arXiv:2601.10886v1 [math.QA] 15 Jan 2026

一类 Borcherds 代数的 Magnus 群构造

Lisa Carbone 和 Elizabeth Jurisich

摘要。我们构造了一个与一类 Borcherds 代数相关的群。这类 Borcherds 代数可以分解为一个 Kac–Moody（或半单）子代数与一对自由李子代数的直和。此类 Borcherds 代数不含彼此正交的单纯虚根。我们的群是一个 Kac–Moody（或半单）群与一个可逆形式幂级数 Magnus 群的半直积；后者对应于由单纯虚根确定的某个最高权模的一组基。我们证明，除同构意义下外，我们的群与所选基无关。我们将这一构造应用于若干具体例子，例如利用双曲 Kac–Moody 代数的根格构造的某些 Borcherds 代数、Monster 李代数、Fricke 型 Monstrous 李代数以及侏儒李代数。

1. 引言

Borcherds 代数是无限维李代数，是 Kac–Moody 代数的一种推广。Richard Borcherds 最初在 Monstrous Moonshine 的背景下研究了它们 [Bor92]。
将 Kac–Moody 型群与 Borcherds 代数联系起来的一项障碍 $\mathfrak{g}$是虚单根的出现；其根向量在给定的标准不可约模上可能不局部幂零 $\mathfrak{g}$ [Jur04]。

对于可分解为 Kac–Moody（或半单）子代数 $\mathfrak{g}_J$ 与自由李子代数 $\mathfrak{u}^{\pm}$ 的直和的这类 Borcherds 代数（如 [Jur98], 中的定理 5.1，另见定理 2.1），我们在此构造一个与之对应的李群类比，它是 Kac–Moody（或半单）群与 Magnus 群的半直积。后者是一个形式幂级数群。这类 Borcherds 代数的一个关键性质是，它们没有彼此正交的虚单根 [Jur98]。

本文提出的构造解决了如何为 Borcherds 代数建立群论类比这一基本问题。由于 Borcherds 代数包含虚单根，且虚根向量在我们感兴趣的标准模上并不局部幂零，因此标准的群构造行不通（更多阐述和细节见 [CJM22] ）。

设 I 为所有简单根的指标集， $J \subset I$ 为实单根的指标集。与 Borcherds 代数的分解相对应,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^{+} \oplus (\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{u}^{-}$$

对于 [Jur98], , 我们构造一个群 G，它是以下半直积

$$G = G(S') \rtimes G_J.$$

集合 S' 是空间 V' 的一组基，定义为 $V' = \coprod_{i \in I \setminus J} U(\mathfrak{n}_J^-) \cdot f_i$，其中 $\mathfrak{u}^-$ 是自由子代数 $L(V')$, $\mathfrak{n}_J^-$ 是对应于负根的幂零子代数， f_i 是对应于虚单根的 Chevalley 生成元。群 G_J 是与 $\mathfrak{g}_J$ 相关联的 Kac–Moody（或半单）群，相对于 $\mathfrak{g}_J$ 在张量$\widehat{}$代数 $W = T(V')$ 上的表示。群 $G(S') = \exp(L(S'))$ 是由 S' 中的非交换变量构成的可逆形式幂级数群$\widehat{}$，其中 $L(S')$ 是自由子代数 $\mathfrak{u}^-$ 的完备化。我们的

群 G 的构造在同构意义下不依赖于 S' 关于 V' 的基的选择（见定理 3.5）。

为构造 G，我们将 $\mathfrak{g}_J$-模 $T(V')$ 重新解释为以 V' 的基 S' 为基的自由结合代数 $A(S')$。这样，我们便将模作用转移为形式多项式上的导子作用。

在第 2.6 小节中，我们回顾与自由李代数相关的 Magnus 群构造，然后将该构造应用于 $\mathfrak{g}$ 的自由子代数 $\mathfrak{u}^-$。事实证明，Magnus 群是编码自由李子代数 $\mathfrak{u}^-$ 的自然群论对象。作为非交换变量上的可逆形式幂级数群，Magnus 群 $G(S')$ 提供了一个形式完备化，从而即使不存在局部幂零性，也能确保指数映射定义良好。

在第 3.1 小节中，我们回顾相对于 $\mathfrak{g}_J$ 在张量代数 $W = T(V')$ 上的表示所构造的伴随 Kac–Moody 群。在第 3.2 小节中，我们将 $\mathfrak{g}_J$ 的作用定义在 $T(V')$ 的元素上，并将其视为形式多项式。$\mathfrak{g}_J$ 作为 $\mathfrak{g}_J$-模对 $\mathfrak{u}^-$ 的作用，诱导出群 G_J 在群 $G(S')$ 上的作用。

在第 3.4 小节中，我们将这些要素结合起来，构造半直积 $G = G(S') \rtimes G_J.$。由此得到的群反映了分解 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{u}^- \oplus (\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{u}^+$（不过，在构造群时，我们只使用负虚根）。

Fina此外，在第 4 节中，我们将构造应用于以下具体例子 ：

- 某些利用双曲 Kac–Moody 代数的根格构造的 Borcherds 代数：- 与双曲格 $H(3)$ 相关联的 Borcherds 代数。- 与双曲格 E_{10} 相关联的 Borcherds 代数。
- Monster 李代数，其结构在 Monstrous Moonshine 中发挥着关键作用。
- 如 [Car12]中的 Fricke 型 Monstrous 李代数。
- [BGGN98]中的侏儒李代数。

与最小的（不完备的）和最大的（完备的）Kac–Moody 群相比，我们的半-^直积 $G = G(S') \rtimes G_J$ 是一个“混合体”。分量 $G(S') = \exp(L(S')$ 对应于虚根，与完备化 $\widehat{L}(S')$ 相关联，因此可视为一个完备群；而对应于实根的分量 G_J 是不完备的。如果需要一个完全完备的群，可以进一步对 Kac–Moody 群 G_J取完备化。

我们的构造提出了许多新问题。例如， $G = G(S') \rtimes G_J$ 是否带有由完备化诱导的自然拓扑或原代数结构？我们希望在未来的工作中研究这一问题。

2. 预备材料

我们用 $\mathbb{N}$表示非负整数，并用 $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ 表示 $\mathbb{C}$ 的一个子域，例如 $\mathbb{Q}$、 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。

2.1. 泛包络代数。 设 L 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的李代数。令 $U(L)$ 表示 L 的泛包络代数。

设 g 是一个李代数，U(g) 是其泛包络代数。设 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组有序基。我们将使用 $U(\mathfrak{g})$ 的庞加莱-伯克霍夫-维特基，记作 ′

$$s_{i_1}^{a_1} s_{i_2}^{a_2} \cdots s_{i_k}^{a_k} \tag{1}$$

其中

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$$

且 $a_j \geq 0$是整数。

给定一个可数集 X，令 $L(X)$ 表示由 X生成的自由李代数。对于一个以 X 为基的向量空间V，我们也将 $L(X)$ 记为 $L(V)$。$L(X)$ 的泛包络代数是自由结合代数 $A(X)$，它与张量代数 $T(V)$ 同构，其中 $V = \mathrm{Span}\{X\}$。回顾一下，

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(V)$$

其中 $T^0(V) = \mathbb{K}$，$T^1(V) = V$，$T^n(V) = V^{\otimes n}$ 对于 $n \geq 1$。

$\widehat{\ }T(V)$ 的完备化记为 $T(V)$，它是关于对应于 V 的基元素的非交换变量的形式幂级数代数：

$$\widehat{T}(V) = \prod_{n=0}^{\infty} T^n(V).$$

$\widehat{\ }T(V)$ 中的元素是如下形式的形式无穷和：$\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ 其中 $v_n \in T^n(V)$。这确定了一个 $\mathbb{N}$-分次，其中 $(uv)_n = \sum_{m=0}^{n} u_m v_{n-m}$。

$\widehat{\ }$由于作为向量空间，$T(V)$ 被视为直积 $\prod_{n=0}^{\infty} T^n(V)$，因此该拓扑与积拓扑一致，其中每个分量 $T^n(V)$ 都赋予离散拓扑。

2.2. **Borcherds 代数**。 Borcherds 代数也称为广义Kac–Moody代数，可以利用 Cartan矩阵 A [Bor88] 的推广来定义。这里我们假设矩阵A 是对称的，但这些结果对可对称化矩阵同样成立。

设 I 是一个可数指标集，且 $A = (a_{ij})_{i,\ j\in I}$ 是一个元素属于 $\mathbb{K}$ 的矩阵，并满足以下条件：

（B1）： A 是对称的。**（B2）：** 若 $i \neq j$ $(i, j \in I)$，则 $a_{ij} \leq 0$。**（B3）：** 若 $a_{ii} > 0$ $(i \in I)$，则对所有 $j \in I$，$\frac{2a_{ij}}{a_{ii}} \in \mathbb{Z}$。——

设 $\mathfrak{g}$ 为由生成元 h_i，e_i，f_i、$i \in I$ 以及以下定义关系生成的李代数：对所有 i，j，$k \in I$，

(R1): $[h_i, h_j] = 0$,
(R2): $[h_i, e_k] - a_{jk}e_k = 0$,
(R3): $[h_i, f_k] + a_{jk}f_k = 0$,
(R4): $[e_i, f_j] - \delta_{ij}h_i = 0$,
(R5): $(\mathrm{ad}e_i)^{\frac{-2a_{ij}}{a_{ii}}+1}e_j = 0$ and $(\mathrm{ad}f_i)^{\frac{-2a_{ij}}{a_{ii}}+1}f_j = 0$ for all $i \neq j$ with $a_{ii} > 0$,
(R6): $[e_i, e_j] = 0$ and $[f_i, f_j] = 0$ whenever $a_{ij} = 0$.

定义 。域 $\mathbb{K}$ 上的李代数 $\mathfrak{g}$ 是与矩阵 A 相关联的*Borcherds* 代数。

我们也将李代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ 称为 Borcherds 代数，其中 $\mathfrak{c}$ 是一个中心理想。Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 是由 $\{h_i\}_{i\in I}$ 张成的阿贝尔子代数。
由于定义矩阵 A 的秩可能不足，我们将 $\mathfrak{h}$扩展为一个由次数导子 $\mathfrak{D}$ 构成的阿贝尔代数，得到 $\mathfrak{h}^e = \mathfrak{D} \ltimes \mathfrak{h}$，并构造 $\mathfrak{g}^e$。我们通过添加足够的次数导子来扩展 Cartan 子代数，以确保下文定义的简单根线性无关。随后，如有需要，我们可以通过将这些根限制到 $\mathfrak{h}$或某个更小的子空间上来“特化”它们。

Borcherds 代数具有以下性质（详情参见 [Bor88],[Bor92], 和 [Jur96]）。定义简单根 $\alpha_i(h_j) = a_{ij}$，其中 $h_j \in (\mathfrak{h}^e)^*$。令 Δ 为根集，并将正根

（分别为负根）记作 Δ_+ （分别为 Δ_-）。根格 Q 是由简单根 α_i 张成的 $\mathbb{Z}$-空间：

$$Q = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i.$$

Borcherds 代数 $\mathfrak{g}$具有三角分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$$

其中 $\mathfrak{h}$ 是 Cartan 子代数，而 $\mathfrak{n}^-$ 和 $\mathfrak{n}^+$ 分别是负根空间和正根空间的直和：

$$\mathfrak{g} = \coprod_{\varphi \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\varphi \oplus \mathfrak{h} \oplus \coprod_{\varphi \in \Delta_-} \mathfrak{g}_\varphi. \tag{2}$$

空间 $\mathfrak{g}_\varphi$ 是有限维的。我们用 Δ_{re}表示实根的集合。虚根的集合为 $\Delta \backslash \Delta_{\mathrm{re}}$。虚单根是满足 $a_{ii} \leq 0$的那些 α_i 。

2.3. **对称双线性形式**。存在一个 Q 上的对称双线性形式 $(\cdot, \cdot)$，它扩张为 $(\mathfrak{h}^e)^*$ 和 $\mathfrak{g}^e$ ，并满足：

- $(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij}$，其中 a_{ij} 是 Borcherds Cartan 矩阵的元素。
- 对于所有满足 $\varphi + \psi \neq 0$的 $\varphi, \psi \in \Delta$ ，

$$(\mathfrak{g}_\varphi, \mathfrak{g}_\psi) = (\mathfrak{h}^e, \mathfrak{g}_\varphi) = 0.$$

由 $\alpha_i, i \in I$ 张成的空间上的对称双线性形式在 $\mathfrak{h}$ 上定义为

$$(h_i, h_j)_{\mathfrak{h}} = (\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij}.$$

通过在 $\mathfrak{d}$ 上选定一个满足条件（d， h_j）$= \alpha_j$（d）的形式，可以将该形式延拓，其中 $d \in \mathfrak{d}$ 和 $j \in I$。可在 $\mathfrak{h}^e$ 上构造此形式，使其与（$\mathfrak{h}^e$）*上的形式相一致。在 $\mathfrak{g}^e$ 上存在唯一的不变对称双线性形式（$\cdot$， $\cdot$）$_{\mathfrak{g}^e}$，它延拓了（$\cdot$， $\cdot$）$_{\mathfrak{h}^e}$。此形式满足条件

$$(\mathfrak{g}_\varphi, \mathfrak{g}_\psi)_{\mathfrak{g}^e} = (\mathfrak{h}^e, g_\varphi)_{\mathfrak{g}^e} = 0$$

对所有满足 $\varphi + \psi \neq 0$ 的 φ， $\psi \in \Delta$ 均成立。给定 $n_i \in \mathbb{Z}$ 上任意一个 $\varphi = \sum_{i \in I} n_i \alpha_i \in \Delta$ ，定义 $h_\varphi = \sum_{i \in I} n_i h_i$。于是对于 $a \in \mathfrak{g}_\varphi$、 $b \in \mathfrak{g}_{-\varphi}$，形式（$\cdot$， $\cdot$）$_{\mathfrak{g}^e}$ 满足条件

$$[a, b] = (a, b)_{\mathfrak{g}^e} h_\varphi.$$

特别 地，对于 i， $j \in I$， （e_i， f_j）$_{\mathfrak{g}^e} = \delta_{ij}$（详情参见 [Jur96]，另见 [Kac90], [MP95]）。
设 $\mathfrak{g}$ 是一个 Borcherds 代数，其中任意两个不同的虚简单根彼此正交。等价地，定义矩阵对所有满足 $a_{ii} \leq 0$ 的 i 都满足 $a_{ij} \neq 0$ 。设 $J \subset I$ 为集合 $\{i \in I \mid \alpha_i \in \Delta_{\mathrm{re}}\} = \{i \in I \mid a_{ii} > 0\}$。

注意，矩阵 $(a_{ij})_{i,\ j \in J}$ 是一个广义 Cartan 矩阵。设 $\mathfrak{g}_J$ 为与该矩阵关联的 Kac–Moody 或半单李代数。则 $\mathfrak{g}_J = \mathfrak{n}_J^+ \oplus \mathfrak{h}_J \oplus \mathfrak{n}_J^-$ ，且 $\mathfrak{g}_J$同构于由 $i \in J$ 所生成的 $\mathfrak{g}$ 子代数，其中包含 $\{e_i, f_i\}$。
我们用 Δ_J表示 $\mathfrak{g}_J$的根集，用 Δ_J^{re}表示实根子集。

2.4. **模**。对于 $\mathfrak{g}$ 上的模 X，以及线性泛函 $\lambda \in (\mathfrak{h}^e)^*$， λ-权空间 X_λ定义如下：

$$X_\lambda = \{v \in X \mid h.v = \lambda(h)v \text{ for all } h \in \mathfrak{h}^e\}.$$

若模 X 可分解为其权空间的直和：$X = \bigoplus_{\lambda \in (\mathfrak{h}^e)^*} X_\lambda$，且每个权空间 X_λ 均为有限维，则称其为权模 。

若存在非零向量 $v_\Lambda \in X_\Lambda$ （称为最高权向量），使得 $\mathfrak{n}^+.v_\Lambda = 0$，其中 $\mathfrak{n}^+$ 是对应于正根的幂零子代数，即对于所有简单根生成元 e_i，都有 $e_i.v_\Lambda = 0$，则 X 是一个具有最高权 $\Lambda \in (\mathfrak{h}^e)^*$ 的 $\mathfrak{g}$-模最高权模。模 X 由 v_Λ 作为 $\mathfrak{g}$-模生成。

最高权模 X 的所有权 μ 都具有如下形式： $\Lambda - \sum_{i \in I} k_i \alpha_i$，其中 $k_i \in \mathbb{N}$ 和 α_i是 $\mathfrak{g}$的简单根。

若最高权模 X 具有最高权 Λ，且 Λ 满足与 $\mathfrak{g}$的结构相关的以下条件，则称其为标准模： Λ 是占优整权，即对于所有 $i \in I$，都有$\Lambda(h_i) \in \mathbb{N}$，且对于所有 $i \in J$，都有 $\Lambda(h_i) \geq 0$ 。最高权向量 v_Λ 满足：对于所有满足 $\Lambda(h_i) = 0$且 $f_{(i}^{\Lambda} {}^{h_i+1}.v_\Lambda = 0)$的 $i \in I$，都有 $f_i.v_\Lambda = 0$。

给定一个占优整权 Λ，存在唯一（在同构意义下）的标准不可约最高权 $\mathfrak{g}^e$-模，其最高权为 $\Lambda \in P_+$，记作 $L(\Lambda)$ [Jur98]。注意，标准模 X 可以有无穷多个（线性无关的）形如 $f_i^k \cdot x$ 的元素，其中 $k \in \mathbb{N}$、$i \in I \backslash I_0$ 且 $\Lambda(h_i) \neq 0$。

2.5. **我们的 Borcherds 代数类**。 我们回顾 [Jur98] 的以下结果 .

定理 2.1。 设 A 是一个满足条件 **B1-B3** 的矩阵。设 J 和 $\mathfrak{g}_J$ 如上所述。假设若 i、$j \in I \backslash J$ 和 $i \neq j$，则 $a_{ij} < 0$。那么

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^+ \oplus (\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{u}^-,$$

其中 $\mathfrak{u}^- = L(\coprod_{i \in I \backslash J} U(\mathfrak{n}_J^-) \cdot f_i)$且 $\mathfrak{u}^+ = L(\coprod_{i \in I \backslash J} U(\mathfrak{n}_J^+) \cdot e_i)$。对于所有 $i \in I \backslash J$，向量空间 $V_i' = U(\mathfrak{n}_J^-) \cdot f_i$都是可积最高权 $\mathfrak{g}_J$-模，而 $V_i = U(\mathfrak{n}_J^+) \cdot e_i$是可积最低权 $\mathfrak{g}_J$-模。

特别地，每个 V_i'都是最高权为α_i的不可约 $\mathfrak{g}_J$-模（在同构意义下唯一）。令

$$V = \coprod_{i \in I \backslash J} U(\mathfrak{n}_J^+) \cdot e_i \tag{3}$$

$$V' = \coprod_{i \in I \backslash J} U(\mathfrak{n}_J^-) \cdot f_i. \tag{4}$$

设 S 是可积模 V的一组基，类似地，设 S' 是可积模 V'的一组基。根据定义， $L(V) = L(S)$，且 $L(V') = L(S')$。我们根据关注的是 $\mathfrak{g}_J$-模结构还是生成集，使用这两种记法。

取泛包络代数后，我们得到如下向量空间及 $\mathfrak{h}^e$-子模分解：

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{u}^- \oplus (\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{u}^+) \cong U(\mathfrak{u}^-) \otimes U(\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{u}^+) \tag{5}$$

或者

$$U(\mathfrak{g}) \cong T(V') \otimes U(\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h}) \otimes T(V) \tag{6}$$

以下推论可由定理 2.1 直接得出。

推论 2.2. </style}张量代数 (*V′*) </style}在 $\mathbb{K}$ 上是一个按 Q分级的可积 $\mathfrak{g}_J$-模，其齐次子空间均为有限维。

证明：可积模的直和和张量积仍然可积。因此， $\mathfrak{g}_J$-模 V'（分别为 V）是可积的 $\mathfrak{g}_J$-模，按 Δ_-（分别按 Δ_+）分级，且齐次子空间均为有限维；代数 $T(V')$ 在赋予张量积上的通常作用并作线性延拓后，也具有上述性质。□

我们用 θ 表示 $\mathfrak{g}$的切瓦莱对合，定义如下：

$$\theta(e_\alpha) = -f_\alpha, \quad \theta(f_\alpha) = -e_\alpha, \quad \theta(h_\alpha) = -h_\alpha.$$

此对合建立了 $\mathfrak{u}^+$ 与 $\mathfrak{u}^-$作为模之间的同构。

2.6. **自由李代数的 Magnus 群**。 设 X 是一个非空集合。令 $A(X) = A_{\mathbb{K}}(X)\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$表示定义在 $\mathbb{K}$上的自由结合代数。令 $A(X) = A_{\mathbb{K}}(X)$ 为 $A(X)$的形式完备化。$\widehat{\ }$完备化 $A(X)$称为以 X 为基的 马格努斯代数 ，由形式幂级数构成，这些级数的非交换变量对应于 X的元素。

$\widehat{\ }$令 w 表示 X 中的一个字，且令 $c_w \in \mathbb{K}$。对于 $u = \sum_w c_w w \in A(X)$，定义

$$u_n = \sum_{|w|=n} c_w w.$$

$\widehat{\ }$令 $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$。若 $v_n = \sum_{|w|=n} c_w w \in A(X)$，则

$$(uv)_n = \sum_{m=0}^{\infty} u_m v_{n-m} \in \widehat{A}(X).$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$这在 $A(X)$上定义了一个 $\mathbb{N}$-分次。我们在 $A(X)$ 中定义李子代数 $L(X) = L_{\mathbb{K}}(X)$，它由满足 $u_n \in L_n(X)$、 $n = 1$， 2， . . . 的级数 $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 组成。

$\widehat{\ }$元素 $u \in L(X)$ 是不含常数项的级数，因此

$$\exp(u),\ \ln(1+u)$$

是良定义的。

$\widehat{\ }$群 $M(X) = M_{\mathbb{K}}(X)$ 定义为 $A(X)$ 中可逆元构成的子群，其中的元素是常数项为 1 的形式幂级数。群 $M(X)$ 有时也称为*Magnus* 群 [Bah93]。本文遵循其他作者（例如 [Jac92] 和 [MKS76]）的惯例，将“Magnus 群”一词专用于子群

$$G(X) := \exp(\widehat{L}(X)) \subset M(X). \tag{7}$$

$\widehat{\ }$群 exp($L(X)$) 是由$\widehat{\ }$完备化 $L(X)$ 中李词的指数元生成的 $M(X)$ 的子群。

本节构造的半直积群 $G = G(S') \rtimes G_J$ 为通过 [CJM22] 中的 Tits 型生成元与关系构造的 Borcherds–Kac–Moody 群提供了另一种构造方法。我们的方法特别适用于具有如下分解的代数: $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^+ \oplus (\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{u}^-$ （ [Jur98], ），其中 $\mathfrak{g}_J$ 是 Kac–Moody（或半单）子代数，而 $\mathfrak{u}^\pm$ 是由虚根向量生成的自由李代数。这正是没有相互正交虚单根的那类 Borcherds 代数。

我们假设有一个满足定理 2.1 条件的李代数，也就是说， A 是一个满足条件**B1-B3**的矩阵。还假设，如果 $i,\ j \in I\backslash J$ 和 $i \neq j$ ，那么 $a_{ij} < 0$。特别地，如果 $i \neq j$，则 $\alpha_i,\ \alpha_j$ 不正交。

利用分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^+ \oplus (\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{u}^-$，我们将构造一个与子代数 $\mathfrak{g}_J \oplus \mathfrak{u}^-$ 相关联的群 G ，其中 $\mathfrak{u}^- = L(V')$。作为向量空间和 $\mathfrak{h}$-模，我们有

$$U((\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{u}^-) = U(\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{u}^-).$$

首先，我们利用可积模 $U(\mathfrak{u}^-) = T(V')$ 上的作用，构造一个与半单或 Kac–Moody 代数 $\mathfrak{g}_J$ 相关联的群 G_J。然后选取 V' 的一组基 S'，并构造$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ Magnus 群 $G(S') = \exp(L(S'))$，其中 $L(S')$ 是自由子代数 $\mathfrak{u}^-$ 的完备化。所需的群 G 自然是 $G(S')$ 与 G_J 的半直积，并施加由 $(\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h})$ 对 $T(V')$ 的作用所诱导的关系。

固定 S' 的一个序，并固定 $U(\mathfrak{g}_J^-)$ 的一个 Poincar´e–Birkhoff–Witt 基。因此，每个不可约最高权 $\mathfrak{g}_J$模的基具有如下形式: $(\text{ad } s_1 \cdots \text{ad } s_n)(f_i)\ \ i \in I\backslash J$。我们使用多重指标来表示 $U(\mathfrak{g}_J^-)$ 的基元素，以及每个最高权向量$f_i \in S'$、 $i \in I\backslash J$。

3.1. 与 G_J 相关的 Kac–Moody 群 $\mathfrak{g}_J$ 以及模 W。

我们构造与 $\mathfrak{g}_J$ 相关、定义在 $\mathbb{K}$ 上的 Kac–Moody 群 G_J，其所对应的模为 $W = T(V') = U(\mathfrak{u}^-)$（见[CG03]以及 [MP95]的第 6.1 节）。

张量代数 $\mathfrak{g}_J$-模 $W = T(V')$ 是一个可积模（见引理 (2.2)）。特别地，对于所有 $\alpha \in \Delta_{re}$，$(\mathfrak{g}_J)_\alpha$ 中的元素均为局部幂零地作用。
采用 [MP95],第 6.1 节中的记号，我们令

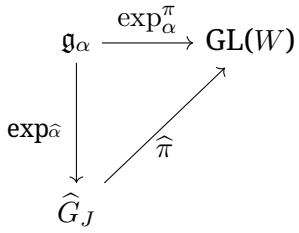
$$\widehat{G}_J = *_{\alpha \in \Delta_{re}} (\mathfrak{g}_J)_\alpha.$$

则 $\exp : (\mathfrak{g}_J)_\alpha \to \mathrm{GL}(W)$ 是一个群同态。令

$$\pi : \mathfrak{g}_J \to \mathfrak{gl}(W)$$

为 $\mathfrak{g}_J$ 在 W 上的一个表示。对于所有实数 $\alpha \in \Delta_J$ 以及所有元素 $x_\alpha \in (\mathfrak{g}_J)_\alpha$，$\exp(\pi(x_\alpha))$ 都是 $\mathrm{GL}(W)$ 中定义良好的元素。

$\widehat{\ }$存在唯一的诱导同态 $\widehat{\pi} : G_J \to \mathrm{GL}(W)$，使得下图交换:



令 $K = \ker \widehat{\pi} \leq G_J$，并令

$$G_J = \widehat{G}_J / K.$$

设 $i \in I \backslash J$，考虑模 $V' = \coprod_{i \in I \backslash J} U(\mathfrak{n}_J^-) \cdot f_i$，则 V'是可积的， $W = T(V')$ 也是如此。因此，对于每个 $\alpha \in \Delta_J^{re}$， $\mathfrak{g}_J$ 的作用在 W 上是局部幂零的。于是我们得到关系

$$\pi(\mathfrak{g}_\alpha)^n(v) = 0$$

对于所有的 $\alpha \in \Delta_J^{\mathrm{re}}$ 以及所有的 $v \in W$，其中 n 充分大且取决于 v。特别地，对于所有$x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$,

$$\pi(x_\alpha)^n(v) = 0, \text{ for some } n = n(v) \text{ and for all } v \in W.$$

群 G_J 由 exp($\pi(x_\alpha)$) 生成，其中 x_α 是对应于实根 $\alpha \in \Delta_J^{\mathrm{re}}$ 的根向量。对于所有 $x \in \mathfrak{g}_J$ 以及所有 $g \in G_J$，我们有

$$\pi(\mathrm{Ad}(g)(x)) = \pi(g)\pi(x)\pi(g)^{-1} \tag{8}$$

其中 Ad： $G_J \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_J)$（见 [MP95]，第489页）。方程（7）给出：

$$\pi(\mathrm{Ad(g)(x)}) = \pi(\mathrm{g})\pi(\mathrm{x})\pi(\mathrm{g})^{-1}.$$

Thus

$$\begin{aligned}\exp(\pi(\mathrm{Ad(g)(x)})) &= \exp(\pi(g)\pi(x)\pi(g)^{-1}) \\ &= \pi(g)\exp(\pi(x))\pi(g)^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}(\pi(\mathrm{x}))(\exp\pi(\mathrm{x})).\end{aligned}$$

3.2. 定义 $\mathfrak{g}_J$ 在 $T(V')$ 上的作用，将其视为形式多项式。为了将一个群与 $\mathfrak{g}(A)$ 在 $\mathbb{K}$ 上联系起来，我们首先要将 $\mathfrak{g}_J$ 的作用转化到这样一种情形：把 $s \in S'$ 的元素视为彼此不同的非交换形式变量。然后，我们便可以定义 G_J 在 $G(S')$ 上的作用。

首先回顾推论 2.2： $T(V')$ 是一个可积的 $\mathfrak{g}_J$-模，并将该表示记为

$$\pi : \mathfrak{g}_J \mapsto \mathfrak{gl}(T(V')).$$

为定理 2.1 中出现的每个最高权模 V_i' 固定一个基 S_i，并令 $S' = \cup_i S_i$ 表示由此得到的 V' 的基。例如，我们可以根据需要选择与 $\mathfrak{n}_J^-$ 的庞加莱–伯克霍夫–维特基相对应的基元素。

张量代数 $T(V')$ 可以自然地识别为 $T(S')$，并将其视为由集合 S' 中的非交换变量构成的形式多项式代数。因此， $T(S')$ 自然同构于 $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ 自由结合代数 $A(S')$。我们还有 $A(S') \cong T(S')$。

命题 3.1。 当将 S' 视为一组非交换变量时，$\mathfrak{g}_J$ 在 $T(S')$ 上作为导子构成一个作用。

证明。 给定 $x \in \mathfrak{g}_J$ 及任意元素 $v \in V'$，我们可以用相同的系数将 $\pi(x)v = x \circ v \in V'$ 表示在基 S' 中，并将该元素记为 x_v。
我们定义 $\mathfrak{g}_J$ 在 $T(S')$ 上的作用：固定 V' 与集合 S' 的张成空间之间的一个向量空间同构。这诱导出唯一的代数同构 $\Psi : T(V') \to A(S')$。 $\mathfrak{g}_J$ 在 $A(S')$ 上的导子作用定义为经由 Ψ 转移作用。

现在，这个元素是一个由 S' 中形式变量构成的多项式。 □

若要明确说明，我们可以为 $T(S')$ 固定一个 Poincar´e–Birkoff–Witt 基；那么，对 $S'_{i_j} \in S'$ 而言， x 的作用定义在单项式 $w = S'_{i_1} S'_{i_2} \cdots S'_{i_{\mathbb{K}}}$ 上，并通过通常的张量积作用和线性性给出：

$$x \circ w := \sum_{j=1}^{k} S'_{i_1} S'_{i_2} \cdots (x \circ S'_{i_j}) \cdots S'_{i_{\mathbb{K}}}.$$

在这个和式中，每一项 $(x \circ S'_{i_j})$ 都替换为其在基 S' 中的多项式表达式 $x_{S'_{i_j}}$，并将该基视为形式变量。于是，表达式 $x \circ w$ 就成为由 S' 中形式变量构成的多项式。随后，我们将作用线性地扩展到整个 $T(S')$。
根据定理 2.1，这些单项式作用于最高权向量 $f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$, $i \in I \setminus J$，并确定 $\mathfrak{g}_J$-模 V'_i 的基。

3.3. 对 G_J 在 $T(V')$ 上的作用。 回顾一下，我们有一个表示 $\pi : \mathfrak{g}_J \to \mathfrak{gl}(T(V'))$。令$S'$ 为 V'的一组基，并将其视为非交换形式变量。在本小节中，我们将命题 3.1 推广为 $\pi(\mathfrak{g}_J)$中元素的指数元在 $G(S')$的生成集上的作用。

定理 3.2. *$G(S')$ 是一个 G_J-模。*

证明。 对于 $x \in \mathfrak{g}_J$，我们将 $\pi(x)$在 V' 上的作用扩展为 $\exp(\pi(x))$ 在 $A(S') \cong T(S')$ 上的作用。若 $x = x_\alpha \in \mathfrak{g}_J^\alpha$ 对应一个实根 $\alpha \in \Delta_J^{\mathrm{re}}$，则算子 $\pi(x_\alpha)$在 $T(V')$上局部幂零。此扩展为在每个 $Y \in A(S')$上的局部幂零作用。

如果 $x = h \in \mathfrak{h}_J$, $\pi(h)$ 对权向量 $w \in T(S')$ 对角地作用，并保持 $T(S')$ 中的分次。在此情况下，$\exp(\pi(h)) \cdot w = e^{\lambda(h)} w$。因此，$\exp(\pi(x))$ 是 $\widehat{A}(S')$ 的代数自同构。这定义了一个同态 $\varphi : G_J \to \mathrm{End}(T(S'))$。

由于 $\mathfrak{g}_J$ 在线性地作用于 V'， G_J 的作用保持 $T(V')$ 的分次。

G_J 在 $T(V')$ 上的作用可以扩展为在完备化 $T(V')$ 上的作用，因为 G_J 中的自同构相对于 $T(V')$ 上的拓扑是连续的。
我们断言，此作用限制为 G_J 在 $G(S')$ 上的作用。

我们证明，此作用保持子群 $G(S') = \exp(L(S'))$。对于任意 $x \in \mathfrak{g}_J$， $\pi(x)$ 在 $A(S')$ 上的作用保持李括号结构和 $\mathbb{N}$-分次，因此保持 $L(S') \subset A(S')$。由此可知，任意 $g \in G_J$ 的作用也保持子空间 $L(S')$。

令 $g \in G_J$ and $\exp(L) \in G(S')$。由于 g 的作用是代数自同构，因此有$g \cdot \exp(L) = \exp(g \cdot L)$。由于 $g \cdot L \in \widehat{L}(S')$， $\exp(g \cdot L) \in G(S')$。作用 $g \cdot \exp(L) = g \exp(L) g^{-1}$定义了一个同态 $\varphi : G_J \to \mathrm{Aut}(G(S'))$。

□

我们可以将 $g\exp(L)g^{-1}$ 写作 $\mathrm{Ad}(g)(\exp(L))$。根据 [MP95], , 有

$$\mathrm{Ad}(g)(\exp(L)) = \exp(\mathrm{Ad}(g)(L)).$$

3.4. **半直积** G。 根据定理3.2, 存在一个同态 $\varphi\colon G_J \to \mathrm{Aut}(G(S'))$。因此我们可以构造半直积

$$G = G(S') \rtimes G_J$$

其群乘法为:

$$(n_1, g_1)(n_2, g_2) = (n_1 \cdot \varphi(g_1)(n_2),\ g_1 g_2)\,.$$

对于所有的 $n_i \in G(S')$ 和 $g_i \in G_J$,

与李代数 $\mathfrak{g}_J$ 关联的 Kac–Moody 群 G_J 由形如 $\exp(\pi(x_\alpha))$ 的元素生成, 其中 $\pi\colon \mathfrak{g}_J \to \mathfrak{gl}(T(V'))$;
对于实根 $\alpha \in \Delta_J^{\mathrm{re}}$, 有 $x_\alpha \in (\mathfrak{g}_J)_{\alpha}$。
对于 $g \in G_J$, $\varphi(g) \in \mathrm{Aut}(G(S'))$。根据定理 3.2, g 对元素 $\exp(L) \in G(S')$ 的作用, 其中 $\widehat{\ }$ 对于 $L \in L(S')$, 由下式给出

$$\varphi(g)(\exp(L)) = \exp(\pi(x)) \cdot \exp(L).$$

记 $g = \exp(\pi(x)) \in G_J$, 则有

$$\varphi(g)(\exp(L)) = g \cdot \exp(L) = g \exp(L) g^{-1}.$$

群 $G(S')$ 可识别为 G 中的子群 $\{(m,\ 1_{G_J}) \mid m \in G(S')\}$。群 G_J 可识别为 G 中的子群 $\{(1_{G(S')}\ g) \mid g \in G_J\}$。通过这些识别, $G(S')$ 构成 G 的正规子群。商群 $G/G(S')$ 与 G_J 同构。

引理 3.3。 G 中的乘法由下式给出

$$(n_1, g_1) \cdot (n_2, g_2) = (n_1 \cdot \exp(\mathrm{ad}(g_1)(L)), g_1 g_2)$$

$\widehat{\ }$其中 $L = \log(n_2) \in L(S')$。

证明。 群乘法为

$$(n_1 \cdot \varphi(g_1)(n_2), g_1 g_2)$$

其中作用由 $\varphi(g_1)(n_2) = \mathrm{Ad}(g_1)(n_2) = g_1 n_2 g_1^{-1}$ 给出。由于 $n_2 \in G(S') = \exp(\widehat{L}(S'))$, $\widehat{\ }$存在唯一的 $L \in L(S')$, 即 $L = \log(n_2)$, 使得 $n_2 = \exp(L)$。我们有

$$\varphi(g_1)(n_2) = \mathrm{Ad}(g_1)(n_2) = \mathrm{Ad}(g_1)(\exp(L)) = \exp(\mathrm{Ad}(g_1)(L)).$$

Thus

$$(n_1, g_1) \cdot (n_2, g_2) = (n_1 \cdot \exp(\mathrm{Ad}(g_1)(L)), g_1 g_2)$$

其中 $L = \log(n_2)$。

□

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$注意, 在引理 3.3 中, 指数映射是从 $L(S')$ 到 $G(S') = \exp(L(S'))$ 的双射。$\widehat{\ }$这保证了 $L = \log(n_2) \in L(S')$ 的存在性和唯一性。
综上所述, 我们有如下结论。

定理 3.4. 设 A 是满足条件 **B1-B3** 的矩阵。设 J 和 $\mathfrak{g}_J$ 如上所述。假设若 i、$j \in I\backslash J$ 和 $i \neq j$，则 $a_{ij} < 0$。那么，与该分解相关联的

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^+ \oplus (\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{u}^-,$$

存在一个群

$$G = G(S') \rtimes G_J$$

其中 S' 是 V' 的一组基，$V' = \coprod_{i\in I\backslash J} U(\mathfrak{n}_J^-) \cdot f_i$，$\mathfrak{u}^- = L(V')$，$G_J$ 是一个 *Kac–Moody* 群，它与 $\mathfrak{g}_J\widehat{\ }$ 有关，且对应于 $\mathfrak{g}_J$ 在张量代数 $W = T(V')$ 上的一个表示，并且 $G(S') = exp(L(S'))$。若对于某个 $x \in \mathfrak{g}_J$，$g = exp(\pi(x))$，则 G_J 在 $G(S')$ 上的作用由下式给出

$$g \cdot \exp(L) = g \exp(L) g^{-1} = \mathrm{Ad}(g)(\exp(L)) = \exp(\mathrm{Ad(g)(L)})$$

$\widehat{\ }$其中 $L \in L(S')$。因此，G_J 在 $G(S')$ 上的作用是通过在 $L(S')$ 上的李代数自同构实现的，随后扩展为在 $G(S')$ 上的群自同构。G 中的乘法由下式给出

$$(n_1, g_1) \cdot (n_2, g_2) = (n_1 \cdot \exp(\mathrm{Ad}(g_1)(L)), g_1 g_2)$$

$\widehat{\ }$对于 $L = \log(n_2) \in L(S')$。

以下定理表明，群 G 在同构意义下与所选的 V' 的基 S' 无关。

定理 3.5。设 S'_1 和 S'_2 是 V' 的不同基。设 $G_1 = G(S'_1) \rtimes G_J$ 和 $G_2 = G(S'_2) \rtimes G_J$。则 G_1 和 G_2 同构。

证明。我们首先构造一个同构 Φ： $G(S'_1) \to G(S'_2)$，它由从 S'_1 到 S'_2 的基变换诱导。令 $A(S'_1)$ 和 $A(S'_2)$ 分别为以形式变量集合 S'_1 和 S'_2 为基的自由结合代数。这个（可逆的）基变换映射 ρ：$S'_1 \to S'_2$ 可唯一延拓为一个代数同构：

$$\widehat{\phi} : \widehat{A}(S'_1) \to \widehat{A}(S'_2)$$

在生成元 $s_i \in S'_1$ 上定义，将每个 s_i 的像视为形式多项式。该同构 $\widehat{\ }$ 在自由李代数的完备化上诱导出一个同构

$$\widehat{L}(S'_1) \to \widehat{L}(S'_2),$$

这进而　在相应的 Magnus 群之间诱导出一个群同构：

$$\Phi : G(S'_1) \to G(S'_2) \quad \text{defined by} \quad \Phi(\exp(L)) = \exp(\widehat{\phi}(L))$$

$\widehat{\ }$对于任意 $L \in L(S'_1)$。

接下来我们证明，Φ 与 G_J的作用相容。G_J 在 $G(S'_1)$ 和 $G(S'_2)$ 上的作用均由表示 π：$\mathfrak{g}_J \to \mathfrak{gl}(T(V'))$ 诱导。这些作用不依赖于 V'的基的选取。

基变换映射 ρ 与表示 π可交换：

$$\rho(\pi(x)(v)) = \pi(x)(\rho(v)) \quad \text{for all } v \in V'.$$

$\widehat{\ }$由此可得，同构 ϕ 与 $\mathfrak{g}_J$的作用可交换：

$$\widehat{\phi}(x \cdot L) = x \cdot (\widehat{\phi}(L)) \quad \text{for all } x \in \mathfrak{g}_J, L \in \widehat{L}(S'_1).$$

这可以推广到 G_J 的作用。对于任意的 $g \in G_J$ 和 $n \in G(S'_1)$：

$$\Phi(g \cdot n) = \Phi(\mathrm{Ad}(g)(n)) = \mathrm{Ad}(g)(\Phi(n)) = g \cdot (\Phi(n))$$

因此， Φ 是 G_J-模的同构。我们定义半直积的同构 Ψ: $G_1 \to G_2$：

$$\Psi((n_1, g)) = (\Phi(n_1), g) \quad \text{for } n_1 \in G(S_1'), g \in G_J.$$

由于 Φ是一个同构， Ψ是一个双射。我们证明 Ψ 是一个群同态。设$(n_1,\ g_1)$，$(n_2,\ g_2)$ $\in G_1$。那么

$$\begin{aligned}
\Psi((n_1, g_1) \cdot (n_2, g_2)) &= \Psi((n_1 \cdot (g_1 n_2 g_1^{-1}), g_1 g_2)) \\
&= (\Phi(n_1 \cdot (g_1 n_2 g_1^{-1})), g_1 g_2) \\
&= (\Phi(n_1) \cdot \Phi(g_1 n_2 g_1^{-1}), g_1 g_2), \qquad \text{since } \Phi \text{ is a homomorphism} \\
&= (\Phi(n_1) \cdot (g_1 \Phi(n_2) g_1^{-1}), g_1 g_2)
\end{aligned}$$

这就是 G_2中的乘法。因此 Ψ是一个群同态，因而是一个同构。 □

4. 示例

我们回顾一下，在本节中， f_i 是虚单根对应的Chevalley 生成元，而 $U(\mathfrak{n}_J^-) \cdot f_i$ 是由 f_i生成的循环模。

4.1. **Monster 李代数的一个 Magnus 群**。令 $\mathfrak{g}$为与Borcherds Cartan矩阵 A相关联的Borcherds 代数:

$$A = \begin{array}{c} \\ c(-1) \\ \\ c(1) \\ \\ c(2) \\ \\ \end{array} \overset{\begin{array}{cccccccc} \overset{c(-1)}{\longleftrightarrow} & & \overset{c(1)}{\longleftrightarrow} & & & \overset{c(2)}{\longleftrightarrow} & & \end{array}}{\left(\begin{array}{c|ccc|ccc|c}
2 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 & \dots \\ \hline
0 & -2 & \dots & -2 & -3 & \dots & -3 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\
0 & -2 & \dots & -2 & -3 & \dots & -3 & \\ \hline
-1 & -3 & \dots & -3 & -4 & \dots & -4 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\
-1 & -3 & \dots & -3 & -4 & \dots & -4 & \\ \hline
\vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots &
\end{array}\right)}, \tag{9}$$

T数值 $c(j)$是模函数 $J(q)$中的傅里叶系数 q^j：

$$J(q) = \sum_{n=-1}^{\infty} c(n) q^n = \frac{1}{q} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \dots, \tag{10}$$

其中， $q = e^{2\pi \mathbf{i} \tau}$ 对于 $\tau \in \mathbb{C}$，且 $\mathrm{Im}(\tau) > 0$.

以下命题给出了 $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_J/\mathfrak{z}$ 的显式生成元与关系，其中 $\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{g}_J$的中心

命题 4.1. [Jur98] $\mathfrak{m}$ 在 $\mathbb{K}$ 上的 *Serre–Chevalley* 生成元为 e_{-1}, f_{-1}, h_1, h_2，以及 e_{jk}, f_{jk}，对所有 $(j,k) \in I - \{(-1,1)\}$，其定义关系如下：

$$[h_1, h_2] = 0, \tag{M:1}$$

$$[h_1, e_{-1}] = e_{-1}, \qquad [h_2, e_{-1}] = -e_{-1}, \tag{M:2a}$$

$$[h_1, e_{jk}] = e_{jk}, \qquad [h_2, e_{jk}] = j e_{jk}, \tag{M:2b}$$

$$[h_1, f_{-1}] = -f_{-1}, \qquad [h_2, f_{-1}] = f_{-1}, \tag{M:3a}$$

$$[h_1, f_{jk}] = -f_{jk}, \qquad [h_2, f_{jk}] = -j f_{jk}, \tag{M:3b}$$

$$[e_{-1}, f_{-1}] = h_1 - h_2, \tag{M:4a}$$

$$[e_{-1}, f_{jk}] = 0, \qquad [e_{jk}, f_{-1}] = 0, \tag{M:4b}$$

$$[e_{jk}, f_{pq}] = -\delta_{jp}\delta_{kq}\left(j h_1 + h_2\right), \tag{M:4c}$$

$$(\operatorname{ad} e_{-1})^j e_{jk} = 0, \qquad (\operatorname{ad} f_{-1})^j f_{jk} = 0, \tag{M:5}$$

对所有 (j,k)，$(p,q) \in I - \{(-1,1)\}$。此外，$\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2 = \mathfrak{h}_A/\mathfrak{z}$，$\mathfrak{m}$ 的 *Cartan* 子代数 .

由 [Jur98], 可得

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^+ \oplus (\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{u}^-$$

and

$$\mathfrak{m} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$$

其中 $\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{g}(A)$ 的中心。我们有 $\mathfrak{g}_J = \mathfrak{sl}_2$，其标准基 $\{e_{-1}, f_{-1}, h_{-1}\}$ 满足：

$$[h_{-1}, e_{-1}] = 2e_{-1}, \quad [h_{-1}, f_{-1}] = -2f_{-1}, \quad [e_{-1}, f_{-1}] = h_{-1}.$$

于是 $\mathfrak{n}_J^- = \langle f_{-1} \rangle$ 和 $U(\mathfrak{n}_J^-) = \mathbb{C}[f_{-1}]$。应用定理 2.1，并按照 (9) 的分块形式进行编号

$$V' = \coprod_{j \in \mathbb{N}} U(f_{-1}) \cdot f_{jk}$$

$$V = \coprod_{j \in \mathbb{N}} U(e_{-1}) \cdot e_{jk}.$$

设 $\mathfrak{g}_J = \mathfrak{sl}_2$。这里 V' 由 $S' = \cup_{j \in \mathbb{N}} \{(f_{-1})^\ell \cdot f_{jk} \mid 0 \le \ell < j, 1 \le k \le c(j)\}$ 一组 $\mathfrak{sl}_2$-最高权模张成，其中 $\mathfrak{u}^- = L(V')$ 且 $\mathfrak{u}^+ = L(V)$。

在这种情况下，我们可以更明确地描述张量代数 $T(V)$ 的结构。在 [JLW95], 中构造的不可约 $\mathfrak{m}$-模 $T(V)$ 具有广义 Verma 模的结构，并由 $\mathfrak{m}$ 的抛物子代数 $\mathfrak{u}^+ \oplus \mathfrak{gl}_2$ 的一个不可约模诱导而来。

令 $f_{jk} \in \mathfrak{g}_{-\alpha_{jk}}$ 为与虚单根 α_{jk} 对应的 Chevalley 生成元。那么 $f_{jk} \in V'_{jk}$ 是一个最高权向量。由于 V'_{jk} 是 3 维的，f_{jk} 满足：

$$\begin{aligned} e_{-1} \cdot f_{jk} &= 0 \\ h_{-1} \cdot f_{jk} &= \lambda_{jk} f_{jk} \text{ (for some weight } \lambda_{jk}) \\ (f_{-1})^3 \cdot f_{jk} &= 0. \end{aligned}$$

每个 V'_{jk} 都是一个 3 维不可约最高权 $\mathfrak{g}_J = \mathfrak{sl}_2$-模。模 V'_{jk} 由 $U(\mathfrak{n}_J^-)$ 对最高权向量 f_{jk}的作用生成：

$$V'_{jk} = U(\mathfrak{n}_J^-) \cdot f_{jk} = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{(f_{-1})^\ell \cdot f_{jk} \mid (\ell, j, k) \in E\}.$$

因此， $U(\mathfrak{n}_J^-)\cdot f_i$ 的 Poincar´e–Birkoff–Witt 基为：

$$\{f_{-1}^{\ell}\cdot f_{jk}\}$$

and

$$S'=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\left\{f_{-1}^{\ell}\cdot f_{jk}\mid 0\le\ell<j, 1\le k\le c(j)\right\}$$

是 $V'=\bigoplus V'_{jk}$ 的 Poincar´e–Birkoff–Witt 基。 $U(\mathfrak{n}_J^-)$ 对 f_{jk} 的作用 $=\mathbb{C}[f_{-1}]$ 给出如下的基：

$$\begin{aligned}v_1&=f_{jk}\\ v_2&=f_{-1}\cdot f_{jk}\\ v_3&=(f_{-1})^2\cdot f_{jk}\end{aligned}$$

其中，对于某个 $\lambda\in\mathbb{C}$，有 $f_{-1}^3\cdot f_{jk}=0$, $e_{-1}\cdot f_{jk}=0$, $h_{-1}\cdot f_{jk}=\lambda f_{jk}$。非交换变量的形式幂级数为

$$\begin{aligned}b_1&=f_{jk},\\ b_2&=f_{-1}\cdot f_{jk},\\ b_3&=(f_{-1})^2\cdot f_{jk}.\end{aligned}$$

我们还回顾一下， $U(\mathfrak{sl}_2)$ 具有如下形式的 Poincar´e–Birkoff–Witt 基 $f^ih^ke^j$。我们通过转移上述作用，在形式变量 b_1, b_2, b_3 上定义一个 $\mathfrak{sl}_2$-作用：对于任意元素 $y\in U(\mathfrak{sl}_2)$，其作用 $y\circ b_j$ 可通过计算 $y\cdot v_j$、将结果表示为 $\{v_j\}$ 基中的元素，然后以 v_j 替换 b_j 得到。

我们与 V'_{jk} 的基向量之间存在如下对应关系：

$$\begin{aligned}b_1&\leftrightarrow v_1=f_{jk}\\ b_2&\leftrightarrow v_2=f_{-1}\cdot f_{jk}\\ b_3&\leftrightarrow v_3=(f_{-1})^2\cdot f_{jk}\end{aligned}$$

映射 μ： $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(S')\to V'$ 由 $\mu(b_s)=v_s$ 定义，并按线性方式扩张，根据构造它是一个同构。每个形式变量 $b_s\in S'$ 都与一个特定的$v_s\in V'$一一对应。这是模 V' 的忠实表示。

例如，设 $x=(f_{-1})^2+(f_{-1}e_{-1})-(f_{-1}h_{-1})$。我们要定义 $x\circ b_1$。
形式变量为 b_1，对应于 $v_1=f_{jk}$。我们计算 $x\cdot v_1=((f_{-1})^2+(f_{-1}e_{-1})-(f_{-1}h_{-1}))\cdot f_{jk}$：

- $(f_{-1})^2\cdot f_{jk}=v_3$
- $(f_{-1}e_{-1})\cdot f_{jk}=f_{-1}(e_{-1}\cdot f_{jk})=f_{-1}(0)=0$
- $(f_{-1}h_{-1})\cdot f_{jk}=f_{-1}(h_{-1}\cdot f_{jk})=f_{-1}(\lambda_{jk}f_{jk})=\lambda_{jk}(f_{-1}f_{jk})=\lambda_{jk}v_2$

因此， $x\cdot v_1=v_3+0-\lambda_{jk}v_2$。转换为形式变量：

$$x\circ b_1=b_3-\lambda_{jk}b_2.$$

群 $G_J=\mathrm{SL}_2$ 由生成元 $e_{-1}, f_{-1}, h_{-1}(=h_1-h_2)$ 给出。令 $\widetilde{w}=\exp(e_{-1})\exp(-f_{-1})\exp(e_{-1})$。令 $u,v\in\mathbb{K}$ 和 $s,t\in\mathbb{K}^\times$。则 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 的关系为：

$$\begin{aligned}
\exp(ue_{-1})\exp(ve_{-1}) &= \exp((u+v)e_{-1})\\
\exp(uf_{-1})\exp(vf_{-1}) &= \exp((u+v)f_{-1})\\
\exp((\log s)h_{-1})\exp((\log t)h_{-1}) &= \exp((\log(st))h_{-1})\\
\exp(-tf_{-1})\exp(se_{-1})\exp(tf_{-1}) &= \exp(-t^{-1}e_{-1})\exp(-t^2sf_{-1})\exp(-te_{-1})\\
\exp((\log s)h_{-1})\exp(ue_{-1})(\exp((\log s)h_{-1}))^{-1} &= \exp(sue_{-1})\\
\exp((\log s)h_{-1})\exp(uf_{-1})(\exp((\log s)h_{-1}))^{-1} &= \exp(s^{-1}uf_{-1})\\
\widetilde{w}\exp(ue_{-1})\widetilde{w}^{-1} &= \exp(-uf_{-1})\\
\widetilde{w}\exp(uf_{-1})\widetilde{w}^{-1} &= \exp(-ue_{-1})\\
\widetilde{w}\exp((\log s)h_{-1})\widetilde{w}^{-1} &= \exp((\log(s^{-1}))h_{-1})
\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由于 $G(S')=\exp(L(S'))$，$G(S')$ 中的每个元素都可写成 $\exp(L)$ 的形式，其中 $L\in L(S')$。与定理 3.4 中一样，$g\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 在 $\exp(L)\in G(S')$ 上的作用为 $g\cdot\exp(L)=\exp(\mathrm{Ad}(g)(L))$，其中 $g=\exp(\pi(x))$，对某个 $x\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ 成立。

令 $f_{\ell,jk}$ 为 S' 的一个基元素。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 在 $\exp(vf_{\ell,jk})$ 上的作用（$v\in\mathbb{K}$），它定义了半直积 $G=G(S')\rtimes\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$，如下所示：

$\widehat{\ }$算子 $\mathrm{ad}_{e_{-1}}$ 和 $\mathrm{ad}_{f_{-1}}$ 在 $L_{\mathbb{K}}(S')$ 上局部幂零地作用。对于任意 $Y\in S'$，$\exp(\mathrm{ad}_{ue_{-1}})(Y)$ 都是 $\mathbb{K}$ 上由李词构成的有限线性和。因此，$\exp(\mathrm{ad}_{ue_{-1}})$ 和 $\exp(\mathrm{ad}_{uf_{-1}})$ 是 $L_{\mathbb{K}}(S')$ 的自同构。

I若 $f_{\ell,jk}$ 是 $\mathrm{ad}_{h_{-1}}$ 的特征向量，特征值为 $\lambda_{\ell,jk}$，则对于 $v\in\mathbb{K},S'\in\mathbb{K}^\times$ ：

$$\exp((\log S')h_{-1})\exp(vf_{\ell,jk})(\exp((\log S')h_{-1}))^{-1}=\exp(v(S')^{\lambda_{\ell,jk}}f_{\ell,jk}).$$

$\exp(ue_{-1})$，$u\in\mathbb{K}$ 的作用描述如下：

$$\exp(ue_{-1})\exp(vf_{\ell,jk})(\exp(ue_{-1}))^{-1}=\left(\prod_{\alpha\in R'(\ell,j,k)}\exp(c_\alpha(u,v)f_\alpha)\right)\exp(vf_{\ell,jk})$$

其中 f_α 是根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha=(a-b\ell)\alpha_{-1}-b\alpha_{jk}$ 的一个固定基元素，而 $c_\alpha(u,v)$ 是依赖于 α、u 和 v 的常数。

如果 $[e_{-1},f_{0,jk}]=0$，则 $c_\alpha(u,v)=0$ 对于 $\alpha\in R'(\ell,j,k)$ 以及

$$\exp(ue_{-1})\exp(vf_{0,jk})(\exp(ue_{-1}))^{-1}=\exp(vf_{0,jk})$$

$\exp(uf_{-1})$ 的作用如下：

$$\exp(uf_{-1})\exp(vf_{\ell,jk})(\exp(uf_{-1}))^{-1}=\left(\prod_{\alpha\in S'(\ell,j,k)}\exp(d_\alpha(u,v)f_\alpha)\right)\exp(vf_{\ell,jk})$$

其中，f_α 是 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的一个固定基元素，$\alpha=-(a+b\ell)\alpha_{-1}-b\alpha_{jk}$，而 $d_\alpha(u,v)$ 是取决于 α、u 和 v 的常数。

如果 $[f_{-1},f_{j-1,jk}]=0$，那么 $d_\alpha(u,v)$ 对于 $\alpha\in S'(\ell,j,k)$ 和

$$\exp(uf_{-1})\exp(vf_{j-1,jk})(\exp(uf_{-1}))^{-1}=\exp(vf_{j-1,jk}).$$

根集 $R'(\ell,\ j,\ k)$ 和 $S'(\ell,\ j,\ k)$ 为:

$$R'(\ell,j,k)=\{(a-b\ell)\alpha_{-1}-b\alpha_{jk}\mid a,b\in\mathbb{N},a-b\ell<j,\ 1\le k\le c(j)\}$$
$$S'(\ell,j,k)=\{-(a+b\ell)\alpha_{-1}-b\alpha_{jk}\mid a,b\in\mathbb{N},a+b\ell<j,\ 1\le k\le c(j)\}$$

记号 $\alpha_{jk}=\alpha_{0,jk}$ 表示一个简单虚根，而 α_{-1} 是实单根。

将 f_α 和 $f_{\ell,jk}$ 视为 $L(S')$ 的元素，分别对应于 α 和 $\alpha_{\ell,jk}$ 的根向量。所给出的分解是 Baker–Campbell-Hausdorff 公式的非平凡推论（见 [CJM22]）。它们以略有不同的形式出现在 [CJM22] 中。

4.2. **Fricke 型 Monstrous 李代数**。若某个元素 $g\in\mathbb{M}$ 对应的 McKay–Thompson 级数 $T_g(\tau)$ 在层 NFricke 对合 $\tau\mapsto -1/N\tau$ 下不变（其中 $N\ge 1$ 为某个值），则称该元素为 *Fricke* 元。

否则，g 称为非Fricke。$\mathbb{M}$中有 141 个 Fricke 类和 53 个非Fricke 类。
当 g 是 Fricke 元时，$\mathfrak{m}_g$ 的结构与 Monster 李代数 $\mathfrak{m}$相似。
Fricke 型的 g 对应的李代数 $\mathfrak{m}_g$，其分母公式为 [Car12]

$$f(p)-f(q^{1/N})=p^{-1}\prod_{m>0,\ n\in\frac{1}{N}\mathbb{Z}}(1-p^mq^n)^{c_g(m,n)}$$

其中

$$f(q)=q^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}c_g(1,\frac{n}{N})q^n.$$

指数 $c_g(m,\ \frac{n}{N})$ 是根 $(m,\ \frac{n}{N})$ 的重数 $\in\mathbb{Z}\oplus\frac{1}{N}\mathbb{Z}$。它们是相对于循环群 $\langle g\rangle$ 的广义McKay–Thompson级数的离散傅里叶变换系数。

对于 Fricke 型的 g，有 $\mathfrak{m}_g=\mathfrak{g}(A_g)/\mathfrak{z}$，其中 $\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{g}(A_g)$的中心，而 A_g 是Borcherds Cartan 矩阵 [Car17]:

$$A_g=\begin{array}{c}
\overset{c_g(1,\frac{-1}{N})}{\longleftrightarrow}\ \overset{c_g(1,\frac{1}{N})}{\longleftrightarrow}\ \overset{c_g(1,\frac{2}{N})}{\longleftrightarrow}\\
\left(\begin{array}{c|ccc|ccc|c}
2 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 & \dots\\
\hline
0 & -2 & \dots & -2 & -3 & \dots & -3 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots\\
0 & -2 & \dots & -2 & -3 & \dots & -3 & \\
\hline
-1 & -3 & \dots & -3 & -4 & \dots & -4 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots\\
-1 & -3 & \dots & -3 & -4 & \dots & -4 & \\
\hline
\vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots &
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{l}
c_g(1,\frac{-1}{N})\updownarrow\\
\\
c_g(1,\frac{1}{N})\\
\\
\\
c_g(1,\frac{2}{N})\\
\\
\\
\end{array},$$

Let

$$I=\{(j,k)\mid j\in\{-1,1,2,3,\dots\},\ 1\le k\le c_g(1,j/N)\}\,.$$

对于 $(j,\ k)\in I$，各项满足

$$(\alpha_{jk},\alpha_{pq})=a_{jk,pq}=-(j+p).$$

当 g 是 Fricke元时，Carnahan [Car17] 证明了 Jurisich 分解的一个类似结果，其中 $\mathfrak{u}^{\pm}$ 是自由李代数。Carnahan 还证明了 Borcherds

$\mathfrak{m}_g$ 的 Cartan矩阵与 $\mathfrak{m}$的形式相同，但区块大小不同；这些大小由 $\mathfrak{m}_g$的虚根简单根的根空间维数给出。

$\mathfrak{gl}_2$ 求和项包含子代数 $\mathfrak{sl}_2$，它就是我们的 $\mathfrak{g}_J$。这个 $\mathfrak{sl}_2$ 对应于 $\mathfrak{m}_g$ 的唯一实单根，我们将其记为 α_{-1}。相应群为 $G_J = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$。

子代数 $\mathfrak{u}^-$ 是自由李代数 $L(V')$。空间 V' 是不可约最高权 $\mathfrak{g}_J$-模的直和

$$V' = \bigoplus_{j\geq 1,\, 1\leq k\leq c_g(1,\frac{j}{N})} V_{jk}.$$

每个模 V_{jk} 都由一个最高权向量 f_{jk} 生成，该向量对应于 $\mathfrak{m}_g$ 的一个虚单根 α_{jk} 。内积为 $(\alpha_{-1},\ \alpha_{jk}) = -j$。因此， $\mathfrak{sl}_2$-模 V_{jk} 关于 h_{-1} 的最高权为 $\lambda = -(\alpha_{-1},\ \alpha_{jk}) = j$。对于 $j \in \mathbb{N}$，这对应于一个维数为 $j+1$ 的不可约$\mathfrak{sl}_2$-模。

设 S' 是 V' 的如下基：我们将每个 $(j+1)$ 维模 V_{jk} 的 Poincar´e-Birkhoff-Witt 基元素取并：

$$S' = \bigcup \left\{ (f_{-1})^{\ell} \cdot f_{ik} \,\middle|\, j \geq 1, 1 \leq k \leq c_g(1, \frac{j}{N}), 0 \leq \ell \leq j \right\}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$如第 4.1 小节所述，我们构造 $G = G(S') \rtimes G_J$ ，其中 $G(S') = \exp(L(S'))$，而 $L(S')$ 是自由李代数 $\mathfrak{u}^- = L(S')$ 的完备化。

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 群 G_J 由元素 $\exp(ue_{-1})$、$\exp(uf_{-1})$ 和 $\exp((\log s)h_{-1})$ 生成，并满足第 4.1 小节中给出的标准 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 关系。

群 G 定义为半直积 $G = G(S') \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$。元素$h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ 对元素 $\exp(L) \in G(S')$ 的作用定义为 $h \cdot \exp(L) = \exp(\mathrm{Ad}(h)(L))$。

元素 $h_{-1} \in \mathfrak{sl}_2$ 对角地作用。$f_{\ell,jk}$ 的权是 $\lambda_{\ell,jk} = j - 2\ell$。 $s \in \mathbb{K}^{\times}$和 $v \in \mathbb{K}$ 的作用为：

$$\exp((\log s)h_{-1}) \cdot \exp(v f_{\ell,jk}) = \exp(v(s^{j-2\ell}) f_{\ell,jk}).$$

$\exp(ue_{-1})$ 对 $f_{\ell,\ jk}$ 的作用是局部幂零的，并由 Baker–Campbell–Hausdorff公式给出：

$$\exp(ue_{-1}) \cdot \exp(v f_{\ell,jk}) = \left(\prod_{\alpha \in \mathbb{R}'(\ell,j,k)} \exp(c_\alpha(u,v) f_\alpha) \right) \cdot \exp(v f_{\ell,jk})$$

其中， $c_\alpha(u,\ v)$ 是一个取决于 α、 u 和 v 的常数。根集 $R'(\ell,\ j,\ k)$ 由形如 $(a - b\ell)$ $\alpha_{-1} - b\alpha_{jk}$ 的根组成，其中 $j \geq 1$、 $1 \leq k \leq c_g(1,\ \frac{j}{N})$ 和 $0 \leq \ell \leq j$。

$\mathrm{ad}\, f_{-1}$ 对 $f_{\ell,\ jk}$ 的作用也是局部幂零的，并且有：

$$\exp(uf_{-1}) \cdot \exp(v f_{\ell,jk}) = \left(\prod_{\alpha \in S'(\ell,j,k)} \exp(d_\alpha(u,v) f_\alpha) \right) \cdot \exp(v f_{\ell,jk})$$

其中， $d_\alpha(u,\ v)$ 是一个取决于 α、 u 和 v 的常数。根集 $S'(\ell,\ j,\ k)$ 由形如 $-(a + b\ell)$ $\alpha_{-1} - b\alpha_{jk}$ 的根组成，其中 $j \geq 1$、 $1 \leq k \leq c_g(1,\ \frac{j}{N})$和 $0 \leq \ell \leq j$。

4.3. 示例：由双曲 Kac–Moody 根格构造的 Borcherds 代数。一类示例可通过向半单代数或 Kac–Moody 代数中添加一个或多个简单虚根来构造。我们考虑以下示例，它是通过添加一个

简单虚根到双曲 Kac–Moody 代数 $H(3)$ 中得到的，该代数的广义 Cartan 矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

以获得与秩为 2 的矩阵对应的 Borcherds 代数 $\mathfrak{g}(B)$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

我们将所得 Borcherds 代数的简单根记为 α_1, α_2, α_3。注意，矩阵的秩为 2，因此我们扩充 $\mathfrak{h}$ of $\mathfrak{g}(B)$ 的 Cartan 子代数，使其包含一个满足 $D_3(\alpha_i) = \delta_{(3,i)}$ 的次数导子 D_3。令 $J = \{1, 2\}$，于是有 $\mathfrak{g}_J = H(3)$。我们用 $\mathfrak{g}_J = \mathfrak{n}_J^- \oplus \mathfrak{h}_J \oplus \mathfrak{n}_J^+$ 表示 $\mathfrak{g}_J$ 的三角分解。

我们注意到以下事实：限制在 Cartan 子代数上时， α_1 和 α_2 是双曲代数 $H(3)$ 的简单根。限制在 $\mathfrak{g}_J = H(3)$ 的根格上时，根 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ 是 $H(3)$ 的根格中的虚根，但它是 Borcherds 代数 $\mathfrak{g}(B)$ 的简单虚根。作为 $[(\mathfrak{h})^e]^* = (\delta_{(3,i)} \ltimes \mathfrak{h})^*$ 的元素，根 α_1, α_2, α_3 线性无关。

我们定义 $\mathfrak{u}^-$ 为自由李代数 $L(V')$，其中 $V' = U(\mathfrak{n}_J^-) \cdot f_{\alpha_3}$，其中 f_{α_3} 是 $\mathfrak{g}(B)$ 中对应于 $-\alpha_3$ 的根向量；并定义 $\mathfrak{u}^+$ 为自由李代数 $L(V)$，其中 $V = U(\mathfrak{n}_J^+) \cdot e_{\alpha_3}$，且 e_{α_3} 是 $\mathfrak{g}(B)$ 中对应于 α_3 的根向量。

模 V' 是 $\mathfrak{g}_J = H(3)$ 的可积最高权模，其最高权向量为 f_{α_3}。V'的 Poincar´é–Birkhoff-Witt 基元素具有 $v = f_{i_1}^{m_1} f_{i_2}^{m_2} \dots f_{i_n}^{m_n} \cdot f_{\alpha_3}$的形式，其中 $f_{i_j}^{m_j} \in \mathfrak{n}_J^-$。

设 S' 为 V'的一组基。我们定义 $G(S') = \exp(L(S'))$。如 [Tit87], 中所述，$H(3)$ 的 Kac–Moody 群 G_J 由集合 $\{\chi_\alpha(u) \mid \alpha \in \Delta_{\mathrm{re}}, u \in \mathbb{K}\}$ 生成，并满足下述 Tits 关系（R1）–（R7），其中我们将 $\chi_\alpha(u)$ 与 $\exp \mathrm{ad}(ue_\alpha)$ 识别，并且 $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ 是对应于 $\alpha \in \Delta_{\mathrm{re}}$ 的根向量。在下述（R1）–（R7）中，i, j 是 $I = \{1, 2\}$ 的元素，$u, v \in \mathbb{K}$、$s, t \in \mathbb{K}^\times$ 以及 α和 β是实根。

(R1) $\chi_\alpha(u + v) = \chi_\alpha(u)\chi_\alpha(v)$;

(R2) 设 (α, β) 是一个预幂零对，也就是说，存在 $w, w' \in W$ 使得

$$w\alpha,\ w\beta \in \Delta_{\mathrm{re}}^+ \text{ and } w'\alpha,\ w'\beta \in \Delta_{\mathrm{re}}^-.$$

Then

$$[\chi_\alpha(u), \chi_\beta(v)] = \prod_{m,n \geq 1} \chi_{m\alpha+n\beta}(C_{mn\alpha\beta} u^m v^n)$$

其中，右侧的乘积按某个固定顺序遍历所有形如 $m\alpha+n\beta, m, n \geq 1$ 的实根取值，而 $C_{mn\alpha\beta}$ 是与 $\mathbb{K}$ 无关的整数。

Set

$\chi_{\pm i}(u) = \chi_{\pm\alpha_i}(u)$, where $\chi_i(u) = \exp \mathrm{ad}(ue_i)$ and $\chi_{-i}(u) = \exp \mathrm{ad}(uf_i)$

$\widetilde{w}_i(s) = \chi_i(s)\chi_{-i}(-s^{-1})\chi_i(s)$,

$\widetilde{w}_i = \widetilde{w}_i(1)$ and $h_i(s) = \widetilde{w}_i(s)\widetilde{w}_i^{-1}$.

其余关系为

(R3) $\widetilde{w}_i \chi_\alpha(u) \widetilde{w}_i^{-1} = \chi_{w_i\alpha}(\eta_{\alpha,i} u)$,

(R4) $h_i(s)\chi_\alpha(v)h_i(s)^{-1} = \chi_\alpha(vs^{\langle\alpha,\alpha_i^\vee\rangle})$,

(R5) $\widetilde{w}_i h_j(s)\widetilde{w}_i^{-1} = h_j(s)h_i(s^{-a_{ji}})$,

(R6) $h_i(st) = h_i(s)h_i(t)$, and

(R7) $[h_i(s), h_j(t)] = 1$.

在 [KP85 的命题 2.3], 中，证明了一对 $\{\alpha, \beta\}$ 是预幂零的，当且仅当 $\alpha \neq -\beta$ 和$|(\mathbb{Z}_{>0}\alpha + \mathbb{Z}_{>0}\beta) \cap \Delta_{\mathrm{re}}| < \infty$。因此，(R2) 右侧的乘积是有限的。

在图 1 中，支撑 $H(3)$ 在 $\mathfrak{h}^* \cong \mathbb{R}^{1,1}$ 中实根的双曲线以蓝色标出。正如 [CKMS21], 所示，一对实根 α, β 是预幂零的，当且仅当 α, β 都位于蓝色双曲线的同一支上。

回忆一下，由于模 V' 是可积的， e_α 和 f_α 在 $V'^{\widehat{}}$ 上的作用对于 $\mathfrak{g}_J$ 中的实根 α 是局部幂零的。因此，对于 $L \in L(S')$，和 exp ad$(ue_\alpha)(L)$ 与 exp ad$(uf_\alpha)(L)$ 会终止$^{\widehat{}}$，且是 $L(S')$ 中定义良好的元素。

对于 $h_i(t) \in G_J$，元素 $h_i \in \mathfrak{g}$ 在 V' 的基向量上对角作用，这些基向量都是权向量。如果 $v \in V'$ 是权为 λ 的基向量，那么 $h_i \cdot v = \langle \lambda, \alpha_i \rangle v$。这对应于对相应形式变量 s_v 的作用，即 $h_i \circ s_v = \langle \lambda, \alpha_i \rangle s_v$。群作用如下:

$$\mathrm{Ad}(h_i(t))(s_v) = t^{\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle} s_v$$

其中， $\alpha_i^\vee$是与 α_i对应的余根。

现在我们可以构造半直积 $G = G(S') \rtimes G_J$，其中 $V' = U(\mathfrak{n}_J^-) \cdot f_{\alpha_3}$。群 G_J 是由上述表示给出的 $\mathfrak{g}_J = H(3)$ 的 Kac–Moody 群，并且 $G(S') = \widehat{\exp}(L(S'))$。$G$ 中的乘法由引理 3.3 给出。

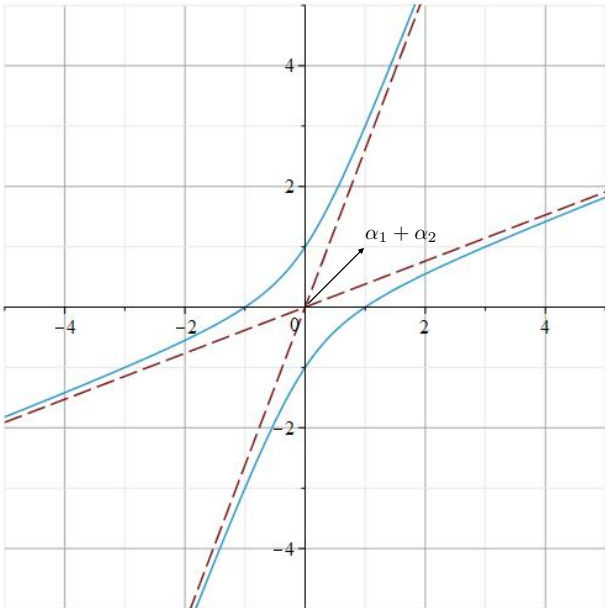


图 1. 粗实线曲线表示支撑 $H(3)$ 在 $\mathfrak{h}^* \cong \mathbb{R}^{1,\,1}$ 中实根的双曲线。虚线表示渐近线。虚根 $\alpha_1 + \alpha_2$ 位于虚锥内部。

在 $H(3)$ 中，根 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是虚根（见图 1）。令 $\mathfrak{h}(H(3))$ 为 $H(3)$ 的 Cartan 子代数。回顾一下， α_1、α_2 和 α_3 是 $\mathfrak{g}(A)$ 的简单根，而 α_3 是虚根。我们注意到，限制到 $\mathfrak{h}(H(3))$ 上时，有 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$。

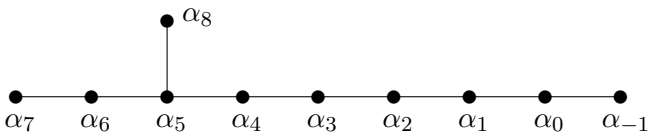


图 2。 E_{10}的 Dynkin 图

通过将广义 Cartan 矩阵B 中的 -1项替换为 $-k$、 $k>1$，可以构造类似的例子。

4.4. 由 E_{10} 和"缺失模"构成的 Borcherds 代数。 接下来我们考虑由 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{9,\,1}}$ [GN95] 和 [BGGN98]，构成的 Borcherds 代数，其极大 Kac–Moody 子代数为双曲代数 E_{10}。

$\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{9,\,1}}$ 的根格是 10 维偶自对偶洛伦兹格 $\mathrm{II}^{9,1}$。 E_{10} 的根格与 $\mathrm{II}^{9,1}$，重合，然而 E_{10} 是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{9,\,1}}$ 的某个子代数，该子代数由一组实单根定义；而 Borcherds 代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{9,\,1}}$ 还具有额外的虚单根。

我们首先回顾 E_{10} 根格的细节。回想图 2 中所示的 E_{10} Coxeter-Dynkin 图。在本节中，除非另有说明，我们将使用记号 E_k 来指代 E_k 格。 E_{10} 根格为 $E_{10}=\oplus_{i=-1}^{8}\mathbb{Z}\alpha_i$，其中对于所有 $-1\le i$、 $j\le 8$:

若第 i 个节点与第 j 个节点之间有边相连，则为 $(\alpha_i,\alpha_i)=2$(α_i, α_j) $=-1$；否则为 $i\neq j$ $(\alpha_i,\alpha_i)=0$。

向量

$$\delta=\alpha_0+2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+5\alpha_4+6\alpha_5+4\alpha_6+2\alpha_7+3\alpha_8.$$

是 $E_9\subset E_{10}$ 的零根（也称为各向同性根）。对于 $i=0$，.....，8

$$(\alpha_i,\delta)=0$$

and

$$(\alpha_{-1},\delta)=-1.$$

对于一个根 $\lambda\in E_{10}$，我们将其层 ℓ定义为 $\ell=-\lambda\cdot\delta.$。图 2 中 Dynkin 图所确定的广义 Cartan 矩阵定义了双曲 Kac–Moody 代数 E_{10}。
[BGGN98] 的"缺失模"空间与 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{9,1}}$ 中的子空间 M 重合。子空间M 是扩展 Kac–Moody 代数 E_{10} 的正交补，这里所用的是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{9,1}}$ 的不变双线性形式，其中 E_{10} 经过扩展，以包含 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{9,1}}$ 的完整 Cartan 子代数。

子空间 M 是 E_{10} 在伴随作用下的一个模，而 M 可以唯一分解为 E_{10} 的不可约最高权模和/或最低权模的直和。设 λ 为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_9}$ 的一个占优整权（对于最高权模）或负占优整权（对于最低权模）.
[1]。

生成 M 中这些不可约 E_{10}-模的最低权向量（或最高权向量）对应于 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{9,\,1}}$ 的特定虚单根。这些是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{9,\,1}}$ 中不属于 E_{10} 子代数简单根的虚单根。

我们将 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{9,\,1}}$ 的虚单根集合取为下方的集合 Λ。这是基本 Weyl 室中的一级虚单根集合，如（[BGGN98] 命题 1）所述：

$$\Lambda = \{\lambda_k = \alpha_{-1} + (2+k)\delta \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

由此得到如下 Borcherds 广义 Cartan 矩阵 A：

$$A = \begin{bmatrix} A_{E_{10}} & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

其中

$$A_{E_{10}} = \left[\begin{array}{cccccccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

是 Kac–Moody 代数 E_{10} 的广义 Cartan 矩阵，

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

and

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 & -5 & \dots \\ -3 & -4 & -5 & -6 & \dots \\ -4 & -5 & -6 & -7 & \dots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}.$$

子矩阵 B 和 C 源自生成 M 的最低权向量（或最高权向量），并对应于 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{9,\,1}}$ 的特定虚单根；这些虚单根不是 E_{10} 的简单根。

与 Monster 李代数的情形一样，这些矩阵元素采用分块形式，以体现单虚根空间的维数。这些维数由最高权模的分次维数确定。计算这些重数的方法源自自由李代数的公式，且文献 [GN95] 中给出了一种方法，其中重数记为 $\mu(\Lambda)$。注意，此处我们只添入一级简单虚根，因为它们的维数已确定。

Borcherds Cartan 矩阵 A 满足定理 2.1 的条件。设 $\mathfrak{g}$为广义 Cartan 矩阵 A对应的 Borcherds 代数。令 $\mathfrak{g}_J$ 为由 Chevalley 生成元 $\{e_i, f_i, h_i\}_{i\in J}$生成的 Kac–Moody 代数 E_{10}，其中 $J = \{-1, 0, \dots, 8\}$ 对应于满足条件 $a_{ii} = 2$的实单根 α_i。子代数 $\mathfrak{h}$是完整 Borcherds

代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{9,\,1}}$。它包含 $\mathfrak{g}_J$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_J$ 以及满足条件 $\mathfrak{h} = D \oplus \mathfrak{h}_J$的额外次数导子 D。

我们定义 $W = T(V')$，其中 V' 是可积最高权 $\mathfrak{g}_J$-模的直和： $V' = \bigoplus_{i\in I\setminus J} U(\mathfrak{n}_J^-)\cdot f_i$。

由 $I \setminus J$ 编号的简单根构成集合 $\{\lambda_k = \alpha_{-1} + (2+k)\delta \mid k \in \mathbb{N}\}$，它们是虚单根。因此，$V' = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} V_{\lambda_k}$，其中 $V_{\lambda_k} = U(\mathfrak{n}_{E_{10}}^-)\cdot f_{\lambda_k}$ 是不可约最高权 E_{10}-模，最高权向量为 f_{λ_k}。

每个 V_{λ_k} 因而也是 V'，都是一个 $\mathfrak{g}_J$-模。表示 $\pi\colon \mathfrak{g}_J \to \mathfrak{gl}(T(V'))$ 是作用于 V' 上的 $\mathfrak{g}_J$-模作用，并且保持 W 上的自然分次。
矩阵 A 满足条件 B1-B3。对于不同的虚单根 λ_i，λ_j（对应于 C 块），当 $i,\ j>0$ 时，$C_{ij} = i+j \neq 0$。因此，没有不同的虚单根两两正交，所以定理 2.1 适用。

群 G_J 是与 $\mathfrak{g}_J = E_{10}$相关联的 Kac–Moody 群。该群由形如 $\exp(\pi(x_\alpha))$ 的元素生成，其中 $x_\alpha \in (\mathfrak{g}_J)_\alpha$ 对应于 E_{10}的实根 $\alpha \in \Delta_J$。这些生成元满足以指标集 $I = \{1,2,\dots,10\}$为基础的 Tits 关系 (R1)-(R7)。

子代数 $\mathfrak{u}^-$ 是自由李代数 $L(V')$，其中 $V' = \bigoplus_{i\in I\setminus J} U(\mathfrak{n}_J^-)\cdot f_i$。因此，$V' = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} U(\mathfrak{n}_{E_{10}}^-)\cdot f_{\lambda_k}$，其中 f_{λ_k}是虚单根 λ_k对应的 Chevalley 生成元，而 $\mathfrak{n}_{E_{10}}^-$ 是 E_{10}的负幂零部分。每个 $U(\mathfrak{n}_{E_{10}}^-)\cdot f_{\lambda_k}$ 都是 E_{10}的可积最高权模。V' 的基元素 S' 是由 $\mathfrak{n}_{E_{10}}^-$ 中的元素作用于最高权向量 f_{λ_k}所得的乘积。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$如第 4.1 小节所述，我们构造 $G = G(S') \rtimes G_J$，其中 $G(S') = \exp(L(S'))$，而 $L(S')$ 是自由李代数 $\mathfrak{u}^- = L(S')$ 的完备化。
设 $x_\alpha \in (\mathfrak{g}_J)_\alpha$，其中 α 是一个实根，x_α 是 α 的一个根向量的选取。由于 V' 是一个可积的 $\mathfrak{g}_J$-模（推论 2.2），伴随作用 $\mathrm{ad}(x_\alpha)$ 在 V' 上是局部幂零的。因此，$\widehat{\ }$ 对任意 $y \in L(S')$，级数 $\exp(\mathrm{ad}(x))(y)$ 都会终止
对于元素 $h \in \mathfrak{h}_J$，$\mathrm{ad}(h)$ 在权向量上对角地作用，因此 $\exp(\mathrm{ad}(h))(y)$ 也是良定义的。

G 中的乘法由引理 3.3 给出。

4.5. 侏儒李代数。 侏儒李代数由 BGGN [引入并研究，记作 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{1,\,1}}$，是一个 Borcherds 代数，它取自与偶自对偶洛伦兹格相关的共形顶点代数的物理空间的李代数

$$\mathrm{II}_{1,1} = \big\{(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid (m,n)\cdot(m',n') = -mn' - m'n\big\}$$

在闵可夫斯基坐标中记作。这个格也可以在光锥基中实现，其中元素表示为成对的 $\langle \ell,\ n\rangle \in \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 其内积矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，因此

$$\langle \ell, n\rangle^2 = -2\ell n.$$

$\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{1,\,1}}$ 的 Cartan 子代数为 $\mathfrak{h} \cong \mathbb{R}^{1,\,1}$，而 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{1,\,1}}$ 具有根空间分解，可分解为有限维子空间的直和。根系包含一个实根 $\alpha_{-1} = \langle 1,\ -1\rangle$，它对应一个 $\mathfrak{sl}_2$-三元组。所有其他简单根都是虚根。通过纳入 [BGGN98] 的“缺失”模而构成的 Borcherds 代数，其 Borcherds Cartan 矩阵与 Monster 李代数的 Borcherds Cartan 矩阵具有相同的矩阵项，但根重数不同。

我们在光锥基下定义：

$$\delta := \langle 0, 1\rangle.$$

那么 $\delta\cdot\delta = 0$ 和 $\alpha_{-1}\cdot\delta = -1$，其中 $\alpha_{-1} = \langle 1,\ -1\rangle$ 是实单根。元素 δ 属于根格，但不是根。不过，它起到魏尔向量的作用，并在 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{1,\,1}}$ 的分次中发挥作用。令 $\mathrm{II}_{\mathrm{im}}$ 表示虚单根。

以下引理出现在 [BGGN98] 中，作为根格性质的总结：

引理 4.2。 侏儒李代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{1,\,1}}$ 的一组简单虚根为 $\mathrm{II}_{\mathrm{im}} = \{\langle \ell, n\rangle \mid n \geq \ell \geq 1\}$。

魏尔群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，由对 α_{-1}的反射生成。与上文一样，基本 Weyl 室中的每个虚单根 α都满足：

$$\alpha = m\alpha_{-1} + n\delta = \langle m, n-m\rangle, \quad \text{with } n > m > 0.$$

每个这样的根 α 都定义一个最高权向量 $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{1,\,1}}$，而根 $\alpha = \langle m,\ n-m\rangle \in \Delta$ 对应的每个根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 维数为

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha = \mathrm{II}_1(1+mn),$$

其中 $\mathrm{II}_1(n) = p_1(n) - p_1(n-1)$，且 $p_1(n)$ 是将 n 分拆为正整数的分拆数。$\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{1,1}}$ 的自由子代数已在 [BGGN98]中得到识别：虚单根并非两两正交，也就是说，对于不同的 $\alpha, \alpha' \in \mathrm{II}_{\mathrm{im}}$，有 $\alpha\cdot\alpha' < 0$；因此，根据 [BGGN98]中的定理 5 和定理 2.1，这些子代数

$$\mathfrak{u}_- = \coprod_\alpha m_\alpha U(\mathfrak{g}_J) f_{-\alpha}, \quad \alpha \in \mathrm{II}_{\mathrm{im}}, \tag{11}$$

$$\mathfrak{u}_+ = \coprod_\alpha m_\alpha U(\mathfrak{g}_J) e_\alpha, \quad \alpha \in \mathrm{II}_{\mathrm{im}}$$

是由上述不可约最高（分别为最低）权向量生成的自由李代数，其重数为 m_α。

类似地，由最高权向量 $f_\alpha = \theta(e_\alpha)$ 生成的子代数 $\mathcal{H}_- \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{1,1}}$ 也是一个自由李代数：

$$\mathfrak{u}_- = \mathrm{L}\left(\{f_\alpha \mid r \in \mathrm{II}_{\mathrm{im}}\}\right).$$

我们有

$$\mathfrak{g}_J = \mathfrak{sl}_2 + \mathfrak{h}_{\mathrm{II}_{1,1}} \cong \mathfrak{gl}_2.$$

向量 $\langle 1, -1\rangle$ 和 $\langle 1, -1\rangle + 2\delta$ 张成 $\mathfrak{h}_{\mathrm{II}_{1,1}}$。根据定理 3.4，我们可以构造一个与 $\mathfrak{g}$ 相关联的群。集合 J 是对应于实根 α_{-1} 的指标集。$\mathfrak{g}_J$ 的 Cartan 子代数是 $\mathfrak{h}_J \subset \mathfrak{h}$。集合 $I\backslash J$ 是对应于 $\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{1,1}}$ 的虚单根的指标集。这些向量在光锥坐标下为 $\langle \ell, n\rangle$，满足 $n \geq \ell \geq 1$ 且 $\ell\alpha_{-1} + (n-\ell)\delta \in II_{1,\,1}$。令 α 为一个虚单根，其对应的（负）Chevalley 生成元记为 $f_{-\alpha}$。

李代数$\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{1,\,1}}$ 有如下分解：

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{II}_{1,1}} = \mathfrak{u}^+ \oplus (\mathfrak{g}_J + \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{u}^-$$

其中 $\mathfrak{g}_J = \mathfrak{sl}_2$。$\mathfrak{u}^-$的结构由公式 $\mathfrak{u}^- = \coprod_{\alpha\in\mathrm{II}_{\mathrm{im}}} m_\alpha U(\mathfrak{g}_J) f_{-\alpha}$给出，其中$m_\alpha$ 是虚单根 α的重数。该重数在[BGGN98], 第23页中记作 $\mu_{\ell,\,n}$，并由 Weyl–Kac–Borcherds分母公式（ [BGGN98] 中的公式3.5）展开式中项 $x^n y^{\ell-1}$ 的系数给出。

模 $U(\mathfrak{g}_J)\cdot f_{-\alpha}$ 表示由 Chevalley 生成元 $f_{-\alpha}$生成的 $\mathfrak{g}_J=\mathfrak{sl}_2$的最高权模。由于 $f_{-\alpha}$ 相对于 $\mathfrak{sl}_2$ 是最高权向量（即 $e_{-1}\cdot f_{-\alpha}=0$），该模由形如（$f_{-1}$）$^t\cdot f_{-\alpha}$ 的元素张成，其中 $t\geq 0$。直和 $\coprod_{\alpha\in \mathrm{II}_{\mathrm{im}}} m_\alpha U(\mathfrak{g}_J)f_{-\alpha}$表示在 $m_\alpha>1$时这些模的多个副本。子代数 $\mathfrak{u}^-$ 是自由李代数 $L(V')$，其中 V' 是由该直和定义的向量空间。

与前文一样，张量代数 $W=T(V')$ 是群 $G_J\cong SL_2(\mathbb{K})$ 的一个模。群 G_J通过表示 $\pi\colon \mathfrak{g}_J\to\mathfrak{gl}(W)$ 作用于 $W=T(V')$。
取 S'为 V'的基，其构造方式是为每个 $\mathfrak{sl}_2$-模 $U(\mathfrak{g}_J)f_{-\alpha}$ 的副本各取一组基。具体而言，对每个 $\alpha=(\ell,\ n)\in \mathrm{II}_{\mathrm{im}}$ 及其每个 m_α 副本，我们都纳入形如 $(f_{-1})^t\cdot f_{-\alpha,\ k}$的元素（其中 $t\geq 0$和 $k=1,\ \ldots\ldots,\ m_\alpha$标记副本）。群 $G(S')$ 是 Magnus$\widehat{\ }$群 $G(S')=\exp(L(S'))$。半直积群 G 为:

$$G=G(S')\rtimes G_J.$$

G中的乘法由引理 3.3 给出。

参考文献

[Bah93] Yuri Bahturin，《现代代数的基本结构》，《数学及其应用》第 265 卷，Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特，1993。MR 1265937[BGGN98] O. B¨arwald、R. W. Gebert、M. G¨unaydin 和 H. Nicolai，《缺失模、侏儒李代数与 E_{10}》，《数学物理通讯》195（1998），第 1 期，29–65。MR 1637397[Bor88] Richard Borcherds，《广义Kac-Moody代数》，《代数杂志》115（1988），第 2 期，501–512。MR 943273[Bor92] Richard E. Borcherds，《怪兽月光与怪兽李超代数》，《数学发明》109（1992），第 2 期，405–444。MR 1172696[Car12] Scott Carnahan，《广义月光，II：Borcherds乘积》，《杜克数学杂志》161（2012），第 5 期，893–950。MR 2904095[Car17] ，《Fricke李代数与月光中的零亏格性质》，《物理学杂志 A》50（2017），第 40 期，404002，21 页。MR 3708084[CG03] Lisa Carbone 和 Howard Garland，《有限域上Kac-Moody群中格的存在性》，《当代数学通讯》5（2003），第 5 期，813–867。MR 2017720[CJM22] Lisa Carbone、Elizabeth Jurisich 和 Scott H. Murray，《构造怪兽李代数的李群类比》，《数学物理快报》112（2022），第 3 期，论文编号 43，16 页。MR 4418318[CKMS21] Lisa Carbone、Matt Kownacki、Scott H. Murray 和 Sowmya Srinivasan，《秩二Kac-Moody代数的交换子关系与结构常数》，《代数杂志》566（2021），443–476。MR 4166048[GN95] R. W. Gebert 和 H. Nicolai，《初学者指南》，《弦与对称性》（伊斯坦布尔，1994），《物理学讲义》第 447 卷，Springer，柏林，1995，第 197–210 页。MR 1356246[Jac92] N. Jacobson，《自由群理论中的Magnus方法》，《乌兰季刊》1（1992），第 1 期，1ff.，约 11 页（仅电子版）。MR 1203518[JLW95] E. Jurisich、J. Lepowsky 和 R. L. Wilson，《怪兽李代数的实现》，《精选数学（新系列）》1（1995），第 1 期，129–161。MR 1327230[Jur96] Elizabeth Jurisich，《广义Kac-Moody代数概述》，《当代数学》194（1996），121–160。[Jur98] ，《广义Kac-Moody李代数、自由李代数与怪兽李代数的结构》，《纯粹与应用代数杂志》126（1998），第 1–3 期，233–266。MR 1600542[Jur04] Elizabeth Jurisich，《Borcherds李代数标准模的一个分解》，《纯粹与应用代数杂志》192（2004），第 1 期，149–158。[Kac90] Victor G. Kac，《无限维李代数》，第三版，剑桥大学出版社，剑桥，1990。MR 92k:17038[KP85] V. G. Kac 和 D. H. Peterson，《某些无限维群的定义关系》，1985，《埃利·嘉当的数学遗产》（里昂，1984），第 165–208 页。MR 837201[MKS76] Wilhelm Magnus、Abraham Karrass 和 Donald Solitar，《组合群论》，修订版，Dover Publications, Inc.，纽约，1976，关于以生成元与关系表示群。MR 422434

[MP95] Robert V. Moody 和Arturo Pianzola，具有三角分解的李代数，《加拿大数学会专著与高级文本丛书》，John Wiley & Sons Inc.，纽约，1995年，Wiley-Interscience 出版物。MR96d:17025[Tit87] Jacques Tits，域上 *Kac-Moody* 群的唯一性与表示，《代数杂志》**105** (1987)，第2期，542–573。MR873684

电子邮箱地址：lisa.carbone@rutgers.edu

电子邮箱地址：jurisiche@cofc.edu