱集**。

6.1.1. 对于周期雅可比矩阵，等谱集是一个环面，其维数取决于间隙的数量。参见 [3, 31]。自然会想知道，当算子对于一个复数 G 是 $L = D^2$ 时，其结构是什么。

6.1.2. **问题 A**：定理1中的变形所得到的等谱集是什么？ ?

6.2. **普适测度**。

6.2.1. 每个测度 μ 都可以进行勒贝格分解为 $\mu = \mu_{pp} + \mu_{sc} + \mu_{ac}$。

6.2.2. 问题 B：极限态密度 dk_m有哪些谱类型？ ?

6.2.3. 在维数为 $m = 1$的情形下，若 L_0 和 L_1 等谱，则极限测度是绝对连续的，即 $[0, 4]$ 上的反正弦分布，其累积分布测度（CDM）为$2/\pi \arcsin(\sqrt{x}/2)$。

6.3. **子流形统计**。

6.3.1. 对于一个 m维流形 G和 $k < m$，所有满足 $V(G) \to \{0, \ldots, k\}$ 的函数 f构成的集合是有限的。在该集合上赋予均匀测度。令 b_f表示 G_f的贝蒂向量（b_0，b_1，...，b_q），并假设 $b_f(\emptyset) = (0, 0, \ldots, 0)$。期望 $\mathrm{E}[b_f(G)]$ 是一个向量（$\mathrm{E}[b_0]$，$\mathrm{E}[b_1]$，...，$\mathrm{E}[b_q]$）。

6.3.2. **问题 C**：G 与 $\mathrm{E}[b_f(G)]$相关的拓扑特征是什么？

7. Computer algebra

7.1. 等谱变形代码。 我们使用 QR 分解计算变形。

```
生成 [A ]:=If [A=={},{},排序 [删除 [并集 [排序 [展平 [映射[子集,A ] ,1]]] ,1]]]; 惠特尼 [s ]:=并集[排序 [映射[排序,生成
[FindClique [s,无穷,全部 ]]]]]; L=长度; sig [x ]:=Signature [x ]; nu [A ]:=If [A=={},0,L [A]-MatrixRank [A ]];
omega [x ]:=(-1)^(L [x ]-1); F [G ]:=模块[{l=映射[L,G]},If [G=={},{},表 [求和[If [l [[j ]]==k,1,0],{j,L [l ]}],{k,
Max[l ]}]]]; sig [x,y ]:=If [SubsetQ [x,y]&&(L [x]==L [y ]+1),sig [前置 [y,Complement[x,y ][[1]]]]*sig [x
] ,0]; 狄拉克 [G ]:=模块[{f=F[G] ,b,d,n=L [G]},b=前置 [表 [求和[f [[l ]],{l,k }],{k,L [f ]}],0]; d=表 [sig [G[[i ]] ,
G[[j ]]],{i,n },{j,n }]; {d+Transpose [d ],b }]; Hodge [G ]:=模块[{Q,b,H}, {Q,b}=狄拉克 [G]; H=Q.Q; 表 [表 [H[[b
[[k ]]+i,b [[k ]]+j ]],{i,b [[k+1]]-b [[k ]]},{j,b [[k+1]]-b [[k ]]}],{k,L [b ]-1}]]; Betti [s ]:=模块[{G}, If [
GraphQ [s ],G=惠特尼 [s ],G=s ];映射[nu,Hodge [G ]]]; F-向量 [A ]:=删除 [BinCounts [映射[L,A ]] ,1]; 欧拉 [A ]:=求和[
omega [A [[k ]]],{k,L [A ]}]; QR[A ]:=模块[{F,B,n,T},T=Transpose; F=T[A ]; n [x ]:=x/Sqrt [x.x ]; B={n [F [[1]]]};
Do[v=F [[k ]]; u=v-求和[(v.B [[j ]]) *B [[j ]],{j,k -1}];B=Append[B,n [u ]],{k,2,长度 [F ]}]; {T[B],B.A}];
QRDeformation [B,t ]:=模块[{Q,R,EE},{Q,R}=QR[矩阵指数[-t *B ]]; Transpose [Q ].B.Q ]; s=随机图 [{8,20}]; G=惠特尼 [s
]; {B,b}=Simplify [狄拉克 [G]]; Manipulate [B1 =QRDeformation [B,t ]; MatrixPlot [Chop[B1]], {t,0, 1}]
```

7.2. 重心细分代码。 我们计算 $q = 2$ 情况下的谱，并查看 K_3 的第 4 次细分。

```
生成 [A ]:=如果 [A=={},{},排序 [删除 [并集 [排序 [展平 [映射[子集,A ] ,1]]] ,1]]]; 面 [s ]:=FindClique [s,Infinity,
All ]; 惠特尼 [s ]:=生成 [面 [s ]]; L=长度; F [G ]:=模块[{l=映射[L,G]}, 如果 [G=={},{},表 [求和[如果 [l [[j ]]==k,1,0],
{j,L [l ]}],{k,Max[l ]}]]]; F-向量 [s ]:=F[惠特尼 [s ]]; 欧拉 [A ]:=求和[-(-1)^L [A [[k ]]],{k,L [A ]}]; 转换为图 [G ]:
=无向图 [n=L [G]; 图 [范围 [n ],选择 [展平 [表 [k->l, {k,n },{l,k+1,n }],1],(SubsetQ [G[[# [[2]]]] ,G [[# [[1]]]]]) &
]]]; 重心 [s ]:=转换为图 [惠特尼 [s ]]; 重心 [s,n ]:=Last [NestList [重心,s,n ]]; s=重心 [完全图 [3] ,4]; K=Kirchhoff 矩阵 [
s ]; n=L [K]; l=静默 [排序 [特征值 [1.K] ]]; UU[z ]:=求和[如果 [Abs[l [[k ]]] < 10^(-10),0,对数 [Abs [l [[k ]]-z ]]],{k,
L [l ]}]; S1=等高线图 [UU[x+I y ],{x, -2,10},{y, -6,6},等高线样式->线宽 [0.0001] ,绘图点数 ->200]; S2=绘图 [UU[x ]/
n, {x, -2, 10},绘图样式->{线宽 [0.002] ,紫色 }]; S3=图形 [{黑色,点大小 ->0.003,表 [点 [{l [[k ]], 0}],{k,L [l
]}]}]}]; S4=图形 [{蓝色,线宽 [0.002] ,线 [前置 [表 [{l [[k ]],4*(k-1)/n },{k,L [l ]}],{-2,0}]]}]; S=显示[{S1,S2,S3,
S4},绘图范围->{{-2,10}, {-4,5}},纵横比->9/16]
```

7.3. 流形中水平集的代码。取一个4-球面，计算其中的流形，并检验高斯-博内公式：

```
生成 [A ]:=If [A=={},{},排序 [删除 [并集 [排序 [展平 [映射[子集,A ] ,1]]] ,1]]]; 惠特尼 [s ]:=生成 [
FindClique [s,Infinity,All ]]; w[x ]:=-(-1)^k; R[G,k ]:=模块[{} ,R[x ]:=x->RandomChoice [Range [k ]]; 映
射[R,并集[展平 [G ]]]]; F [G ]:=删除 [BinCounts [映射[长度,G]] ,1]; 欧拉 [G ]:=F [G]. 表 [w[k ],{k,长度 [F [G
]]}]; Surface [G,g ]:=Select [G,SubsetQ [#/.g,并集 [展平 [G]/.g ]]&]; 清除 [S ]; S [s,v ]:=VertexDelete [
NeighborhoodGraph [s,v ] ,v ]; Sf [s,v ]:=F [惠特尼 [S [s,v ]]]; 曲率 [s,v ]:=模块[{f=Sf [s,v ]},1+f. 表[(
-1)^k /(k+1),{k,长度 [f ]}]]; 曲率值 [s ]:=模块[{V=Vertex List [s ]}, 表 [曲率 [s,V [[k ]]],{k,长度 [V ]}]];
J [G,H ]:=并集 [G,H+Max[G]+1, 映射 [ 展平,映射 [ 并集,展平 [Tuples [{G,H+Max[G]+1}],0]]]]; 转换为图 [G ]:=
无向图 [n=长度 [G]; 图 [Range [n ],Select [展平 [表 [k->l, {k,n },{l,k+1,n }],1],(SubsetQ [G[[# [[2]]]] ,G [[
# [[1]]]]]) & ]]]; 重心 [s ]:=转换为图 [惠特尼 [s ]]; G=J [惠特尼 [重心 [完全图 [{2,2,2}]]], 惠特尼
CycleGraph [7]]]; (* J=Join *)g=R[G, 3]; H=Surface [G,g ];
(* A codimension 2 manifold in the 4-sphere G=Oct * C 7 *)打印 ["EulerChi=","欧拉 [H ]]; 打印 ["
Fvector:","F[H ]]; s=转换为图 [H ]; 三维图绘制 [s ]打印 ["Gauss-Bonnet Check:"]; 打印 [总计 [曲率值 [s
]]==欧拉 [H ]];
```

References

[1] P. 亚历山德罗夫. 离散空间. 《数学文集》2, 2, 1937.[2] A. 孔涅. 非交换几何. 学术出版社, 1994.[3] H.L. Cycon, R.G.Froese, W.Kirsch, and B.西蒙. 薛定谔算子——及其在量子力学与整体几何中的应用. 施普林格出版社, 1987.[4] J. 迪厄多内. 代数与微分拓扑史，1900—1960年. Birkhäuser, 1989.[5] B. 埃克曼. 复形上的调和函数与边值问题. 《瑞士数学评论》, 17(1):240–255, 1944.[6] J. Fr¨ohlich and T. 斯宾塞. 安德森局域化的一种严谨方法. 《物理报告》, 103:9–25, 1984.[7] W.F.D. 霍奇. 黎曼流形上的调和泛函. Proc. London Math. Soc, 36:257–303, 1933.[8] O.E. 兰福德三世. 费根鲍姆不动点存在性的一种更简短证明. Commun. Math. Phys, 96:521–538, 1984.[9] J.Milnor. 某些流形上拉普拉斯算子的特征值. Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 51:542, 1964.[10] O. 克尼尔. 几何中的一个可积演化方程. http://arxiv.org/abs/1306.0060, 2013.[11] O. 克尼尔. 图论中的一个萨德定理. http://arxiv.org/abs/1508.05657, 2015.[12] O. 克尼尔. 重心细分的普适性. http://arxiv.org/abs/1509.06092, 2015.[13] O. 克尼尔. 离散流形中的离散代数集. https://arxiv.org/abs/2312.14671, 2023.[14] O. 克尼尔. 有限几何的有限拓扑. https://arxiv.org/abs/2301.03156, 2023.[15] O. 克尼尔. 由划分构造流形. https://arxiv.org/abs/2401.07435, 2024.[16] O. 克尼尔. 软重心细分. https://arxiv.org/abs/2503.00909, 2025.[17] Y. 拉斯特. 个人通信. 在加州理工学院, 1995.[18] P.D. 拉克斯. 非线性演化方程与孤立波的积分. 库朗数学科学研究所AEC报告，1968年1月.[19] J.T. 刘易斯 and O. 希沙. 单调函数的Lp收敛及其一致收敛. 《逼近理论杂志》, 14:281–284, 1975.[20] M. Queff´elec. 替代动力系统——谱分析，《数学讲义》第1294卷. Springer, 1987.[21] A.P. 莫尔斯. 函数在其临界集上的行为. 《数学年刊》(2), 40(1):62–70, 1939.[22] P.Deift, L.C. 李, and C. 托梅. 含无穷多个变量的Toda流. 《泛函分析杂志》, 64:358–402, 1985.[23] A. 萨德. 可微映射的临界值测度. Bull. Amer. Math. Soc., 48:883–890, 1942.[24] B. 西蒙. 泛函积分与量子物理. 学术出版社, 1979.[25] B. 西蒙. 计算机代数系统比较评述. 《美国数学会通报》, 39:700–810, 1992.[26] B. 西蒙. 格气体的统计力学，第I卷. 普林斯顿大学出版社, 1993.[27] B. 西蒙. 符号数学强大工具. 《桌面工程》, 1:42–51, 1995.[28] B. 西蒙. 符号数学强大工具再探. 《桌面工程》, 2:52–53, 1997.[29] B. 西蒙 . 迹理想及其应用 . 美国数学会 , 第 2 版 , 2010.[30] B. 西蒙 . 分析学综合教程 . 美国数学会, 2017.[31] B. 西蒙. 弗里茨与我——逆谱理论视角. 《纯粹与应用泛函分析在线期刊》, 4:1093–1113, 2024.[32] W. 西姆斯. 有限非周期Toda晶格的QR算法与散射. 《物理学D辑》, 4:275–280, 1982.[33] M. 户田. 非线性相互作用链的振动. 《日本物理学会杂志》, 22:431–436, 1967.[34] M. 户田. 非线性晶格理论. 施普林格出版社, 柏林, 1981.[35] P. 范·莫尔贝克. 关于离散拉普拉斯算子的等谱变形. 载于《整体分析》（加拿大数学会两年一度研讨会论文集，卡尔加里大学，阿尔伯塔省卡尔加里，1978年），《数学讲义》第755卷，第313–370页. 施普林格出版社，柏林，1979年.[36] E. 威滕. 超对称与莫尔斯理论. J. of Diff. Geometry, 17:661–692, 1982.

Department of Mathematics, Harvard University, Cambridge, MA, 02138