arXiv:2601.10845v1 [math.AC] 15 Jan 2026

整环的 n-全图

Myriam AbiHabib 和 Ayman Badawi

Abstract. 设 R 是整环的有限直积， D 是素理想的并（ R 也可能只是一个整环）。设 $n \geq 1$ 为正整数。本文引入（R， D）的 n-全图。（R， D）的 n-全图记为 $n - T(R)$，它是一个顶点集为 R 的无向简单图，其中 R 中的两个顶点 x，y 之间有边相连，当且仅当 $x^n + y^n \in D$。本文研究若干图性质及其理论环结构。

谨以此文献给 Mohammad Ashraf 教授和 R. K. Sharma 教授

1. 引言

本文中，所有环均为具有 $1 \neq 0$ 的交换环。自 Beck 在 [**BE**]，的研究中提出基于乘积为零的交换环着色以来，利用图论研究代数结构日益受到关注。由此，零因子图这一概念得以正式确立：若不同顶点 x 和 y 满足 $xy = 0$，则它们相邻。Anderson 和 Naseer [**AN**]，以及 Anderson 和 Livingston[**AL**] 的后续研究确立了零因子图的基本性质，包括其连通性和直径界。在 [**AB**], 中，Anderson 和 Badawi 引入了全图，其中邻接关系基于条件 $x + y \in Z(R)$，以研究环中的加法行为。

这一概念在 [**AB(b)**]，中得到了进一步推广，Anderson 和 Badawi 使用子集 $H \subseteq R$ 定义了广义全图 $GT(R, H)$。其中，两个不同的顶点 x， $y \in R$ 相邻（即由一条边连接），当且仅当 $x+y \in H$。 [**AB(b)**]，中的研究表明，交换环的全图是其一个特例，从而使得对整环全图的研究成为可能。

相关进展增加了将图与环联系起来的可用工具。Akbari 等人在 [**AKMM**], 中考察了交换环的正则图，将其结构与全图进行比较，并研究了由乘法和加法条件定义的邻接关系。随后，Anderson 和 Badawi 在 [**AB(a)**] 中的工作通过消去零元素对全图进行了改造，得到更精细的图结构，有助于识别特定的环论性质，尤其是约化环的性质。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 13A15；次要分类 13B99,05C99。
Key words and phrases. 全图、零因子图、广义全图、湮灭子图、零因子、连通、直径、围长。

《环上的图》 [**AABC**], 等基础综述对这些构造进行了统一阐述，展示了如何用图来建模不同的代数行为，包括乘法、加法和模论行为。 [**AABC**]列出了许多为代数视角下的图论作出重要贡献的研究者。

设 $G(V,E)$ 为一个图。回顾一下，若对于所有顶点 $u,v \in V$，在 G 中存在一条从 u 到 v 的路径，则称 $G=(V,E)$ 为连通图；若 V 中存在一对顶点 u,v，它们之间不存在路径，则称 $G(V,E)$ 为不连通图；若对于所有顶点 $u,v \in V$，在 G 中都不存在从 u 到 v 的路径，则称 $G=(V,E)$ 为全不连通图。在图 $G=(V,E)$ 中，两个顶点 u 和 v 之间的距离是 G 中连接 u 和 v 的最短路径的长度。记作 $d(u,v)$。若不存在路径，则称 $d(u,v) = \infty$。图 $G=(V,E)$ 的直径是 V 中顶点 u 和 v 之间距离的上确界。记作 $diam(G)$。图 $G=(V,E)$ 的围长是 G 中最短圈的长度，记作 $gr(G)$。若 G 中没有圈，则称 $gr(G) = \infty$。完全图 $G=(V,E)$ 是指其中每个顶点 $v \in V$ 都与其他所有顶点 $u \in V$ 相邻的图。具有 n 个顶点的完全图记作 K_n。完全二部图 $G=(V,E)$ 是指其顶点集被划分为两个集合 V_1,V_2 的图，其中 $V1 \cap V2 = \emptyset$， V_1 中任意两个顶点不相邻，且 V_2 中任意两个顶点不相邻。此外， V_1 中的每个顶点都与 V_2 中的每个顶点相邻。具有 $|V_1| = m$ 和 $|V_2| = n$ 的完全二部图记作 $K_{n,m}$。若图 G 的子群 C 是连通的，且 C 中的每个顶点都与 C 外的每个顶点不连通，则称其为 G 的一个连通分支。

最近，AitElhadi 和 Badawi [AIBA] 将交换环的全图这一概念推广为交换环的 n-全图。回顾[AIBA], 中的定义：设 R 是交换环， $Z(R)$ 是 R 的所有零因子的集合，并且 $n \geq 1$。 R 的 n-全图记作 $n-T(R)$，它是一个无向简单图，其顶点集为 R；若 x、y 是 R 中的两个顶点，且 $x^n + y^n \in Z(R)$，则它们相邻。由于 $Z(R)$ 是素理想的并，本研究将 [AIBA] 中的 $Z(R)$ 替换为素理想并集 D。我们在 (R,D) 上定义一个新图，其中 R 是整环的有限直积， D 是 R 的一组在包含关系下不可比较的素理想之并。注意， R 可能是一个整环。设$n \geq 1$为正整数。(R,D) 的 n-全图记作 $n-T(R)$，它是一个无向简单图，顶点集为 R；若 x、y 是 R 中的两个顶点，且 $x^n + y^n \in D$，则它们之间有一条边（即相邻）。

本文分析了整环关于素理想的并的 n-全图的性质，重点考察其连通性、直径和围长。注意， $n-TG(D)$ 的子图总是连通的，并且 $n-TG(D)$ 是完全图当且仅当 D 是 R 的理想。此外，若 D 是 R 的理想，则诱导子图 $n-TG(D)$ 和 $n-TG(R \setminus D)$ 是 $n-TG(R)$ 的不相交子图。然而，若 D 不是 R 的理想，则 $n-TG(D)$ 和 $n-TG(R \setminus D)$ 这两个 $n-TG(R)$ 的诱导子图绝不可能不相交。

2. D 是理想的情形

设 $n \geq 1$ 为一个整数， R 为一个有限域，使得 D 是 R 的素理想。这意味着 $D = \{0\}$ 和 $|D| = 1$。令 $|R| = m$ 和 $d = gcd(n,\ m-1)$。显然，诱导子图 $n-TG(D)$ 是

$n-TG(R)$。因此，本节将重点讨论 $n-TG(R\setminus D)$。令 $n\geq 1$和 $S_n=\{a^n|a\in R\setminus D\}$。以下已知引理将作为工具，用于证明本文中的一些结果。证明留给读者。

LEMMA 2.1. 设 R 是一个含有 m 个元素的有限域，且 $d=gcd(n,m-1)$。则 $S_n=\{a^n|a\in R\setminus D\}$ 是 $R\setminus D$ 的一个循环子群，且 $|S_n|=\frac{m-1}{d}$。

LEMMA 2.2. 设 R 是一个有限域。则对于某个$a\in R\setminus D$， $x^n=a$ 有解当且仅当 $a\in S_n$。此外，若 $a\in S_n$，则 $x^n=a$ 恰有 d个解。

我们请读者将以下结果与 [**AIBA**定理 2.6]进行比较。

THEOREM 2.3. 设 R 是一个含有 m 个元素的有限域，满足 $char(R)=2$（即 $1+1=0$）， $n\geq 1$ 是一个整数， $d=gcd(n,m-1)$，且 $\alpha=\frac{m-1}{d}$。则，$n-TG(R)=K_d\oplus K_d\oplus\ldots\oplus(\alpha\ times)\oplus K_1$。

PROOF. 对于每个 $a\in S_n$，令 $C_n(a)=\{b\in R\setminus D\ |b^n=a\}$。由引理 2.2，得 $|C_n(a)|=d$。由于 $char(R)=2$，因此 $C_n(a)$ 中任意两个不同顶点在 $n-TG(R)$ 中都相邻。因此， $C_n(a)$ 个元素构成完全连通分支 K_d。由引理 2.1，$|S_n|=\alpha$ 因此恰有 α 个完全连通分支 K_d。由于 D 构成 $n-TG(R)$ 的连通分支 K_1，因此有 $n-TG(R)=K_d\oplus K_d\oplus\ldots\oplus K_d\ (\alpha\ times)\oplus K_1$。□

EXAMPLE 2.4. 令 $\mathbb{F}_4=\mathbb{F}_2[X]/(f(x))$，其中 $f(x)=x^2+x+1$。那么，$3-TG(\mathbb{F}_4)=K_3\oplus K_1$，如图 1 所示。

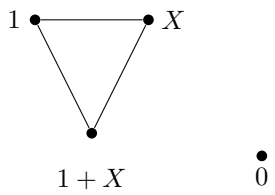


FIGURE 1. 3-TG($\mathbb{F}_4$)

EXAMPLE 2.5. 设 $\mathbb{F}_4=\mathbb{F}_2/(f(x))$，其中 $f(x)=x^2+x+1$，并设 $n=5$。这里 $d=1$ 且 $\alpha=3$。那么， $5-TG(\mathbb{F}_4\setminus D)$ 是全不连通的。

我们请读者将以下结果与 [**AIBA**定理 2.9]进行比较。

THEOREM 2.6. 设 R 是一个阶为 m 的有限域，满足 $char(R)\neq 2$； $n\geq 1$ 为整数， $d=gcd(n,\ m-1)$，且 $\alpha=\frac{m-1}{d}$。那么

(1) $n-TG(R\setminus D)$ 是全不连通的，当且仅当 α 为奇数。(2) 如果 α 为偶数，那么 $n-TG(R\setminus D)=K_{d,\ d}\oplus\ldots\oplus K_{d,\ d}$ 次。

PROOF. (1) 假设 $n-TG(R\setminus D)$ 是全不连通的。设 α 为偶数。那么根据引理 2.1，$S_n(R)=\{b^n\mid b\in R^*\}$ 是 R^* 中阶为 α 的唯一循环子群。由于 α 为偶数， $-1\in C_n(R)$

并且由于 $char(R) \neq 2$，我们有 $1 \neq -1$。因此，存在 $x,\ y \in R \setminus D$ 使得 $x^n + y^n = 0 \in R$；这与 $n - TG(R \setminus D)$ 是全不连通的矛盾。

反过来，假设 α 是奇数，且 $n-TG(R\setminus D)$ 并非全不连通。那么，存在 $x,\ y \in D$ 使得 $x^n + y^n \in D$。因此，$x^n = -y^n$。将两边同时提升到 α 次幂，得到 $(x^n)^\alpha = (-y^n)^\alpha$，这意味着 $x^{n\alpha} = -y^{n\alpha}$，因为 α 是奇数。因此，$1 = -1$。这是矛盾的，因为 $char(R) \neq 2$。所以，$n - TG(R \setminus D)$ 是全不连通的。

(2) 假设 x 和 y 在 $n-TG(R\setminus D)$ 中相邻。那么 $x^n+y^n \in D$。这意味着 $x^n = -y^n$。令 $a = x^n$ 和 $b = -y^n$，则这两个方程各有 d 个解，由引理 2 可知。因此，我们将有 d 个顶点与 d 个其他顶点相连。现在，假设 x_1 和 x_2 是方程 $a = x^n$ 的两个解。那么 $x_1^n + x_2^n = a + a = 2a \notin D$。类似地，如果 y_1 和 y_2 是方程 $b = -y^n$ 的解，那么它们不相邻。因此，我们得到一个完全二部图 $K_{d,\ d}$。由于每个完全二部图有 $2d$ 个顶点和 $|R \setminus D| = m - 1$，因此 $n - TG(R \setminus D)$ 将由 $\frac{m-1}{2d} = \frac{\alpha}{2}$ 个完全二部图 $K_{d,\ d}$ 组成。

□

Example 2.7. 当 m 为奇素数且 $D = \{0\}$ 时，$n - TG(\mathbb{Z}_m \setminus D)$ 是连通的。取 $m = 7$ 和 $n = 3$。于是，$d = 3$ 和 $\alpha = 2$。因此，$3 - TG(\mathbb{Z}_7 \setminus D) = K_{3,\ 3}$，如图 2 所示。

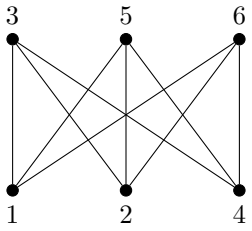


Figure 2. 3-$TG(\mathbb{Z}_7 \setminus D)$

Example 2.8. 有限域 $\mathbb{F}_9$。设 $f(x) = x^2+1$。则，$\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3/(f(x))$ 和 $n = 5$。这里 $d = 1$ 和 $\alpha = 8$。则，$5 - TG(\mathbb{F}_9 \setminus D) = K_{1,\ 1} \oplus ... \oplus K_{1,\ 1}$，4 次，如图 3 所示。

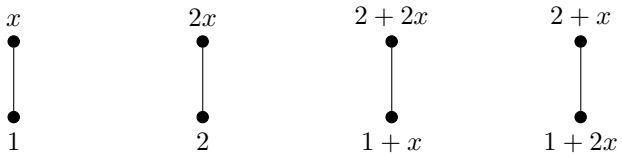


Figure 3. 5-TG($\mathbb{F}_9 \setminus D$)

我们邀请读者将以下结果与 [**AIBA**，推论 2.12] 进行比较。

COROLLARY 2.9. 设 $n \geq 1$ 为一个整数，R 为一个阶为 m 的有限域，且 $char(R) \neq 2$。那么， $n - TG(R \setminus \{0\})$ 连通当且仅当 $d = \frac{m-1}{2}$。

PROOF. 设 $d = \frac{m-1}{2}$。由于 $\alpha = \frac{m-1}{d}$，因此 $\alpha = 2$。根据定理 2.6， $n-TG(R\setminus D) = K_{d,\ d}$ 是连通的。现在，假设 $n-TG(R\setminus D) = K_{d,\ d}$是连通的。那么， $n-TG(R)$ 有 $d+d+1$ 个顶点，这意味着 $m = 2d+1$，从而 $d = \frac{m-1}{2}$。□

我们邀请读者将以下结果与 [**AIBA**，定理 2.15]进行比较。

THEOREM 2.10。 设 R 为有限域且 $D = \{0\}$。则
(1) $diam(n - TG(R \setminus D)) = 0$， 1， 2，或 ∞(2) $gr(n - TG(R \setminus D)) = 3$， 4 或 ∞。

PROOF. (1) $n - TG(R \setminus D))$ 或者是全不连通的，或者是由 d 个顶点构成的完全子图的并，或者是完全二分图的并。因此，直径为 0、1 或 2。(2) 假设 $n - TG(R \setminus D)$ 中有圈。那么，它或者是完全子图的并，或者是完全二分图的并。因此，围长为 3 或 4。如果 $n - TG(R \setminus D)$ 是全不连通的，那么$gr($ $n - TG(R \setminus D)) = \infty$。

□

EXAMPLE 2.11. (1) $diam(3-TG(\mathbb{Z}_7 \setminus D)) = 2$且 $gr(3-TG(\mathbb{Z}_7 \setminus D)) =4$。
(2) $diam(5 - TG(\mathbb{F}_9 \setminus D)) = 1$且 $gr(5 - TG(\mathbb{F}_9 \setminus D)) = \infty$，因为该图无圈。
(3) $diam(5 - TG(\mathbb{F}_4 \setminus D)) = \infty$且 $gr(5 - TG(\mathbb{F}_4 \setminus D)) = \infty$，因为该图是全不连通的。

THEOREM 2.12. 设 $R = R_1 \times ... \times R_k$，其中 R_i 对$1 \leq i \leq k$而言是整环，其中 $k \geq 2$，并设 $D = P_1 \times \prod_{i=2}^{k} R_i$。若 $n \geq 1$，则 $n - TG(R)$永远不连通。

PROOF. 假设 $n - TG(R)$是连通的。则存在一条从 (0，0，.....0) 到 (1，1，.....，1) 的路径。因此， $n - TG(R_1)$是连通的。假设$0-w_1-w_2-...-w_m-1_{R_1}$ 是 R_1中的一条路径。那么， $w_1^n \in P_1$， $w_1^n+w_2^n \in P_1$，.....， $w_m^n+1 \in P_1$. 这意味着 $1 \in P_1$. 这与假设矛盾。□

2.1. D **不是** R**的理想的情形。** 本节将考虑 R 是整环或整环的直积，且 D 是 R.的至少两个不可比较的素理想的并集

REMARK 2.13. 设 R 是一个整环，且 $D = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_k$， $k \geq 2$ 满足对每个 $1 \leq i, j \leq k, P_i \nsubseteq P_j$。 (1) $n - TG(D)$ 总是连通的，因为对所有 $x, y \in D$， $x - 0 - y$都是一条路径。 (2) $n - TG(R)$ 连通当且仅当 $1 = x_1 + x_2 + ... + x_m$， 其中$x_i \in D$ 对 $1 \leq i \leq m$成立。

我们邀请读者将以下结果与 [**AIBA**定理 2.17]进行比较。

THEOREM 2.14. 假设 R 是一个整环，且 $D = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_k$，其中 $k \geq 2$ 满足对每个 $1 \leq i, j \leq k$，$P_i \nsubseteq P_j$。那么，当且仅当 0 与1之间存在一条路径时，$n - TG(R)$ 是连通的。

PROOF. 假设 $n - TG(R)$ 是连通的，那么任意两个顶点之间都存在一条路径。

现在假设 0 和 1 之间存在一条路径。那么，$0 - v_1 - v_2 - ... - v_k - 1$。因此，对于任意 $v_i - v_j$，$v_i^n + v_j^n \in D$。令 $w \in R$，则 $(wv_i)^n + (wv_j)^n = w^n(v_i + v_j) \in D$。因此，对于所有 $w \in R$，$0 - wv_1 - wv_2 - ... - wv_k - w$ 是一条从 0 到 w 的路径，故 R 中任意两个顶点之间都存在一条路径。因此，$n - TG(R)$ 是连通的。□

THEOREM 2.15. 假设 R 是一个整环。设 $n \geq 1$ 为奇整数，且 $D = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_k$、$k \geq 2$ 满足对每个 $1 \leq i, j \leq k$，$P_i \nsubseteq P_j$。假设至少两个 P_k 互素，则 $n - TG(R)$ 是连通的，且直径为 2。

PROOF. 不妨设 P_1 和 P_2 互素。于是，$P_1 + P_2 = R$ 存在 $p_1 \in P_1$，$p_2 \in P_2$ 使得 $p_1 + p_2 = 1$。令$x, y \in R$使得 $x = xp_1 + xp_2$和 $y = yp_1 + yp_2$。假设 x与 y不相邻，并令 $w = -xp_1 - yp_2$。则，$x^n = x^n p_1^n + x^n p_2^n + p_1 p_2 k$，$k \in R$且 $w^n = -x^n p_1^n - y^n p_2^n + p_1 p_2 k_1$，$k_1 \in R$。因此，$x^n + w^n = p^n(x^n - y^n) + p_1 p_2 k + p_1 p_2 k_1 \in P_2$。所以，$x^n + w^n \in D$。类似地，$w^n + y^n = -x^n p_1^n + p_1 p_2 k_1 + y^n p_1^n + p_1 p_2 k_3$，$k_3 \in R$，则 $w^n + y^n \in D$. 这意味着 w 与 x 和 y 相邻，从而$diam(n - TG(R)) = 2$。□

COROLLARY 2.16. 假设 R 是一个整环。令 $n \geq 1$ 为奇整数，且 $D = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_k$，$k \geq 2$，其中对所有$1 \leq i \leq k$，$M_i$ 都是一个极大理想。那么，$n - TG(R)$ 是连通的，直径为 2。

THEOREM 2.17. 假设 R 是一个整环。令 $n \geq 1$ 为偶整数，且 $D = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_k$，$k \geq 2$ 满足对每个 $1 \leq i, j \leq k, P_i \nsubseteq P_j$。假设至少有两个 P_k 互素，并且存在一个 $u \in R$ 使得 $u^n = -1$。那么，$n - TG(R)$ 是连通的，直径为 2。

PROOF. 不失一般性，假设 P_1 与 P_2 互素。那么 $P_1 + P_2 = R$，并且存在 $p_1 \in P_1, p_2 \in P_2$ 使得 $p_1 + p_2 = 1$。令$x, y \in R$，使得 $x = xp_1 + xp_2$ 且 $y = yp_1 + yp_2$。假设 x 与 y 不相邻，并令 $w = uxp_1 + uyp_2$。我们有 $x^n = x^n p_1^n + x^n p_2^n + p_1 p_2 k$, $k \in R$ 且 $w^n = -x^n p_1^n - y^n p_2^n + p_1 p_2 k_1$, $k_1 \in R$。于是 $x^n + w^n = p^n(x^n - y^n) + p_1 p_2 k + p_1 p_2 k_1 \in P_2$。因此，$x^n + w^n \in D$。类似地，$w^n + y^n = -x^n p_1^n + p_1 p_2 k_1 + y^n p_1^n + p_1 p_2 k_3$, $k_3 \in R$，于是 $w^n + y^n \in D$. 。这意味着 w 与 x 相邻，且 y，因此$diam(n - TG(R)) = 2$。□

EXAMPLE 2.18. 设 $n \geq 1$ 为奇整数，且 $D = p_1\mathbb{Z} \cup p_2\mathbb{Z}$ 其中 p_1 和 p_2是两个不同的素数。那么，$n - TG(\mathbb{Z})$ 是连通的，且 $diam(n - TG(\mathbb{Z})) = 2$。事实上，$gcd(p_1, p_2) = 1$。因此，$1 = c_1 p_1 + c_2 p_2$对某个 $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$成立。于是，$c_1 p_1 - 1 = -c_2 p_2 \in p_2\mathbb{Z}$。因此，$0^n + (c_1 p_1 - 1)^n \in p_2\mathbb{Z}$ 且 $0^n + (-c_2 p_2)^n \in p_2\mathbb{Z}$，这意味着存在一条从 0 到 1 的路径。

在下面的例子中，我们将说明定理 2.15 中“至少有两个素理想互素”这一假设至关重要。

EXAMPLE 2.19. 设 $R = \mathbb{Z}[X, Y]$ 和 $D = XR \cup YR$。由于 $1 \neq a + b$ 对某个 $a \in XR$ 和 $b \in YR$ 成立，因此不存在从 0 到 1 的路径。因此，对于每个整数 $n \geq 1$， $n - TG(R)$ 都不连通。

我们邀请读者将以下结果与 [**AIBA**，定理 2.18]进行比较。

THEOREM 2.20. 设 R 是一个整环，且 $D = P_1 \cup ... \cup P_k$，其中 $k \geq 2$，使得对于所有的 $1 \leq i$、$j \leq k$、$P_i \not\subseteq P_j$ 均成立。令 $n \geq 1$ 为奇整数。如果 $n - TG(R \setminus D)$ 是连通的，那么 $n - TG(R)$ 是连通的。

PROOF. 设 $n - TG(R \setminus D)$ 是连通的。我们知道 $n - TG(D)$ 是连通的。现在，由于 D 不是 R 的理想，存在 $x, y \in D \setminus \{0\}$ 使得 $x - y = r \in R \setminus D$。因此，对于某个 $q \in R$，$(x-y)^n = r^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k x^k y^{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}(-1)^k x^k y^{n-k} - y^n = xq - y^n$。这意味着 $r^n + y^n = xq \in D$；因此， $n - TG(R)$ 是连通的。□

我们邀请读者将以下结果与 [?，定理 2.20]进行比较。

THEOREM 2.21. 假设 R 是一个整环，且 $D = P_1 \cup ... \cup P_k$，其中 $k \geq 2$ 满足对所有的 $1 \leq i$、$j \leq k$、$P_i \not\subseteq P_j$ 均成立。设 $n \geq 1$ 是一个偶整数，并假设存在 $u \in R$ 使得 $u^n = -1$。如果 $n - TG(R \setminus D)$ 是连通的，那么 $n - TG(R)$ 也是连通的。

PROOF. 假设 $n - TG(R \setminus D)$ 是连通的。我们知道 $n_T G(D)$ 是连通的。现在，由于 D 不是 R 的理想，存在 $x, y \in D \setminus \{0\}$ 使得 $x + uy = r \in R \setminus D$。因此 $(x+uy)^n = r^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k u^k x^k y^{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}(-1)^k u^k x^k y^{n-k} - y^n = xq - y^n$，其中某个 $q \in R$。这意味着 $r^n + y^n = xq \in D$；因此， $n - TG(R)$ 是连通的。□

我们请读者将以下结果与 [**AIBA** 定理 2.22] 进行比较。

THEOREM 2.22. 设 R 是一个整环，且 $D = P_1 \cup \cdots \cup P_k$，其中 $k \geq 2$ 满足对所有 $1 \leq i, j \leq k, P_i \not\subseteq P_j$ 均成立。令 $n \geq 1$ 为奇整数。当且仅当 $R = (x_1, x_2, ..., x_m)$ 时， $n - TG(R)$ 是连通的，其中对每个 $1 \leq r \leq m$，都有 $x_r \in D$。

PROOF. 假设 $n - TG(R)$ 是连通的。那么在 $n - TG(R)$ 中存在一条路径 $0 - v_1 - v_2 - ... - v_q - 1$。这意味着 $v_1^n, v_1^n + v_2^n, ..., v_{q-1}^n + v_q^n, v_q^n + 1 \in D$。因此，$1 \in (v_1, v_1^n + v_2^n, ..., v_{q-1}^n + v_q^n, v_q^n + 1) \subseteq (x_1, ..., x_m)$。因此， $R = (x_1, ..., x_m)$

反之，设 $R = (x_1, x_2, ..., x_m)$，其中对于每个 $1 \leq r \leq m$都有 $x_r \in D$。令 $y \in R$ 使得 $y \neq 0$。于是，对于某些 $v_1, ..., v_q \in D$，有 $y = v_1 + ... + v_q$。令 $w_0 = 0$，并且对于每个整数 $1 \leq j \leq q$，有 $w_j = (-1)^{q+j}(v_1 + ... + v_j)$。由于 n 为奇数，我们有 $(-1)^{n(q+j)} = (-1)^{q+j}$，因此对于某个 $z \in R$，有 $w_j^n = (-1)^{q+j}(v_1 + ... + v_j)^n = w_j^n + w_{j+1}^n = v_{j+1} z \in D$。因此， $0 - w_1 - w_2 - ... - w_q - y$ 是 $n - TG(R)$ 中从 0 到 y 的一条路径。令 $0 \neq a, b \in R$。那么，存在从 a 到 0 的路径，以及从 0 到 b 的路径。因此，在 $n - TG(R)$ 中存在一条从 a 到 b 的路径；故 $n - TG(R)$ 是连通的。□

我们邀请读者将下述结果与 [**AIBA**定理 2.24]进行比较。

THEOREM 2.23. 假设 R 是一个整环，且 $D = P_1 \cup ... \cup P_k$，其中 $k \geq 2$ 满足对所有的 $1 \leq i, j \leq k, P_i \not\subseteq P_j$ 均成立。设 n 是一个奇整数，并假设 $R = (x_1, x_2, ..., x_m)$，其中对于每个 $1 \leq r \leq m$ 都有 $x_r \in D$（即 $n - TG(R)$ 是连通的）。那么 $diam(n - TG(R)) = m$，其中 m 是满足 $(x_1, ...x_m) = R$ 的 D 中顶点 $x_1, ..., x_m$ 的最小数量。此外，$diam(n - TG(R)) = d(0, 1)$。

PROOF. 首先，我们证明，在 R 中，从 0 到 1 的任意路径长度至少为 m。假设 $0 - v_1 - ... - v_{k-1} - 1$ 是 $n - TG(R)$ 中一条从 0 到 1、长度为 k 的路径。那么 $v_1^n, v_1^n + v_2^n, ..., v_{k-1}^n + 1 \in D$，因此 $1 \in (v_1^n, v_1^n + v_2^n, ..., v_{k-1}^n + 1) \subseteq (x_1, ..., x_m)$。由此可得 $k \geq m$。设 a 和 b 是 R 中的不同元素。我们将证明，在 R 中存在一条长度小于或等于 m 的路径。令 $1 = x_1 + x_2 + ... + x_m$，其中 $x_1, .., x_m \in D$。如果 m 是偶数，定义 $z = a + b$。如果 m 是奇数，定义 $z = a - b$。无论哪种情况，令 $d_0 = a$。对于每个 $1 \leq k \leq m$，若 k 是奇数，则令其为 $d_k = -(a + z(x_1 + ... + x_k))$；若 k 是偶数，则令其为 $d_k = x + z(x_1 + ... + x_k)$。于是，对某个 $q \in R$，有 $d_k^n + d_{k+1}^n = x_{k+1}q \in D$。此外，$d_m = b$。因此，$a - d_1 - ... - d_m - 1 - b$ 是一条长度至多为 m 的路径。特别地，0 和 1 之间的最短路径长度为 m。因此，$diam(n - TG(R)) = m$。□

我们请读者将以下结果与 [**AIBA**中的定理 2.25]进行比较。

THEOREM 2.24. 设 n 为偶整数，R 为整环，且 $D = P_1 \cup ... \cup P_k$，其中 $k \geq 2$ 满足对所有 $1 \leq i, j \leq k, P_i \not\subseteq P_j$ 均成立。假设 $R = (x_1, x_2, ..., x_m)$，其中对每个 $1 \leq r \leq m$ 都有 $x_r \in D$。若存在 $u \in R$ 使得 $u^n = -1$，则 $n - TG(R)$ 是连通的，且 $diam(n - TG(R)) = m$，其中 m 是满足 $(x_1, ..., x_m) = R$ 的顶点 $x_1, ..., x_m$ 的最小数目。此外，$diam(n - TG(R)) = d(0, 1)$。

PROOF. 首先，我们证明 R 中从 0 到 1 的任意路径长度至少为 m。设 $0 - v_1 - ... - v_{k-1} - 1$ 是 $n - TG(R)$ 中一条长度为 k 的、从 0 到 1 的路径。那么 $v_1^n, v_1^n + v_2^n, ..., v_{k-1}^n + 1 \in D$，因此 $1 \in (v_1^n, v_1^n + v_2^n, ..., v_{k-1}^n + 1) \subseteq (x_1, ..., x_m)$。于是，$k \geq m$。设 a 和 b 是 R 中的不同元素。我们将证明 R 中存在一条长度小于或等于 m 的路径。令 $1 = x_1 + x_2 + ... + x_m$，其中 $x_1, ...x_m \in D$。若 m 为偶数，定义 $z = a + b$。若 m 为奇数，定义 $z = a - b$。无论哪种情况，令 $d_0 = a$。对每个 $1 \leq k \leq m$，若 k 为奇数，则令 $d_k = u(a + z(x_1 + ... + x_k))$；若 k 为偶数，则令 $d_k = a + z(x_1 + ... + x_k)$。于是，对某个 $q \in R$ 有 $d_k^n + d_{k+1}^n = x_{k+1}q \in D$。此外，$d_m = b$。因此，$a - d_1 - ... - d_{m-1} - b$ 是一条长度至多为 m 的路径。特别地，0 与 1 之间的最短路径长度为 m。因此，$diam(n - TG(R)) = m$。□

我们邀请读者将以下结果与 [**AIBA**，推论 2.27] 进行比较。

COROLLARY 2.25. 设 R 是整环的有限直积，且 D 是不可比较的素理想之并。若 $diam(n - TG(R)) = m$，则 $diam(n - TG(R \setminus D) \geq m - 2$。

PROOF. 由于 $diam(n - TG(R)) = d(0, 1) = m$，设 $0 - v_1 - ... - v_{m-1} - 1$ 是 R 中一条从 0 到 1 的路径。显然，$v_1 \in D$。假设对于某个 $2 \leq i \leq m - 1$，有 v_i 属于 D。因此，我们可以在 $n - TG(R)$ 中得到一条长度小于 m 的路径 $0 - v_i - ... - 1$。这就产生了矛盾。因此，对每个 $2 \leq i \leq m - 1$，都有 $v_i \in R \setminus D$

因此， $v_2 - ... - 1$ 是 $n - TG(R \setminus D)$ 中连接 v_2 和 1 的一条长度为 $m-2$ 的最短路径。因此 $diam(n - TG(R \setminus D)) \geq m - 2$。□

Example 2.26. 设 $n \geq 1$ 为奇整数， $R = \mathbb{Z}[X]$ 且 $D = (2, X) \cup (3, X)$。我们有 $R = (2, 3, X)$，则 $n - TG(R)$是连通的，且 $diam(n - TG(R)) = 3$和 $diam(n - TG(R \setminus D)) \geq 1$。

Example 2.27. 设 $n \geq 1$ 为奇整数， $R = \mathbb{F}_{\not 2}[X]$ 且 $D = (X) \cup (X-1)$。由于 $1 = X - (X - 1)$，我们有 $R = (X, X - 1)$。因此， $n - TG(R)$是连通的，且 $diam(n - TG(R)) = 2$。

Theorem 2.28. 设 $R = R_1 \times R_2 \times ... \times R_k$，其中 $k \geq 2$ 且 R_i 是一个整环。设 $D = \bigcup_{j=1}^{\ell} \left(P_j \times \prod_{i=2}^{k} R_i \right)$，其中 P_1、P_2、...、P_l 是 R_1的素理想。则 $n - TG(R)$ 连通，当且仅当 P_r 和 P_s 在 R_1 中互素，其中$1 \leq r$、$s \leq l$。

Proof. 假设 $n - TG(R)$ 是连通的。那么 $n - TG(R_1)$ 也是连通的。因此根据定理 2.15，在 R_1 中，至少有两个素理想 P_r 和 P_s 互素，其中 $1 \leq r$, $s \leq l$。现在假设在 R_1 中，至少有两个素理想 P_r 和 P_s 互素，其中 $1 \leq r$, $s \leq l$。那么根据定理 2.15， $n - TG(R_1)$ 是连通的。因此，存在一条从 0 到 1_{R_1} 的路径。因此 $n - TG(R)$ 是连通的。□

Theorem 2.29. 设 $R = R_1 \times R_2 \times ... \times R_k$，其中 $k \geq 2$ 和 R_i 是一个整环。设 $D = \cup Q_i$，使得每个 Q_i 都是 R 的素理想。假设对于至少两个素理想，记为 Q_i、Q_j、$i \neq j$，有 $Q_i = P_i \times \prod_{s \neq i} R_s$ 和 $Q_j = P_j \times \prod_{s \neq j} R_s$，其中 P_i 是 R_i 的素理想， P_j 是 R_j 的素理想。如果 $n \geq 1$ 是奇整数，那么 $n - TG(R)$ 总是连通的，且直径为 2。

Proof. 设 $x = (0, ..., 0)$ 和 $z = (1, ..., 1)$， $\in R$并设 $y = (0, ..., p_i, ..., -1 + p_j, ..., 0)$，其中 $p_i \in P_i$且 $p_j \in P_j$，对于 $1 \leq i, j \leq k$。我们有 $0 + p_i^n \in P_i$，这意味着 x与 y相邻。此外，$(-1 + p_j)^n + 1 = -1 + p_j^n + cp_j + 1 \in P_j$，其中某个 $c \in R$。这意味着 z 与 y 相邻，且 x 与 z 之间的最短路径长度为 2。□

Theorem 2.30. 设 $R = R_1 \times R_2 \times ... \times R_k$，其中 $k \geq 2$，且 R_i 是一个整环。设 $D = \cup Q_i$ 满足每个 Q_i 都是 R 的素理想。假设至少存在两个素理想，例如 Q_i、Q_j、$i \neq j$，使得 $Q_i = P_i \times \prod_{s \neq i} R_s$ 且$Q_j = P_j \times \prod_{s \neq j} R_s$，其中 P_i 是 R_i 的素理想， P_j 是 R_j的素理想。若 $n \geq 1$ 是偶整数，且存在元素 u 属于 R，使得 $u^n = -1$，那么 $n - TG(R)$ 总是连通的，且直径为 2。

Proof. 令 $x = (0, ..., 0)$ 和 $z = (1, ..., 1)$， $\in R$并令 $y = (0, ..., p_i, ..., u + p_j, ..., 0)$，其中 $p_i \in P_i$ 且 $p_j \in P_j$ 对于 $1 \leq i, j \leq k$。我们有 $0 + p_i^n \in P_i$，这意味着 x 与 y 相邻。此外，$(u + p_j)^n + 1 = u^n + p_j^n + cup_j + 1 \in P_j$ 对某个 $c \in R$ 成立。这意味着 z 与 y 相邻，且 x 与 z 之间的最短路径长度为 2。□

Example 2.31. 设 $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$和 $D = \mathbb{Z}_2 \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{Z}_2$。如图 4 所示，$3 - TG（R）$是连通的，直径为 2。

EXAMPLE 2.32. 设 $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ 和 $D = \mathbb{Z}_2 \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{Z}_3$。这里我们在 $\mathbb{Z}_2$ 中有$1^2 = -1$，且如图 5 所示，$2 - TG$（R）是连通的。

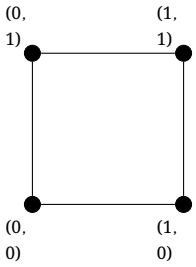


FIGURE 4. 3-TG($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$)

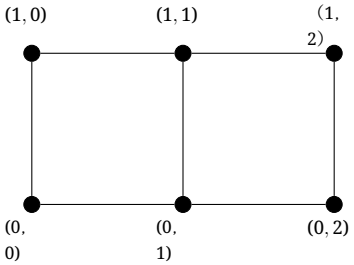


FIGURE 5. 2-TG（$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$）

EXAMPLE 2.33. 设 $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 = R_1 \times R_2$ 和 $D = \mathbb{Z}_3 \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{Z}_7$。这里不存在一个 $x \in R_i$ 使得 $x^2 = -1$，$i \in \{1, 2\}$. $2 - TG$（R）不连通。

EXAMPLE 2.34. 设 $R = \mathbb{F}_9 \times \mathbb{F}_{25}$ 和 $D = \{0\} \times \mathbb{F}_{25} \cup \mathbb{F}_9 \times \{0\} = P_1 \cup P_2$。由于 P_1 和 P_2 互素，且在 R 中存在一个 u 使得 $u^2 = -1$，因此 $2 - TG$（R）是连通的。

EXAMPLE 2.35. 设 $R = \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$ 和 $D = \{0\} \times \mathbb{F}_5 \cup \mathbb{F}_5 \times \{0\} = P_1 \cup P_2$。$n - TG$（$R$）总是连通的。

EXAMPLE 2.36. 设 $R = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}$ 和 $D = \{0\} \times \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}_7 \times 3\mathbb{Z}$。$3 - TG(R)$ 是连通的，而 $2 - TG(R)$ 不是。

EXAMPLE 2.37. 设 $R = \mathbb{F}_9 \times \mathbb{Z}[X]$ 和 $D = \{0\} \times \mathbb{Z}[X] \cup \mathbb{F}_9 \times P$，其中 P 是 $\mathbb{Z}[X]$中的一个素理想。对于 $n \geq 1$ 为奇整数的情形，$n - TG(R)$ 是连通的。

THEOREM 2.38. 设 R 是一个整环，且 $D = P_1 \cup ... \cup P_k$ 满足 $k \geq 2$，使得对所有的 $1 \leq i$、$j \leq k$、$P_i \nsubseteq P_j$，令 $n \geq 1$，我们有如下

(1) $gr(n - TG(D)) = 3$ 或 $gr(n - TG(D)) = \infty$.(2) 若 n 为奇数，则 $gr(n - TG(R \setminus D)) = 3$为4 或 ∞.(3) 若 n 为偶数，且对于某个 $x \in R$有 $x^n = -1$，则 $gr(n - TG(R \setminus D)) = 3$为4或 ∞。

PROOF. (1) 令 $x, y \in D$。若 $x^n + y^n \in D$，则 $0 - x - y - 0$ 是 $n - TG(D)$ 中长度为 3 的圈。若对所有 $x, y \in D \setminus \{0\}, x^n + y^n \notin D$ 都成立，则由于对所有 $x \in D \setminus \{0\}$ 都有 $0^n + x^n \in D$，我们得到一个星图。因此，$gr(n - TG(D)) = \infty$。(2) 假设 $char(R) \neq 2$。那么对每个 $x \in R$ 都有 $x \neq -x$。假设 $R \setminus D$ 含有一个圈。那么存在 $x, y \in R \setminus D$，使得 $x \neq -y$ 且 $x^n + y^n \in D$。这意味着序列 $x - y - (-y) - (-x) - x$ 在图 n-TG$(R \setminus D)$ 中构成一个 4-圈。因此，我们得出 $gr(n - TG(R \setminus D)) \leq 4$。(3) 假设 $char(R) \neq 2$，n 为偶数，且对于某个 $u \in R$ 有 $u^n = -1$。假设 $R \setminus D$ 含有一个圈。那么存在互不相同的 $x, y \in R \setminus D$，使得 $x \neq uy$ 且 $x^n + y^n \in D$。这意味着序列 $x - y - (uy) - (ux) - x$ 在图 $n - TG(R \setminus D)$ 中构成一个 4-圈。因此，围长满足：$gr(n - TG(R \setminus D)) \leq 4$。

□

EXAMPLE 2.39. (1) 若 $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ 且 $D = \{0\} \times \mathbb{Z}_3 \cup \mathbb{Z}_2 \times \{0\}$。$2 - TG(D)$ 含有圈 (0, 0)–(1, 0)–(0, 2)–(0, 0)，其中 $gr(n - TG(D)) = 3$。(2) 若 $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ 且 $D = \{0\} \times \mathbb{Z}_3 \cup \mathbb{Z}_2 \times \{0\}$。$2 - TG(R \setminus D)$是全不连通的，且 $gr(n - TG(R \setminus D)) = \infty$。(3) 若 $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$，则 $3 - TG(R \setminus D))$无圈，因此$gr(n - TG(R \setminus D)) = \infty$。若 $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$，则 $3 - TG(R \setminus D))$含有圈 (1, 1) − (1, 2) − (2, 2) − (1, 1)。因此，$gr(n - TG(R \setminus D)) = 3$。

我们邀请读者将以下结果与 [**AIBA**定理 2.37]进行比较。

THEOREM 2.40. 对于任意整数 $m \geq 2$，存在一个整环 R，使得对于每个整数 $n \geq 1$，$n - TG(R)$ 是连通的，并且 $diam(n - TG(R)) = m$。

PROOF. 令 $R = \mathbb{Z}_2[X_1, X2, ..., X_{m-1}]$，并令 $D = X_1R \cup X_2R \cup ... \cup X_{m-1}R \cup (1 + X_1 + X_2 + ... + X_{m-1})R$。取 $F_i = X_1 + ... + X_i$，于是对于$0 \leq i \leq m - 1$有 $F_{i+1} = F_i + X_{i+1}$。对于某个 $d \in D$，我们有 $F_i^n + F_{i+1}^n = F_i^n + (F_i + X_{i+1})^n = F_i^n + F_i^n + dX_{i+1} + X_{i+1}^n = dX_{i+1} + X_{i+1}^n$.因此，$F_i^n + F_{i+1}^n \in D$. □

EXAMPLE 2.41. 设 $R = \mathbb{Z}_2[X_1, X_2, X_3]$ 和 $D = X_1R \cup X_2R \cup X_3R \cup (1 + X_1 + X_2 + X_3)R$。那么，$0 - X_1 - (X_1 + X_2) - (X_1 + X_2 + X_3) - 1$ 是 0 和 1 之间长度为 4 的最短路径。对于某个 $d \in D$，我们有 $(X_1 + X_2 + X_3)^n + 1^n = (X_1 + X_2 + X_3 + 1 + 1)^n + 1^n = (X_1 + X_2 + X_3 + 1)^n + d(X_1 + X_2 + X_3 + 1) + 1^n + 1^n = (X_1 + X_2 + X_3 + 1)^n + d(X_1 + X_2 + X_3 + 1) \in D$。

致谢
第一作者谨此感谢第二作者在本项目研究过程中给予的耐心指导。

参考文献

[AIBA] D. AitElhadi, A. Badawi,（2025）。交换环的 n-全图。硕士论文，已录用，即将在 AMS《当代数学》发表。[AKMM] *The total graph and regular graph of a commutative ring* S. **213 12** 2009 2224 2228 Akbari、D. Kiani、F. Mohammadi 和 S. Moradi, ,《纯粹与应用代数杂志》, () (), –。[AN] D. Anderson、M. Naseer, *B*eck 对交换环的着色,《代数杂志》, **159(2)** (1993), 500–514。

[AABC] D. F. Anderson、T. Asir、A. Badawi 和 T. Tamizh Chelvam，（2021）。环上的图。Springer Nature，瑞士 Cham，第一版。[AB] D. F. Anderson 和 A. Badawi, *The total graph of a commutative ring, J. Algebra*，《代数杂志》，**320(7)** (2008)，2706–2719。[AB(a)] *On the total graph of a commutative ring without the zero element* D. F. Anderson 和 A. Badawi，，《代数及其应用杂志》，**11 04** ()，2012，1250074。[AB(b)] D. F. Anderson 和 A. Badawi，，《代数及其应用杂志》，**12(05)** (2013)，1250212。[AL] D. F. Anderson 和 P.S. Livingston，，《代数杂志》，**217(2)** (1999)，434–447。[BE] I. Beck，，《代数杂志》，**116(1)** (1988)，208–226。

Department of Mathematics and Statistics, American University of Sharjah, P.O.Box 26666, Sharjah, United Arab Emirates
Email address: g00096222@alumni.aus.eduDepartment of Mathematics and Statistics, American University of Sharjah, P.O.Box 26666, Sharjah, United Arab Emirates
Email address: abadawi@aus.edu