arXiv:2601.10842v1 [math.AC] 15 Jan 2026

莱娜　某些二项式边理想幂的 R 线性链

ABBAS DOHADWALA、BRYAN FLORES-SILVA、ALICIA OROZCO-MOYA 和 ZOE SIEGELNICK EL

Abstract. 我们给出了所有由闭图 G 产生且不以完全图K_4 为诱导子图的二项式边理想 J_G 的幂的线性链中分次贝蒂数的封闭公式。我们证明，这些数与 J_G的字典序初始理想的幂所对应的贝蒂数相同，从而在一个特殊情形下证实了 Ene–Rinaldo–Terai 的猜想。

1. Introduction

二项式边理想由 Herzog、Hibi、Hreinsd´ottir、Kahle 和 Rauh 在 [7]中引入，Ohtani 于 [9], 中也对其进行了研究。它们是由对应于简单图边的二项式生成的理想。具体而言，设图 G 的边集为 E（G），其二项式边理想为

$$J_G = (x_i y_j - y_i x_j : \{i, j\} \in E(G)) .$$

由于具有丰富的代数结构，且与底层图的组合性质有着深刻联系，这些理想已得到广泛研究；参见 [5, 第 7]章。特别是，标号图具有闭图这一性质，已被证明对二项式边理想的研究至关重要。该性质保证， J_G 的极小生成元构成关于字典序的 Gr¨obner 基。我们用 $\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}$ 表示关于此序的初始理想。

Ene、Rinaldo 和 Terai 在 [4, 猜想 6.2] 中提出的猜想断言，对于闭图 G， J_G^m 与 $\mathrm{in}_{lex}\, J_G^m$ 的分次贝蒂数对所有 $m \geq 1$均相等。对于第一幂（$m = 1$），Peeva 最近在 [10]中证明了这一猜想。Herzog–Kiani–Madani 在 [6] 中的先前工作，以及 Almousa–VandeBogert 在 [2] 中的工作，确定了闭图 G对应的J_G 和 $\mathrm{in}_{lex}\, J_G$ 的自由分解中的线性带，并特别证明这些线性带中的贝蒂数相等。据我们所知，文献中尚未确定二项式边理想的幂的线性带。

在本文中，我们通过为所有幂 J_G^m and $\mathrm{in}_{lex}\, J_G^m$ 的线性链中的分次贝蒂数提供一个闭式公式，推进了 Ene-Rinaldo-Terai 猜想。这里， G 是一个闭图，且不以四个顶点的完全图作为诱导子图。特别地，在这些假设下，线性链中的 Betti数仅取决于 G 的边数和三角形数。

我们的主要结果如下。

定理 (定理 3.6). 设 G 是一个有 e 条边和 t 个三角形的 K_4-自由闭图。那么对每个 $m \geq 1$ 和 $i \geq 0$，以下等式成立

$$\beta_{i,2m+i}(J_G^m) = \beta_{i,2m+i}(\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}\, J_G^m) = \binom{e+m-i-1}{m-i}\binom{2t}{i}.$$

我们的方法运用了研究行列式面理想的 Rees 代数时所用的工具。特别是，Almousa–Lin–Liske 的研究成果对我们的工作至关重要，[1], 此处将其总结为定理 2.1。

Date: 2026年1月19日。

2. Background

若存在一种顶点标记，使得对于所有满足 $i<j$， $k<l$ 的边 $\{i,j\}$ 和 $\{k,l\}$，我们都有：若 $i=k$，则 $\{j,l\}\in E(G)$；若 $j=l$，则 $\{i,k\}\in E(G)$，则称图 G 为**闭合的**。然而，等价定义还有很多；参见第 7.1 节。1] 图 G 的团 Δ 是图 G的一个诱导完全子图。我们用 C_3 表示三圈图，用 K_4表示具有 4 个顶点的完全图。

在多项式环 $R=\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ 上，由域 $\mathbb{K}$中的系数以及 $x_1>x_2>\cdots>x_n$ 所诱导的**字典序**是如下字典序：若 $(a_1-b_1,\dots,a_n-b_n)$ 的最左非零项为负，则 $x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}<_{lex}x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$。对于理想 $I\subset R$，记 $\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(I)$ 为由 I 中各元素关于字典序的首项单项式生成的理想。

分次自由分解是由自由 R-模 F_i 及次数保持的 R-模同态 d_i组成的序列

$$0\to F_p\xrightarrow{d_p}\cdots\xrightarrow{d_3}F_2\xrightarrow{d_2}F_1\xrightarrow{d_1}F_0 \tag{2.1}$$

使得对每个 i（其中 $1\le i\le p$），均有 $\mathrm{Ker}(d_i)=\mathrm{Im}(d_{i+1})$。序列 (2.1) 称为 R-模 $M=\mathrm{Coker}(d_1)$ 的自由分解。若对每个 i 均有 $\mathrm{Im}(d_i)\subseteq\mathfrak{m}F_{i-1}$，则称自由分解是极小的，其中 $\mathfrak{m}$ 表示 R 的齐次极大理想。

令 $R(-j)$ 表示环 R，其分次按照规则 $[R(-j)]_i=R_{i-j}$ 移位。**分次贝蒂数** $\beta_{ij}(M)$ 是指在 M 的最小自由分解中，i 次自由模里以 $R(-j)$ 为直和项出现的次数。更正式地，采用 (2.1) 中的记号，我们有

$$F_i=\bigoplus_j R(-j)^{\beta_{ij}}\ \text{for all } i,j.$$

M 的第 i 个 syzygy 模是 R-模 $\Omega^i(M)=\ker(d_i)$，在同构意义下唯一确定。若 M 由 d 次齐次元生成，则令 F_i^{lin} 为 F_i 的直和项 $R(-d-i)^{\beta_{i,\,d+i}}$。由于 $d_i(F_{\text{线性}i})\subseteq F_{i-1}^{\mathrm{lin}}$，将 (2.1) 中的微分限制在自由模 $F_{\text{线性}i}$上所得到的复形是 (2.1) 的子复形，我们称之为 M 的自由分解的**线性链**。它具有如下形式

$$0\to R(-d-p)^{\beta_{p,d+p}}\xrightarrow{d_p}\cdots\xrightarrow{d_3}R(-d-2)^{\beta_{2,d+2}}\xrightarrow{d_2}R(-d-1)^{\beta_{1,d+1}}\xrightarrow{d_1}R(-d)^{\beta_{0d}}.$$

设 G 是一个顶点集为 $V=[n]$、二项式边理想为 J_G的图。令

$$f_{ij}=x_iy_j-x_jy_i\ \text{and}\ J_G=(\ f_{ij}:\{i,j\}\in E(G)). \tag{2.2}$$

J_G 的 **Rees代数**是分次 R-代数

$$\mathcal{R}(J_G):=\bigoplus_{i\ge0}J_G^iT^i\subset R[T].$$

它存在一个满射环同态

$$\varphi:R[T_{ij}\mid(i,j)\in E(G)]\longrightarrow\mathcal{R}(J_G),\quad r\mapsto r,\ \text{for } r\in R,\quad T_{ij}\mapsto f_{ij}T. \tag{2.3}$$

φ的核对应于 J_G的 Rees代数的关系。Rees代数是双分次的，其中 $\deg(T)=(1,0)$，$\deg(x_i)=\deg(y_i)=(0,1)$，且映射 φ 是次数保持的，这意味着 $\deg(T_{ij})=(1,2)$。

初始理想的 Rees代数以类似方式定义：$\mathcal{R}(\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(J_G)=\bigoplus_{i\ge0}(\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}J_G)^iT^i\subset R[T]$。文献 [4, 方程（3）] 表明，对于闭图 G，对所有 $i\ge1$，$\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(J_G^i)=(\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}J_G)^i$ 中的恒等式均成立。因此，我们有 $\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(\mathcal{R}(J_G))=\mathcal{R}(\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}J_G)$。

当 G 是闭图时，Almousa-Liske–Lin证明了，其二项式边理想与初始理想的 Rees代数的关系可以明确描述如下。

定理 2.1 ([1, 定理 4.5])。设 G 是一个闭图，其团为 Δ_1、……、Δ_s。对于 $\{i,j\}\in E(G)$，若 a 是包含 $\{i,j\}$的团中最小的下标，则记为 $\{i,j\}\in\Delta_a$。采用(2.2) 和 (2.3)中的记号。特别地，令 T_{ij} 满足 $\varphi(T_{ij})=f_{ij}$，且 $\varphi(T_{ij})=$属于 $_{lex}(f_{ij})$，分别如此。

$\mathcal{R}(J_G)$ 的关系由以下关系生成：$x_iy_jT_{i'j'}-x_jy_iT_{i'j'}-x_{i'}y_{j'}T_{ij}+x_{j'}y_{i'}T_{ij}$其中

(1) $\{i,j\}\in\Delta_a$、$\{i',j'\}\in\Delta_b$满足 $a\ne b$（*Koszul*关系）；

(2) $$x_iT_{jk} - x_jT_{ik} + x_kT_{ij} \text{ and } y_jT_{ik} - y_iT_{jk} - y_kT_{ij} \tag{2.4}$$
for $\{i,j,k\}$ an induced C_3 in G with $i<j<k$ (Eagon-Northcott relations);

(3) $$T_{ij}T_{kl} - T_{ik}T_{jl} + T_{il}T_{jk} = 0$$

其中，$1 \le i < j < k < l \le n$和 $\{i,j,k,l\}$ 诱导出 G 的 K_4子图（*Pl¨ucker*关系）。$\mathcal{R}(\mathrm{in}_{lex}(J_G))$ 的关系由以下关系生成:

(1) $$x_iy_jT_{i'j'} - x_{i'}y_{j'}T_{ij}$$
对于 $i>i'$，$j>j'$，$\{i,j\} \in \Delta_a$，$\{i',j'\} \in \Delta_b$具有 $a<b$（Koszul 型关系）；

(2) $$x_iT_{jk} - x_jT_{ik} \text{ and } y_jT_{ik} - y_kT_{ij} \tag{2.5}$$
对于 $\{i<j<k\}$ 一个诱导 C_3 中的 G（Eagon-Northcott 型关系）；

(3) $$T_{ij}T_{j'i'} - T_{\min}T_{\max}$$
对于 $i \le j$和 $i' \ge j'$，min $=$（min$\{i,i'\}$，min$\{j,j'\}$），max $=$（max$\{i,i'\}$，max $\{j,j'\}$）（Pl¨ucker 型关系）。

在本文剩余部分，我们将关注 Pl¨ucker 型关系和定理 2.1 中给出的 Pl¨ucker 型关系均不存在的情形。在这种情况下，理想 J_G 被称为线性型。

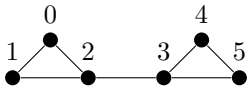
对我们的分析同样有用的是 $S = R[T_{ij}$ 上的两个单项式序：$(i,\ j) \in E(G)]$。在分析 $\mathcal{R}$（in $_{\mathrm{lex}(J_G)}$）的关系时，我们将使用由以下变量排列诱导的 S 上的逆字典序

$$\begin{aligned} &T_{ij} > T_{k\ell} \text{ if and only if } i<j \text{ or } i=j \text{ and } k<\ell \\ &T_{ij} > x_a, y_b \text{ for all } i,j,a,b \\ &x_1 > x_2 > \cdots x_n > y_1 > y_2 > \cdots > y_n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

已在 [1, 定理 3.14] 中证明，存在一种不同的单项式序 $\prec$作用于 S，使得 $\mathcal{R}(J_G)$ 的关系的首项单项式与 $\mathcal{R}$(在$_{\mathrm{lex}}(J_G)$中)的相应关系的首项单项式相同。因此，在分析 $\mathcal{R}(J_G)$的关系时，我们总是使用 $\prec$。

为说明我们的工作，我们将使用以下反复出现的例子。

例 2.2. $G = \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$



G 的二项式边理想由如下二项式生成

$$J_G = (f_{01}, f_{02}, f_{12}, f_{23}, f_{34}, f_{45}, f_{35}).$$

极大团为

$$\Delta_1 = \{0,1,2\}, \quad \Delta_2 = \{2,3\}, \quad \Delta_3 = \{3,4,5\}.$$

因此，根据定理 2.1，$\mathcal{R}(J_G)$的关系由以下元素生成:

(1) (Koszul关系)。 $f_{01}T_{23} - f_{23}T_{01}$，$f_{01}T_{34} - f_{34}T_{01}$，$f_{01}T_{35} - f_{35}T_{01}$，$f_{01}T_{45} - f_{45}T_{01}$，$f_{02}T_{23} - f_{23}T_{02}$，$f_{02}T_{34} - f_{34}T_{02}$，$f_{02}T_{35} - f_{35}T_{02}$，$f_{02}T_{45} - f_{45}T_{02}$，$f_{12}T_{23} - f_{23}T_{12}$，$f_{12}T_{34} - f_{34}T_{12}$，$f_{12}T_{35} - f_{35}T_{12}$，$f_{12}T_{45} - f_{45}T_{12}$，$f_{23}T_{34} - f_{34}T_{23}$，$f_{23}T_{35} - f_{35}T_{23}$，$f_{23}T_{45} - f_{45}T_{23}$.(2) (Eagon-Northcott 关系)。$y_1T_{02} - \overline{y_2T_{01}} - y_0T_{12}$，$x_0T_{12} \overline{- x_1T_{02}} + x_2T_{01}$，$y_4T_{35} \overline{- y_5T_{34}} - y_3T_{45}$，$x_3T_{45} - x_4\overline{T_{35}} + x_5T_{34}$.(3) (Pl¨ück 关系)。无。

$\mathcal{R}$(in$_{lex}(J_G)$) 的关系由以下元素生成:

(1')（Koszul 型关系）。 $x_3y_2T_{01} - x_1y_0T_{23}$，$x_4y_3T_{01} - x_1y_0T_{34}$，$x_5y_3T_{01} - x_1y_0T_{35}$，$x_5y_4T_{01} - x_1y_0T_{45}$，$x_3y_2T_{02} - x_2y_0T_{23}$，$x_4y_3T_{02} - x_2y_0T_{34}$，$x_5y_3T_{02} - x_2y_0T_{35}$，$x_5y_4T_{02} - x_2y_0T_{45}$，$x_3y_2T_{12} - x_2y_1T_{23}$，$x_4y_3T_{12} - x_2y_1T_{34}$，$x_5y_3T_{12} - x_2y_1T_{35}$，$x_5y_4T_{12} - x_2y_1T_{45}$，$x_4y_3T_{23} - x_3y_2T_{34}$，$x_5y_3T_{23} - x_3y_2T_{35}$，$x_5y_4T_{23} - x_3y_2T_{45}$.

(2')（Eagon-Northcott 关系）。 $y_0\underline{T_{12} -} y_1T_{02}$，$x_0\underline{T_{12} -} x_1T_{02}$，$\underline{y_3T_{45}} - y_4T_{35}$，$\underline{x_3T_{45}} - x_4T_{35}$.

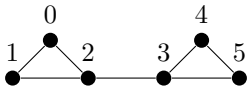
(3')（Pl¨ucker 关系）。无。

相对于上文讨论的两种单项式序，我们将 Eagon-Northcott 关系和 Eagon-Northcott 型关系的首项单项式加下划线。请注意，对于这两组关系中的每一组，加下划线的首项都是两两互素的。我们将在定理 3.5 中证明，对于任意闭图，情况都是如此。

3. Main Result

本节将证明 J_G^m 的线性链公式。我们将从 J_G 的 Eagon-Northcott 关系序列上的 Koszul 复形中提取这些信息。我们将通过一个具体例子对此进行说明。

例 3.1。我们回到定理 2.2 中的图。



对于 $m = 2$，我们将组合地解释定理 2.1 中公式的由来。令 $t = 2$ 表示 3-圈的数量，令 $e = 7$ 表示 G 的边数。那么定理 2.1 得出如下 Betti 表

$$e = 7, \qquad t = 2$$

J_G^2	0	1	2	3
4	$\binom{2+1}{2}$	$2 \cdot 7 \cdot 2$	$\binom{2\cdot 2}{2}$	.
5	.	$\beta_{1,6}$	$\beta_{2,7}$	$\beta_{3,8}$
6	.	.	$\beta_{2,8}$	$\beta_{3,9}$.

J_G^2 的 Betti 表第一列中的数字是 J_G^2 的极小生成元个数。极小生成元是 $\binom{e+1}{2}$，即 J_G 的 e 个生成元两两相乘所得的乘积。由于对于无 Pl K_4ucker 关系的图而言，这些生成元线性无关，因此上述乘积也线性无关。

我们将在定理 3.2 中看到，J_G^2 的第一 syzygy 对应于 $\mathcal{R}(J_G)$ 中关于 T_{ij} 变量的二次关系。特别地，根据定理 2.1 和次数推理，第一线性 syzygy 对应于 Eagon-Northcott 关系与 Rees 环（2.3）中变量 T_{ij} 的乘积。第二列顶端的数值体现了这种对应关系：G 中的每个 3-圈都会产生两个 Eagon-Northcott 关系，一个含有 x 项，另一个含有 y 项。由于有 $2t$ 个 Eagon-Northcott 关系以及 T_{ij} 个变量 e，我们得到 $2et$ 个乘积。在定理 2.1 中，我们将这些乘积解释为由 Eagon-Northcott 关系构成的 Koszul 复形的线性链的一部分。同样，我们将最后一列中的数字解释为 $2t$ 个 Eagon-Northcott 关系之间的 $\binom{2t}{2}$ 个 Koszul syzygy。

3.1. 通过 Rees代数的关系得到合关系。

本节考虑一个比本文其余部分更为一般的设置。稍后，我们将把这些结果应用于闭图的二项式边理想及其初始二项式边理想。

设 R 是一个分次 $\mathbb{K}$-代数，并设 $I = (f_1, \ldots, f_s)$ 是 R 的一个齐次理想。考虑 R-代数映射 φ：$R[T_1, \ldots, T_s] \to \mathcal{R}(I)$，其定义为 $\varphi(r) = r$（当 $r \in r$ 时），以及 $\varphi(T_i) = f_i$。我们将 $R[T_1, \ldots, T_s]$ 视为一个双分次环，其中 $\deg(r) = (0, \deg_R(r))$，且 $\deg(T_i) = (1, \deg(f_i))$。

记 $L = \ker(\varphi)$，并定义 L 的以下子集

$$\begin{aligned} L_{(a,b)} &= \{F \in L : \deg(F) = (a,b)\}, \\ L_{(a,\geq b)} &= \{F \in L : \deg(F) = (a,c) \text{ for some } c \geq b\}, \\ L_{(a,-)} &= L_{(a,\geq 0)}. \end{aligned}$$

注意，第一组是一个 $\mathbb{K}$向量空间，最后两组是 R–模。为了更明确地描述这些集合，我们使用记号 $|\alpha| = \sum_{i=1}^s \alpha_i$ 来表示向量 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{Z}^s$。我们

have

$$\begin{aligned} L_{(m,-)} &= \{F \in R[T_1,\ldots,T_s] : \varphi(F) = 0, \deg F = (m,-)\} \\ &= \left\{ F = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^s_{\geq 0}, |\alpha|=m} r_\alpha T_i^{\alpha_i} \in R[T_1,\ldots,T_s] : \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^s_{\geq 0}, |\alpha|=m} r_\alpha f_i^{\alpha_i} = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

我们将应用通过以下引理，借助 Rees代数来研究 I 的幂的合关系 .

命题3.2。设 R 是一个分次 $\mathbb{K}$-代数，具有 $R_0 = \mathbb{K}$，并设 I 是 R 的一个齐次理想，其最小齐次生成集为 $\{f_1,\ldots,f_s\}$，其中元素的次数为 d。则作为分次 R-模，$\Omega_1(I^m)$ 与 $N = L_{(m,-)}/L_{(m,\geq md)}$ 同构。

证明。设 $\{h_1,...,h_t\} \subset \{f^\alpha : \ |\alpha| = m\}$ 是 I^m 作为 $\mathbb{K}$-向量空间的极小生成集。取自由模 R^t 的一组基 e_1，.....，e_t 以及元素 r_1，.....，$r_t \in R$，则有一个 R-模同态

$$\partial : R^t \to R, \quad \partial\left(\sum_{i=1}^t r_i e_i\right) = \sum_{i=1}^t r_i h_i.$$

回忆一下，$\Omega_1(I^m) = \ker(\partial)$。

对于每个 $1 \leq i \leq t$，固定 $\alpha^{(i)} = (\alpha_1^{(i)}, \ldots..., \alpha_s^{(i)}) \in \mathbb{Z}^s_{\geq 0}$，使得极小生成元 h_i 分解为 $h_i = f_1^{\alpha_1^{(i)}} \cdots f_s^{\alpha_s^{(i)}}$。考虑如下映射

$$g_0 : \Omega_1(I^m) \to R[T], \quad g_0\left(\sum_{i=1}^t r_i e_i\right) = \sum_{i=1}^t r_i T_1^{\alpha_1^{(i)}} \cdots T_s^{\alpha_s^{(i)}}. \tag{3.2}$$

将 φ 应用于 g_0 的像中的一个元素，得到

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^t r_i T_1^{\alpha_1^{(i)}} \cdots T_s^{\alpha_s^{(i)}}\right) = T^m \sum_{i=1}^t r_i h_i = T^m \partial\left(\sum_{i=1}^t r_i e_i\right) = 0.$$

因此，根据 (3.1)， g_0 的像包含于 $L_{(m,-)}$ 中。映射 g_0 诱导出一个 R-模同态 $\Omega_1(I^m) \xrightarrow{g_1} N$，它将源中的次数为 v 的元素映射到目标中次数为 (m, v) 的元素，从而保持 R-次数。

接下来我们定义一个逆映射。由 (3.1) 可知

$$\sum_{|\alpha^{(i)}|=m} r_i T^{\alpha^{(i)}} = \sum_{|\alpha^{(i)}|=m} r_i T_1^{\alpha_1^{(i)}} \cdots T_s^{\alpha_s^{(i)}} \in L_{(m,-)} \iff \sum_{|\alpha^{(i)}|=m} r_i f_1^{\alpha_1^{(i)}} \cdots f_s^{\alpha_s^{(i)}} = 0. \tag{3.3}$$

由于 $h_1,...,h_t$生成 I^m，且当 $|\alpha^{(i)}| = m$时 $f_1^{\alpha_1^{(i)}} \cdots f_s^{\alpha_s^{(i)}} \in I^m$，我们可以写成

$$f_1^{\alpha_1^{(i)}} \cdots f_s^{\alpha_s^{(i)}} = \sum_{j=1}^t a_{ij} h_j, \tag{3.4}$$

对某个 $a_{ij} \in \mathbb{K}$。于是，等式 (3.3) 化为

$$\sum_{|\alpha^{(i)}|=m} r_i T^{\alpha^{(i)}} \in L_{(m,-)} \iff \sum_{|\alpha^{(i)}|=m} r_i \left(\sum_{j=1}^t a_{ij} h_j\right) = 0. \tag{3.5}$$

使用（3.4）中引入的记号，我们定义

$$p_0 : L_{(m,-)} \to \Omega_1(I^m), \quad p_0\left(\sum_{|\alpha^{(i)}|=m} r_i T_1^{\alpha_1^{(i)}} \cdots T_s^{\alpha_s^{(i)}}\right) = \sum_{|\alpha^{(i)}|=m} r_i \left(\sum_{j=1}^t a_{ij} e_i\right). \tag{3.6}$$

由（3.5）可得

$$\partial\left(\sum_{|\alpha^{(i)}|=m} r_i \sum_{j=1}^{t} a_{ij}e_j\right) = \sum_{|\alpha^{(i)}|=m} r_i \left(\sum_{j=1}^{t} a_{ij}h_j\right) = 0.$$

因此， p_0 的像包含于 syzygy模 $\Omega^1(I^m)$ 中。

现在我们希望证明 $p_0 : L_{(m,-)} \to \Omega_1(I^m)$ 诱导出一个定义良好的映射 $p_0 : N \to \Omega_1(I^m)$。只需证明 $L_{(m,md)}$ 包含于 p_0的核中。对于 $F = \sum_{|\alpha^{(i)}|=m} c_i T_1^{\alpha_1^{(i)}} \cdots T_s^{\alpha_s^{(i)}}$，我们看到 $\deg(F) = (m, md)$ 当且仅当 $\deg_R(c_i) = 0$，当且仅当 $c_i \in \mathbb{K}$。接着令 $b_j = \sum_i c_i a_{ij} \in \mathbb{K}$，得到

$$p_0(F) = p_0\left(\sum_i c_i T_1^{\alpha_1^{(i)}} \cdots T_s^{\alpha_s^{(i)}}\right) = \sum_i c_i \left(\sum_j a_{ij}e_j\right) = \sum_{j=1}^{t} b_j e_j.$$

若 $F \in L_{(m,mn)}$，则 $p_0(F) = \sum_{j=1}^{t} b_j e_j \in \Omega_1(I^m)$，因此我们有 $\partial\left(\sum_{j=1}^{t} b_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{t} b_j h_j = 0$。由 $h_1, \ldots, h_s$ 在 $\mathbb{K}$ 上的线性无关性可知， $b_j = 0$ 对所有 $1 \le j \le t$ 均成立。因此，

$$p_0(F) = \sum_{j=1}^{t} b_j e_j = 0.$$

我们已经证明 $L_{(m,md)}$ 包含在 p_0的核中，因此存在一个定义良好的 R-模同态 $p_0 : N \to \Omega_1(I^m)$。最后，利用等式 (3.2) 和 (3.6)，以及 g_1 由 g_0诱导这一事实，可以验证 p_0 和 g_1 互为逆映射。□

虽然前一个结果仅涉及理想的幂的第一 syzygy 模，但在对 Rees代数的关系作出额外假设后，我们可以利用 Koszul 复形求出这些幂的整个线性链的公式。

命题 3.3。 设 I 是一个齐次理想，其最小齐次生成集 $\{f_1, \ldots, f_s\}$由次数为 d的元素构成。设 $S = R[T_1, \ldots, T_s]$，并以 $L \subset S$ 表示 *Rees*代数 $\mathcal{R}(I)$的关系理想。若 $L_{(1,d+1)}$ 由一个 S-正则序列 $g_1, \ldots, g_r$ 张成，且满足 $L_{(m,md+1)} = (g_1, \ldots, g_r)^{(m,md+1)}$ 和 $L_{(m,md)} = 0$，其中 $m \ge 1$，则 I^m 的线性链中的 *Betti*数由下式给出

$$\beta_{(i,md+i)}(I^m) = \binom{r}{i}\binom{s+m-i-1}{m-i}.$$

证明。 设 $E = (g_1, \ldots, g_r s) \subset S$，并考虑正则序列$g_1, \ldots, g_r$的 Koszul 复形 $K_\bullet$。这是 S/E的一个最小自由分解:

$$K_\bullet : 0 \to S(-m, -m(d+1))^{\binom{r}{m}} \to \ldots \to S(-i, -i(d+1))^{\binom{r}{i}} \to \ldots \to S(-1, -(d+1))^{\binom{r}{1}} \to S \to 0.$$

将双次数限制为 $(m, \ge md)$，并在右侧增添 $S(m, \ge md) \to I^m \to 0$，即可得到复形

$$0 \to S(-m, -m(d+1))^{\binom{r}{m}}_{(m,\ge md)} \to \ldots \to S(-i, -i(d+1))^{\binom{r}{i}}_{(m,\ge md)} \to \ldots \to S_{(m,\ge md)} \to I^m \to 0. \quad (3.7)$$

注意，在每个双次数 (u, v) 中，都存在一个分次 $\mathbb{K}$-向量空间同构

$$S_{(u,v)} = \bigoplus_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_u \le s} R_{v-du} \prod_{j=1}^{u} T_{i_j} \cong R_{v-du}{}^{\binom{s+u-1}{u}}. \quad (3.8)$$

由此可得， $S(-i,-i(d+1))_{(m,\geq md)}$ 是一个自由分次 R-模，其分解如下：

$$S(-i,-i(d+1))_{(m,\geq md)} = S_{(m-i,\geq md-i(d+1))} = S_{(m-i,\geq d(m-i)}(0,-i)$$
$$\overset{(3.8)}{\cong} \left[\bigoplus_{v\geq d(m-i)} R_{v-d(m-i)}{}^{\binom{s+(m-i)-1}{m-i}}\right](-i) = R(-i)^{\binom{s+(m-i)-1}{m-i}}. \tag{3.9}$$

因此，(3.7) 是由自由 R-模构成的增广线性复形。

注意，尽管复形 (3.7) 在较高同调次数上是正合的，但它在 $S(-1,\ -n)\binom{r}{1}_{(m,\ \geq md)} \to S_{(m,\geq md)} \to I^m$ 处不一定正合，因为我们有 $\ker(S_{(m,\geq md)} \to I^m) = L$，而不是 E。然而，将上面显示的序列限制到双次数 $(m,\ md+1)$ 后，我们有

$$\ker(S_{(m,md+1)} \to [I^m]_{md+1}) = L_{(m,md+1)} \tag{3.10}$$

$$\mathrm{Im}(S(-1,-d)^{\binom{r}{1}}_{(m,md+1)} \to S_{(m,md+1)}) = E_{(m,md+1)}. \tag{3.11}$$

(3.10) 中的等式由定理 3.2 和假设 $L_{(m,md)} = 0$ 得出。根据假设 $L_{(m,md+1)} = (g_1,\ \ldots\ldots,\ g_r)_{(m,md+1)} = E_{(m,md+1)}$，(3.10) 和 (3.11) 中的向量空间相等。由于复形 (3.7) 在次数 md 和 $md+1$ 上是正合的，因此根据推论 1.2]，它同构于 I^m 的 R-自由分解中的线性链，其中 [6, 。

因此，结合 (3.7) 和 (3.9)，我们得到公式 $\beta_{i,\ md+i}(I^m) = \binom{r}{i}\binom{s+m-i-1}{m-i}$ 。 □

3.2. **的线性链** J_G^m。 如果 G 是一个无 K_4 的闭图，那么 J_G 的 Rees代数不含任何 Pl¨ucker 关系，而 $\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}(J_G)$ 的 Rees代数不含任何 Pl¨ucker 型关系；这些关系的定义见定理 2.1，该定理说明它们对应于 K_4 子图。因此，我们可以由定理 3.2 推导出 J_G 的幂的第一 syzygy 的一个特别简洁的表达式。

推论 3.4。 设 G 是一个不含诱导 K_4 的闭图。令 L 表示 *Rees*代数 $\mathcal{R}(J_G)$ 的关系理想，并令 L' 表示 *Rees*代数 $\mathcal{R}(\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}\, J_G)$ 的关系理想。那么，采用 (3.1) 中的记号，对每个整数 $m \geq 1$ ，都有分次 R-模同构

$$L_{(m,-)} \cong \Omega^1(J_G^m) \qquad and \qquad L'_{(m,-)} \cong \Omega^1((\mathrm{in}_{\mathrm{lex}}\, J_G)^m).$$

证明。 由于图 G 是闭图，理想 J_G 及其在 $_{\mathrm{lex}}(J_G)$ 中的初始理想均由二次元素生成。若不存在诱导 K_4 图，则 $L_{(m,2m)} = 0$ ，由定理 3.2 可得 $\Omega_1(J_G^m) \cong L_{(m,-)}$。同理，若不存在诱导 K_4 图，则 $L'_{(m,2m)} = 0$ ，由定理 3.2 可得 $\Omega_1(J_G^m) \cong L_{(m,-)}$。 □

回顾 (2.4) 和 (2.5) 中分别给出的 Eagon-Northcott 关系和 Eagon-Northcott 型关系的定义。为应用定理 3.3，我们证明 Eagon-Northcott 型关系以及 Eagon-Northcott 关系分别在 S 中构成正则序列。

引理 3.5。 设 G 是一个配备区间标记的闭图。假设 G 不含大小为四的团。那么

(1) Eagon-Northcott 型关系 (2.4) 构成一个正则序列 .
(2) Eagon-Northcott 关系 (2.5) 构成一个正则序列。

证明。 要证明 (1) 和 (2)，只需证明每组关系的首项单项式构成一个正则序列 [8]。由于根据定理 2.1 后面的说明，这些首项单项式相同，因此我们可以同时证明 (1) 和 (2)。

相对于 (2.6) 中讨论的单项式序以及该方程后描述的序 $\prec$ ，Eagon-Northcott 型关系和 Eagon-Northcott 关系 (2.4) 的首项单项式集合分别为

$$\mathcal{L} = \{x_iT_{jk}, y_jT_{ik} \mid \{i<j<k\} \text{ is a clique in } G\}.$$

现在我们证明， $\mathcal{L}$ 中列出的单项式两两互素，这等价于它们构成一个正则序列。

在证明中，我们将采用 [3, 命题 4.8]给出的闭图的另一种刻画： G 是闭图，当且仅当对于所有整数 $1 \leq i < j < k \leq$ n，若 $\{i,k\} \in E(G)$，则 $\{i,j\} \in E(G)$ 且 $\{j,k\} \in E(G)$。我们将这一性质称为闭标记条件。

考虑以下几种情况：

情况 *1*：如果 $x_iT_{jk} \in \mathcal{L}$ 和 $x'_iT_{j'k'} \in \mathcal{L}$ 是不同的单项式，那么 $\{i < j < k\}$ 和 $\{i' < j' < k'\}$ 是 G 中的团。如果 $i = i'$，那么根据闭图的定义，$\{j,j'\}$，$\{j,k'\}$，$\{j',k\}$，$\{k,k'\} \in E(G)$，因此 $\{i,j,k,j',k'\}$ 是 G 中大小至少为四的团。如果 $j = j'$ 且 $k = k'$，那么由于G是闭图，$\{i,i'\} \in E(G)$，因此 $\{i,j,k,i'\}$ 是 G 中大小为四的团。由于这两种可能性都与假设矛盾，我们得出 x_iT_{jk} 和$x'_iT_{j'k'}$ 互素。

情形 *2*：若 $x_iT_{jk} \in \mathcal{L}$ 和 $y_{j'}T_{i'k'} \in \mathcal{L}$ 是不同的单项式，则 $\{i < j < k\}$ 和 $\{i' < j' < k'\}$是 G中的团。若 $j = i'$ 和 $k = k'$，则有 $i < j = i' < j' < k = k'$。根据闭标记条件，由于 $\{i,k\}$ 是 G的一条边，$\{i,j,j',k\}$ 是 G中大小为四的团。由于这与假设矛盾，我们得出结论：x_iT_{jk} 和 $y_{j'}T_{i'k'}$ 互素。

情形 *3*：若 $y_jT_{ik} \in \mathcal{L}$ 和 $y_{j'}T_{i'k'} \in \mathcal{L}$ 是不同的单项式，则 $\{i < j < k\}$ 和 $\{i' < j' < k'\}$ 是 G中的团。若 $j = j'$，则由于 G 是闭的，至少有一对 $\{i,i'\}$ 和 $\{k,k'\}$ 互不相同，且是 G的一条边。若 $i \neq i'$ 和 $\{i,i'\} \in E$（G），不失一般性地假设 $i < i'$，将闭标记条件应用于 $i < i' < k$ 可得这三个顶点构成一个团，因此 $\{i,i',j,k\}$ 是 G中大小为四的团。若 $i = i'$和 $k \neq k'$，且$\{k,k'\} \in E$（G），则 $\{i,j,k,k'\}$是一个大小为四的团。若 $i = i'$和 $k = k'$，则有$i = i' < j$，$j' < k = k'$，并且根据闭标记条件可知，$\{i,j,j',k\}$ 是 G 中大小为四的团。由于每一种可能性都与假设矛盾，我们得出结论：x_iT_{jk}和 $y'_jT_{i'k'}$ 互素。

鉴于案例分析之前的论证，这就完成了证明。 □

我们可以应 用这一结果于一个无 K_4图的二项式边理想，从而得到我们的主要结果。

定理 3.6。设 G 是一个具有 K_4、e 条边和 t 个三角形（*3*-圈）的闭 $2m$-自由图。J_G^m 的 -线性带以及在$_{\text{lex}}$（J_G）^{m}中的 ***Betti***数由下式给出

$$\beta_{i,2m+i}(J_G^m) = \beta_{i,2m+i}(\text{in}_{\text{lex}}(J_G)^m) = \binom{e+m-i-1}{m-i}\binom{2t}{i}.$$

证明。固定一个整数 $m \geq 1$，令 L 和 L' 分别表示 $\mathcal{R}$(J_G) 的关系集合以及 $\mathcal{R}$（在$_{\text{lex}}$(J_G) 中）的关系集合。G 是 K_4-自由图这一假设确保不存在 Pl¨ucker 关系或 Pl¨ucker 型关系，因此由定理 2.1 可得 $L_{(m,2m)} = L'_{(m,2m)} = 0$。

根据定理 3.5，定理 2.1 中给出的 Eagon-Northcott 关系集合和 Eagon-Northcott 型关系集合构成一个正则序列。此外，基于定理 2.1 的次数理由，$L_{(m,2m+1)}$ 中的每个元素都必须属于由 Eagon-Northcott 关系生成的理想，而 $L'_{(m,2m+1)}$ 中的每个元素都必须属于由 Eagon-Northcott 型关系生成的理想。于是，我们可以对 J_G 以及 $_{\text{lex}}$(J_G) 中的在$r = 2t$ （Eagon-Northcott 关系或 Eagon-Northcott 型关系的数量）和 $s = e$ （ J_G 以及 $_{\text{lex}}$(J_G) 中极小生成元的数量）应用定理 3.3，从而得到所述公式。G 是闭图这一假设用于确保 in$_{\text{lex}}$(J_G) 中极小生成元的数量与 J_G中的相同；参见 [5, 定理 7.2]。□

4. Acknowledgements

本研究由 NSF RTG Grant DMS-2342256内布拉斯加州交换代数和 SECIHTI grants CF-2023-G-33 重新定义交换代数、奇 ´异点理论 ´、´编码 ´理论和奇 ´异点理论之间的边界 以及 Grant CBF 2023-2024-224：交换代数、奇异点与编 ´码资助，作为在 2025 年夏季于 CIMAT 举办、由 CIMAT 和内布拉斯加大学林肯分校组织的交换代数国际 REU 项目的一部分。

我们还要感谢 Alexandra Seceleanu、Shahriyar Roshan Zamir、Elo´ısa Grifo、Luis N´u˜nez-Betancourt 和 JackJeffries，感谢他们宝贵的讨论与指导。

References

[1] Ayah Almousa、Kuei-Nuan Lin 和 Whitney Liske。单位区间行列式面理想的 Rees 代数。

J.，（）：论文编号。[2]

Pure Appl. Algebra 228 5 107601, 15, 2024
Ayah Almousa 和 Keller VandeBogert。行列式面理想初始理想的线性带。

Comm.，（）：–。[3] Marilena

Algebra 50 5 2198 2214, 2022
Crupi 和 Giancarlo Rinaldo。具有二次 Gr¨obner 基的二项式边理想。 *Electron. J. Combin.*，18 1（）：论文 211，13，2011。[4] Viviana Ene、Giancarlo Rinaldo 和 Naoki Terai。具有二次 Gr¨obner 基的二项式边理想的幂。*Nagoya Math. J.*，246：233–255，2022。[5] J
¨

Binomial ideals 279 *Graduate Texts in Mathe-* urgen Herzog、

matics 2018
Takayuki Hibi 和 Hidefumi Ohsugi。，第 卷，。Springer，Cham，。[6] J
¨

Michigan urgen Herzog、Dariush

Math. J. 66 1 107 123, 2017
Kiani 和 Sara Saeedi Madani。行列式面理想的线性链。，（）：—。[7] J¨urgen Herzog、Takayuki Hibi、Freyja Hreinsd´ottir、Thomas Kahle 和 Johannes Rauh。二项式边理想与条件独立性陈述。 *Advances in Applied Mathematics*，45(3)：317–333，2010年9月。[8] Mel Hochster。数学615：2007年2月2日讲义：单项式情形下的正则序列。第2页，2007年。[9] Masahiro Ohtani。完全多部图的二项式边理想。 *Comm. Algebra*，41(10)：3858–3867，2013。[10] Irena Peeva。闭二项式边理想。 *J. Reine Angew. Math.*，803：1–33，2023。

Department of Mathematics, Purdue University, Mathematical Sciences Bldg, 150 N University St, WestLafayette, Indiana 47907, USA.*Email address*: adohadwa@purdue.edu

Facultad de Ciencias, Universidad de Colima, 340 Bernal Díaz del Castillo St, Villas San Sebastián, Colima Colima 28045 , , México.
Email address: bryanefs12@gmail.com

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías Universidad de Guadalajara 1421 General , , „ , Marcelino García Barragán Ave Olímpica Guadalajara Jalisco 44430 México.
, *Email address*: luz.orozco5616@alumnos.udg.mx

Department of Mathematics and Statistics, Boston University, 665 Commonwealth Ave, Boston, Mas-sachusetts 02215, USA.*Email address*: z0e@bu.edu