arXiv:2601.10840v1 [math.RA] 15 Jan 2026

ˇ ˇ正交格的对偶 Ploščica 空间

ANDREW CRAIG* 和 MIROSLAV HAVIAR**

Dedicated to the memory of Professor Günther Eigenthaler.

Abstract. 我们描述带有拓扑的有向图，这些有向图给出了正交格的对偶表示。为此，我们采用所谓的格的对偶 Ploščica 空间。首先，我们改进了早期论文中 Ploˇsˇcica 空间的定义，使其成为 Priestley 空间全序不连通性直接且自然的推广。随后，我们将一般正交格的对偶空间定义为其格约化的对偶 Ploˇsˇcica 空间，并配备一个表示正交补运算的映射。我们引入了抽象正交 Ploˇsˇcica 空间，用以刻画正交格对偶空间的性质，并给出一般正交格与正交 Ploˇsˇcica 空间之间的对偶表示定理。最后，我们通过实例说明这些对偶表示。

1. Introduction

1936年，G. Birkhoff 和 J. von Neumann [2] 提出将希尔伯特空间的闭子空间格作为“量子力学逻辑”的适当模型。赋有正交补关系的这种格称为正交格。如果所考虑的希尔伯特空间是有限维的，其闭子空间构成的正交格是模的。然而，对于无限维希尔伯特空间，正如 K. Husimi [18] 于1937年所证明的，成立的只有一种较弱的定律，即所谓的正交模律。

G. Kalmbach [19], 、L. Beran [1], 、P. Pt´ak 和 S. Pulmannov´a [24], 以及 A. Dvureˇcenskij 和 S. Pulmannov´a [14]的专著系统地阐述了正交格和正交模格理论。推荐读者将这些书作为了解正交模格和量子结构的基础资料。（关于后者，还可参阅约四十年前发表于本刊的论文 [13]。）

在我们较早的论文中， [10] 我们将文献 [25] 中关于有界一般格的 Urquhart 对偶空间（L-空间）的描述转换到了 Ploˇsˇcica 框架 [21] ，并自然地将这些对象称为 *Ploščica* 空间。这些空间是带有拓扑 $\mathbb{P} = (X, E, \tau)$ 的有向图，其中 E 是 Ploˇsˇcica 边集，而 τ 是 Urquhart 所使用的紧拓扑 [25]。我们在 [10] 中表达了这样的观点：与配备两个拟序关系的 Urquhart L-空间相比，Ploˇsˇcica 空间更易于处理。我们还认为，通过极大部分态射从 Ploˇsˇcica 对偶恢复格，比通过 Urquhart 表示中的双重闭稳定集从其对偶 L-空间恢复格更简单、更自然。使用 Ploˇsˇcica 空间的另一个优点是，当格 **L** 是分配的时，Ploˇsˇcica 空间中的边关系 E 变成 Priestley 对偶中所使用的序关系，而 Ploˇsˇcica 空间也就变成 Priestley 空间。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：06C15、06B15、05C20。*Key words and phrases.* 正交格、格、TiRS 有向图、Ploˇsˇcica 空间、正交 Ploˇsˇcica 空间。第一作者感谢南非国家研究基金会（NRF）提供的资助 127266，以及斯洛伐克国家奖学金计划。第二作者感谢斯洛伐克 VEGA 提供的资助 1/0152/22。

在本文第 3 节中，我们证明了从 [10] 给出的 Ploˇsˇcica 空间定义可以得到简化，从而直接而自然地推广 Priestley 空间的全序不连通性（参见 [22], [23]）。简化 Ploˇsˇcica 空间之后，我们将提及文献 [10] 中关于 Ploˇsˇcica 空间的其他结果；这些结果将在我们关于正交格的对偶表示定理中用到。

在第 4 节中，我们将一般正交格 $\mathbf{L}'$ 的对偶空间定义为该正交格 $\mathbf{L}'$ 的格约化所对应的对偶 Ploˇsˇcica 空间，并配备映射 g，此映射将在对偶侧表示正交补运算。我们给出对偶空间上该映射 g 满足的公理，随后将抽象正交 Ploˇsˇcica 空间定义为配备此类 g-映射且满足这些公理的 Ploˇsˇcica 空间。

在第 5 节中，我们给出一般正交格与正交 Ploˇsˇcica 空间之间的对偶表示定理。这些定理以 [10] 中所述的有界一般格与 Ploˇsˇcica 空间之间的对偶表示定理为基础。

在第6节中，我们通过三个例子来阐释我们的结果。

2. Preliminaries

正交格是一种代数 $\mathbf{L}' = (L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$，其中 $(L; \vee, \wedge, 0, 1)$ 是一个有界格，且 $'$ 是正交补运算，即对所有 $a, b \in L$，以下恒等式均成立：

$$(a')' = a,\ a \wedge a' = 0,\ a \vee a' = 1,\ (a \wedge b)' = a' \vee b',\ (a \vee b)' = a' \wedge b'.$$

正交模格是指满足正交模律的正交格；该定律指出，对所有 $a, b \in L$，

$$a \leqslant b \ \Rightarrow\ b = a \vee (b \wedge a').$$

正交模律的一个等价形式是恒等式 $(a, b \in L)$

$$b = (b \wedge a) \vee [b \wedge (b \wedge a)'].$$

为了比较正交模格与布尔代数，可以在正交模格上定义各种类型的对称差（见 [12] 和 [11]）；对于布尔代数，这些对称差与传统的对称差一致。此外，处理布尔代数时可以使用分配律，但在正交模格中，分配律通常并不成立。

现在回顾一下 [10] 中的基本概念和事实，这些内容将在后文用到。

从格 $L = (L; \vee, \wedge, 0, 1)$ 到格 $\mathbf{2} = (\{0, 1\}; \vee, \wedge, 0, 1)$ 的部分同态 是指一个偏映射 f: $L \to \{0, 1\}$，使得 $\mathrm{dom}\ f$ 是 $\mathbf{L}$ 的一个 $(0, 1)$-子格，且 $f{\restriction_{\mathrm{dom}\, f}}$ 是一个 $(0, 1)$-格同态。极大部分同态 （简称*MPH*）是指一个没有真扩张的部分同态。我们用 $\mathcal{L}^{\mathrm{mp}}(\mathbf{L}, \mathbf{2})$ 表示从 $\mathbf{L}$ 到 $\mathbf{2}$ 的所有 MPH 的集合。

Ploˇsˇcica 在集合 $P_{\mathbf{L}} = \mathcal{L}^{\mathrm{mp}}(\mathbf{L}, \mathbf{2})$（从 $\mathbf{L}$ 到 $\mathbf{2}$ 的 MPH 集合）上定义的二元关系（见 [21]或 [10, 第 4] 页）满足：对于任意 MPH $f, g \in P_{\mathbf{L}}$，

(E1) $(f,\ g) \in E \iff (\forall x \in \text{支配 } f \cap \text{支配 } g)\ f(x) \leqslant g(x)$。

对于带界元的一般格 $\mathbf{L} = (L; \vee,\ \wedge,\ 0,\ 1)$，从 $\mathbf{L}$ 到 $\mathbf{2}$ 的 MPH 自然对应于 $\mathbf{L}$ 的极大不相交滤子-理想对（简称*MDFIP*），现在回顾其定义。（例如参见 [21, p. 76] 或 [10, p. 4]。）

定义 2.1。若格 $\mathbf{L}$ 带有界元，则称一对 $\langle F, I\rangle$ 为其不相交滤子-理想对（简称 DFIP），如果 F 是 $\mathbf{L}$ 的滤子，且 I 是 $\mathbf{L}$ 的理想，并满足 $F \cap I = \varnothing$。所谓极大不相交滤子-理想对 $\langle F, I\rangle$，是指 $\mathbf{L}$ 的一个 DFIP，且不存在满足 $F \subseteq G$ 和 $I \subseteq J$ 的 DFIP $\langle G, J\rangle \neq \langle F, I\rangle$。

当 $\mathbf{L}$ 的对偶空间的基集取为 $\mathbf{L}$ 的所有 MDFIP 组成的集合 $X_{\mathbf{L}}$ 时，便在 $X_{\mathbf{L}}$ 上定义 Ploˇsˇcica 关系 E，使得（见 [21, 第 76] 页或 [10, 第 5] 页）对任意两个 MDFIP $\langle F, I\rangle$ 和 $\langle G, J\rangle$,

(E2) $\langle F, I\rangle E\langle G, J\rangle \iff F \cap J = \emptyset$.

在 Craig、Gouveia 和 Haviar 的工作 [4] 中，我们描述了与有界一般格对偶的有向图（V， E）的性质。我们确定了这些有向图的三个性质 (Ti)、(R)、(S)，并在 [4] 中将其称为 *TiRS*图 （另见 [5]）。不过，从我们较新的论文 [9]和 [7], 开始，我们倾向于使用术语 *TiRS* 有向图。为介绍其定义，我们回顾一下所用的记号： $xE = \{\, y \in V \mid (x,\ y) \in E \,\}$ 和 $Ex = \{\, y \in V \mid (y,\ x) \in E \,\}$。

定义 2.2 （[4, 定义 2.2]）。 TiRS 有向图 $G = (V,\ E)$ 是一个集合 V及一个自反关系$E \subseteq V \times V$，满足：

(S) 若 $x, y \in V$且 $x \neq y$，则 $xE \neq yE$ 或 $Ex \neq Ey$。(R) 对所有 $x, y \in V$，若 $xE \subset yE$，则 $(x, y) \notin E$；若 $Ex \subset Ey$，则 $(y, x) \notin E$。(Ti) 对所有 $x, y \in V$，若 $(x, y) \in E$，则存在 $z \in V$使得 $zE \subseteq xE$且 $Ez \subseteq Ey$。

值得回顾的是，根据 [4, 命题 2.3] （另见 [10, 第 5] 页），任意具有（可能是无限）界元的一般格 $\mathbf{L}$ 的对偶有向图 $(P_{\mathbf{L}}, E)$ 和 $(X_{\mathbf{L}}, E)$ 都是 TiRS 有向图。

我们还注意到，上述定义中的 (S) 表示“分离”。若 $G = (P_{\mathbf{L}}, E)$，则对 $x, y \in P_{\mathbf{L}}$， $x \neq y$ 显然蕴含 $x^{-1}(1) \neq y^{-1}(1)$ 或 $x^{-1}(0) \neq y^{-1}(0)$。类似地，条件 (R) 是对偶 $G = (P_{\mathbf{L}}, E)$ 中某个性质的抽象表述：若$x^{-1}(1) \supset y^{-1}(1)$，那么由于 $\langle y^{-1}(1)\ y^{-1}(0)\rangle$ 是一个 MDFIP，我们不可能有 $x^{-1}(1) \cap y^{-1}(0) = \emptyset$，即不可能有 $(x, y) \in E$。(Ti) 条件背后的直观是，当格$\mathbf{L}$ 是分配的且关系 E 成为 Priestley偏序时，(Ti) 表示每当 $x \leqslant y$，就存在 z 属于区间 $[x, y]$。

在 [4] 中，我们将20世纪30年代伯克霍夫提出的有限分配格与有限偏序集之间的经典对偶表示，扩展为所有有限格与所有有限 TiRS 有向图之间的对偶表示。

在 [10] 中，我们证明了 TiRS 有向图满足以下“弱反对称性”条件（wA）：

命题2.3 ([10, 引理 2.3]). 设 $G = (V, E)$ 是一个 *TiRS* 有向图。那么

(wA) 对于所有 $x, y \in V$，如果 $xE \subseteq yE$ 且 $Ex \subseteq Ey$，那么 $x = y$。

现在我们回顾有关一般有向图 $G = (X, E)$ 的一些事实，这些事实将在陈述 [21] 中的 Ploˇsˇcica 对偶表示定理时用到。设 $\underset{\sim}{\mathbf{2}} = (\{0, 1\}, \leqslant)$ 是关系 E 为 $\{0, 1\}$ 上偏序 $\leqslant$ 的二元有向图。若偏映射 $\varphi\colon X \to \underset{\sim}{\mathbf{2}}$ 满足：对于 $x, y \in \in \mathrm{dom}\ \varphi$，只要 $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$，则 $(x, y) \in E$，就称该映射保持关系 E。我们用 $\mathcal{G}^{\mathrm{mp}}(G, \underset{\sim}{\mathbf{2}})$ 表示从 G 到 $\underset{\sim}{\mathbf{2}}$ 的所有极大 E-保持映射组成的集合。

由下述引理可知，对于有向图 $G = (X,\ E)$ 和 $\varphi,\ \psi \in \mathcal{G}^{\mathrm{mp}}(G,\ \underset{\sim}{\mathbf{2}})$,

$$\varphi^{-1}(1) \subseteq \psi^{-1}(1) \iff \psi^{-1}(0) \subseteq \varphi^{-1}(0).$$

引理 2.4 (参见 [21, 引理 1.3])。 设 $G = (X, E)$ 是一个有向图，并考虑 $\varphi \in \mathcal{G}^{\mathrm{mp}}(G, \underset{\sim}{\mathbf{2}})$。那么

(i) $\varphi^{-1}(0) = \{\, x \in X \mid$ 不存在满足 $(y, x) \in E \,\}$ 的 $y \in \varphi^{-1}(1)$；
(ii) $\varphi^{-1}(1) = \{\, x \in X \mid$ 不存在满足 $(x, y) \in E \,\}$ 的 $y \in \varphi^{-1}(0)$。

因此，在 $\mathcal{G}^{\mathrm{mp}}(G,\ \underset{\sim}{\mathbf{2}})$ 上定义的自反且传递的二元关系 $\leqslant$： $\varphi \leqslant \psi$ 当且仅当 $\varphi^{-1}(1) \subseteq \psi^{-1}(1)$，是一个偏序。

我们指出，Ploˇsˇcica 对格 $\mathbf{L}$ 的对偶被 [21] 定义为带有拓扑$\mathcal{D}(\mathbf{L}) = (P_{\mathbf{L}}, E, \mathfrak{T}_{\mathbf{L}})$ 的有向图，其基集是从 $\mathbf{L}$ 到 $\mathbf{2}$ 的所有 MPH 的集合，其中拓扑 $\mathfrak{T}_{\mathbf{L}}$ _

其子基由所有形如以下形式的闭集组成

$$V_a = \{\, f \in \mathcal{L}^{\mathrm{mp}}(\mathbf{L}, \underline{\mathbf{2}}) \mid f(a) = 0 \,\} \quad \text{and} \quad W_a = \{\, f \in \mathcal{L}^{\mathrm{mp}}(\mathbf{L}, \underline{\mathbf{2}}) \mid f(a) = 1 \,\}$$

对所有 $a \in L$。此拓扑 $\tau_{\mathbf{L}}$ 是 T_1 且是紧致的，结果发现它与 Urquhart 所使用的拓扑相同（[25,引理 6]）。

我们还需要回顾带拓扑的一般有向图 $\mathbb{P} = (X, E, \tau)$ 的相关事实。（另见 [8]。）映射 $\varphi\colon (X_1, E_1, \tau_1) \to (X_2, E_2, \tau_2)$ 若保持关系且作为从 (X_1, τ_1) 到 (X_2, τ_2) 的映射连续，则称为态射。部分态射是一个偏映射 $\varphi\colon (X_1, E_1, \tau_1) \to (X_2, E_2, \tau_2)$，其定义域是 X_1 的 τ_1-闭子集，且 φ 在其定义域上的限制是一个态射。极大部分态射（MPM）是指不存在严格扩张它的部分态射。我们用 $\mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\tau}(\mathbb{P}, \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\tau})$ 表示从带拓扑 $\mathbb{P} = (X, E, \tau)$ 的有向图到带离散拓扑的二元有向图 $\underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\tau}$ 的 MPM 集合。

现在我们给出有界一般格的 Plo̍s̍cica 表示定理：

命题 2.5 ([21, 引理 1.2、1.5，定理 1.7], [10, 命题 2.5])。 设 $\mathbf{L}$ 是一个有界格，且令 $\mathcal{D}(\mathbf{L}) = (P_{\mathbf{L}}, E, \tau_{\mathbf{L}})$ 为 $\mathbf{L}$ 的对偶。对于 $a \in L$，令求值映射 $e_a\colon \mathcal{D}(\mathbf{L}) \to \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\tau}$ 定义如下：

$$e_a(f) = \begin{cases} f(a) & a \in \mathrm{dom}(f), \\ - & \textit{undefined otherwise.} \end{cases}$$

则有以下结论：

(i) 对每个 $a \in L$，映射 e_a 都是 $\mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\tau}(\mathcal{D}(L), \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\tau})$ 的一个元素。*(ii)* 每个 $\varphi \in \mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\tau}(\mathcal{D}(L), \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\tau})$ 都可表示为 e_a，其中某个 $a \in L$。*(iii)* 映射 $e_{\mathbf{L}} : L \to \mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\tau}(\mathcal{D}(L), \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\tau})$ 由求值给出，$a \mapsto e_a$（$a \in L$），它是 L 到格 $\mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\tau}(\mathcal{D}(L), \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\tau})$ 上的同构，该格按关系 $\varphi \leqslant \psi$ 排序，当且仅当 $\varphi^{-1}(1) \subseteq \psi^{-1}(1)$。

接下来的两个引理将在第 4 节中使用。

引理 2.6。 带有界元的格 $\mathbf{L}$ 的对偶 $\mathcal{D}(\mathbf{L}) = (P_{\mathbf{L}}, E, \tau_{\mathbf{L}})$ 对任意 $x, y \in P_{\mathbf{L}}$ 满足以下条件：

(i) $xE \subseteq yE$ 当且仅当 $y^{-1}(1) \subseteq x^{-1}(1)$；
(ii) $Ex \subseteq Ey$ 当且仅当 $y^{-1}(0) \subseteq x^{-1}(0)$。

证明。 我们证明 (i)，而 (ii) 可类似地证明。如果 $xE \subseteq yE$ 且 $y(a) = 1$ 对于 $a \in L$ 成立，那么利用 E 的自反性可得 $x \in yE$，从而 $(y, x) \in E$，因此 $x(a) = 1$。反之，若 $y^{-1}(1) \subseteq x^{-1}(1)$ 且 $z \in xE$ 对于 $z \in P_{\mathbf{L}}$ 成立，则 $(x, z) \in E$，即 $x^{-1}(1) \cap z^{-1}(0) = \emptyset$。于是 $y^{-1}(1) \cap z^{-1}(1) = \emptyset$，从而 $(y, z) \in E$，即 $z \in yE$，如所要求。□

下述引理摘自 [10]，通常用于 S 为滤子或理想的情形。

引理 2.7 ([10, 引理 4.5])。 设 $\mathbf{L}$ 是一个格，且 $S \subseteq L$。

(i) 若 I 是 $\mathbf{L}$ 的一个理想，且相对于与集合 S 不相交这一条件是极大的，那么对每个元素 $y \notin I$，都存在一个元素 $x \in I$ 使得 $x \vee y \in S$。(ii) 若 F 是 $\mathbf{L}$ 的一个滤子，且相对于与集合 S 不相交这一条件是极大的，那么对每个元素 $y \notin F$，都存在一个元素 $x \in F$ 使得 $x \wedge y \in S$。

最后，我们回顾一些来自 [6] 的事实（另见 [16] 和 [3]）。设 $G = (X, E)$ 是一个有向图。与其有向图关系的补集 E^{c} 相关联的上下文 是指三元组

$\mathbb{K}(G) := (X, X, E^{\complement})$，其中 $E^{\complement}$ 由 $E^{\complement} = (X \times X)\backslash E$ 给出。随后，通过所谓的极性集 定义伽罗瓦连接，使得这些映射

$$E^{\complement}_{\triangleright} : (\wp(X), \subseteq) \to (\wp(X), \supseteq) \quad \text{and} \quad E^{\complement}_{\triangleleft} : (\wp(X), \supseteq) \to (\wp(X), \subseteq)$$

由下式给出

$$E^{\complement}_{\triangleright}(Y) = \{\, x \in X \mid (\forall\, y \in Y)(y, x) \notin E \,\},$$
$$E^{\complement}_{\triangleleft}(Y) = \{\, z \in X \mid (\forall\, y \in Y)(z, y) \notin E \,\}.$$

那么，上下文 $\mathbb{K}(G) = (X, X, E^{\complement})$ 的概念格 $\mathbf{CL}(\mathbb{K}(G))$ 是一个按包含关系排序的完备格，由 $\mathbf{CL}(\mathbb{K}(G)) = \{\, Y \subseteq X \mid (E^{\complement}_{\triangleleft} \circ E^{\complement}_{\triangleright})(Y) = Y \,\}$ 给出。

3. Simplifying Ploščica spaces

本节开头，我们将证明，[10] 中给出的 Plo˘s˘cica 空间定义可以简化，使其成为 Priestley 空间全序不连通性的直接且自然的推广（参见 [22], [23]）。

我们首先回顾 [10] 中给出的 Plo˘s˘cica 空间定义。

定义 3.1（[10, 定义 3.1]）。*Plo˘s˘cica* 空间是一种结构 $\mathbb{P} =$（X，E，$\mathcal{T}$），满足 at

（1）（X，E）是一个 TiRS 有向图，且（X，$\mathcal{T}$）是一个紧致拓扑空间。（2）$\mathbb{P}$ 是双重不连通的，即对于任意 x，$y \in X$：（a）如果 $yE \not\subseteq xE$，则存在 $\varphi \in \mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\mathcal{T}}$（$\mathbb{P}$，$\underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\mathcal{T}}$），使得 $\varphi(x) = 1$ 且 $\varphi(y) \neq 1$。（b）如果 $Ey \not\subseteq Ex$，则存在 $\varphi \in \mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\mathcal{T}}$（$\mathbb{P}$，$\underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\mathcal{T}}$），使得 $\varphi(x) = 0$ 且 $\varphi(y) \neq 0$。（3）对于任意 φ、$\psi \in \mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\mathcal{T}}$（$\mathbb{P}$，$\underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\mathcal{T}}$），集合

$$E^{\complement}_{\triangleleft}(\varphi^{-1}(0) \cap \psi^{-1}(0)) \quad \text{and} \quad E^{\complement}_{\triangleright}(\varphi^{-1}(1) \cap \psi^{-1}(1))$$

是闭的。

（4）族

$$\{\, X\backslash\varphi^{-1}(1) \mid \varphi \in \mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\mathcal{T}}(\mathbb{P}, \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\mathcal{T}}) \,\} \cup \{\, X\backslash\varphi^{-1}(0) \mid \varphi \in \mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\mathcal{T}}(\mathbb{P}, \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\mathcal{T}}) \,\}$$

构成 $\mathcal{T}$ 的一个子基。

现在回顾一下，Priestley 空间的全序不连通性意味着，对于任意两个点 $x \neq y$，都存在一个能将它们分开的既开又闭的上集（或等价地，下集）。在[10] 中，我们将双重不连通性条件（2）解释为 Priestley 空间全序不连通性的一种推广，具体而言：由引理 2.3 可知，在 TiRS 有向图中，$x \neq y$ 导出 $yE \not\subseteq xE$ 或 $Ey \not\subseteq Ex$，因此，双重不连通性（2）可理解为：$x \neq y$ 蕴含存在一个 MPM $\varphi \in \mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\mathcal{T}}(\mathbb{P}, \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\mathcal{T}})$，使得 $\varphi(x) = 1$ 且 $\varphi(y) \neq 1$；或者存在一个 MPM $\psi \in \mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\mathcal{T}}(\mathbb{P}, \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\mathcal{T}})$，使得 $\psi(x) = 0$ 且 $\psi(y) \neq 0$。

为了简化上述定义 3.1 中双重不连通性的条件 (2)，并将其表述为 Priestley 空间全序不连通性的更自然推广，我们回顾 [10]中的以下结果。我们现在将该结果中的条件称为（*TED*）条件，即全边不连通性。

命题 3.2 ([10, 推论 3.11])。设 $\mathbb{P} = (X, E, \mathcal{T})$ 是一个 *Plo˘s˘cica* 空间。以下结论成立：

(全边不连通性) 对于任意满足$(x, y) \notin E$的 $x, y \in X$，都存在 $\varphi \in \mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\mathcal{T}}(\mathbb{P}, \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\mathcal{T}})$ 使得 $\varphi(x) = 1$ 且 $\varphi(y) = 0$。

我们将证明，新条件 (TED) 等价于定义 3.1 中较为复杂的条件 (2)。值得注意的是，简化后的全边不连通性 (TED) 条件恰好就是全序不连通性，只需将 Ploˇsˇcica 有向图关系 E 替换为 Priestley 序关系 $\leqslant$，并将 MPM 替换为保序连续函数。

在接下来的两个结果中，条件 (1)–(4) 指的是定义 3.1。

引理 3.3。设 $\mathbb{P} = (X, E, \Im)$ 是一个带有拓扑的有向图。那么，条件 (全边不连通性) 蕴含条件 (2)。

证明。若 $yE \not\subseteq xE$，则存在 z，使得 $(y,z) \in E$，但 $(x,z) \notin E$。由于 $(x,z) \notin E$，由全边不连通性可知，存在一个 MPM φ，使得 $\varphi(x) = 1$ 且 $\varphi(z) = 0$。由于 $(y,z) \in E$ 且 $\varphi(z) = 0$，我们得到 $\varphi(y) \neq 1$。这就证明了 2(a)。

为证明 2(b)，若 $Ey \not\subseteq Ex$，则存在 z，使得 $(z,y) \in E$ 且 $(z,x) \notin E$。由全边不连通性可知，存在一个 MPM φ，使得 $\varphi(z) = 1$ 且 $\varphi(x) = 0$。由于 $(z,y) \in E$ 且 $\varphi(z) = 1$，我们得到 $\varphi(y) \neq 0$。□

下一个结果可由前面的引理和命题 3.2 直接得出：

命题 3.4。设 $\mathbb{P} = (X, E, \Im)$ 是一个满足条件 (1)、(3)和 (4)且具有拓扑的有向图。那么条件 (2) 等价于条件 (TED)。

回顾一下，有界格 $\mathbf{L}$的 Ploˇsˇcica 对偶是具有拓扑的有向图$\mathcal{D}(\mathbf{L}) = (P_{\mathbf{L}}, E, \Im_{\mathbf{L}})$。

在 [10, 引理 3.2]中，我们通过证明定义 3.1 的条件 (2)，展示了该结构的双重不连通性。现在，有了全边不连通性的新简化条件，证明显而易见：

命题 3.5。设 $\mathbf{L}$ 是一个有界格，$\mathcal{D}(\mathbf{L}) = (P_{\mathbf{L}}, E, \Im_{\mathbf{L}})$ 是它的 *Ploˇsˇcica* 对偶。那么 $\mathcal{D}(\mathbf{L})$是全边不连通的。

证明。若 $f, g \in P_{\mathbf{L}}$ 且 $(f,g) \notin E$，则由第 2 节中的 (E1)，存在 $a \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$，使得$f(a) = 1$ 且 $g(a) = 0$。由命题 2.5，对于作为从集合 $\mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\Im}(\mathcal{D}(\mathbf{L}), \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\Im})$ 到 $\varphi = e_a$ 的 MPM，我们立即得到 $\varphi(f) = e_a(f) = f(a) = 1$ 且 $\varphi(g) = e_a(g) = g(a) = 0$，从而满足条件（全边不连通性）。□

现在我们提及 [10] 中关于 Ploščica 空间的其他结果，这些结果将在第 5 节关于正交格的对偶表示定理中用到。

对于 Ploˇsˇcica 空间 $\mathbb{P} = (X, E, \Im)$，我们将 $\leqslant$ 上的序关系定义为 $\mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\Im}(\mathbb{P}, \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\Im})$ 上的序关系，如下所示：

$$\varphi \leqslant \psi \iff \varphi^{-1}(1) \subseteq \psi^{-1}(1) \iff \psi^{-1}(0) \subseteq \varphi^{-1}(0).$$

我们在 [10, 命题 3.7] 中证明了 $\mathcal{L}(\mathbb{P}) = (\mathcal{G}^{\mathrm{mp}}_{\Im}(\mathbb{P}, \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\Im}), \leqslant)$ 是一个有界格，并将其视为 Ploˇsˇcica 空间 $\mathbb{P} = (X, E, \Im)$ 的对偶格。此外，在 [10, 定理 3.8] 中，我们使用映射 $\nu : \mathbf{L} \to \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbf{L}))$，其定义为 $\nu(a) = e_a$，给出了有界一般格的 Ploˇsˇcica 表示定理的一个简短证明，该定理见命题 2.5 的 (iii)。

为了得到关于 Ploščica 空间的对偶表示定理，我们在 [10] 中称两个 Ploščica 空间 $\mathbb{P}_1$ 和 $\mathbb{P}_2$ 是有向图同胚的，并使用记号 $\mathbb{P}_1 \cong \mathbb{P}_2$，若存在映射 $\vartheta\colon X_1 \to X_2$，使得 xE_1y 当且仅当 $\vartheta(x)E_2\vartheta(y)$，且 ϑ 是一个（拓扑）同胚。这样的有向图同胚 ϑ 从 $\mathbb{P} = (X, E, \Im)$ 到 $\mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathbb{P}))$，将偏映射 $\vartheta(x) = \varepsilon_x\colon \mathcal{L}(\mathbb{P}) \to \mathbf{2}$ 指派给 $x \in X$，其定义如下：

引理 3.6 ([10, 引理 3.9])。 设 $\mathbb{P} = (X, E, \Upsilon)$ 是一个 *Ploˇsˇcica* 空间。对于 $x \in X$，定义一个偏映射 ε_x，从 $\mathcal{L}(\mathbb{P})$ 到 $\mathbf{2}_{\neg}$，使得对于 $\varphi \in \mathcal{G}_{\Upsilon}^{\mathrm{mp}}(\mathbb{P}, \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\Upsilon})$

$$\varepsilon_x(\varphi) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{if } x \in \operatorname{dom}\varphi, \\ - & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么 $\varepsilon_x \in \mathcal{L}^{\mathrm{mp}}(\mathcal{L}(\mathbb{P}), \underset{\sim}{\mathbf{2}})$。

最后，我们利用上述映射 ϑ证明，每个 Ploˇsˇcica 空间都与其二次对偶有向图同胚:

定理 3.7 ([10, 定理 3.10])。 设 $\mathbb{P} = (X, E, \Upsilon)$ 是一个 *Ploˇsˇcica* 空间。那么 $\mathbb{P} \cong \mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathbb{P}))$。

下面这个关于 Ploˇsˇcica 空间的引理将在第 5 节中用到（另见 [10, 引理 2.6]）：

引理 3.8。 设 $\mathbb{P} = (X, E, \tau)$ 是一个 *Ploˇsˇcica* 空间，且 $\varphi \in \mathcal{G}_{\Upsilon}^{\mathrm{mp}}(\mathbb{P}, \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\Upsilon})$。设 $x, y \in X$。

(i) 若 $xE \subseteq yE$ 且 $\varphi(y) = 1$，则 $\varphi(x) = 1$.

(ii) 若 $Ex \subseteq Ey$ 且 $\varphi(y) = 0$，则 $\varphi(x) = 0$。

证明。 我们证明 (i)，而 (ii) 可用类似方法证明。设 $xE \subseteq yE$ 且 $\varphi(y) = 1$。假设$\varphi(x) \neq 1$。由于 $x \notin \varphi^{-1}(1)$，根据引理 2.4，存在 $z \in X$ 使得 $(x, z) \in E$ 且 $\varphi(z) = 0$。由于$z \in xE$ 且 $xE \subseteq yE$，我们有 $(y, z) \in E$。由于 $\varphi(y) = 1$，因此 $\varphi(z) \neq 0$，矛盾。□

4. Ortho-Ploščica spaces

在上一节简化了 Ploˇsˇcica 空间的定义，并回顾了一般格（带界元）与 Ploˇsˇcica 空间之间的对偶表示之后，我们现在准备以相同的思路，为一般正交格建立一个对偶空间，称为正交 *Ploˇsˇcica* 空间。

因此，为了再次转向正交格，我们首先给出下面的引理，它将在定理 4.5 的证明中用到。

引理 4.1。 设 $\mathbf{L}'$ 是一个正交格，且 $f \in P_{\mathbf{L}}$。记 $\langle F, I\rangle$ 为相应的 *MDFIP* $\langle f^{-1}(1)\ f^{-1}(0)\rangle$。定义集合

$$F' := \{a' \in L \mid a \in F\} = \{a \in L \mid a' \in F\},$$
$$I' := \{b' \in L \mid b \in I\} = \{b \in L \mid b' \in I\}.$$

那么 $\langle I', F'\rangle$ 是一个 *MDFIP*。

证明。 为证明 I' 是 $\mathbf{L}$的一个滤子，设 $a \in I', b \in L$ 且 $a \leqslant b$。于是 $a' \in I$ 且$b' \leqslant a'$，从而 $b' \in I$。现在设 $c, d \in I'$，即 $c', d' \in I$。由于 I是一个理想， $c' \vee d' \in I$，因此 $(c' \vee d')' = c \wedge d \in I'$，故 I' 是一个滤子。对偶地，F' 是 $\mathbf{L}$的一个理想。

由于 $\langle F,\ I\rangle$是一个 DFIP， $\langle I',\ F'\rangle$也是一个 DFIP，因为 $a \in F \cap I$当且仅当 $a' \in F' \cap I'$。

不失一般性，假设滤子 I' 可以适当地扩张为一个与理想 F' 不相交的滤子 ∇，也就是说，存在 $e \in \nabla$ 使得 $e \notin I' \cup F'$。那么很容易证明， $\nabla' := \{a' \in L \mid a \in \nabla\} = \{a \in L \mid a' \in \nabla\}$ 是一个适当地扩张理想 I 且与滤子 F 不相交的理想，矛盾。（我们注意到 $e' \in \nabla'$ 和 $e' \notin I \cup F$。）□

为了将正交-Ploˇsˇcica 空间定义为一般正交格 $\mathbf{L}'$ 的对偶空间，我们需要在正交格 $\mathbf{L}'$的格约化的对偶 Ploˇsˇcica 空间上找到一个映射，使其在对偶侧表示正交补运算。我们指出，下面使用的 MPH 概念始终指的是正交格 $\mathbf{L}'$的格约化。

引理 *4.2.* 设 $L' = (L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 为一个正交格。对于 *MPH* $f: L \to \mathbf{2}$ 和 $a \in L$，定义 $(g(f))(a) = 0$ 当 $f(a') = 1$ 时，以及 $(g(f))(a) = 1$ 当 $f(a') = 0$ 时。则 $g(f) \in \mathcal{L}^{\mathrm{mp}}(L, 2)$，即为一个 *MPH*。

证明。我们证明 $\langle g(f)^{-1}(1)\ g(f)^{-1}(0)\rangle$ 是一个 MDFIP。

为证明 $g(f)^{-1}(1)$ 是 L 中的一个滤子，首先假设 $a \in g(f)^{-1}(1)$、$b \in L$ 和 $a \leq b$。那么 $g(f)(a) = 1$，即 $f(a') = 0$ 和 $b' \leq a'$。由于 f 作为一个（部分）格同态是保序的，我们得到 $f(b') = 0$，因此 $b \in g(f)^{-1}(1)$。其次，设 $c, d \in g(f)^{-1}(1)$，即 $f(c') = 0$ 和 $f(d') = 0$。那么 $f((c \wedge d)') = f(c' \vee d') = f(c') \vee f(d') = 0$，由此 $c \wedge d \in g(f)^{-1}(1)$，这表明 $g(f)^{-1}(1)$ 是 L 中的一个滤子。

对偶地，可以证明 $g(f)^{-1}(0)$ 是 $\mathbf{L}$ 中的一个理想。

为证明 $\langle g(f)^{-1}(1)\ g(f)^{-1}(0)\rangle$ 是一个 DFIP，假设对于某个 $a \in L$，有 $a \in g(f)^{-1}(1) \cap g(f)^{-1}(0)$。那么 $a' \in f^{-1}(0) \cap f^{-1}(1)$，这与 f 是一个（部分）格同态相矛盾。

最后，为证明 DFIP $\langle g(f)^{-1}(1)\ g(f)^{-1}(0)\rangle$ 的极大性，假设 $g(f)^{-1}(1)$ 可以扩展为某个滤子 F，该滤子与 $g(f)^{-1}(0)$ 不相交，并且 F 包含一个元素 $b \notin g(f)^{-1}(1)$。于是我们有 $b' \notin f^{-1}(0)$。根据引理 2.7，结合 $S = f^{-1}(1)$，可知存在 $c \in f^{-1}(0)$，使得 $b' \vee c \in f^{-1}(1)$，从而 $b \wedge c' \in g(f)^{-1}(0)$。由于 $c' \in g(f)^{-1}(1)$，我们得到 $c' \in F$，因此 $b \wedge c' \in F$，这与 F 和 $g(f)^{-1}(0)$ 不相交相矛盾。□

重要的是证明映射 g 与正交格的格约化所对应的对偶 Plo̍s̍cica 空间的结构相容。

命题 4.3. 设$\mathbf{L}'$是一个正交格，且 $\mathcal{D}(\mathbf{L}) = (P_{\mathbf{L}}, E, \Im_{\mathbf{L}})$ 是格约化$\mathbf{L}$ 的对偶 *Plo̍s̍cica* 空间，其中$\mathbf{L}'$。则映射 $g\colon P_{\mathbf{L}} \to P_{\mathbf{L}}$ 是连续的。

证明。回顾一下，我们在 $P_{\mathbf{L}}$ 上的拓扑以集合 $P_{\mathbf{L}} \setminus \varphi^{-1}(0)$和$P_{\mathbf{L}} \setminus \varphi^{-1}(1)$为开集子基，其中 $\varphi \in \mathfrak{G}_{\Im}^{\mathrm{mp}}(\mathcal{D}(\mathbf{L}), \mathbf{2})$。由于 $\mathcal{D}(\mathbf{L})$是格$\mathbf{L}$的对偶空间，根据 Plo̍s̍cica 关于$\mathbf{L}$ 的表示定理，我们可以假设每个 $\varphi \in \mathfrak{G}_{\Im}^{\mathrm{mp}}(\mathcal{D}(\mathbf{L}), \mathbf{2})$都是某个 $a \in L$的求值映射e_a。因此，我们可以假设 $\mathcal{D}(\mathbf{L})$上的拓扑以集合 $P_{\mathbf{L}} \setminus V_a$ 和 $P_{\mathbf{L}} \setminus W_a$ 为开集子基，其中 $a \in L$，且 $V_a = \{x \in P_{\mathbf{L}} \mid e_a(x) = x(a) = 0\}$ 和$W_a = \{x \in P_{\mathbf{L}} \mid e_a(x) = x(a) = 1\}$。（另见 Plo̍s̍cica 的论文 [21]。）

现在我们将证明，g 中子基开集的原像仍然是开集。对于任意 $a \in L$，有

$$g^{-1}(P_{\mathbf{L}} \setminus W_a) = \{x \in P_{\mathbf{L}} \mid g(x)(a) \neq 1\} = \{x \in P_{\mathbf{L}} \mid x(a') \neq 0\} = P_{\mathbf{L}} \setminus V_{a'},$$

这是一个开集。类似地，

$$g^{-1}(P_{\mathbf{L}} \setminus V_a) = \{x \in P_{\mathbf{L}} \mid g(x)(a) \neq 0\} = \{x \in P_{\mathbf{L}} \mid x(a') \neq 1\} = P_{\mathbf{L}} \setminus W_{a'}$$

是一个开集。因此，g 是连续的。□

现在我们将定义一般正交格 $\mathbf{L}'$ 的对偶空间 $\mathcal{D}(\mathbf{L}')$。它将是该正交格 $\mathbf{L}'$ 的格约化的对偶 Plo̍s̍cica 空间，并配备如上所定义的映射 g。

定义 4.4。正交格 $\mathbf{L}'$ 的对偶是结构 $\mathcal{D}(\mathbf{L}') = (P_{\mathbf{L}}, E, \Im, g)$，其中 g按引理 4.2 定义，而 $(P_{\mathbf{L}}, E, \Im)$ 是 $\mathbf{L}$ 的格约化 $\mathbf{L}'$ 的对偶 Plo̍s̍cica 空间。

下面命题中的条件最初由 Marais [20] 通过从 Dzik 等人 [15] 的结果进行翻译而提出。它们在 [20] 中陈述，但没有给出证明。

定理 4.5. 设 $\mathbf{L}$ 是一个正交格。映射 g 的 $\mathcal{D}(\mathbf{L})$ 满足以下性质：

(M1) $g(g(x)) = x$，(M2)

$xE \subseteq yE \implies Eg(x) \subseteq Eg(y)$，(M3)

$Ex \subseteq Ey \implies g(x)E \subseteq g(y)E$，

(O) $\forall x\,\exists y(yE \subseteq xE \,\&\, Ey \subseteq Eg(x))$。

证明。为证明 (M1)，注意，对于任意 $a \in L$ 以及任意 MPH $x \in \mathcal{D}(\mathbf{L})$，$g(g(x))(a) = 1$ 当且仅当$g(x)(a') = 0$ 当且仅当 $x(a) = 1$。类似地，$g(g(x))(a) = 0$ 当且仅当 $x(a) = 0$。因此，$g(g(x)) = x$ 如所需。

为证明 (M2)，假设对于某个 $z \in L$，有 $xE \subseteq yE$ and $z \in Eg(x)$，即由引理 2.6 可得 $y^{-1}(1) \subseteq x^{-1}(1)$，且 $(z, g(x)) \in E$。由后者可推出 $z^{-1}(1) \cap g(x)^{-1}(0) = \emptyset$。我们要证明 $z \in Eg(y)$，因此 $z^{-1}(1) \cap g(y)^{-1}(0) = \emptyset$。假设对于某个 $a \in L$，有 $a \in z^{-1}(1) \cap g(y)^{-1}(0)$。那么 $z(a) = 1$ and $g(y)(a) = 0$。由后者可得 $y(a') = 1$，进而 $x(a') = 1$，于是$g(x)(a) = 0$。由此可得 $a \in z^{-1}(1) \cap g(x)^{-1}(0)$，矛盾。

可以类似地证明 (M3) 成立。

最后我们证明 (O)。设 $x \in \mathcal{D}(\mathbf{L})$，并设 $\langle F, I\rangle$ 是相应的 MDFIP $\langle x^{-1}(1)\ x^{-1}(0)\rangle$。应用引理 4.1，可得 $y := \langle I', F'\rangle$ 是一个 MDFIP。首先取这一对$y_0 := \langle F, F'\rangle$。这是一个 DFIP，因为 $a \in F \cap F'$ 对某个 $a \in L$ 给出 $a' \in F'$，因此对于理想 F'，我们有 $a \vee a' = 1 \in F'$，这就产生了矛盾。现在设 $y_1 := \langle F, F'\rangle$ 是一个 DFIP，其中 F' 在与 F 不相交这一条件下极大。最后，设 $y := \langle F, F'\rangle$ 是一个 DEIP，其中 F 在与 F' 不相交这一条件下极大，即 y 是一个 MDFIP。现在显然 $x^{-1}(1) \subseteq y^{-1}(1)$，因此 $yE \subseteq xE$。

为证明 $Ey \subseteq Eg(x)$，我们需要证明 $g(x)^{-1}(0) \subseteq y^{-1}(0)$，也就是说，对于所有 $a \in L$,$x(a') = 1$ 成立，蕴含 $y(a) = 0$。因此，我们需要证明 $a' \in x^{-1}(1) = F$ （这等价于$a = a'' \in F'$）蕴含 $a \in y^{-1}(0) = F'$。这是显然的，因为 $F' \subseteq F'$。□

现在我们可以定义抽象正交 Ploˇsˇcica 空间了。

定义 4.6。一个正交 *Ploˇsˇcica* 空间是一个结构$\mathbf{X} = (X,\ E,\ \tau,\ g)$，其中$(X,\ E,\ \tau)$是一个 Ploˇsˇcica 空间，并且 $g : X \to X$ 是满足 (M1)–(M3) 和 (O) 的连续映射。

5. 对偶表示定理

在第 3 节中，我们介绍了 [10] 中 Ploˇsˇcica 空间的简化版本，随后回顾了有界一般格与 Ploˇsˇcica 空间之间的对偶表示。现在，我们可以介绍一般正交格与上一节引入的正交 Ploˇsˇcica 空间之间的对偶表示定理。

我们首先需要介绍一般正交 Ploˇsˇcica 空间的对偶正交格。

定义 5.1. 对于正交 Ploˇsˇcica 空间 $\mathbf{X} = (X, E, \tau, g)$，我们将其对偶定义为有界格 $\mathcal{E}(\mathbf{X}) = (\mathfrak{G}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{mp}}(\mathbf{X}\ \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\mathcal{T}})\ \wedge, \vee, \varphi_0, \varphi_1, \neg)$，其中 $\neg$ 将每个 $\varphi \in \mathfrak{G}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{mp}}(\mathbf{X}\ \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\mathcal{T}})$ 映射为一个偏映射 $\neg\varphi : X \to \{0, 1\}$，定义如下:

$$(\neg\varphi)(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \varphi(g(x)) = 0, \\ 0 & \text{if } \varphi(g(x)) = 1, \\ - & \text{otherwise.} \end{cases}$$

引理 5.2. 设 $\mathbf{X} = (X, E, \tau, g)$ 是一个正交 *Ploˇsˇcica* 空间。那么，如上所定义的 $\neg$ 是格约化 $\mathcal{E}(\mathbf{X})$上的正交补。因此，正交 *Ploˇsˇcica* 空间 $\mathbf{X}$ 的对偶 $\mathcal{E}(\mathbf{X}) = (\mathfrak{G}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{mp}}(\mathbf{X}\ \underset{\sim}{\mathbf{2}}_{\mathcal{T}})\ \wedge, \vee, \varphi_0, \varphi_1, \neg)$ 是一个正交格。

证明。首先，我们证明 $\neg\varphi$ 保持 E。假设 $(x, y) \in E$ 对于 $x, y \in X$ 成立，且 $(\neg\varphi)(x) = 1$，并且 $(\neg\varphi)(y) = 0$。那么 $\varphi(g(x)) = 0$ 且 $\varphi(g(y)) = 1$，即 $g(x) \in \varphi^{-1}(0)$ 且 $g(y) \in \varphi^{-1}(1)$。由条件 (Ti)，从 $(x, y) \in E$ 可得存在 $z \in X$，使得 $zE \subseteq xE$ 且 $Ez \subseteq Ey$。由 (M2)，前者给出 $Eg(z) \subseteq Eg(x)$，因此根据引理 3.8，$\varphi(g(z)) = 0$；而由 (M3)，后者给出 $g(z)E \subseteq g(y)E$，因此 $\varphi(g(z)) = 1$，矛盾。因此 $\neg\varphi$ 保持 E。

为证明 $\neg\varphi$ 连续，我们注意到 $(\neg\varphi)^{-1}(1) = \{x \in X \mid \varphi(g(x)) = 0\} = \{x \in X \mid g(x) \in \varphi^{-1}(0)\} = g^{-1}(\varphi^{-1}(0))$，这是一个开集，因为 $\varphi^{-1}(0)$ 是开集且 g 连续。类似地，$(\neg\varphi)^{-1}(0) = g^{-1}(\varphi^{-1}(0))$ 是开集。

为证明 $\neg\varphi$ 是一个 MPM，还需证明 $\neg\varphi$ 的极大性。假设 $\neg\varphi$ 可以真扩张为 ψ，使得存在 $x \in X$ 满足 $\psi(x) = 1$，但 $(\neg\varphi)(x) \neq 1$ 且 $(\neg\varphi)(x) \neq 0$。我们将证明 ψ 不能是 $\neg\varphi$ 的 E-保持扩张。具体而言，我们将证明存在 z 使得 $(\neg\varphi)(z) = 0$ 且 $(x, z) \in E$。

由 $(\neg\varphi)(x) \neq 1$，我们得到 $\varphi(g(x)) \neq 0$。因此，存在 $y \in \varphi^{-1}(1)$，使得 $(y, g(x)) \in E$。根据 (Ti)，存在 w，满足 $wE \subseteq yE$ 且 $Ew \subseteq Eg(x)$。由引理 3.8(i)，我们得到 $\varphi(w) = 1$。注意，$\varphi(w) = \varphi(g(g(w))) = 1$，因此 $(\neg\varphi)(g(w)) = 0$。由 (M3)，我们得到 $g(w)E \subseteq xE$。因此 $(x, g(w)) \in E$。现在令 $g(w) = z$。

对于 ψ 扩展 $\neg\varphi$ 的情形，也可以采用类似的证明：存在某个 $x \notin$，使得若 $\neg\varphi^{-1}(1) \cup (\neg\varphi)^{-1}(0)$，则有 $\psi(x) = 0$。证明中将结合使用 (Ti) 和 (M2)。

现在我们证明 $\neg\varphi$ 满足正交补恒等式。

首先，容易看出，对于任意 $x \in X$，$(\neg\neg\varphi)(x) = 1$ 当且仅当 $(\neg\varphi)(g(x)) = 0$ 当且仅当 $\varphi(g(g(x))) = 1$ 当且仅当 $\varphi(x) = 1$。类似地，$(\neg\neg\varphi)(x) = 0$ 当且仅当 $\varphi(x) = 0$。因此，$\neg\neg\varphi = \varphi$，如所需。

我们将证明 $\neg$ 是反序的，由此即可推出德摩根律。假设对于 $\varphi, \psi \in \mathcal{G}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{mp}}(\mathbf{X}\ \mathbf{2}_{\mathcal{T}})$，有 $\varphi \leqslant \psi$。由此可得 $\varphi^{-1}(1) \subseteq \psi^{-1}(1)$，等价地，$\psi^{-1}(0) \subseteq \varphi^{-1}(0)$。为证明 $\neg\psi \leqslant \neg\varphi$，我们将证明 $(\neg\psi)^{-1}(1) \subseteq (\neg\varphi)^{-1}(1)$。因此，设对于 $x \in X$，$x \in (\neg\psi)^{-1}(1)$。那么 $\psi(g(x)) = 0$，根据 $\psi^{-1}(0) \subseteq \varphi^{-1}(0)$，可得 $\varphi(g(x)) = 0$，从而 $(\neg\varphi)(x) = 1$，也就是说，$x \in (\neg\varphi)^{-1}(1)$，如所需。

我们注意到，对于所有 $x \in X$，$(\neg\varphi\wedge\varphi)(x) = 0$ 当且仅当 $x \in (\neg\varphi\wedge\varphi)^{-1}(0)$；当且仅当不存在这样的 $y \in (\neg\varphi\wedge\varphi)^{-1}(1)$，使得 $(y, x) \in E$；当且仅当不存在这样的 $y \in (\neg\varphi)^{-1}(1) \cap (\varphi)^{-1}(1)$，使得 $(y, x) \in E$；当且仅当不存在 y 使得 $\varphi(g(y)) = 0$ 且 $\varphi(y) = 1$ 且 $(y, x) \in E$。现在假设存在 $y \in X$ 使得 $\varphi(g(y)) = 0$ 且 $\varphi(y) = 1$ 且 $(y, x) \in E$。由 (O)，对于 y，存在 $w \in X$ 使得 $wE \subseteq yE$ 且 $Ew \subseteq Eg(y)$。由于 $w \in Ew$，我们得到 $(w, g(y)) \in E$；又由于 $\varphi(g(y)) = 0$，我们得到 $\varphi(w) \neq 1$。然而，$wE \subseteq yE$ 且 $\varphi(y) = 1$，因此由引理 3.8(i)，$\varphi(w) = 1$，矛盾。故 $\neg\varphi \wedge \varphi = \varphi_0$。

(iv) 可以类似地证明 $\neg\varphi \vee \varphi = \varphi_1$。 □

现在我们可以给出一般正交格的对偶表示定理。

定理 5.3. *对于正交格 $L' = (L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$，映射 $a \mapsto e_a$ 是从 L' 到 $\mathcal{E}(\mathcal{D}(L')) = (\mathcal{G}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{mp}}(X_{\mathbf{L}}, \mathbf{2}_{\mathcal{T}}), \wedge, \vee, \varphi_0, \varphi_1, \neg)$ 的正交格同构，因此 $L' \cong \mathcal{E}(\mathcal{D}(L'))$。*

证明。 根据 Plo̍s̍cica 表示定理（见命题 2.5 的 (iii)），我们知道它是一个格同构。我们必须证明，对于所有 $a \in L$，$e_{\neg a} = \neg e_a$。对于任意 $x \in X_L$，我们有 $(\neg e_a)(x) = 1$ 当且仅当 $e_a(g(x)) = 0$ 当且仅当 $g(x)(a) = 0$ 当且仅当 $x(\neg a) = 1$ 当且仅当 $e_{\neg a}(x) = 1$。类似地，$(\neg e_a)(x) = 0$ 当且仅当 $e_{\neg a}(x) = 0$。□

最后，我们给出正交 Plo̍s̍cica 空间的一个对偶表示定理。

定理 5.4. 设 $\mathbb{X} = (X, E, \mathcal{T}, g)$ 是一个正交 *Plo̍s̍cica* 空间。那么 $\mathbb{X} \cong \mathcal{D}(\mathcal{E}(\mathbb{X}))$。

证明。 我们的出发点是定理 3.7。我们定义映射 $\vartheta : \mathbb{X} \to \mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathbb{X}))$，其定义为 $\vartheta(x) = \varepsilon_x$，其中 ε_x 的定义同引理 3.6。我们在定理 3.10] 中证明了映射 ϑ 定义良好，且它是一个 Plo̍s̍cica 空间同构。现在必须证明 ϑ 保持 g-映射。

令 $\overline{g}$ 表示空间 $\mathcal{D}(\mathcal{E}(\mathbb{X}))$ 上的 g-映射。我们需要证明，对所有 $x \in X$，$\vartheta(g(x)) = \overline{g}(\vartheta(x))$。注意，对于所有 $\overline{\varphi} \in \mathcal{G}_{\mathcal{T}}^{\mathrm{mp}}(\mathbf{X}\ \mathbf{2}_{\mathcal{T}})$ 以及 $g(x) \in \operatorname{dom}\varphi$，其中 $x \in X$，有 $\vartheta(g(x))(\varphi) = 1$ 当且仅当 $\varepsilon_{g(x)}(\varphi) = 1$ 当且仅当 $\varphi(g(x)) = 1$ 当且仅当 $(\neg\varphi)(x) = 0$ 当且仅当 $\varepsilon_x(\neg\varphi) = 0$ 当且仅当 $g(\varepsilon_x)(\varphi) = 1$。类似地，$\varepsilon_{g(x)}(\varphi) = \overline{0}$ 当且仅当 $g(\varepsilon_x)(\varphi) = 0$。因此，对于所有 $x \in \overline{X}$，

$$\vartheta(g(x)) = \varepsilon_{g(x)} = \overline{g}(\varepsilon_x) = \overline{g}(\vartheta(x))$$

如所要求。 □

6. Examples

本节介绍三个不同正交格的对偶正交 Plo˘s˘cica 空间：由 2 个生成元生成的含 96 个元素的自由正交模格 $\mathcal{F}_{\mathcal{OM}}(2)$、无限正交格$\mathbf{O}_{\mathbb{Z}}$ （它不是正交模格），以及无限模正交格 $\mathbf{M}_\infty$。

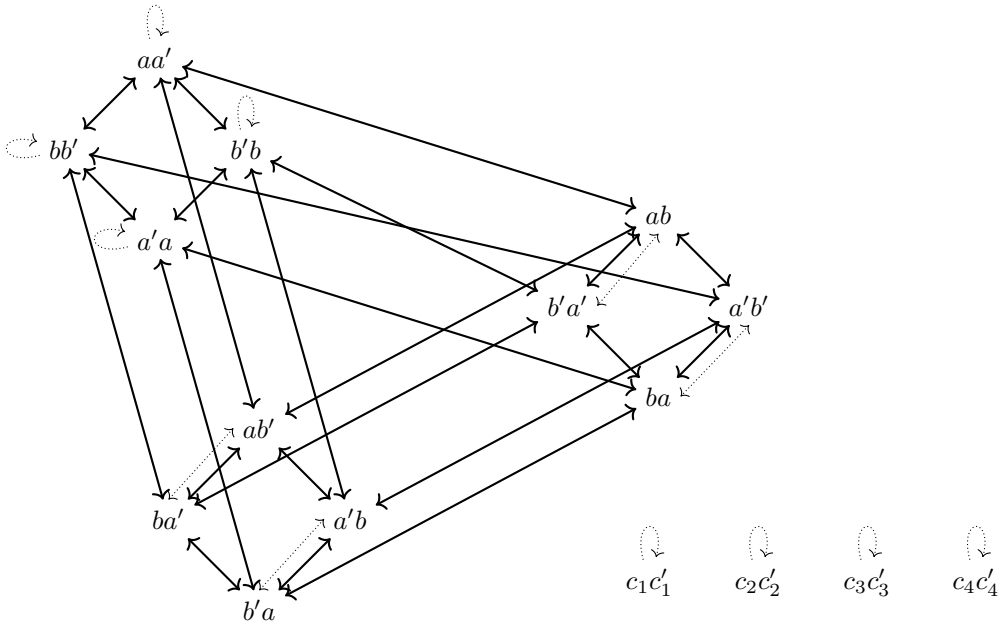

Figure 1. $\mathcal{F}_{\mathcal{OM}}(2)$ 的对偶有向图。 g映射用虚线箭头表示 s.

例 1. 由 2 个生成元生成的自由正交模格 $\mathcal{F}_{\mathcal{OM}}(2)$ 同构于 $\mathrm{MO}_2 \times \mathbf{2}^4$（参见 [1] 或 [17]）。令 a、b、 a' 和 b' 为 MO_2 的原子，并令 $\bot$、 $\top$为 MO_2的界元。对于$\mathbf{2}^4$, ，令 0 为底元，1 为顶元，并令 c_1、$^-c_2$、 c_3、 c_4 为原子。 $\mathcal{F}_{\bar{\mathcal{OM}}}(2)$ 的 MDFIP 只有两种类型（等价地说，是从 $\mathcal{F}_{\mathcal{OM}}(2)$ 到 2 的 MPH）。第一种类型为 $\langle\uparrow(x, 0)\ \downarrow(y, 1)\rangle$，其中 x、 y是 MO_2的原子。第二种类型为 $\langle\uparrow(\bot, c_i)\ \downarrow(\top, c_i')\rangle$。$^-$为简便起见，在图中我们用 xy 表示第一种形式的 MDFIP，用 c_ic_i' 表示第二种形式的 MDFIP。 $\mathcal{F}_{\mathcal{OM}}(2)$ 的对偶有向图见图 1。它是 MO_2 的对偶有向图与四个带环的孤立顶点的不交并，这些环表示 $\mathbf{2}^4$, 的对偶，因此这个 96 元代数由 16 顶点的对偶有向图表示。

该代数的元素是从图 1 中的 16 元素对偶有向图到二元有向图 $\underset{\sim}{\mathbf{2}} = (\{0, 1\},\ \leqslant)$ 的 MPM。它们可以任意地将四个孤立顶点映射到 0 和 1，这显然对应于 $\mathcal{F}_{\mathcal{OM}}(2)$ 的 $\mathbf{2}^4$ 因子。将这些 MPM 限制在 MO_2 的对偶有向图上，显然对应于 $\mathcal{F}_{\mathcal{OM}}(2)$ 的 MO_2 因子。

由于该代数（因此其对偶空间）是有限的，不难证明对偶空间上的拓扑必定是离散拓扑。

[1] 的作者为呈现 96 元代数 $\mathcal{F}_{\mathcal{OM}}$ 的示意图付出了相当大的努力，见 [1, 图 18]。图 1 中的 16 元有向图凸显了同一代数的对偶表示的高效性。

例**2.** 考虑图 2 中的无限正交格 $\mathbf{O}_{\mathbb{Z}}$。正交补定义为 $(a_j)' = b_{-j}$ $(j \in \mathbb{Z})$。考虑滤子 $F_a = \{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{1\}$ 和 $F_b = \{b_j \mid j \in \mathbb{Z}\} \cup \{1\}$，以及理想 $I_a = \{a_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ 和 $I_b = \{b_\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$。

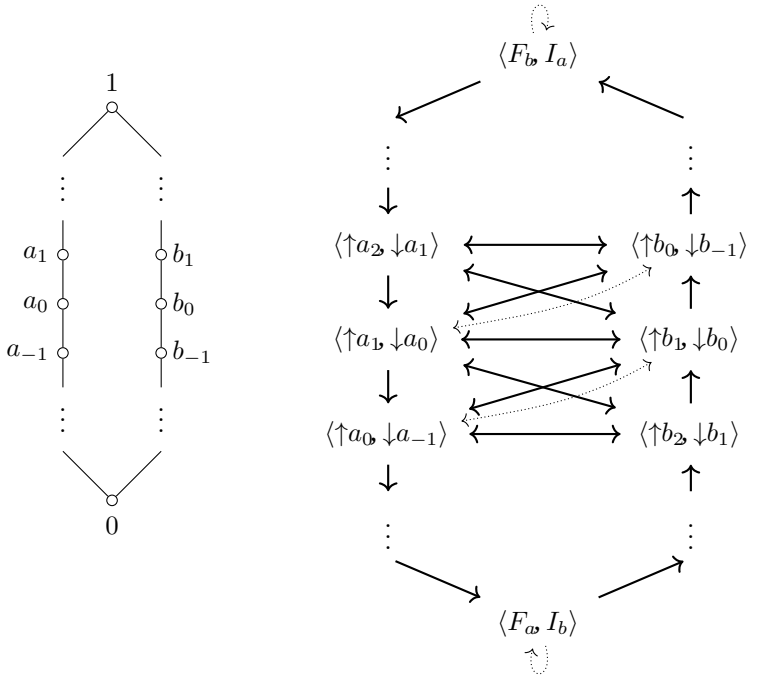

FIGURE 2. 无限正交格$\mathbf{O}_{\mathbb{Z}}$ 及其对偶有向图。对合映射g 以虚线箭头表示。有向图并未包含所有边。完整说明请参见表 1。

对偶有向图上的拓扑可以用以下形式的次基闭集来描述：

$$V_c = \{\, \langle F, I \rangle \mid c \in I \,\} \quad \text{and} \quad W_c = \{\, \langle F, I \rangle \mid c \in F \,\}.$$

对于 $c = a_k$ $(k \in \mathbb{Z})$，我们得到：

$$V_c = \{\langle \uparrow a_{j+1}, \downarrow a_j \rangle \mid j \geqslant k\} \cup \{\langle F_b, I_a \rangle\} \text{ and } W_c = \{\langle \uparrow a_{j+1}, \downarrow a_j \rangle \mid j < k\} \cup \{\langle F_a, I_b \rangle\}.$$

对于 $c = b_k$ $(k \in \mathbb{Z})$，我们得到：

$$V_c = \{\langle \uparrow b_{j+1}, \downarrow b_j \rangle \mid j \geqslant k\} \cup \{\langle F_a, I_b \rangle\} \text{ and } W_c = \{\langle \uparrow b_{j+1}, \downarrow b_j \rangle \mid j < k\} \cup \{\langle F_b, I_a \rangle\}.$$

现在，对于 $k \in \mathbb{Z}$，我们可以计算 $W_{a_{k+1}} \cap V_{a_k} = \{\langle \uparrow a_{k+1}, \downarrow a_k \rangle\}$、$W_{b_{k+1}} \cap V_{b_k} = \{\langle \uparrow b_{k+1}, \downarrow b_k \rangle\}$、$\bigcap\{\, W_{a_i} \mid i \in \mathbb{Z} \,\} = \{\langle F_a, I_b \rangle\}$ 和 $\bigcap\{\, V_{b_i} \mid i \in \mathbb{Z} \,\} = \{\langle F_a, I_b \rangle\}$。由此可见，有向图中的每个单点集都是闭集，因此该拓扑是豪斯多夫的。

边 当且仅当 时，记为 1 有向图的边见表 1。在 $\langle F,\ I \rangle$ 所在的行和 $\langle G,\ J \rangle$ 所在的列中，我们 $F,\ I \rangle E \langle G,\ J \rangle$ 当且仅当 $F \cap J = \emptyset$。

表 2 显示，MPH 本质上有四种类型。表中的行表示 MPH，列表示 MPM。更准确地说，每一行展示了与所给 MDFIP 对应的 MPH 作用下$\mathbf{O}_{\mathbb{Z}}$ 中各元素的像。随后，可通过 MPM 还原代数元素：有向图顶点的像可按列读出。两个 MPM 的并对应这样一列：其中 1 的数量至少与这两列中 1 的并集数量相同。

	$\langle F_a, I_b\rangle$	$\langle F_b, I_a\rangle$	$\langle\uparrow a_{j+1}, \downarrow a_j\rangle$	$\langle\uparrow a_{k+1}, \downarrow a_k\rangle$	$\langle\uparrow b_{j+1}, \downarrow b_j\rangle$	$\langle\uparrow b_{k+1}, \downarrow b_k\rangle$
$\langle F_a, I_b\rangle$	1	0	0	0	1	1
$\langle F_b, I_a\rangle$	0	1	1	1	0	0
$\langle\uparrow a_{j+1}, \downarrow a_j\rangle$	1	0	1	0	1	1
$\langle\uparrow a_{k+1}, \downarrow a_k\rangle$	1	0	1	1	1	1
$\langle\uparrow b_{j+1}, \downarrow b_j\rangle$	0	1	1	1	1	0
$\langle\uparrow b_{k+1}, \downarrow b_k\rangle$	0	1	1	1	1	1

TABLE 1. O 的对偶有向图的边表$_{\mathbb{Z}}$ 其中 $j, k \in \mathbb{Z}$ 和 $j < k$。

	0	a_i	a_ℓ	b_i	b_ℓ	1
$\langle F_a, I_b\rangle$	0	1	1	0	0	1
$\langle F_b, I_a\rangle$	0	0	0	1	1	1
$\langle\uparrow a_{j+1}, \downarrow a_j\rangle$	0	1	0	$-$	$-$	1
$\langle\uparrow b_{j+1}, \downarrow b_j\rangle$	0	$-$	$-$	1	0	1

TABLE 2. O$_{\mathbb{Z}}$的 MPH 和 MPM，其中 $ij\ell \in \mathbb{Z}$、 $i > j$和 $\ell \leqslant j$。

例 **3.** 考虑高度为二的无限正交模格$\mathbf{M}_\infty$ （图 3）。原子以 $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 中的元素标记，并通过 $\perp' = \top$ 和 $z' = -z$定义正交补。对偶空间的元素是形如 $\langle\uparrow a, \downarrow b\rangle$ 的 MDFIP，其中 $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 和 $a \neq b$。

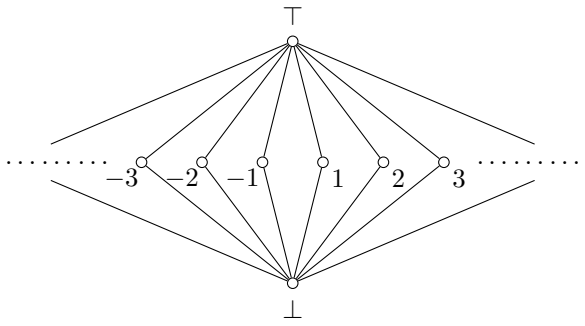

FIGURE 3. 无限正交模格 $\mathbf{M}_\infty$。

表3 展示了不同 j， k， $l \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$下$\mathbf{M}_\infty$ 的 MPH 和 MPM。每一行展示了与所给 MDFIP 对应的 MPH 作用下$\mathbf{M}_\infty$ 中各元素的像。正交格元素同样可通过 MPM 还原：有向图顶点的像可按列读出，而两个 MPM 的并对应这样一列：其中 1 的数量至少与这两列中 1 的并集数量相同。

我们观察到 $\langle\uparrow a, \downarrow b\rangle E\langle\uparrow c, \downarrow d\rangle$ 当且仅当 $a \neq d$。图 4 展示了$\mathbf{M}_\infty$ 的对偶有向图的一部分，其中描绘了六个对应于不同 $j, k, l \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$的顶点。

我们注意到，对于任意 $j, k \in \mathbb{Z}$，若 $j \neq k$，则有 $W_j \cap V_k = \{\langle\uparrow j, \downarrow k\rangle\}$，因此$\mathbf{M}_\infty$ 的对偶有向图上的拓扑是豪斯多夫的。

	$\bot$	j	k	ℓ	$\top$
$\langle\uparrow j, \downarrow k\rangle$	0	1	0	–	1
$\langle\uparrow j, \downarrow \ell\rangle$	0	1	–	0	1
$\langle\uparrow k, \downarrow \ell\rangle$	0	–	1	0	1
$\langle\uparrow k, \downarrow j\rangle$	0	0	1	–	1
$\langle\uparrow \ell, \downarrow j\rangle$	0	0	–	1	1
$\langle\uparrow \ell, \downarrow k\rangle$	0	–	0	1	1

TABLE 3. MPH 和 MPM 对于$\mathbf{M}_\infty$。我们有 j、k、$\ell \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，它们各不相同 .

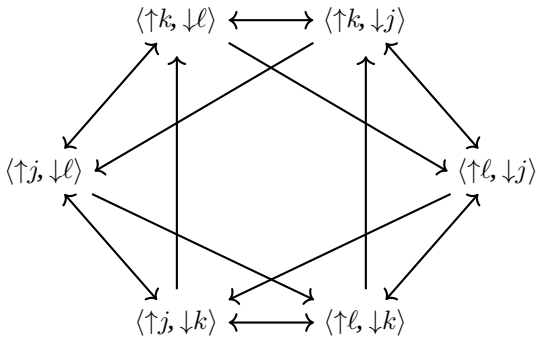

FIGURE 4. 对偶有向图 $\mathbf{M}_\infty$ 的一部分（六个顶点具有不同的 j，k，$l \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$）。

致谢。 第一作者感谢马泰·贝尔大学在其2024年8月至9月访问期间给予的热情接待。第二作者感谢其在2020年至2026年期间受聘为约翰内斯堡大学客座教授，并感谢约翰内斯堡大学在其2025年7月至8月为期两周的访问期间给予的热情接待。

作者还要感谢 Gerhard D¨orfer 教授在2022年8月访问维也纳工业大学一周期间给予的热情接待，正是在那次访问期间，对正交格的对偶的研究开始了。在这次短暂访问期间，以及此后的许多次访问和会面中，作者也非常享受与 G¨unther Eigenthaler 教授相处的时光。他于2025年2月14日去世，就在年满75岁、迎来周年纪念日五天后。他将永远铭刻在我们的心中，我们很荣幸将本文献给他的记忆。

REFERENCES

[1] BERAN, L.: 《 *Orthomodular lattices. Algebraic Approach*》, Academia, 布拉格, 1984年。[2] BIRKHOFF, G.—VON NEUMANN, J.: 《 *The logic of quantum mechanics*》, 《数学年鉴》**37** (1936年), 823–843。另见: *J. von Neumann Collected Works*, 第 IV 卷, Pergamon Press, 牛津, 1961年, 105–125。[3] CRAIG, A.P.K.: 《 *Canonical extensions of bounded lattices and natural duality for default bilattices*》, 哲学博士论文, 牛津大学, 2012年。[4] CRAIG, A.P.K.—GOUVEIA M.J.—HAVIAR, M.: 《 *TiRS graphs and TiRS frames: a new setting for duals of canonical extensions* **74** 2015 123 138 》, 《普遍代数》（）, –。[5] CRAIG, A.P.K.—GOUVEIA M.J.—HAVIAR, M.: 《 *Canonical extensions of lattices are more than perfect*》, 纪念 Bj´arni J´onsson, 《普遍代数》**83:12**, 2022年。[6] CRAIG, A.P.K.—HAVIAR, M.: 《 *Reconciliation of approaches to the construction of canonical extensions of bounded lattices* **64** 2014 1335 1356 》, 《 Mathematica Slovaca》（）, –。[7] CRAIG, A.P.K.—HAVIAR, M.—MARAIS, K.: 《 *Dual digraphs of finite meet-distributive and modular lattices*》, CUBO **26** (2024年), 279–302。

[8] CRAIG, A.P.K.—HAVIAR, M.—PRIESTLEY, H.A.: 《*A fresh perspective on the canonical extensions of bounded lattices* **21** 2013 725 749 》，

应用范畴结构（），–。[9] CRAIG, A.P.K.—HAVIAR, M.—S ˜AO JO ˜AO, J.: 《 *Dual digraphs of finite semidistributive lattices*》，CUBO 24 (2022年)，369–392。[10] CRAIG, A.P.K.—HAVIAR, M.— S ˜AO JO ˜AO, J.: 《 *Dual spaces of lattices and semidistributive lattices*》，已提交。参见：https://arxiv.org/abs/2509.04417。[11] D ¨ORFER, G.: 《 *Noncommutative symmetric differences in orthomodular lattices*》，国际理论物理杂志 44 (2005年)，885–896。[12] D ¨ORFER, G.—DVURE ˇCENSKIJ, A.—L ¨ANGER, H.: 《 *Symmetric difference in orthomodular lattices*》，《Mathematica Slovaca》46 (1996年)，435–444。[13] DVURE ˇCENSKIJ, A.: 《 *On two problems of quantum logics*》，《Mathematica Slovaca》36 (1986年)，253–265。[14] DVURE ˇCENSKIJ, A.—PULMANNOV ´A, S.: 《 *New Trends in Quantum Structures*》，克吕维尔学术出版社/Ister Sci.，多德雷雷赫特/布拉迪斯拉发，2000年。[15] DZIK, W.—ORLOWSKA, E.—VAN ALTEN, C.: 《 *Relational Representation Theorems for General Lattices with Negations* 4136, 162 176, 2006 》，

载于：计算机科学讲义，柏林，第 – 页。[16] GANTER, B.—WILLE R.: 《 *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*》，施普林格，1999年。[17] HAVIAR, M.—KON ˆOPKA, P.—PRIESTLEY, H.A.—WEGENER, C.B.: 《 *Finitely generated free modular ortholattices I* **36** 1997 2639 2660 》，

国际理论物理杂志（），–。[18] HUSIMI, K.: 《 *Studies on the foundations of the quantum mechanics I.*》，日本物理数学学会会刊 19 (1937年)，766–789。[19] KALMBACH, G.: 《 *Orthomodular lattices*》，伦敦数学会专著 18，Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 伦敦-纽约，1983年。[20] MARAIS, K.: 《 *Dual structures of ortholattices*》，荣誉学位论文，约翰内斯堡大学，2020年。[21] PLO ˇS ˇCICA, M.: 《 *A natural representation of bounded lattices*》，塔特拉山数学出版物 5 (1995年)，75–88。[22] PRIESTLEY, H.A.: 《 *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*》，伦敦数学会会刊 2 (1970年)，186–190。[23] PRIESTLEY, H.A.: 《 *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices*》，伦敦数学会会刊 24 (1972年)，507–530。[24] PT ´AK, P. —PULMANNOV ´A, S.: 《 *Orthomodular structures as quantum logics*》，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特-波士顿-伦敦，1991年。[25] URQUHART, A.: 《 *A topological representation theory for lattices*》，《普遍代数》8 (1978年)，45–58。

* Department of Mathematics and Applied MathematicsUniversity of JohannesburgAuckland Park 2006 SOUTH AFRICAandNational Institute of Theoretical and Computational Sciences (NITheCS) JohannesburgSOUTH AFRICA*Email address*: acraig@uj.ac.za** Department of Mathematics Faculty of Natural SciencesM. Bel UniversityTajovského 40, 974 01 Banská BystricaSLOVAKIAand Department of Mathematics and Applied MathematicsUniversity of JohannesburgAuckland Park 2006 SOUTH AFRICA*Email address*: miroslav.haviar@umb.sk