arXiv:2601.10895v1 [math.AG] 15 Jan 2026

三次曲面中圆锥曲线上的有理点

刘春晖

摘要。 — 本文给出了三次曲面中圆锥曲线上有界高度有理点的一致上界。为此，我们借助阿拉克洛夫几何，给出了 Salberger 全局行列式方法的一个推广版本。

摘要 （关于曲面圆锥曲线中的有理点）

本文将给出三次曲面中圆锥曲线上有界高度有理点的一致上界。为此，我们借助阿拉克洛夫几何，给出 Salberger 全局行列式方法的一个推广版本。

目录

1. 引言.1 2. 行列式的构造.5 3. 肖形式与凯莱形式的几何与算术. . . . . 22 4. 仿射覆盖.27 5. 一些预备知识.38 6. 圆锥曲线中的有理点与整点. 43 声明.51 参考文献.51

1. 引言

在数论和算术几何中，研究算术簇上有理点的密度是一项核心课题。事实上，我们可以用以下方式描述数域上射影簇中有理点的密度。设 K 是一个数域， X 是 $\mathbb{P}^n_K$的一个闭子概形。对于一个有理点

$\xi = [x_0 \colon \cdots \colon x_n] \in X(K)$，相对于嵌入到 $\mathbb{P}^n_K$中的嵌入，我们将高度定义为 ξ

$$H_K(\xi) = \prod_{v \in M_K} \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i|_v^{[K:\mathbb{Q}]}\}.$$

Let

$$S(X; B) = \{\xi \in X(K) \mid H_K(\xi) \leqslant B\},$$

其中省略了 X 到 $\mathbb{P}^n_K$的闭浸入。由 Northcott 性质，我们有

$$\#S(X; B) < +\infty$$

对于固定的正实数 B。因此，我们可以将$\#S(X; B)$视为$B \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$的函数，这对于研究 X上有理点的密度很有用。

1.1. 行列式方法的历史。—研究算术簇中有界高度的有理点数量有多种方法，我们将聚焦于所谓的行列式方法。该方法在研究某些算术簇族 X上$\#S(X; B)$关于 $B \in \mathbb{R}_{\geqslant 1}$的一致上界时发挥着重要作用。粗略地说，在 $\mathbb{Q}$上，对于某个次数，人们预期在 $S(X; B)$中取值于点处、且模某些素数归约相同的单项式会构成一个矩阵，而根据局部估计，该矩阵的行列式会消失。在这一过程中，著名的西格尔引理得以应用，因此得名行列式方法。

1.1.1. — 在 [3] 中（另见 [44]），Bombieri 和 Pila 为 $\mathbb{Q}$上的平面仿射曲线引入了一种行列式论证，并证明了对所有 $\epsilon > 0$以及所有绝对不可约曲线 X，$\#S(X; B) \ll_{\delta,\ \epsilon} B^{2/\deg(X)+\epsilon}$。

Heath-Brown 在[31]中将 [3]的工作推广到了 $\mathbb{Q}$ 上的高维情形。除了针对不同类型的 X，对 $\#S(X; B)$ 得出丰硕的一致上界结果外，他还提出了著名的维数增长猜想。该猜想指出，对任意 $\mathbb{Q}$上的几何整簇 X，若 $\dim(X) = d \geqslant 2$且 $\deg(X) = \delta \geqslant 2$，则有

$$\#S(X; B) \ll_{d,\delta,\epsilon} B^{d+\epsilon}$$

对所有 $\epsilon > 0$均成立，而 Serre [53] 提出了一个非一致版本。这个猜想一直是行列式方法发展的重要推动力。Broberg [6] 将这项工作推广到了任意数域。

为了解决维数增长猜想，人们投入了大量精力来改进行列式方法，例如 [7, 8, 9, 20, 10, 47] Browning、Ellenberg、Heath-Brown、Venkatesh、Salberger 等人的工作。特别是，Salberger[50] 提出了所谓的全局行列式方法，并证明了次数大于 4 时的维数增长猜想。

[50]中的一些结果由 [58, 13], 改进，并由 [43]推广到全局域上。

1.1.2。——为了研究曲面中的圆锥曲线对有界高度有理点的贡献，Salberger [48] 特别关注了特定曲面上的圆锥曲线希尔伯特概形，并在曲面中直线的补集上得出了一些一致上界结果。在 [49, 50], 中，先前的方法得到了改进。

主要思路是将希尔伯特概形嵌入一个特定的格拉斯曼流形，并考察其普吕克坐标。通过这一操作，我们可以借助圆锥曲线对应点的普吕克坐标，对圆锥曲线的高度作定量描述。利用嵌入适当射影空间的希尔伯特概形的几何性质和算术性质，可以将这样的直觉定量化：一个曲面不可能包含太多小高度的圆锥曲线。这一估计有助于控制位于圆锥曲线上的有界高度点的数量。

1.1.3. — 行列式方法可以用阿拉克洛夫几何来表述。在[15, 16], H. Chen 对 Salberger 的工作 [47]进行了重新表述。与 [6, 43]相比，这种表述更容易得到显式估计，也便于在任意数域上开展研究。在阿拉克洛夫几何的表述中，Bost 斜率方法中的求值映射取代了西格尔引理 [4]。

沿着 [15, 16], 作者的思路， [50, 13] 在 [39], 中运用阿拉克洛夫几何重新表述了全局行列式方法；与此同时， [43] 则在全局域上采用了传统表述。

1.2. 三次曲面中有理点与整点的密度。 — 本文将 Salberger 的全局行列式方法推广 [50], ，关于对更一般对象的研究，另见[13, 43] 。更确切地说，我们不再处理通常的超曲面，而是在定理 2.10 中为基空间的线性子簇中的超曲面簇构建全局行列式方法。为此，必须采用 [40]针对这类簇建立的、具有最优首项的算术希尔伯特–塞缪尔函数一致下界。

这使我们能够以 $\mathbb{P}^3$ 不同的方式处理三次曲面中的圆锥曲线。由于 $\mathbb{P}^3$ 中的圆锥曲线位于一个平面内，因此广义全局行列式方法适用于这种情形。

1.2.1. — 我们在定理 6.8 中证明了关于三次曲面上圆锥曲线中的有理点密度的以下结果。

定理 ***1.1.*** — 设 X 是 $\mathbb{P}^3_K$ 中的一个非直纹三次曲面，则存在一个仅依赖于 K 的常数$C_0(K)$ ，使得 X 中的圆锥曲线至多贡献

$$C_0(K)B^{\frac{3\sqrt{3}}{8}+1}\max\{\log B, 2\}$$

高度小于 $B \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 的有理点。

1.2.2. — 受 [10, 50, 13, 43], 的启发，研究非柱面且其齐次最高次部分绝对不可约的仿射超曲面十分重要。事实上，如果我们能够证明某个特定次数下维数增长猜想的仿射版本，就能证明相同次数下的一般版本。

定理 4.5 给出了线性子簇中超曲面的全局行列式方法的仿射版本。作为应用，下面的结果在定理 6.14 中得到了证明。

定理 ***1.2***。——设 X 是 $\mathbb{A}^3_K$ 中的一个曲面，它不是柱面，且由一个次数为 3 、其最高次齐次部分绝对不可约的多项式定义。那么存在一个常数 $C_0'(K)$，仅依赖于 K，使得 X 中的圆锥曲线至多贡献

$$C_0'(K)B^{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}}\max\{\log B, 2\}$$

高度小于 $B \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 的整点。

1.3. 肖形式和凯莱形式的作用。——根据 [**25**], 中发展起来的算术交理论，簇的高度，特别是闭点的高度，可以视为一种算术交数。在 [**5**], 中，对同一算术簇的若干种高度进行了统一比较，特别是定义其肖形式（本文中在普吕克坐标情形下也称为凯莱形式）的多项式的朴素高度，并在命题 3.7] 中给出了一个有用的版本。这使我们能够在上述定理 4.5 的全局行列式方法仿射版本中，运用所谓凯莱形式的特定齐次最高次部分的高度。

由 [**59**], 中算术交的 Deligne 配对的函子性可知， $\mathbb{P}^3$ 中二次曲线的高度可以与其对应的希尔伯特概形中的点的高度联系起来。由此，我们可以给出有界高度圆锥曲线数量的上界。

同时，对于 $\mathbb{A}^3$ 中具有绝对不可约齐次三次部分的非直纹三次曲面，我们可以利用上述 Deligne 配对论证，对其凯莱形式的齐次三次部分给出上界。这一事实有助于控制圆锥曲线对该三次曲面上整点的贡献。

1.4. 文章结构。— 在 §2 中，我们构造了一种全局行列式方法，用于处理基空间的线性簇中的超曲面簇。在 §3 中，我们研究肖形式和凯莱形式的一些几何与算术性质。在 §4 中，我们借助凯莱形式，对覆盖有界高度整点的辅助超曲面加以控制。在 §5 中，我们介绍关于三次曲面几何以及阿拉克洛夫几何的 Deligne 配对的一些有用预备知识。在 §6 中，我们对三次曲面的圆锥曲线上的有理点与整点加以控制。

致谢。— 我由衷感谢 Per Salberger 教授将他的杰出成果 [**50**] 介绍给我，并向我阐释其中的关键内容；尤其感谢他指出 [**48, 50**]中希尔伯特概形上的高度函数所发挥的重要作用。感谢 Huayi Chen 教授和 Xiaowen Hu 教授就关键技术问题与我进行了富有启发性的讨论，并为我提供文献方面的指导；感谢 Junyi Xie 教授提出了若干有益的想法，帮助我克服一些技术障碍；还要感谢 Xinyi Yuan 教授提醒我注意他与 Shou-Wu Zhang 教授的杰出合作成果 [**59**] 中的关键要点。本工作的部分内容是在访问以下机构期间完成的：

北京大学北京国际数学研究中心和西湖大学理论科学研究院。感谢这两家机构给予我的热情接待与支持。

2. 行列式的构造

本节将借助阿拉克洛夫几何的表述，构造一种特定形式的行列式方法。这是对 [**39**], 中构造的直接推广，我们将在 [**40**]中应用算术希尔伯特–塞缪尔函数的一致下界。

2.1. 有理点的高度。— 我们先回顾代数数论的一些基础知识，并定义高度函数。关于这一主题的系统介绍，请参阅[**32**, B 部分] 。

2.1.1. — 设 K 为一个数域， $\mathcal{O}_K$ 为 K的整数环。我们用$M_{K,\infty}$ 表示 K的无限素位集合，用$M_{K,f}$ 表示 K的有限素位集合，并用$M_K = M_{K,f} \sqcup M_{K,\infty}$ 表示 K的赋值集合。

对于每个 $v \in M_K$ 和 $x \in K$，我们定义绝对值

$$|x|_v = \left|N_{K_v/\mathbb{Q}_v}(x)\right|_v^{1/[K_v:\mathbb{Q}_v]},$$

它扩展了 $\mathbb{Q}_p$ 或 $\mathbb{R}$上的通常绝对值。这里，若$v \in M_{K,f}$ 位于扩张 $K/\mathbb{Q}$下素数 p 之上，则 $\mathbb{Q}_v$ 表示通常的p进域 $\mathbb{Q}_p$ 。

在这种情况下，乘积公式（参见 [**42**,第 III 章，（1.3）命题])

$$\prod_{v\in M_K} |x|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]} = 1$$

对所有 $x \in K^\times$均成立。

2.1.2. — 设 $\xi = [\xi_1 \colon \cdots \colon \xi_n] \in \mathbb{P}^n_K(K)$。我们定义 ξ 在 $\mathbb{P}^n_K$ 中的高度 为

$$H_K(\xi) = \prod_{v\in M_K} \max_{i\in\{0,\dots,n\}} \{|\xi_i|_v\}^{[K_v:\mathbb{Q}_v]}. \tag{1}$$

我们还定义 ξ 的对数高度 为

$$h(\xi) = \frac{\log H_K(\xi)}{[K:\mathbb{Q}]}, \tag{2}$$

它在 K 的扩张下保持不变（参见 [**32**, 引理 B.2.1]）。

2.1.3. — 设 X 是 $\mathbb{P}^n_K$ 的一个子概形，且 $\phi \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ 是嵌入态射。对于一个 $\xi \in X(K)$, 我们定义 $H_K(\xi) = H_K(\phi(\xi))$；若不会引起混淆，我们将省略嵌入 ϕ 。记

$$S(X;B) = \{\xi \in X(K) \mid H_K(\xi) \leqslant B\}.$$

根据 Northcott 性质（参见 [**32**, 定理 B.2.3]），对于固定的 $B \in \mathbb{R}$，#$S(X;B)$ 的基数是有限的。

2.2. 阿拉克洛夫几何的基础。— 本部分将介绍一些有用的概念，以便在阿拉克洛夫几何的框架内表述这一主题。

2.2.1. — Spec $\mathcal{O}_K$ 上的一个赋范向量丛是由配对 $E=\big(E,(\|.\|_v)_{v\in M_{K,\infty}}\big)$组成，其中：

– E 是一个有限秩射影 $\mathcal{O}_K$-模；– $(\|.\|_v)_{v\in M_{K,\infty}}$ 是 $E_v = E\otimes_{\mathcal{O}_K}$上的范数族，$_v\ \mathbb{C}$ 对每个 $v\in M_{K,\infty}$，该范数族在 Gal$(\mathbb{C}/K_v)$的作用下保持不变。

对于复位，我们将它及其共轭视为两个不同的赋值。

赋范向量丛 E的秩，指的是 E的秩，记作 $\mathrm{rk}_{\mathcal{O}_K}(E)$；若无歧义，也简记为 $\mathrm{rk}(E)$。

若对每个 $v\in M_{K,\infty}$, $\|.\|_v$ 都是厄米的，即由内积诱导而来，则称 E是 Spec $\mathcal{O}_K$ 上的厄米向量丛。若 $\mathrm{rk}_{\mathcal{O}_K}(E)=1$，则称 E 是厄米线丛。

2.2.2. — 设 $E=(E,(\|.\|_{E,v})_{v\in M_{K,\infty}})$ 和 $F=(F,(\|.\|_{F,v})_{v\in M_{K,\infty}})$ 是 Spec $\mathcal{O}_K$ 上的两个赋范向量丛。若 F 是 E 的一个子-$\mathcal{O}_K$-模，且 $\|.\|_{F,v}$ 是 $\|.\|_{E,v}$ 在 F 上的限制（对每个$v\in M_{K,\infty}$），则称 F 是 E 的赋范子丛。

若 G 是 E的一个商 $\mathcal{O}_K$-模，且 $\|.\|_{G,v}$ 是 $\|$的商范数，且对所有 $v\in M_{K,\infty}$ 均成立$\|_{E,v}$，则称 $G=(G,(\|.\|_{G,v})_{v\in M_{K,\infty}})$ 是 Spec $\mathcal{O}_K$ 上 E 的赋范商丛。

为简便起见，记作 $E_K=E\otimes_{\mathcal{O}_K}K$。

2.2.3. — 设 E是 Spec $\mathcal{O}_K$ 上的厄米向量丛，且 $s_1,\dots,s_r$ 是 E_K 的一个 K-基。E 的阿拉克洛夫次数 定义为

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}(\overline{E}) &= -\sum_{v\in M_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\|s_1\wedge\cdots\wedge s_r\|_v\\ &= \log\left(\#E/(\mathcal{O}_K s_1+\cdots+\mathcal{O}_K s_r)\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{v\in M_{K,\infty}}[K_v:\mathbb{Q}_v]\log\det(\langle s_i,s_j\rangle_{v,1\leqslant i,j\leqslant r}),\end{aligned}$$

其中 $\|s_1\wedge\cdots\wedge s_r\|_v$遵循定义 [**14**, §2.1.3]，适用于$v\in M_{K,\infty}$，且$\langle s_i, s_j\rangle_{v,\ 1\leqslant i,j\leqslant r}$是 $\{s_1,\dots,s_r\}$相对于$v\in M_{K,\infty}$的格拉姆矩阵。

对于$v\in M_{K,f}$，我们将 $\|.\|_v$ 定义为由模型给出的范数。更准确地说，设 E是 Spec $\mathcal{O}_K$上的一个赋范向量丛，且 $x\in E\otimes_{\mathcal{O}_K}K_v$。我们定义

$$\|x\|_v=\inf\{|a|_v\mid a\in K_v^\times,\ a^{-1}x\in E\otimes_{\mathcal{O}_K}\widehat{\mathcal{O}}_{K,v}\}.$$

如果 $x\in E_{\mathcal{O}_K}K$，则有

$$\|x\|_v=\inf\{|a|_v\mid a\in K^\times,\ a^{-1}x\in E\}.$$

上述等式的证明请参见 [**24**, 2.4.1]。根据乘积公式，阿拉克洛夫次数与基 $\{s_1,\dots,s_r\}$的选择无关。

我们定义

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E})=\frac{\widehat{\deg}(\overline{E})}{[K:\mathbb{Q}]}$$

为 E的归一化阿拉克洛夫度，它与基域 K的选择无关。

2.2.4。——设 $\overline{E}$ 是 Spec $\mathcal{O}_K$ 上的一个非零厄米向量丛。 E 的 斜率 定义为

$$\widehat{\mu}(\overline{E}) = \frac{\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E})}{\mathrm{rk}(E)}.$$

此外，我们用 $\widehat{\mu}_{\max}(E)$ 表示所有非零厄米子丛的斜率的最大值，用 $\widehat{\mu}_{\min}(E)$ 表示所有非零厄米商丛的斜率的最小值。

2.3. 阿拉克洛夫几何表述下的高度函数。——在本节中，我们将用阿拉克洛夫几何表述射影空间中一个闭子概形的高度函数。

2.3.1。——设 $\overline{\mathcal{E}}$ 是 Spec $\mathcal{O}_K$ 上秩为 $n+1$ 的厄米向量丛，且 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 是表示如下函子的射影空间：该函子从交换$\mathcal{O}_K$-代数范畴映射到集合范畴，将每个 $\mathcal{O}_K$-代数 A 映射为 $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_K} A$ 的秩为 1 的射影商 A-模的集合。

对于一个 $D \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$（若无歧义，也记作 $\mathcal{O}(1)$）为 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上的万有丛，而 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(D)$ 或 $\mathcal{O}(D)$ 为张量积 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)^{\otimes D}$。对于每个$v \in M_{K,\,\infty}$， $\mathcal{E}$ 上的厄米范数在 $\mathcal{O}(1)$ 上诱导相应的 Fubini–Study 度量，从而定义 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上的厄米线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$（或 $\mathcal{O}(1)$）。

2.3.2. — 令 $P \in \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)(K)$，并令 $\mathcal{P} \in \mathbb{P}(\mathcal{E})(\mathcal{O}_K)$ 为 P 在 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 中的扎里斯基闭包。对于 $\mathcal{L}$ 上、 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上的厄米线丛，我们将 P 关于 $\mathcal{L}$ 的 阿拉克洛夫高度 定义为

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(P) = \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}\left(\mathcal{P}^*\overline{\mathcal{L}}\right). \tag{3}$$

2.3.3. — 我们将在下文考虑一个特殊情形。令

$$\overline{\mathcal{E}} = \left(\mathcal{O}_K^{\oplus(n+1)}, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_{K,\infty}}\right),$$

其中

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_v : & K^{\oplus(n+1)} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (z_0,\dots,z_n) & \mapsto & \sqrt{|v(z_0)|^2+\cdots+|v(z_n)|^2} \end{array}$$

对每个 $v \in M_{K,\,\infty}$。在这种情况下，若 $P = [x_0 \colon \cdots \colon x_n] \in \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$，则有（参见 [**41**, 命题 9.10]）

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(P) &= \sum_{v\in M_{K,f}} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log\left(\max_{0\leqslant i\leqslant n}\{|x_i|\}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{v\in M_{K,\infty}} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log\left(|v(x_0)|^2+\cdots+|v(x_n)|^2\right). \end{aligned} \tag{4}$$

设 $h(.)$ 为在 $\mathbb{P}^n_K$ 上由 (2) 定义的高度，而 $\mathcal{E}$ 在 $\overline{\mathrm{Spec}}\,\mathcal{O}_K$ 上与上文相同。那么对于任意 $P \in \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)(K)$，有

$$\left|h(P) - h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(P)\right| \leqslant \frac{1}{2}\log(n+1)$$

通过初等计算得到。这个估计表明，在研究有界高度的有理点计数时，采用阿拉克洛夫几何是合理的。

2.3.4. — 设 $\mathcal{L}$ 是定义在 $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ 上、底空间为 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 的厄米向量丛。设 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中一个纯维数为 d 的闭子概形，$\mathscr{X}$ 是它在 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 中的扎里斯基闭包。X 的**阿拉克洛夫高度** 定义为算术交数

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(X) = h_{\overline{\mathcal{L}}}(\mathscr{X}) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}\cdot[\mathscr{X}]\right),$$

其中，$\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})$ 是 $\mathcal{L}$ 的第一算术陈类。其精确定义请参阅 [**55**, 第 III.4 章，命题 1] 。

当 X 是一个简单点时，$h_{\overline{\mathcal{L}}}(X)$ 就是式 (3) 中定义的高度，其中 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上的任意厄米线丛替代了 $\mathcal{O}(1)$。

2.3.5. — 我们考虑一个更特殊的情形。设 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中次数为 δ 的超曲面。根据 [**30**, 第 1 章，命题 7.6 (d)]，X 由一个次数为 δ 的齐次多项式定义。我们假设上述 X 由多项式

$$f(T_0,\dots,T_n) = \sum_{i_0+\cdots+i_n=\delta} a_{i_0\dots i_n} T_0^{i_0}\cdots T_n^{i_n},$$

那么我们将 X 的**朴素高度** 定义为

$$h(X) = h(f) = \sum_{v\in M_K}\frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\log\max_{i_0+\cdots+i_n=\delta}\{|a_{i_0\dots i_n}|_v\}. \tag{5}$$

此外，若$\mathcal{E}$ 如上所定义，则有

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\left(\log((n+1)(\delta+1)) + \delta\mathcal{H}_n\right) &\leqslant h(X) - h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X) \\ &\leqslant (n+1)\delta\log 2 + 4\delta\log(n+1) - \frac{1}{2}\delta\mathcal{H}_n, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\mathcal{H}_n = 1+\cdots+\frac{1}{n}$。这是下面命题 3.4 的一个特例，它可直接由 [**36**, 命题 3.7] 推出。

2.4. 行列式的构造。 — 本节介绍阿拉克洛夫几何的基础，以构建行列式方法；该方法最初源自 [**15**,**16**]。

2.4.1. — 设 $\mathcal{E}$ 为 $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ 上秩为 $n+1$的同一个厄米向量丛。对于每个 $D\in\mathbb{N}$，记作 $E_D = H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}),\mathcal{O}(D))$，以及 $r(n,D) = \mathrm{rk}_{\mathcal{O}_K}(E_D)$。对于每个 $v\in M_{K,\infty}$，我们将 $\|.\|_{v,\sup}$ 上的范数定义为

$$\forall\, s\in E_{D,v},\ \|s\|_{v,\sup} = \sup_{x\in\mathbb{P}(\mathcal{E}_{K_v})(\mathbb{C})}\|s(x)\|_{v,\mathrm{FS}}, \tag{7}$$

其中 $\|.\|_{v,\ \mathrm{FS}}$ 是 $\mathcal{O}(D)$ 上的 Fubini–Study 度量。

现在我们回顾以下事实（参见 [57, 定理 3.3.6]）：对于每个对称凸体 C，都存在一个唯一的椭球，其体积最大且包含于 C 中。这个椭球称为 C的约翰椭球 。

对于 $\mathcal{O}_K$-模 E_D，以及赋值 $v \in M_{K,\infty}$，我们取相对于 $\|.\|_{v,\sup}$ 的单位闭球的约翰椭球。这个约翰椭球诱导出一个厄米范数，记作 $\|.\|_{v,J}$。事实上，我们有

$$\|s\|_{v,\sup} \leqslant \|s\|_{v,J} \leqslant \sqrt{r(n,D)}\|s\|_{v,\sup}$$

对每个 $s \in E_D$，均有。

2.4.2. — 设 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 的一个闭整子概形，且 $\mathscr{X}$ 是其在 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 中的扎里斯基闭包。我们定义

$$\eta_{D,K} : E_{D,K} \longrightarrow H^0\left(X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)}(1)|_X^{\otimes D}\right) \tag{8}$$

由 X 闭浸入 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 所诱导的 求值映射 。

我们将 $H^0\left(\mathscr{X}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)|_{\mathscr{X}}^{\otimes D}\right)$ 中满足 $F_{D,K}$ =Im($\eta_{D,K}$) 的最大饱和子-$\mathcal{O}_K$-模记为 F_D。

注 ***2.1***。 — 我们沿用上述所有记号。当 D 足够大时，我们有$F_D = H^0\left(\mathscr{X}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)|_{\mathscr{X}}^{\otimes D}\right)$。

记 $F_{D,J}$为 $\overline{\mathrm{Spec}}\ \mathcal{O}_K$ 上的厄米向量丛，其赋予了 $\|$ 的商范数。$\|_{v,J}$ 为 §2.4.1 中对每个 $v \in M_{K,\infty}$ 定义的 E_D 。

2.4.3。— 我们考虑函数

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ D & \mapsto & \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{F}_{D,J}) \text{ or } \widehat{\mu}(\overline{F}_{D,J}), \end{array}$$

并将其定义为关于线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)|_{\mathscr{X}}$ 的 X 的算术希尔伯特–塞缪尔函数。

在 [40, §5.2.5], 中，我们研究了满足某些条件的 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 的闭子概形的 $\widehat{\mu}(F_{D,J})$ 的一致下界。更准确地说，设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ 上秩为 $n+1$ 的厄米向量丛，且 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 的纯维数为 δ 、次数为 δ 的闭子概形，并且是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 的某个线性子簇中的超曲面。在此情形下，我们有

$$\frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_{D,J})}{D} \geqslant \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)}{(d+1)\delta} + B_0(d+1) - \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{(d+1)\delta}\right)\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathcal{E}})$$

当 $D \geqslant \delta$ 时，其中 $B_0(d+1)$ 是仅依赖于 d 的显式常数，详见[40, §5.2.5] 对其精确定义。由于其具体表示过于复杂，此处略去。

我们选取 §2.3.3 中定义的 $\mathcal{E}$，于是有

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathcal{E}}) = -\frac{1}{2}\log(n+1).$$

那么存在一个仅依赖于 d 的显式常数 $B_1(d)$，使得

$$\frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_{D,J})}{D} \geqslant \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)}{(d+1)\delta} + B_1(d) - \frac{3}{4}\log(n+1) \tag{9}$$

当 $D \geqslant \delta$ 时，本部分中的所有上述条件对 X 均成立。事实上，我们有

$$B_1(d) = B_0(d+1) - \frac{1}{2}.$$

2.5. 阿拉克洛夫表述下的全局行列式方法：一种修改，仿照 [39]。 — 在 Salberger[50], 提出的全局行列式方法及其推广版本 [13, 43], 和阿拉克洛夫表述 [39], 中，只能处理射影空间中的几何整超曲面。在后续应用中，我们将考虑这样一种射影簇：它是基射影空间的一个线性子簇中的超曲面。换言之，设 X 是 $\mathbb{P}^m$中的一个超曲面，且 $\mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ 是一个嵌入，使得 $\mathbb{P}^m$ 的像是 $\mathbb{P}^n$中维数为 m 的线性子簇。我们为 $\mathbb{P}^n$中的这类 X 构建全局行列式方法。

2.5.1. — 设 k 是一个域， X 是 $\mathbb{P}^n_k$ 中的一个闭子簇，且它是 $\mathbb{P}^n_k$的一个线性子簇中的超曲面。设 $\xi \in X(k)$，并考虑局部环 $(\mathcal{O}_{X,\,\xi},\ \mathfrak{m}_{X,\,\xi},\ \kappa(\xi))$ ，其中$\mathfrak{m}_{X,\,\xi}$ 是$\mathcal{O}_{X,\,\xi}$ 的极大理想，而 $\kappa(\xi)$是$\mathcal{O}_{X,\,\xi}$的剩余域。

我们考虑函数

$$H_\xi(s) = \dim_{\kappa(\xi)} \left(\mathfrak{m}^s_{X,\xi} / \mathfrak{m}^{s+1}_{X,\xi} \right)$$

关于变量 $s \in \mathbb{N}$ 的函数，称为 X 中 ξ 的 局部希尔伯特–塞缪尔函数 。事实上，我们有

$$H_\xi(s) = \frac{\mu_\xi(X)}{(d-1)!} s^{d-1} + O(s^{d-2}),$$

其中 $\mu_\xi(X) \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$。我们称整数 $\mu_\xi(X)$ 为 X 中 ξ 的 重数 。

若 X 是 $\mathbb{P}^n_k$的一个线性子簇中的超曲面，那么对于每个 $\xi \in X$，其局部希尔伯特–塞缪尔函数与将其视为 $\mathbb{P}^{d+1}_k$ 中的超曲面时所考虑的函数相同。因此，在这种情况下，我们有

$$H_\xi(s) = \binom{d+s}{s} - \binom{d+s-\mu_\xi(X)}{s-\mu_\xi(X)}$$

由 [33, 例 2.70 (2)]。

我们将级数 $\{q_\xi(m)\}_{m>0}$ 定义为一个递增的非负整数序列，使得每个整数 $s \in \mathbb{N}$ 在该序列中恰好出现 $H_\xi(s)$ 次；而 $\{Q_\xi(m)\}_{m\geqslant 0}$ 则定义为 $\{q_\xi(m)\}_{m>0}$ 的部分和。

根据 [39, 命题 A.1], ，我们得到显式下界

$$Q_\xi(m) > \left(\frac{d!}{\mu_\xi(X)} \right)^{\frac{1}{d}} \left(\frac{d}{d+1} \right) m^{\frac{d+1}{d}} - \frac{d^3+5d^2+8d}{2(d+1)(d+2)} m \tag{10}$$

对于上述所述的情形。

2.5.2. — 我们得到 [**39**, 定理 3.1], 的如下直接推广，其中我们考虑射影空间的线性空间中的超曲面。

定理 2.2。——设 K 是一个数域， $\mathcal{O}_K$ 是其整数环。设 $\mathcal{E}$ 是 Spec $\mathcal{O}_K$ 上的一个厄米向量丛， X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的一个整闭子概形，且它是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 的一个线性子簇中的超曲面；设 $\mathscr{X}$ 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 中 X 的扎里斯基闭包。设 $\mathcal{O}_K$ 的极大理想构成的有限集为 $\{\mathfrak{p}_j\}_{j\in J}$ ， X 中有理点构成的族为 $\{P_i\}_{i\in I}$ 。对于一个固定的素理想 $\mathfrak{p}$, 设 $\mu_\xi(\mathscr{X}_\mathfrak{p})$ 为点 ξ 在 $\mathscr{X}_\mathfrak{p}$ 中的重数，并记 $n(\mathscr{X}_\mathfrak{p})=\sum_{\xi\in\mathscr{X}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})}\mu_\xi(\mathscr{X}_\mathfrak{p})$。我们

假设 $\dim(X)$。若不等式

$$\begin{aligned}\sup_{i\in I} h(P_i) \quad < \quad & \frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_D)}{D}-\frac{\log \mathrm{rk}(F_D)}{2D}\\ & +\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{j\in J}\left(\frac{(d!)^{\frac{1}{d}}d\,\mathrm{rk}(F_D)^{\frac{1}{d}}}{(d+1)Dn(\mathscr{X}_{\mathfrak{p}_j})}-\frac{d^3+5d^2+8d}{2D(d+1)(d+2)}\right)\log N(\mathfrak{p})\end{aligned}$$

成立，则存在一个截面 $s\in E_{D,K}$，它包含集合 $\{P_i\}_{i\in I}$ ，但不包含 X 的一般点。换言之，$\{P_i\}_{i\in I}$ 可被 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中一个次数为 D 的超曲面覆盖，且该超曲面不包含 X 的一般点。

注 ***2.3.*** — 与 [**39**, 定理 3.1], 的证明相比，我们几乎同样应用了定理 2.2 证明中使用的不变量。事实上，唯一的区别是 §2.5.1 中给出的 $Q_\xi(r)$ 的下界，尽管它与 [**39**, 命题 A.1]中的下界实质上相同。因此，我们不再给出定理 2.2 证明的细节， [**39**, §3] 已经足够详细。

2.6. 一些定量估计。 — 为了在这种情况下应用定理 2.2 控制辅助超曲面，我们需要对一些算术量和几何量进行估计。相同的应用已见于 [**39**, §4]原文出自[**50, 13**], , 另请参见 [**43**]。

2.6.1. — 设 k 为一个域， X 为 $\mathbb{P}^n_k$ 中的一个闭子簇，它是 $\mathbb{P}^n_k$的一个线性子簇中的超曲面。假设 $\dim(X)=d$ 且 $\deg(X)=\delta$，则有如下嵌入

$$X\hookrightarrow\mathbb{P}^{d+1}_k\hookrightarrow\mathbb{P}^n_k,$$

其中， $\mathbb{P}^{d+1}_k$ 在 $\mathbb{P}^n_k$ 中的像是一个线性子簇。在这种情况下，我们有$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)|_X=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d+1}_k}(1)|_X$。于是，对于每个 $D\in\mathbb{N}$，我们有 $H^0(X,\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)|_X^{\otimes D})=H^0(X,\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d+1}_k}(1)|_X^{\otimes D})$。因此我们有

$$\mathrm{rk}(F_D)=\binom{d+1+D}{d+1}-\binom{d+1-\delta+D}{d+1},$$

这直接来自通常射影超曲面的结果。

下面给出 $\mathrm{rk}(F_D)$ 的显式估计，这些估计直接由与 [**39**, 引理 4.6]相同的计算得出。这里省略详细计算。

引理 ***2.4.*** — 设 k 为一个域， X 为 $\mathbb{P}_k^n$ 的一个闭子概形，其维数为d ，次数为 δ，且是 $\mathbb{P}_k^n$的一个线性子簇中的超曲面。设 $\mathrm{rk}(F_D)$ 为 X 的几何希尔伯特–塞缪尔函数，变量为 $D \in \mathbb{N}$。当 $D \geqslant \delta$时，有

$$\mathrm{rk}(F_D)^{\frac{1}{d}} \geqslant \sqrt[d]{\frac{\delta}{d!}} D - (\delta - 2) \sqrt[d]{\frac{\delta}{d!}},$$

and

$$\mathrm{rk}(F_D)^{\frac{1}{d}} \leqslant \sqrt[d]{\frac{\delta}{d!}} D + \frac{d+1}{2} \sqrt[d]{\frac{\delta}{d!}}.$$

2.6.2. — 设 $\mathbb{F}_q$ 是含有 q 个元素的有限域， X 是 $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$ 中维数为 d 、次数为 δ的闭子概形，它是 $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$的一个线性子簇中的超曲面。为了估计 $n(\mathscr{X}_{\mathbb{F}_q}) = \sum \mu_\xi(X)$，$\mu_\xi(X)$ 的重数不依赖于$\xi \in X(\mathbb{F}_q)$

闭嵌入。因此，根据 §4.2.1] 中从 [**12, 38**] 估计 $n(\mathscr{X}_{\mathbb{F}_q})$ 的方法仍然适用。事实上，当 $\mathfrak{q} \leqslant \delta^2$ 或 $\delta \geqslant 27\delta^4$ 时，我们有

$$\frac{1}{n(\mathscr{X}_{\mathbb{F}_q})^{\frac{1}{d}}} \geqslant \frac{1}{q} - \frac{(d+1)^2\delta^2}{\max\{q, \delta - 1\}^{\frac{3}{2}}} \tag{11}$$

由相同的计算可得。

2.6.3. — 设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathcal{O}_K$的一个真理想， $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}\ \mathcal{O}_K$，且 $N(\mathfrak{a}) = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})$。那么我们有

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}} \frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})} \leqslant \log\log(N(\mathfrak{a})) + 2$$

在 [**39**, 引理 **4.3**], 中，它是 [**50**, 引理 **1.10**], 的推广；另见 [**43**,引理 2.6]。

2.6.4. — 设 $x \in \mathbb{R}^+$, $\mathfrak{p} \in$ 极大谱 $\mathcal{O}_K$，且 $N(\mathfrak{p}) = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$。对于.....的估计

$$\theta_K(x) = \sum_{N(\mathfrak{p}) \leqslant x} \log N(\mathfrak{p}),\ \psi_K(x) = \sum_{N(\mathfrak{p}) \leqslant x} \frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})},\ \phi_K(x) = \sum_{N(\mathfrak{p}) \leqslant x} \frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^{\frac{3}{2}}},$$

我们有以下性质，这些性质是在 [**39**, §4.3.2] 中通过应用 [**45**] 得到的。

首先，我们有

$$|\theta_K(x) - x| \leqslant \epsilon_1(K, x), \tag{12}$$

其中，对所有 $x \in \mathbb{R}^+$，常数 $\epsilon_1(K,\ x) = \overline{O}_K(xe^{-c\sqrt{\log x}})$；常数 c 仅依赖于 K 。

接下来，我们有

$$|\psi_K(x) - \log x| \leqslant \epsilon_2(K), \tag{13}$$

其中 $\epsilon_2(K)$ 是一个仅依赖于 K 的常数。

我们还有

$$\left|\phi_K(x) - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \epsilon_3(K, x), \tag{14}$$

其中

$$\epsilon_3(K,x)=\frac{\epsilon_1(K,x)}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{2}\int_2^x\frac{\epsilon_1(K,t)}{t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t$$

对所有 $x\in\mathbb{R}^+$。

注 ***2.5.*** — 在 [**39**, §7], 中，我们在假设广义黎曼猜想成立的前提下，利用 [**26**] 得到了 $\epsilon_1(K,x)$、 $\epsilon_2(K)$ 和 $\epsilon_3(K,x)$ 的显式估计。这些计算在相同假设下仍然有效。

2.6.5. — 本部分中，我们考虑一类特殊的非几何整约化。设 $\mathcal{E}$ 为 §2.3.3 中定义在 $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ 上的厄米向量丛， X 为 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$的几何整闭子概形，而 $\mathscr{X}$ 为其在$\mathbb{P}(\mathcal{E})$中的扎里斯基闭包。

我们考虑基变换

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{X}_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}} & \longrightarrow & \operatorname{Spec}\mathbb{F}_\mathfrak{p}\\ \downarrow & \square & \downarrow\\ \mathscr{X} & \longrightarrow & \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K\end{array}$$

对于任意的 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spm}\mathcal{O}_K$。令

$$\mathcal{Q}(\mathscr{X})=\left\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spm}\mathcal{O}_K\mid\mathscr{X}_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}\to\operatorname{Spec}\mathbb{F}_\mathfrak{p}\text{ is not geometrically integral}\right\},$$

根据 [**27**, 定理 9.77], 这是一个有限集。设 $\mathcal{O}(1)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ 上的厄米向量丛 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 对每个 $\overline{v\in M_{K,\infty}}$均配备相应的 Fubini–Study 度量。在此情况下，根据 [**37**, 定理 4.5] 原文出自 [**46**], , 我们有

$$\begin{aligned}(15)\qquad&\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{Q}(\mathscr{X})}\log N(\mathfrak{p})\\ \leqslant\;&(\delta^2-1)h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)+(\delta^2-1)\Big(3\log\delta+\log\binom{N(n,d)+\delta}{\delta}\\ &+\left((N(n,d)+1)\log 2+4\log(N(n,d)+1)+\log 3-\frac{1}{2}\mathcal{H}_{N(n,d)}\right)\delta\Big),\end{aligned}$$

其中，$h_{\mathcal{O}(1)}(X)$ 是 X 的高度，该高度由 §2.3.4 中的算术交理论定义； $N(\mathfrak{p})=\#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$，且常数 $N(n,\ d)=\binom{n+1}{d+1}-1$， $\mathcal{H}_m=1+\cdots+\frac{1}{m}$。令

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}'(\mathscr{X})\;=\;&\Big\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spm}\mathcal{O}_K\mid N(\mathfrak{p})>27\delta^4\text{ and }\mathscr{X}_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}\to\operatorname{Spec}\mathbb{F}_\mathfrak{p}\\ &\text{is not geometrically integral}\Big\},\end{aligned}$$

and

$$(16)\qquad b'(\mathscr{X})=\prod_{\mathfrak{p}\in\mathcal{Q}'(\mathscr{X})}\exp\left(\frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}\right).$$

通过与 (15) 中命题 4. 相似的计算，我们得到 $b'(\mathscr{X})$ 的如下上界；另请参见推论 3.2 和引理 3.。

命题 **2.6.** — 设 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 的一个纯维数为 d、次数为 δ 的闭子概形，$\mathscr{X}$ 是其在 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$中的扎里斯基闭包。采用以上所有记号，我们有

$$\begin{aligned} b'(\mathscr{X}) \leqslant\ & \exp\left(2\epsilon_2(K) - 3\log 3 + [K:\mathbb{Q}]\right) \\ & \cdot(\delta^{-2}-\delta^{-4})\Big(h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X) + \Big(3\log\delta + \log\binom{N(n,d)+\delta}{\delta} \\ & + \Big((N(n,d)+1)\log 2 + 4\log(N(n,d)+1) + \log 3 - \frac{1}{2}\mathcal{H}_{N(n,d)}\Big)\delta\Big)\Big), \end{aligned}$$

其中 $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)$ 是相对于由 *§2.3.3* 中的范数所诱导的 *Fubini–Study* 范数在 *§2.3.4* 中定义的，$N(n,d) = \binom{n+1}{d+1} - 1$，$\mathcal{H}_m = 1 + \cdots + \frac{1}{m}$，以及仅依赖于 K 的 $\epsilon_2(K)$ 在 (13)中定义。

证明. — 记

$$\begin{aligned} c'(\mathscr{X}) =\ & (\delta^2-1)\Big(h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X) + \Big(3\log\delta + \log\binom{N(n,d)+\delta}{\delta} \\ & + \Big((N(n,d)+1)\log 2 + 4\log(N(n,d)+1) + \log 3 - \frac{1}{2}\mathcal{H}_{N(n,d)}\Big)\delta\Big)\Big) \end{aligned}$$

为简便起见。由 [**39**, 引理 4.3]和 (2.6.5)，可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\log b'(\mathscr{X}) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{Q}'(\mathscr{X})}\frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})} \\ \leqslant\ & \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{27\delta^4<N(\mathfrak{p})\leqslant c'(\mathscr{X})}\frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})} + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathcal{Q}'(\mathscr{X})\\ N(\mathfrak{p})>c'(\mathscr{X})}}\frac{\log N(\mathfrak{p})}{c'(\mathscr{X})}. \end{aligned}$$

由 (13)，可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{27\delta^4<N(\mathfrak{p})\leqslant c'(\mathscr{X})}\frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})} \\ =\ & \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{N(\mathfrak{p})\leqslant c'(\mathscr{X})}\frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})} - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{N(\mathfrak{p})\leqslant 27\delta^4}\frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})} \\ \leqslant\ & \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\log c'(\mathscr{X}) - 4\log\delta + 2\epsilon_2(K) - 3\log 3\right). \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{Q}'(\mathscr{X}) \subseteq \mathcal{Q}(\mathscr{X})$，可得

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathcal{Q}'(\mathscr{X})\\ N(\mathfrak{p})>c'(\mathscr{X})}}\frac{\log N(\mathfrak{p})}{c'(\mathscr{X})} \leqslant \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]c'(\mathscr{X})}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{Q}(\mathscr{X})}\log N(\mathfrak{p}) \leqslant 1,$$

其中最后一个不等式由（2.6.5）得出。结合上述两个不等式，我们便得到所要证明的结论。

□

注 ***2.7.*** — 沿用命题 2.6 中的所有记号。我们有

$$b'(\mathscr{X}) \ll_{n,K} \max\left\{\delta^{-2} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X), 1\right\}.$$

2.7. 射影覆盖。— 设$\mathcal{E}$ 为§2.3.3 中在 $\overline{\mathrm{Spec}}\, \mathcal{O}_K$上定义的厄米向量丛， X 为 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中的一个闭子概形，且它是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$的某个线性子簇中的超曲面。那么，这种 X 的几何与射影超曲面的几何相同，并且其算术希尔伯特–塞缪尔函数具有一致下界，且在 [**40**]中有最优的主导项。在采用阿拉克洛夫几何表述的行列式方法中，我们将构造$\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中的一个辅助超曲面，它包含 $S(X; B)$，但不包含 X的一般点，其中$B \in \mathbb{R}^+$。

2.7.1. — 如果 B 相对于 X的高度足够小，那么 $S(X; B)$包含于 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中的一个次数为 $O_n(\delta)$的超曲面内，该超曲面不包含 X的一般点。为了准确描述，我们先引用以下结果，它是将阿拉克洛夫几何的斜率不等式应用于（8）所得。

命题 ***2.8*** **([15], 命题 2.12)**。— 设 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 的一个闭整子概形， $Z = (P_i)_{i\in I}$ 是一个有理点有限族，并且

$$\begin{array}{rccc} \phi_{Z,D}: & F_{D,K} & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{i\in I} P_i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)}(D) \\ & s & \mapsto & (s(P_i))_{i\in I} \end{array}$$

是关于 $D \in \mathbb{N}$ 的求值映射。如果不等式

$$\sup_{i\in I} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(P_i) < \frac{\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}_{D,J})}{D} - \frac{\log \mathrm{rk}(F_D)}{2D}$$

成立，其中 $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(\cdot)$ 遵循 (3) 中的定义，那么同态 $\phi_{Z,D}$ 不可能是单射。

我们应用某些算术簇在 (9) 中的算术希尔伯特–塞缪尔函数下界，从而得到以下结果。这是 [**40**, 定理 5.8] 的直接推广。

命题 ***2.9***。— 设 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 的一个维数为d 、次数为 δ 的整闭子概形，它是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中某个线性子簇的超曲面。如果

$$\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]} < \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)}{(d+1)\delta} + B_1(d) - \frac{7}{2}\log(n+1)$$

成立，其中常数 $B_1(d)$ 仅取决于在(9)中定义的 d，则存在一个次数小于 δ 的超曲面，它覆盖 $S(X; B)$，但不包含 X 的一般点。

证明。— 若不存在这样的超曲面，则命题 2.8 中的求值映射是单射。根据 (9) 中算术希尔伯特–塞缪尔函数的下界以及这一事实

$$\mathrm{rk}(F_D) \leqslant \binom{D+n}{n} \leqslant (n+1)^D,$$

我们有

$$\begin{aligned} \frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]} &< \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)}{(d+1)\delta} + B_1(d) - \frac{7}{2}\log(n+1) \\ &\leqslant \frac{\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}_{D,J})}{D} - \frac{\log r_1(n,D)}{2D}, \end{aligned}$$

这与命题 2.8 矛盾。 □

2.7.2。——对于一般的 $B \in \mathbb{R}^+$ in $S(X;B)$，我们将在本节中利用所谓的全局行列式方法，给出一个控制$S(X;B)$的结果。该方法最早由 Salberger 在 [**50**], 中提出，随后由 [**13**], 加以改进，并由 [**43**]推广到整体域上。关于阿拉克洛夫几何的表述，参见 [**39**, §5]。

将 (9) 中 Hilbert–Samuel 函数的一致下界应用于定理 2.2，可得以下结果。除应用 (9) 外，所有证明都将与 [**39**, 定理 5.4], 的证明完全相同，因此我们只给出与 [**39**,定理 5.4] 的证明不同的细节。

Let

$$\kappa_1(K) = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\epsilon_1(K,x)}{x} \tag{17}$$

是一个只依赖于 K 的常数，其中 $\epsilon_1(K,x)$ 在 (12) 中定义。令

$$\kappa_2(K,d) = \sup_{\delta\geqslant 1}\left\{-3\log 3 + \frac{2(d+1)^2}{3\sqrt{3}} + 2(d+1)^2\delta^2\epsilon_3(K,27\delta^4) + 2\epsilon_2(K)\right\}, \tag{18}$$

其中，$\epsilon_2(K)$ 定义见式 (13)，$\epsilon_3(K,\ x)$ 定义见式 (14)。通过与 [**39**, §5.2] original from [**45**, 定理 2.2], 中相同的论证可知，式 (18) 中的上确界存在，且 $\kappa_2(K,\ d)$ 仅取决于 K 和 d。

我们有如下结果。

定理 ***2.10.*** — 设 $\mathcal{E}$ 是 *§2.3.3* 中定义在 $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ 上的厄米向量丛。设 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中的几何整闭子概形，其次数为 δ 、维数为 d，且是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$的一个线性子簇中的超曲面。则存在一个 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的超曲面，其次数为 ω ，覆盖 $S(X;B)$ ，但不包含 X的一般点。此外，我们有

$$\omega \leqslant \exp(C_1(n,d,K))B^{\frac{d+1}{a\delta^{1/d}}}\delta^{4-1/d}\frac{b'(\mathscr{X})}{H_K(X)^{\frac{1}{a\delta^{1+1/d}}}},$$

其中常数

$$\begin{aligned} C_1(n,d,K) &= \frac{(d+1)[K:\mathbb{Q}]}{d\sqrt[d]{\delta}}\left(\frac{3}{4}\log(n+1)-B_1(d)\right)+\kappa_2(K,n)+3+\frac{\log d!}{d} \\ &\quad +\frac{d^3+5d^2+8d}{2d(d+2)\sqrt[d]{d!}}\cdot\left(1+\frac{d+1}{4}\right)(1+\kappa_1(K)) \end{aligned}$$

是一个仅依赖于 n, d, K，$\kappa_1(K)$ 来自 (17)，$\kappa_2(K,d)$ 来自 (18),$H_K(X)$ = 指数 $\left([K:\mathbb{Q}]h_{\mathcal{O}(1)}(X)\right)$ 而 $b'(\mathscr{X})$ 在 (16) 中引入。

证明概要. — 根据命题 2.9，我们将证明分为两部分。

I. 高高度簇的情形。– 如果

$$\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]} < \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)}{(d+1)\delta}+B_1(d)-\frac{3}{4}\log(n+1)$$

其中，常数 $B_1(d)$ 在 (9) 中定义，而 $h_{\mathcal{O}(1)}(X)$ 在 §2.3.4 中定义。于是，根据命题 2.9，$S(X;B)$ 可被一个次数不超过 δ 的超曲面覆盖，且该超曲面不包含 X 的一般点。通过初等计算，我们得到 δ 小于定理陈述中给出的上界。

II. 低高度簇的情形。– 对于

$$\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]} \geqslant \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)}{(d+1)\delta}+B_1(d)-\frac{3}{4}\log(n+1),$$

这等价于

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X) \leqslant (d+1)\delta\left(\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]}-B_1(d)+\frac{3}{4}\log(n+1)\right),$$

我们将按如下方式处理。保留定理 2.2 中的所有记号，并从现在起假设$D \geqslant 3\delta\log\delta+n-1 \geqslant \delta$。我们将集合记为

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathscr{X}) &= \{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spm}\mathcal{O}_K \mid 27\delta^4 \leqslant N(\mathfrak{p}) \leqslant \operatorname{rk}(F_D)^{\frac{1}{d}}, \\ &\qquad \mathscr{X}_{\mathfrak{p}} \to \operatorname{Spec}\mathbb{F}_{\mathfrak{p}} \text{ is geometrically integral}\}, \end{aligned}$$

并且我们将定理 2.2 应用于 $\mathcal{R}(\mathscr{X})$ 处的约化。若不存在这样的超曲面，则根据上述假设应用定理 2.2，可得

$$\begin{aligned} &\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]} \geqslant \frac{\widehat{\mu}(\overline{F}_D)}{D}-\frac{\log\operatorname{rk}(F_D)}{2D} \\ &+\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{R}(\mathscr{X})}\left(\frac{(d)!^{\frac{1}{d}}(d)\operatorname{rk}(F_D)^{\frac{1}{d}}}{(d+1)Dn(\mathscr{X}_{\mathfrak{p}})^{\frac{1}{d}}}-\frac{d^3+5d^2+8d}{2D(d+1)(d+2)}\right)\log N(\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

根据式 (9) 给出的 $\widehat{\mu}(F_D)$ 的显式下界以及命题 2.9，我们推得

$$\begin{aligned}(19)\quad & \frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]}-\frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)}{(d+1)\delta}-B_1(d)+\frac{3}{4}\log(n+1)\\ \geqslant\ & \frac{d!^{\frac{1}{d}}d\,\mathrm{rk}(F_D)^{\frac{1}{d}}}{(d+1)D[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{R}(\mathscr{X})}\frac{\log N(\mathfrak{p})}{n(\mathscr{X}_{\mathfrak{p}})^{\frac{1}{d}}}-\frac{d^3+5d^2+8d}{2D(d+1)(d+2)[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{R}(\mathscr{X})}\log N(\mathfrak{p}).\end{aligned}$$

II-1. 估计 $\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{R}\ (\mathscr{X})\text{ 对数}}\underline{N(\mathfrak{p})\,n(\mathscr{X}_{\mathfrak{p}})^{\frac{1}{d}}}$**.** – 为了估计 (19) 中的 $\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{R}\ (\mathscr{X})\text{ 对数}}\underline{\overline{N(\mathfrak{p})\,n(\mathscr{X}_{\mathfrak{p}})^{\frac{1}{d}}}}$，按照 [**39**,定理 5.4], 证明中 II-1 的相同计算，我们有

$$\begin{aligned}(20)\quad \sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{R}(\mathscr{X})}\frac{\log N(\mathfrak{p})}{n(\mathscr{X}_{\mathfrak{p}})^{\frac{1}{d}}}\ \geqslant\ & \frac{1}{d}\log\mathrm{rk}(F_D)-3\log 3-4\log\delta-\log\left(b'(\mathscr{X})\right)-2\epsilon_2(K)\\ & -(d+1)^2\delta^2\left(\frac{2}{3\sqrt{3}\delta^2}-2\,\mathrm{rk}(F_D)^{-\frac{1}{2d}}+2\epsilon_3(K,27\delta^4)\right)\end{aligned}$$

应用 (11)、(13)、(14)，其中 $b'(\mathscr{X})$ 在 (16) 中引入， $\epsilon_2(K)$ 在 (13) 中定义，而 $\epsilon_3(K,x)$ 在 (14) 中定义。

II-2. 估计 $\sum$ 对数 $N(\mathfrak{p})$**.** – 对于 $\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{R}(\mathscr{X})}$ 对数 $N(\mathfrak{p})$ 的估计，根据 (12)，我们有

$$(21)\qquad \frac{1}{D}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{R}(\mathscr{X})}\log N(\mathfrak{p})\leqslant\frac{1}{D}\left(\mathrm{rk}(F_D)^{\frac{1}{d}}+\epsilon_1\left(K,\mathrm{rk}(F_D)^{\frac{1}{d}}\right)\right),$$

按照 [**39**, 定理 5.4], 证明中 II-2 的相同计算，其中 $\epsilon_1(K,x)$ 在 (12) 中定义。

II-3. 导出矛盾。– 将 (20) 和 (21) 代入 (19)，并进行一些初等计算。于是得到不等式

$$\begin{aligned}(22)\qquad & \frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]}-\frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)}{(d+1)\delta}-B_1(d)+\frac{3}{4}\log(n+1)\\ \geqslant\ & \frac{d!^{\frac{1}{d}}d}{(d+1)[K:\mathbb{Q}]}\cdot\frac{\mathrm{rk}(F_D)^{\frac{1}{d}}}{D}\left(\frac{1}{d}\log\mathrm{rk}(F_D)-\log\left(b'(\mathscr{X})\right)-4\log\delta\right.\\ & \left.3\log 3-\frac{2(d+1)^2}{3\sqrt{3}}+\frac{2(d+1)^2\delta^2}{\mathrm{rk}(F_D)^{\frac{1}{2d}}}-2(d+1)^2\delta^2\epsilon_3(K,27\delta^4)-2\epsilon_2(K)\right)\\ & +\frac{d^3+5d^2+8d}{2(d+1)(d+2)[K:\mathbb{Q}]}\cdot\frac{\mathrm{rk}(F_D)^{\frac{1}{d}}}{D}\left(1+\frac{\epsilon_1\left(K,\mathrm{rk}(F_D)^{\frac{1}{d}}\right)}{\mathrm{rk}(F_D)^{\frac{1}{d}}}\right)\end{aligned}$$

对所有 $D\geqslant 3\delta\log\delta+n-1\geqslant\delta$ 均一致成立。

通过与 [**39**, 定理 5.4], 证明中 II-3 类似的计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{d+1}{d\sqrt[d]{\delta}}\left(\log B-\frac{[K:\mathbb{Q}]}{(d+1)\delta}h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)-B_1(d)[K:\mathbb{Q}]+\frac{3[K:\mathbb{Q}]}{4}\log(n+1)\right)\\
\geqslant\ &\log D-\left(4-\frac{1}{d}\right)\log\delta-\log\left(b'(\mathscr{X})\right)-\kappa_2(K,d)-3-\frac{\log d!}{d}\\
&-\frac{d^3+5d^2+8d}{2d(d+2)\sqrt[d]{d!}}\cdot\left(1+\frac{d+1}{4}\right)\left(1+\kappa_1(K)\right),
\end{aligned}$$

由引理 2.4 可推出这个不等式

$$\begin{aligned}
\log D\ \leqslant\ &\frac{(d+1)\log B}{d\sqrt[d]{\delta}}-\frac{[K:\mathbb{Q}]}{d\delta^{1+1/d}}h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)+\log\left(b'(\mathscr{X})\right)\\
&+\left(4-\frac{1}{d}\right)\log\delta+C_1(n,d,K)
\end{aligned}$$

其常数为本定理陈述中的 $C_1(n,\ d,\ K)$，这便导出了矛盾。

□

注 ***2.11***。——在定理 2.10 中，我们假设 X 是射影空间的某个线性子簇中的超曲面，因为在这种情形下，我们有算术希尔伯特–塞缪尔函数的一致下界。如果对于更一般的情形也有相同的一致下界，我们就能够去掉这一限制。

2.7.3。——我们给出定理 2.10 的一个直接推论，用于控制辅助超曲面，且该推论与簇的高度无关。证明与 [**39**, 推论 5.5] 的证明非常相似。

推论 ***2.12***。——设 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的一个次数为 δ 、维数为 d 的几何整闭子概形，且它是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中某个超平面内的超曲面。那么，在 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中存在一个次数小于

$$C_1'(n,d,K)\delta^3B^{\frac{d+1}{d\delta^{1/d}}},$$

它覆盖 S（X； B），但不包含 X 的一般点，其中常数

$$C_1'(n,d,K)=\exp\left(C_1(n,d,K)\right)7(N(n,d)+1)\exp\left(2\epsilon_2(K)-3\log 3+[K:\mathbb{Q}]\right)d$$

其中 $C_1(n,d,K)$ 由定理 *2.10* 定义。

证明。——根据命题 2.6 中 $b'(\mathscr{X})$ 的上界，我们有

$$\begin{aligned}
& b'(\mathscr{X}) \\
\leqslant\ & \exp\left(2\epsilon_2(K) - 3\log 3 + [K:\mathbb{Q}]\right) \\
& \cdot(\delta^{-2} - \delta^{-4})\Big(h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X) + \Big(3\log\delta + \log\binom{N(n,d)+\delta}{\delta} \\
& + \left((N(n,d)+1)\log 2 + 4\log(N(n,d)+1) + \log 3 - \frac{1}{2}\mathcal{H}_{N(n,d)}\right)\delta\Big)\Big) \\
\leqslant\ & \exp\left(2\epsilon_2(K) - 3\log 3 + [K:\mathbb{Q}]\right)\delta^{-2}\Big(h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X) \\
& + \delta\left(4 + N(n,d) + \log 2 + 5\log(N(n,d)+1) + \log 3 - \frac{1}{2}\mathcal{H}_{N(n,d)}\right)\Big) \\
\leqslant\ & 7(N(n,d)+1)\exp\left(2\epsilon_2(K) - 3\log 3 + [K:\mathbb{Q}]\right)\max\left\{\delta^{-2}h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X), 1\right\}.
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
& \frac{b'(\mathscr{X})}{H_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}} \\
\leqslant\ & 7(N(n,d)+1)\exp\left(2\epsilon_2(K) - 3\log 3 + [K:\mathbb{Q}]\right)d\delta^{-1+1/d} \\
& \cdot\frac{\max\{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X), d\delta^{-1+1/d}\}}{H_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}} \\
\leqslant\ & 7(N(n,d)+1)\exp\left(2\epsilon_2(K) - 3\log 3 + [K:\mathbb{Q}]\right)d\delta^{-1+1/d}
\end{aligned}$$

通过初等计算可得。 □

与推论 2.12 类似，我们得到关于辅助对象的如下控制，其对高度的依赖较弱，但对高度上界的依赖较差。

推论 ***2.13.*** — 我们沿用推论 *2.12* 中关于 X 的相同记号和条件。于是存在一个次数小于以下数值的超曲面，位于 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中：

$$C_1''(n,d,K)\delta^{3-1/d}\frac{B^{\frac{d+1}{d\delta^{1/d}}}}{H_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}}\max\left\{\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]}, \delta\right\},$$

其中

$$\begin{aligned}
C_1''(n,d,K) \ =\ & C_1(n,d,K)7(N(n,d)+1)\exp\left(2\epsilon_2(K) - 3\log 3 + [K:\mathbb{Q}]\right) \\
& \cdot(d+1)(B_1(d) + \frac{7}{2}\log(n+1)),
\end{aligned}$$

并且 $C_1(n,d,K)$ 与定理 *2.10* 中的相同。

证明。——若

$$\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]} < \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)}{(d+1)\delta} + B_1(d) - \frac{7}{2}\log(n+1),$$

则根据命题 2.9， $S(X;B)$ 可以被一个次数不超过 δ 的超曲面覆盖，且该超曲面不包含 X 的一般点。次数的上界满足陈述中给出的上界。

If

$$\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]} \geqslant \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)}{(d+1)\delta} + B_1(d) - \frac{7}{2}\log(n+1)$$

这等价于

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X) \leqslant (d+1)\delta\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]} - \delta(d+1)B_1(d) + \frac{7}{2}\delta(d+1)\log(n+1),$$

于是我们进行如下计算。与推论 2.12 的证明相同，我们有

$$b'(\mathscr{X}) \leqslant 7(N(n,d)+1)\exp\left(2\epsilon_2(K) - 3\log 3 + [K:\mathbb{Q}]\right)\max\left\{\delta^{-2}h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X), 1\right\},$$

其中， $b'(\mathscr{X})$ 定义于 (16)。于是我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{b'(\mathscr{X})}{H_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}} \\
\leqslant\ & \frac{7(N(n,d)+1)\exp\left(2\epsilon_2(K) - 3\log 3 + [K:\mathbb{Q}]\right)(d+1)(B_1(d)+\frac{7}{2}\log(n+1))}{H_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}} \cdot \\
& \delta^{-1}\max\left\{\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]}, \delta\right\},
\end{aligned}$$

将上述不等式代入定理 2.10，即得所述结论。 □

推论 ***2.14***。—设 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中一条次数为 δ的几何整曲线，它位于 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的一个平面内。那么我们有

$$\#S(X;B) \leqslant C_1'(n,1,K)\delta^4 B^{\frac{2}{\delta}} \ll_{n,K} \delta^4 B^{\frac{2}{\delta}},$$

and

$$\begin{aligned}
\#S(X;B) \quad &\leqslant \quad C_1''(n,1,K)\delta^3\frac{B^{\frac{2}{\delta}}}{H_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)^{1/\delta^2}}\max\left\{\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]}, \delta\right\} \\
&\ll_{n,K} \quad \delta^4\frac{B^{\frac{2}{\delta}}\max\{\log B, 1\}}{H_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)^{1/\delta^2}},
\end{aligned}$$

其中，常数 $C_1'(n,\ 1,\ K)$ 和 $C_1''(n,\ 1,\ K)$ 与推论 *2.12* 和推论 *2.13* 中的相同。

证明。——这是将交理论中的贝祖定理（参见 [**21**, 命题 8.4]）直接应用于推论 2.12 和推论 2.13。 □

注 ***2.15.*** — 与 [**2, 1**]，推论 2.14 中的估计相比，这里对曲线次数的依赖更差。我们稍后会用到推论 2.14 中对曲线高度的依赖，因此在此给出该推论。

3. 肖形式与凯莱形式的几何与算术

对于嵌入在 $\mathbb{P}^n$ 中的维数为 d 的射影簇，其 Chow 形式（也称为乔 variety）参数化与其非平凡相交的 $(n-d-1)$ 维线性空间。根据定义，表示这些线性空间的点构成相应格拉斯曼流形的一个子集。

众所周知，对于纯维射影簇，其肖形式是格拉斯曼流形中的一个超曲面，其次数与原簇相同。

按照 [**15**], , 用施蒂费尔坐标定义的此类超曲面称为肖形式，而用普吕克坐标定义的则称为凯莱形式。本节沿用 [**15, 16**] 中 [**5**, §4], 的记号，另见[**36**, §2]。

本节将在任意域上使用普吕克坐标，给出这些簇的几何构造。随后，我们将研究它们的算术性质。

3.1. 几何构造。— 首先，我们给出肖形式和凯莱形式的几何构造。这部分受 [**15**, § 3] 启发，并已应用于 [**36**]。

3.1.1. — 设 k 为一个域， V 为其上的有限维向量空间， $V^\vee$为 V的对偶空间。我们用$\check{}$ $G = \mathrm{Gr}(d+1, V^\vee)$表示分类 V所有维数为 $d+1$ 的商空间的格拉斯曼流形。由普吕克嵌入

$$\mathrm{Gr}(d+1, V^\vee) \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right),$$

$\check{}G$ 的坐标代数 $B(\check{}G) = \bigoplus_{D\geqslant 0} B_D(\check{}G)$是 $\bigoplus_{D\geqslant 0} \mathrm{Sym}^D\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right)$的齐次商代数$_{D\geqslant 0}$。

为阐明普吕克坐标的作用，我们考虑如下构造。设

$$\begin{aligned} \theta : \quad V^\vee \otimes \left(\bigwedge^{d+1} V\right) &\longrightarrow \bigwedge^d V \\ \xi \otimes (x_0 \wedge \cdots \wedge x_d) &\mapsto \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \xi(x_i) x_0 \wedge \cdots \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_i, \end{aligned}$$

并令 $\widetilde{\Gamma}$ 为 $\mathbb{P}(V) \times_k \mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right)$ 中的子簇，它将满足 $\theta(\xi \otimes \alpha) = 0$的所有点（$\xi$, α）分类。令

$$p' : \mathbb{P}(V) \times_k \mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right) \to \mathbb{P}(V)$$

and

$$q' : \mathbb{P}(V) \times_k \mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right) \to \mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right)$$

表示典范投影，并且

$$v : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{P}(V) \times_k \mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right)$$

是典范嵌入。我们定义

$$p = p' \circ v : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{P}(V), \text{ and } q = q' \circ v : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right).$$

3.1.2。—— 以下结果出自 [**36**, 命题 2.2], , 它是 [**15**, 命题 3.4]的推广。

命题 ***3.1***。—— 设 X 是 $\mathbb{P}(V)$ 的纯维数为 d 的闭子概形。假设 $[X] = \sum m_i X_i$ 是 X 的基本循环。那么 $q_*(p^*[X])$ 是 $\mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right)$ 上的一个除子$_{i\in I}$。此外，该除子具有形式 $\sum_{i\in I} m_i \widetilde{X}_i$，其中每个 $\widetilde{X}_i$ 都是 $\mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right)$ 中次数为 $\deg(X_i)$ 的整超曲面，且所有 $(\widetilde{X}_i)_{i\in I}$ 彼此不同。

我们沿用命题 3.1 中的所有记号和构造。存在一个元素 $\psi_X \in \mathrm{Sym}^\delta\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right)$，它定义了 X的凯莱形式。此外，为简便起见，我们记 $\delta_i = \deg(X_i)$，那么对于每个 $i \in I$，都存在 $\psi_{X_i} \in \mathrm{Sym}^{\delta_i}\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right)$，它定义了 $\widetilde{X}_i$。在这种情况下，我们有

$$\psi_X = \prod_{i\in I} \psi_{X_i}^{m_i}.$$

于是我们提出以下定义。

定义 ***3.2.*** — 设 X 是嵌入在$\mathbb{P}(V)$中的纯维闭子概形。我们称命题 3.1 中确定的除子为 X的凯莱除子 , 并称 $\mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right)$ 中基本循环为命题 3.1 中所述循环的超曲面为 X的凯莱簇 。我们称上文确定的对称形式（或多项式） ψ_X 为 X的凯莱形式 。

根据定义， X 的凯莱形式取决于基射影空间 $\mathbb{P}(V)$ 及其在 $\mathbb{P}(V)$ 中的嵌入。

3.2. 结式的描述。—设 k 为域， V 为维数为 $n+1$ 的 k 上的向量空间。当 X 是 $\mathbb{P}(V)$ 的完全交闭子概形时，其 Cayley 也可用一个特定的结式来描述。我们只介绍这一概念所需的基础知识，而不作全面系统的论述。关于这一主题的系统介绍，请参阅 [**23**] 。

3.2.1。—设 $T_0,\dots,T_n$ 是 $H^0\left(\mathbb{P}(V)\,\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)\right)$ 的一组基，且 $g_i\in H^0\left(\mathbb{P}(V)\,\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(\delta_i)\right)$ 是一族非零截面，其中 $i=0,\dots,n$。那么 $g_0,\dots,g_n$ 的结式 记作

$$\mathrm{Res}(g_0,\dots,g_n),$$

是一个多项式，其变量是 $g_0,\dots,g_n$ 的系数，其中 $g_0,\dots,g_n$ 被视为关于 $T_0,\dots,T_n$ 中变量的多项式。为确保结式的唯一性，我们要求归一化

$$\mathrm{Res}(T_0^{\delta_0},\dots,T_n^{\delta_n})=1.$$

关于这一概念的详细介绍，请读者参阅 [**23**, 第 13] 章。

根据 [**23**, 第 13 章，命题 1.1]，$\mathrm{Res}(g_0,\dots,g_n)$ 是一个齐次多项式 1
关于每个 g_i 的系数，次数为 $\left(\prod_{j=0}^{n}\delta_j\right)/\delta_i$，其中 $i=0,\dots,n$。

3.2.2. — 设 X 是 $\mathbb{P}(V)$ 的一个完全交闭子概形，由 $f_i\in H^0\left(\mathbb{P}(V)\,\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(\delta_i)\right)$ 生成，其中 $i=1,\dots,m$。此时，X 的维数为 $n-m$，次数为 $\delta_1\cdots\delta_m$。

设 $h_1,\dots,h_{n-m+1}\in H^0\left(\mathbb{P}(V)\,\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)\right)$。由 §3.2.1，$f_1,\dots,f_m,h_1,\dots,h_{n-m+1}$在 $\mathbb{P}(V)$ 中有公共零点，当且仅当

$$\mathrm{Res}(f_1,\dots,f_m,h_1,\dots,h_{n-m+1})=0.$$

换言之，若我们假设 $h_1,\dots,h_{n-m+1}$ 在 $\mathbb{P}(V)$ 中定义了一个维数为 $m-1$ 的完全交线性子簇，那么上述等式成立，当且仅当该线性子簇与 X 相交非空。

这一事实给出了定义 X 的凯莱形式的一种显式方法。设 $s_0,\dots,s_n$是 $T_0,\dots,T_n$ 的对偶基，则 $(s_{i_0}\wedge\cdots\wedge s_{i_m})_{0\leqslant i_0<\cdots<i_m\leqslant n}$ 是 $\mathbb{P}(V)$ 中维数为 $m-1$ 的线性簇的普吕克坐标。由 §3.2.1，$\mathrm{Res}(f_1,\dots,f_m,h_1,\dots,h_{n-m+1})$ 是变量 $(s_{i_0}\wedge\cdots\wedge s_{i_m})_{0\leqslant i_0<\cdots<i_m\leqslant n}$ 的一个次数为 $\delta_1\cdots\delta_m$ 的齐次多项式，这是命题 3.1 的一个例子。

3.2.3. — 我们考虑一个特殊情形。设 X 是 $\mathbb{P}(V)$ 中次数为 δ 的超曲面。根据 [**30**]，X 由 $f\in\mathrm{Sym}^{\delta}(V)$ 中的一个元素定义。选取 $H^0\left(\mathbb{P}(V)\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)\right)$ 的基 $T_0,\dots,T_n$ 后，我们将 X 记作由次数为 δ 的齐次多项式 $f(T_0,\dots,T_n)$ 定义。

设 $s_0,\dots,s_n$ 是 $T_0,\dots,T_n$ 的对偶基。根据 §3.2.2 中的论证，由命题 3.1 得到的凯莱形式 $\psi_X\in\mathrm{Sym}^{\delta}(\bigwedge^n V^\vee)$ 由以下齐次方程确定

$$f(s_1\wedge\cdots\wedge s_n,-s_0\wedge s_2\wedge\cdots\wedge s_n,\dots,(-1)^n s_0\wedge\cdots\wedge s_{n-1}),$$

其中每个变量分别缺少 $s_0,\dots,s_n$。从某种意义上说，它与原来的齐次多项式 $f(T_0,\dots,T_n)$ 一致。

3.3. 坐标变换。— 本节中，我们考察在射影空间的某个特定自同态作用下，凯莱形式的变化。

3.3.1. — 设 V是域 k上维数为 $n+1$ 的向量空间。以下结果表明，定义 3.2 中凯莱簇的构造与 $\mathbb{P}(V)$ 的自同构可交换；这一结果的证明受到 [**5**, 引理 4.3.1] 中原始思路的启发。

命题 ***3.3***。— 设 X 是 $\mathbb{P}(V)$ 中的一个纯维数为 d 的闭子概形，且 $F\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ 是一个自同构。那么 *§3.1.1* 中构造 X 的凯莱簇与 F 所诱导的基变换相容。

证明。— 使用 §3.1.1 中的全部记号，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(V) & \xleftarrow[p]{} & \widetilde{\Gamma} & \xrightarrow[q]{} & \mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right) \\ \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle r_1} & & \downarrow{\scriptstyle r_2} \\ \mathbb{P}(V) & \xleftarrow[p]{} & \widetilde{\Gamma} & \xrightarrow[q]{} & \mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^\vee\right), \end{array}$$

其中 r_1 由基变换得到，而 r_2 由 r_1诱导。

由于 F 是一个自同构，它是平坦的；因此， r_1 和 r_2 也都是平坦的。根据定义，我们有 $p \circ r_1 = F \circ p$，于是得到

$$r_1^*(p^*[X]) = p^*(F^*[X])$$

由 [**21**, 引理 1.7.1] 结合 [**21**, §20.1]，其中 $[X]$ 表示 X的基本循环。

为简便起见，设 $[Y] = p^*[X]$。由于态射 q 是适当的，由 [**21**, 命题 1.7] 和 [**21**, §20.1] 可得

$$r_2^*(q_*[Y]) = q_*(r_1^*[Y]).$$

因此我们得到

$$q_*(p^*(F^*[X])) = r_2^*(q_*(p^*[X])),$$

从而完成证明。 □

3.3.2. — 我们固定 $H^0\left(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)\right)$ 的一个任意基，使得对于每个 $\xi \in \mathbb{P}(V)(k)$，我们都可以记 $\xi = [x_0 \colon \cdots \colon x_n]$，其中某些 $x_0, \ldots, x_n \in k$ 非零。在下文中，对于 k 的扩张 k'，我们可以将 V 视为 k' 上的向量空间，从而考虑 $\operatorname{Spec} k'$ 上的概形 $\mathbb{P}(V)$。

设 $H \in k'^{\times}$。我们定义 k'-态射

$$\begin{array}{rccc} F_H : & \mathbb{P}(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}(V) \\ & [x_0 : \cdots : x_{n-1} : x_n] & \mapsto & [Hx_0 : \cdots : Hx_{n-1} : x_n]. \end{array}$$

在这种情况下，我们有

$$\begin{array}{rccc} F_H^{-1} : & \mathbb{P}(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}(V) \\ & [x_0 : \cdots : x_{n-1} : x_n] & \mapsto & [x_0 : \cdots : x_{n-1} : Hx_n] \end{array}$$

根据定义立即可得。

设 X 是 $\mathbb{P}(V)$ 中一个纯维数为 d 的闭子概形，且 $\phi\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ 是相关的闭浸入。对于 $H \in k'$，我们将比较 $\phi(X)$ 和 $F_H \circ \phi(X)$ 的凯莱形式。

令 $[x_0\colon \cdots\colon x_{n-1}\colon x_n] \in \mathbb{P}(V)(\overline{k})$。点 $[x_0\colon \cdots\colon x_{n-1}\colon x_n]$ 在嵌入 $\overline{\phi}$ 下属于 $X(\overline{k})$，当且仅当 $[x_0\colon \cdots\colon x_{n-1}\colon Hx_n]$ 在嵌入 $F_H \circ \phi$ 下属于 $X(\overline{k})$。

3.3.3. — 令 $\psi_X \in \mathrm{Sym}^{\delta}\left(\bigwedge^{d+1} V^{\vee}\right)$，它定义了相对于嵌入 $\phi\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ 的 X 在 $\mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^{\vee}\right)$ 中的凯莱簇，其中 X 是 $\mathbb{P}(V)$ 中一个纯维数为 d 、次数为 δ 的闭子概形。为了确定 X 相对于嵌入 $F_H \circ \phi\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$（其中 $H \in k'^{\times}$）的凯莱形式，我们考虑由 F_H^{-1} 诱导的其拉回。

T_0、……、T_n 是 $H^0\left(\mathbb{P}(V)\,\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)\right)$ 的一组基，而 s_0、……、s_n 是其对偶基。那么 $(s_{i_0} \wedge \cdots \wedge s_{i_d})_{0 \leqslant i_0 < \cdots < i_d \leqslant n}$ 是 $H^0\left(\mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^{\vee}\right), \mathcal{O}(1)\right)$ 的一组基。

我们将 X 关于 $\phi\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ 的凯莱形式写作如下形式

$$\psi_X = \sum_{i=0}^{\delta} \psi_{X,i},$$

其中 $\psi_{X,\,i}$ 表示 ψ_X 中单项式的和，这些单项式中形式为 $s_{i_0} \wedge \cdots \wedge s_{i_{d-1}} \wedge s_n$ 的变量的总次数恰为 i，且 $0 \leqslant i_0 < \cdots < i_{d-1} < n$。我们将关于 $F_H \circ \phi\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ 的凯莱形式记为 ψ'_X。根据命题 3.3 和 [**36**, 命题 2.7], ，凯莱形式的构造与 $\mathbb{P}(V)$ 的自同构及域扩张相容。因此，对于 ψ_X 中任意一个形式为 $s_{i_0} \wedge \cdots \wedge s_{i_d}$ 的变量，形式 ψ'_X 将 s_n 变为 Hs_n，并保持其他所有变量不变。于是我们有

$$\psi'_X = \sum_{i=0}^{\delta} H^i \psi_{X,i}.$$

3.3.4。——设 X 是 $\mathbb{P}(V)$ 的一个纯维数为 d 、次数为 δ 的闭子概形。我们用 $T_0, \ldots, T_n$ 和 $s_0, \ldots, s_n$ 表示与 §3.3.3 中相同的基。设 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n$，并考虑态射

$$\begin{array}{rccc} T_{\mathbf{a}}\colon & \mathbb{P}(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}(V) \\ & [T_0 : T_1 : \cdots : T_n] & \mapsto & [T_0 : T_1 + a_1 T_0 : \cdots : T_n + a_n T_0], \end{array}$$

并记为 $X' = T_{\mathbf{a}}(X)$。

令 $\psi_X \in \mathrm{Sym}^{\delta}\left(\bigwedge^{d+1} V^{\vee}\right)$，它定义了 X in $\mathbb{P}\left(\bigwedge^{d+1} V^{\vee}\right)$ 的凯莱形式。固定上文的 $H^0\left(\mathbb{P}(V)\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)\right)$ 的基后，我们写作

$$\psi_X = \sum_{J \in \mathcal{I}} a_J (s_{j_0} \wedge \cdots \wedge s_{j_d})^J,$$

其中 $\mathcal{I}$ 表示满足 $0 \leqslant j_0 < \cdots < j_d \leqslant n$ 的所有 $(j_0, \ldots, j_d)$ 的指标集。于是再次由命题 3.3，得到

$$\psi_{X'} = \sum_{J \in \mathcal{I}_1} a_J \left((s_0 + a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n) \wedge s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_d}\right)^J + \sum_{J \in \mathcal{I}_2} a_J (s_{j_0} \wedge \cdots \wedge s_{j_d})^J,$$

其中，$\mathcal{I}_1$ 表示满足 $j_0 = 0$ 和 $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_d \leqslant n$ 的所有（j_0，……，j_d）的指标集，而 $\mathcal{I}_2$ 表示满足 $1 \leqslant j_0 < \cdots < j_d \leqslant n$ 的所有（j_0，……，j_d）的指标集。

令 $\psi_{X,\,\delta}$（分别为 $\psi_{X',\,\delta}$）表示 ψ_X（分别为 $\psi_{X'}$）中变量的总次数恰为 δ 且变量具有 $s_0 \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_d}$ 形式的单项式之和，其中 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_d \leqslant n$。由上述计算可得

$$\psi_{X,\delta} = \psi_{X',\delta}.$$

3.4. 凯莱形式的高度。—根据 [**5**, 定理 4.32], ，对于数域上的纯维射影簇，由算术交理论定义的高度大致等于其乔 variety 或凯莱簇的高度。若考虑凯莱簇或凯莱形式的韦伊高度，则可以将其与由算术交理论定义的簇的高度进行统一且明确的比较。从某种意义上说，它们是簇的同一高度函数。

我们有以下关于 X 与 ψ_X 的高度比较结果。

命题 ***3.4*** **(命题 3.7，[36]).**— 设 K 是一个数域，$\mathcal{E}$ 是 *§2.3.3* 中定义在 $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ 上的秩为 $n+1$ 的厄米向量丛。设 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 的一个纯维数为 d 、次数为 δ 的闭子概形，且 $\psi_X \in \operatorname{Sym}^{\delta}\left(\bigwedge^{d+1} \mathcal{E}_K^{\vee}\right)$ 是定义其凯莱簇的一个元素。则有

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\left(\log((N(n,d)+1)(\delta+1)) + \delta \mathcal{H}_{N(n,d)}\right) \leqslant h(\psi_X) - h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X) \\ \leqslant \quad & (N(n,d)+1)\delta \log 2 + 4\delta \log(N(n,d)+1) - \frac{1}{2}\delta \mathcal{H}_{N(n,d)}, \end{aligned}$$

其中 $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(X)$ 是在 *§2.3.4* 中定义的，$\overline{\mathcal{O}(1)}$ 配备相应的 *Fubini–Study* 度量，而 $N(n,d) = \binom{n+1}{d+1} - 1$，$\mathcal{H}_N = 1 + \cdots + \frac{1}{N}$。

4. 仿射覆盖

在 [**13**, 命题 4.2.1] 和 [**43**, 定理 5.14], 中，讨论了嵌入于 $\mathbb{A}^n$ 的仿射超曲面上有界高度整点数目的上界。这个想法最初由 Ellenberg–Venkatesh 提出 [**20**]。本节将针对一个仿射子簇讨论同样的问题，该子簇是 $\mathbb{A}^n$ 某个超平面中的超曲面。

在 [**13**，**43**], 中，所得上界取决于定义多项式的最高次齐次部分的高度。在这一推广中，第 3 节所研究的凯莱形式发挥了替代作用。与 [**43**, 定理 5.14],相比，这里考虑的有界高度整点集一般性较弱。

与 [**13**, 命题 4.21] 和 [**43**, 定理 514], 相比，我们的结果对维数和基域给出了更为明确的依赖关系。

4.1. 整点数目的一个朴素上界。—— 我们首先为这一主题建立基础框架；其中一些思想受到[**43**, §5B]的启发。

4.1.1. — 设 K 是一个数域，且 $x \in \mathcal{O}_K$。我们定义

$$[x] = \max_{v \in M_{K,\infty}} \{|x|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]}\},$$

其中，我们将一个复位及其共轭视为两个不同的赋值。令$B \in \mathbb{R}_{\geqslant 1}$，并定义集合

$$[B]_{\mathcal{O}_K} = \{x \in \mathcal{O}_K \mid [x] \leqslant B\}.$$

对于每个满足 $H_K(\xi) \leqslant B$ 的点 $\xi \in \mathbb{P}^n(K)$，由第二闵可夫斯基定理（参见[**51**, §4.3]），ξ可提升为 $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(\mathcal{O}_K)$，且该点属于集合 $[m_1(K)B]_{\mathcal{O}_K}^{n+1}$，其中

$$m_1(K) = \begin{cases} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \frac{[K:\mathbb{Q}]!}{[K:\mathbb{Q}]^{[K:\mathbb{Q}]}} |\Delta_K|^{1/2}, & \text{the class number of } K \text{ is larger than 1} \\ 1, & \text{the class number of } K \text{ is 1} \end{cases} \tag{23}$$

是一个常数，它仅取决于 K 及其复共轭的个数 r_2，以及 K的判别式 Δ_K。

4.1.2. — 设 $\mathcal{E}$ 是 §2.3.3 中在 $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ 上定义的厄米向量丛。我们选取 $T_0, \dots, T_n$ 作为 $H^0\left(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)}(1)\right)$的一组基，其中 T_i 对应于 $\mathcal{O}_K^{\oplus(n+1)}$ 的第 i 个坐标，$i = 0, \dots, n$。

令 $\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$ 为 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 的仿射开集，它由 $T_0 \neq 0$ 在 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中定义。在此情形下，其坐标为 T_1、…、T_n；当书写闭点的坐标时，我们记作 $T_0 = 1$。若无歧义，我们将省略 T_0 的坐标。令 X 为 $\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$ 的子概形，$B \in \mathbb{R}$，并且

$$[\![B]\!]_{\mathcal{O}_K}^n = \max_{v \in M_{K,\infty}} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n(\mathcal{O}_K) \mid \sqrt{|x_1|_v^2 + \cdots + |x_n|_v^2} \leqslant B\}.$$

我们将此集合记为

$$s(X; B) = X(K) \cap [\![B]\!]_{\mathcal{O}_K}^n$$

当上下文已明确 X 到 $\mathbb{A}^n$ 的嵌入时。

4.1.3. — 首先，我们引入仿射概形中整点的一个朴素上界，并参见 [**13**, 引理 **4.1**。1] 作为参考。此结论可通过归约直接证明，与 [**11**, 定理 3.1] 的证明类似。

设 X 是 $\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$ 的一个纯维数为 d 的闭子概形，它不一定不可约，并设其在 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的射影闭包的次数为 δ。令 $B \in \mathbb{R}$，并用 $s(X(\mathbb{Z}); B)$ 表示 $\mathbb{Z}^n$ 的子集，其中对于所有 $\xi = (x_1, \dots, x_n) \in s(X(\mathbb{Z}); B)$，均满足

$$\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \leqslant \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \leqslant B,$$

并且它定义了 X 的一个闭点。于是我们有

$$\#s(X(\mathbb{Z}); B) \leqslant \delta(2B+1)^d \leqslant 3^d \delta B^d \tag{24}$$

当 $B \geqslant 1$ 时，证明见 [**31**, §2], [**13**, 引理 **4.1**。1]

4.1.4. — 我们考虑 §3.3.4 中的构造。设 $T_0, \dots, T_n \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K), \mathcal{O}(1))$ 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 上的一族坐标函数，而 $s_0, \dots, s_n$ 是 $T_0, \dots, T_n$ 的对偶基。对于一个 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$，令

$$T_{\mathbf{a}} : \mathbb{P}(\mathcal{E}_K) \to \mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$$

是相对于上述坐标、按照第 §3.3.4 节定义的态射，其中我们将$\mathbf{a}$ 视为 K^n中的一个元素。设 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$的一个纯维数为 d 且次数为 δ的闭子概形，并且 $X' = T_{\mathbf{a}}(X)$。

设 $\psi_X \in \mathrm{Sym}^{\delta}_K \left(\bigwedge^{d+1} \mathcal{E}_K^{\vee} \right)$ 是 X的凯莱形式。记

$$\psi_X = \sum_{i=0}^{\delta} \psi_{X,i},$$

其中，变量 $(s_0 \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_d})_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_d \leqslant n}$ 在 $\psi_{X,i}$ 中的总次数恰好为 i，其中 $i = 0, \dots, \delta$。

我们对 X'采用相同的记号，于是根据第 §3.3.4 节，有 $\psi_{X'} = \psi(s_0 + a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n, s_1, \dots, s_n)$。设

$$\psi_{X'} = \sum_{i=0}^{\delta} \psi_{X',i},$$

与上文的安排相同。

关于上文引入的 ψ_X 和 $\psi_{X'}$，我们有如下性质，这对进一步应用很有用。

引理 ***4.1.*** — 沿用上文的所有记号和构造。若$\psi_{X,\delta} \neq 0$ 和$\psi_{X,0} \equiv 0$，则存在一个元素 $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$，使得最大值 $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|a_i|\} \leqslant \delta$，满足
使得$\psi_{X',0}$ 不为零。

证明. — 我们考虑$\psi_{X',0}$中的所有单项式，其系数是变量 $a_1, \dots, a_n$ 的次数小于 δ的多项式。由于$\psi_{X,\delta}$ 不为零，这些系数多项式中至少有一个是关于 $a_1, \dots, a_n$的非零多项式。根据§4.1.3中给出的有界范数整点上界，存在一个元素$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$，使得 $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|a_i|\} \leqslant \delta$，且某个固定单项式的系数不为零。于是得证。

□

4.2. 仿射超曲面覆盖的控制。 — 本节中，我们给出仿射辅助超曲面的一个上界，该超曲面覆盖有界高度的整点；这个上界由定理 2.10 推出。这是 [**13**, 命题 4.2.1] 和 [**43**, 定理 5.14], 的推广，后两者只考虑射影空间中的超曲面情形。

我们的方法与 [**13**, 命题 4.2.1], 更为相似，因为我们只允许使用一个辅助超曲面来覆盖所有有界高度的整点。此外，我们的版本更为明确。为处理整数环可能不是主理想整环的情形，我们借鉴了 [**43**,定理 5.14]中的一些技巧。

4.2.1. — 设 $\mathcal{E}$ 为 §2.3.3 中定义在 $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ 上的厄米向量丛，$\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$为 §4.1.2 中针对坐标 $T_0,\dots,T_n$引入的 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$的仿射开子集。设 X'是$\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$的几何整闭子概形，其在 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中的射影闭包 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$的一个线性子簇中的超曲面，且 $\dim(X) = d$，$\deg(X) = \delta$。我们将$T_0,\dots,T_n$的对偶基记为 $s_0,\dots,s_n$。

对于上述簇 X，令 $\psi_X \in \mathrm{Sym}^{\delta}_K\left(\bigwedge^{d+1}\mathcal{E}_K^{\vee}\right)$ 为其凯莱形式，并记

$$\psi_X = \sum_{i=0}^{\delta}\psi_{X,i},$$

其中，变量 $(s_0\wedge s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_d})_{1\leqslant i_1<\cdots<i_d\leqslant n}$ 在 $\psi_{X,\,i}$ 中的总次数恰为 i，其中 $i=0,\dots,\delta$。

根据上述表述，我们的主要目标是控制 §4.1.2 中定义的集合 $s(X';B)$。

4.2.2. — 首先，我们介绍以下几个关于初等计算的引理。第一个是在数域上对 [**13**, 引理 4.2.3]和 [**43**, 引理 5.13]的显式表述。

引理 ***4.2.*** — 我们沿用 *§4.2.1* 中的所有记号。对于满足$1\leqslant y\leqslant H_K(\psi_X)$的任意实数 y，有

$$\frac{\delta^2 b'(\psi_X)}{H_K(\psi_X)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}} \leqslant C_2(n,d,K)e\frac{\log y+\delta^2}{y^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}},$$

其中

$$\begin{aligned} C_2(n,d,K) \;&=\; \exp\left(2\epsilon_2(K)-3\log 3+[K:\mathbb{Q}]\right)\left(3+\log\binom{N(n,d)+\delta}{\delta}\right.\\ &\quad\left.+(N(n,d)+1)\log 2+4\log(N(n,d)+1)+\log 3-\frac{1}{2}\mathcal{H}_{N(n,d)}\right), \end{aligned}$$

$N(n,d)=\binom{n+1}{d+1}-1$, *$H_K(\psi_X)$ is defined at* (5), *and* $\mathcal{H}_n = 1+\cdots+\frac{1}{n}$.

证明。——通过初等计算可知，对于固定的 $a\in\mathbb{R}_{>0}$，函数

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geqslant 1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\log x}{x^a} \end{array}$$

当 $x\in]1,\ e^{1/a}]$ 时递增，当 $x\in[e^{1/a},+\infty[$ 时递减。此外，它在 $x=e^{1/a}$ 处达到最大值，即 $\frac{1}{ae}$。 —

由命题 2.6，我们有

$$\delta^2 b'(\psi_X)\leqslant C_2(n,d,K)\left(h(\psi_X)+\delta^2\right),$$

由于我们总有 $b'(\psi_X) \geqslant 1$。再由事实 $1 \leqslant y \leqslant H_K(\psi_X)$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 b'(\psi_X)}{H_K(\psi_X)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}} &\leqslant C_2(n,d,K)\frac{h(\psi_X)+\delta^2}{H_K(\psi_X)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}} \\ &\leqslant C_2(n,d,K)e\frac{y+\delta^2}{y^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}},\end{aligned}$$

至此证明结束。 □

为了处理仿射开子集中的高度类比，我们在下文引入仿射情形下的高度函数。

定义 ***4.3***。——设 $x=(x_1,\dots,x_n) \in K^n$。我们将 x 的仿射高度 定义为

$$H_{K,\mathrm{aff}}(x)=\prod_{v\in M_{K,\infty}}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_i|^{[K_v:\mathbb{Q}_v]}\},\ \text{and}\ h_{\mathrm{aff}}(x)=\frac{\log H_{K,\mathrm{aff}}(x)}{[K:\mathbb{Q}]}.$$

此外，设

$$f(T_0,\dots,T_n)=\sum_{i_0+\cdots+i_n=\delta}a_{i_0\dots i_n}T_0^{i_0}\cdots T_n^{i_n},$$

为一个多项式。我们定义

$$H_{K,\mathrm{aff}}(f)=\prod_{v\in M_{K,\infty}}\max_{i_0+\cdots+i_n=\delta}\{|a_{i_0\dots i_n}|^{[K_v:\mathbb{Q}_v]}\},\ \text{and}\ h_{\mathrm{aff}}(f)=\frac{\log H_{K,\mathrm{aff}}(f)}{[K:\mathbb{Q}]}.$$

为了研究嵌入到 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 中的 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 的纯维闭子概形的扎里斯基闭包的凯莱形式，我们得到如下结果，其证明受到定理 5.14] 证明的启发。

引理 ***4.4***。— 设 K 为一个数域， $\mathcal{E}$ 为 *§2.3.3* 中定义的、在 $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ 上的厄米向量丛， X 为 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 的一个纯维数为 d 、次数为 δ 的闭子概形，且它是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中某个线性子簇的超曲面。令 $\psi_X \in \mathrm{Sym}^{\delta}_K\left(\bigwedge^{d+1}\mathcal{E}_K^{\vee}\right)$ 为 X 的凯莱形式。则存在一个元素 $\Psi_X \in \mathrm{Sym}^{\delta}_{\mathcal{O}_K}\left(\bigwedge^{d+1}\mathcal{E}^{\vee}\right)$，其在 K 上定义 ψ_X，并且满足

$$H_K(\psi_X)\leqslant H_{K,\mathrm{aff}}(\Psi_X)\leqslant m_1(K)^{\delta(n-d-1)+1}H_K(\psi_X),$$

其中仅依赖于 K 的常数 $m_1(K)$ 在 (23) 中引入。

证明。——根据定义， X 是由一个属于 $f \in \mathrm{Sym}^{\delta}_K(\mathcal{E}_K)$的元素和 $n-d-1$ 个属于 $\mathcal{E}_K$的元素完全交而成，这些元素记为 $\ell_1,\dots,\ell_{n-d-1}$。根据第二闵可夫斯基定理（参见 [**51**, §4.3]），存在常数 $c_0,c_1,\dots,c_{n-d-1} \in \mathcal{O}_K$，使得$c_0 f \in \mathrm{Sym}^{\delta}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{E})$且 $c_1\ell_1,\dots,c_{n-d-1}\ell_{n-d-1}\in\mathcal{E}$，满足

$$H_K(f)\leqslant H_{K,\mathrm{aff}}(c_0 f)\leqslant m_1(K)H_K(f),$$

and

$$H_K(\ell_i)\leqslant H_{K,\mathrm{aff}}(c_i\ell_i)\leqslant m_1(K)H_K(\ell_i)\ \text{for}\ i=1,\dots,n-d-1.$$

我们考虑 $c_0 f, c_1\ell_1, \dots, c_{n-d-1}\ell_{n-d-1}$的结式，它定义了一个形式$\Psi_X \in \mathrm{Sym}^{\delta}_{\mathcal{O}_K}\left(\bigwedge^{d+1}\mathcal{E}^\vee\right)$。根据常数 $c_0, c_1, \dots, c_{n-d-1}$的估计，结论得证。 □

令 $\Psi_X \in \mathrm{Sym}^{\delta}_{\mathcal{O}_K}\left(\bigwedge^{d+1}\mathcal{E}^\vee\right)$ 为引理 4.4 陈述中确定的对象。记

$$\Psi_X = \sum_{i=0}^{\delta} \Psi_{X,i}, \tag{25}$$

其中 $\Psi_{X,\,i}$ 表示 Ψ_X 中变量 $(s_0 \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_d})_{1\leqslant i_1<\cdots<i_d\leqslant n}$ 在 $\Psi_{X,\,i}$中的总次数恰为 i的单项式之和，其中 $i = 0, \dots\dots, \delta$。

令 $R \geqslant 2$。根据数域的 Bertrand 假设（参见 [**34**] 或 [**52**, 定理2]），对于数域 K，存在一个依赖于 K的常数 $\alpha(K)$，使得总能找到一个满足以下条件的素理想 $\mathfrak{p}$

$$N(\mathfrak{p}) \in]R/\alpha(K), R]. \tag{26}$$

这一事实将在下文定理的证明中用到。

4.2.3. — 为了构造一个仿射超曲面，以覆盖 §4.2.1 中所述簇内高度有界的整点，我们有以下结果。

定理 ***4.5.*** — 我们保留 *§4.2.1* 中的所有记号和构造。我们假设$\psi_{X,\delta} \neq 0$。在这种情况下，集合 $s(X'; B)$ 可以被一个由次数为 ω 的多项式定义的超曲面覆盖，该超曲面位于 $\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$中，且不包含 X'的一般点，并且有

$$\omega \leqslant C_3(n,d,K)\delta^{2-\frac{1}{d}} B^{\frac{1}{\delta^{1/d}}} \frac{\min\{h(\psi_{X,\delta}) + \delta\log B + \delta^2, b'(X)\}}{H_K(\psi_{X,\delta})^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}},$$

其中，常数 $C_3(n, d, K)$ 仅依赖于 n, d, K，其定义为

$$\begin{aligned} C_3(n,d,K) &= \exp(C_1(n,d,K))2^{\frac{N(n,d)+1}{d}}(N(n,d)+1)^{4/d}e^{2d\mathcal{H}_{N(n,d)}}e^{(d+1)/e} \\ &\quad \cdot B(n,d,K)^{d+1}C_2(n,d,K)\alpha(K)^{\frac{1}{d}}, \end{aligned}$$

$N(n, d) = \binom{n+1}{d+1} - 1$, $H_K(\psi_{X,\delta})$ 是多项式 $\psi_{X,\delta}$ 在 *(5)* 处的朴素高度；常数 $C_1(n, d, K)$ 在定理 *2.10* 中引入，常数 $C_2(n, d, K)$ 在引理 *4.2* 中引入，仅依赖于 n, d, K 的常数 $B(n, d, K)$ 在 *(27)* 中确定，而 $\alpha(K)$ 是 K 的伯特兰假设中的常数，在 *(26)* 中确定。

证明。——对于一个 $L \in \mathcal{O}_K$，我们考虑态射

$$\begin{array}{rccc} F_L : & \mathbb{P}(\mathcal{E}_K) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{E}_K) \\ & [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] & \mapsto & [x_0 : Lx_1 : \cdots : Lx_n] \end{array}$$

相对于上文所述的射影坐标，并考虑概形$F_L(X)$。根据 §3.3.2 中的记号和论证， $F_L(X)$ 的凯莱形式 $\psi_{F_L(X)}$

is

$$\psi_{F_L(X)} = \sum_{i=0}^{\delta} L^i \psi_{X,i}.$$

情况 I. – 若存在一个常数 $B(n,d,K)$，它依赖于 n,d,K，使得$B \leqslant \frac{1}{\delta} B(n,d,K)$，则 $B^{1/d\delta^{1/d}} \leqslant \sqrt[e]{e} B(n,d,K)$ 有一个仅依赖于 n,d,K 的上界， $B^{(d+1)/d\delta^{1/d}}$ 也有这样的上界。谨此提醒读者，上述常数 $B(n,d,K)$ 和对 B 的限制，均由下文证明中情况 II-2 的计算得出。

由定理 2.10 结合命题 3.4 中的高度比较，存在一个由齐次多项式 $G(T_0,\dots,T_n)$ 定义的超曲面，它位于$\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中，次数至多为

$$\begin{aligned} & \exp(C_1(n,d,K)) 2^{\frac{N(n,d)+1}{d}} (N(n,d)+1)^{4/d} e^{2d\mathcal{H}_{N(n,d)}} B^{\frac{d+1}{d\delta^{1/d}}} \delta^{4-1/d} \frac{b'(\psi_X)}{H_K(\psi_X)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}} \\ \leqslant \quad & \exp(C_1(n,d,K)) 2^{\frac{N(n,d)+1}{d}} (N(n,d)+1)^{4/d} e^{2d\mathcal{H}_{N(n,d)}} B^{\frac{d+1}{d\delta^{1/d}}} e^{(d+1)/e} B(n,d,K)^{d+1} \\ & \cdot B^{\frac{1}{\delta^{1/d}}} \delta^{4-1/d} \frac{b'(\psi_X)}{H_K(\psi_X)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}} \end{aligned}$$

它覆盖 $S(X;B)$，但不包含 X 的一般点。由于 $H_K(\psi_X) \geqslant H_K(\psi_{X,\delta}) \geqslant 1$，根据引理 4.2 中的计算以及命题 2.6 中 $b'(X)$ 的上界，我们得到

$$\frac{\delta^2 b'(\psi_X)}{H_K(\psi_X)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}} \leqslant C_2(n,d,K) e \frac{\min\{h(\psi_{X,\delta}) + \delta^2, \delta^2 b'(\psi_X)\}}{H_K(\psi_{X,\delta})^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}}.$$

那么，由 $G(1,T_1,\dots,T_n)$ 在 $\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$ 中定义的仿射超曲面满足要求。

情况 II. – 我们选择 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 中由一些 $\mathcal{O}_K$-系数方程定义的 X 的一个 $\mathcal{O}_K$-模型 $\mathscr{X}'$，其凯莱形式记为 Ψ_X，并要求

$$H_K(\psi_X) \leqslant H_{K,\mathrm{aff}}(\Psi_X) \leqslant m_1(K)^{\delta(n-d-1)+1} H_K(\psi_X),$$

其存在性由引理 4.4 保证。关于$H_{K,\mathrm{aff}}(.)$ 的定义，参见定义 4.3。

令 $B \geqslant 2$，且 $\alpha(K)$ 为式 (26) 中的常数。根据数域的 Bertrand 假设以及上述事实，我们有如下论证。

情况 II-1. – 如果存在素理想 $\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_K$，使得 $N(\mathfrak{p}) \in]B/\alpha(K)\ B]$且 $\mathfrak{p} \nmid \Psi_{X,\,0}$，那么存在非零元素 $L \in \mathfrak{p}$，使得 $N(\mathfrak{p}) \leqslant N(L) \leqslant m_1(K) N(\mathfrak{p})$，其中式 (23) 中引入了第二闵可夫斯基定理中的常数 $m_1(K)$。

在这种情况下，我们将定理 2.10 应用于 $F_L(X)$，于是存在 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的一个超曲面，其次数小于

$$\exp(C_1(n,d,K)) 2^{\frac{N(n,d)+1}{d}} (N(n,d)+1)^{4/d} e^{2d\mathcal{H}_{N(n,d)}} B^{\frac{d+1}{d\delta^{1/d}}} \delta^{4-1/d} \frac{b'(\psi_{F_L(X)})}{H_K\left(\psi_{F_L(X)}\right)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}},$$

它覆盖 $S(F_L(X); B)$，但不包含 $F_L(X)$ 的一般点。我们用 $G(T_0, \ldots\ldots, T_n)$ 表示定义该超曲面的齐次多项式。

由于 $\psi_{X,\delta} \neq 0$，经初等计算可得

$$H_K\left(\psi_{F_L(X)}\right) \geqslant N(L)^{\delta} H_K(\psi_{X,\delta}) \geqslant \alpha(K)^{-\delta} B^{\delta} H_K(\psi_{X,\delta}).$$

由上述估计可得

$$\frac{\delta^2 b'(\psi_{F_L(X)})}{H_K\left(\psi_{F_L(X)}\right)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}} \leqslant C_2(n,d,K) e \left(\frac{\alpha(K)}{B}\right)^{\frac{1}{d\delta^{1/d}}} \frac{h(\psi_{X,\delta}) + \delta^2 + \delta \log B}{H_K(\psi_{X,\delta})^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}}$$

由引理 4.2 得到。

此外，根据 §3.3.2，对于$\psi_{F_{L(X)\,0}} = \psi_{X,0}$ 和 $\Psi_{F_{L(X)\,0}} = \Psi_{X,0}$，再由 $\mathfrak{p}$ 和 $L \in \mathfrak{p}$的限制，可得

$$b'(\psi_X) \leqslant b'(\Psi_{F_L(X)}) \leqslant b'(\psi_X) \exp\left(\frac{\log(m_1(K)^{\delta(n-d-1)+1} N(L))}{m_1(K)^{\delta(n-d-1)+1} N(L)}\right) \leqslant b'(\psi_X) e^{1/e}$$

经初等计算可得。因此我们有

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^2 b'(\psi_{F_L(X)})}{H_K\left(\psi_{F_L(X)}\right)^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}} \\ \leqslant \quad & \alpha(K)^{\frac{1}{d}} C_2(n,d,K) e B^{-\frac{1}{d\delta^{1/d}}} \frac{\min\{h(\psi_{X,\delta}) + \delta^2 + \delta \log B, b'(\psi_X)\}}{H_K(\psi_{X,\delta})^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}} \end{aligned}$$

基于上述计算，方程 $F_L(G(L, t_1, \ldots, t_n))$ 在 $\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$ 中定义的超曲面满足我们的要求。

情况 II-2. – 现在我们假设 $B > 2$，并且对于所有范数位于区间 $]B/\alpha(K)\ B]$ 内的素理想 $\mathfrak{p}$，总有 $\mathfrak{p} \mid \Psi_{X,0}$。于是我们有

$$\left(\prod_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} \mathcal{O}_K \\ N(\mathfrak{p}) \in]B/\alpha(K), B]}} \mathfrak{p}\right) \mid \Psi_{X,0}.$$

– 如果 $\psi_{X,0} \neq 0$，则有

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} \mathcal{O}_K \\ N(\mathfrak{p}) \in]B/\alpha(K), B]}} \log N(\mathfrak{p}) \leqslant h(\psi_{X,0}) + (\delta(n-d-1)+1) m_1(K).$$

根据命题 2.9 对小高度点的控制、命题 3.4 对高度 $h_{\mathcal{O}(1)}(X)$ 和 $h(\psi_X)$ 的比较，以及以下事实 ——

$h(\psi_X) \geqslant h(\{\mathrm{v4}.\ 0\})$，若

$$\begin{aligned}&\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spm}\mathcal{O}_K\\ N(\mathfrak{p})\in]B/\alpha(K),B]}}\log N(\mathfrak{p})\\ >\ & \delta(d+1)\left(\log B - B_1(d)+\frac{7}{2}\log(n+1)+\frac{N+1}{d+1}\log 2\right)\\ &+4\delta\log(N+1)-\frac{\delta}{2}\mathcal{H}_N+(\delta(n-d-1)+1)m_1(K)\end{aligned}$$

成立。

经过上述论证，我们只需处理以下情形：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spm}\mathcal{O}_K\\ N(\mathfrak{p})\in]B/\alpha(K),B]}}\log N(\mathfrak{p})\\ \leqslant\ & \delta(d+1)\left(\log B - B_1(d)+\frac{7}{2}\log(n+1)+\frac{N+1}{d+1}\log 2\right)\\ &+4\delta\log(N+1)-\frac{\delta}{2}\mathcal{H}_N+(\delta(n-d-1)+1)m_1(K).\end{aligned}$$

由 (12) 得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spm}\mathcal{O}_K\\ N(\mathfrak{p})\in]B/\alpha(K),B]}}\log N(\mathfrak{p}) &\geqslant \left(1-\frac{1}{\alpha(K)}\right)B-\epsilon_1(K,B)+\epsilon_1\left(K,\frac{B}{\alpha(K)}\right)\\ &\geqslant \left(1-\frac{1}{\alpha(K)}-2\kappa_1(K)\right)B,\end{aligned}$$

其中，$\kappa_1(K)\geqslant 0$ 是仅依赖于 (17) 中引入的 K 的常数。存在一个依赖于 n,d,K 的常数 $B(n,d,K)$，使得当满足以下条件时，该不等式成立：

$$B\leqslant\frac{1}{\delta}B(n,d,K). \tag{27}$$

此情形已在情况 I 中处理，其中情况 I 中的常数 $B(n,d,K)$ 与上述常数完全相同。

– 若 $\psi_{X,0}=0$，由引理 4.1，存在一个元素 $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{Z}^n$，其 $\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|a_i|\}\leqslant\delta$，使得 $\psi_{T_{\mathbf{a}}(X)\,0}\neq 0$，其中 $T_{\mathbf{a}}$ 按照 §3.3.4 中的定义给出。在此情形下，我们有 $h(\psi_{X,\delta})=h(\psi_{T_{\mathbf{a}}(X)\,\delta})$，且 $b'(\psi_X)=b'(\psi_{T_{\mathbf{a}}(X)})$。于是，将上述论证应用于 $T_{\mathbf{a}}(X)$ 并以 $B+\delta$ 替换 B，即可得到相同的结论。

综上，我们得出该断言。 □

注 ***4.6***。— 在定理 2.10 和定理 4.5 中，我们要求研究对象是线性子空间中的超曲面，而不是一般的簇。事实上，

主要障碍在于研究算术 Hilbert–Samuel 函数的一致下界，而对于这一特殊情形，我们只有关于簇的高度的最优依赖关系。对于一般情形，我们只能得到更差的估计，见 [**18**], 以及另见 [**15**, §4]。

注 ***4.7***。——在定理 4.5 的证明中，我们使用了 (12) 中关于素理想分布的估计。若假设广义黎曼猜想成立，则可通过 [**26**], 得到更明确的估计，从而得到定理 2.10 中对数域 K 的更明确依赖。若我们在 $\mathbb{Q}$ 或全虚域上进行研究，则无需假设广义黎曼猜想也能得到这样的明确估计，参见 [**28**, 定理 2]。广义黎曼猜想所起的这一作用已在 [**39**, §7] 中讨论。

4.3. 一些有用的直接推论。——定理 4.5 有一些直接推论，这些推论对后续研究很有用。本节沿用定理 4.5 中的全部记号。

4.3.1. ——首先，我们给出定理 4.5 的一个直接推论，以便后续应用。

推论 ***4.8***。 — 沿用定理 *4.5* 中的记号和条件。集合 $s(X';B)$ 可以被 $\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$ 中的一个次数为 ω 的超曲面覆盖，并且

$$\omega \leqslant C_4(n,d,K)\delta^{3-\frac{1}{d}}\frac{B^{\frac{1}{\delta^{1/d}}}\max\{\log B,\delta\}}{H_K(\psi_{X,\delta})^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}}$$

该超曲面不包含 X' 的一般点，其中常数

$$\begin{aligned} C_4(n,d,K) &= C_3(n,d,K)C_2(n,d,K)ed(d+1)\\ &\quad +\Big(B_1(d)-\frac{7}{2}\log(n+1)+\frac{N(n,d)+1}{d+1}\log 2\\ &\quad +\frac{4}{d+1}\log(N(n,d)+1)-\frac{1}{2(d+1)}\mathcal{H}_{N(n,d)}\Big) \end{aligned}$$

仅取决于 n,d,K, $C_2(n,d,K)$ 在引理 *4.2* 中定义， $C_3(n,d,K)$ 在定理 *4.5* 中定义， $B_1(d)$ 在 (9) 中定义，以及 $N(n,d)=\binom{n+1}{d+1}-1$。此外，若假设 $\psi_{X,\delta}$ 是绝对不可约的，则有

$$\omega \leqslant C_4(n,d,K)\delta^3 B^{\frac{1}{\delta^{1/d}}}.$$

证明。 — 若

$$\begin{aligned} \frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]} &< \frac{h(\psi_X)}{(d+1)\delta}+B_1(d)-\frac{7}{2}\log(n+1)+\frac{N(n,d)+1}{d+1}\log 2\\ &\quad +\frac{4}{d+1}\log(N(n,d)+1)-\frac{1}{2(d+1)}\mathcal{H}_{N(n,d)}, \end{aligned}$$

于是直接由命题 2.9 以及命题 3.4 中的高度比较，便得到该断言。

If

$$\begin{aligned}\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]} &\geqslant \frac{h(\psi_X)}{(d+1)\delta}+B_1(d)-\frac{7}{2}\log(n+1)+\frac{N(n,d)+1}{d+1}\log 2\\ &\quad+\frac{4}{d+1}\log(N(n,d)+1)-\frac{1}{2(d+1)}\mathcal{H}_{N(n,d)},\end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}h(\psi_{X,\delta}) &\leqslant h(\psi_X)\leqslant \delta\Big(\frac{(d+1)\log B}{[K:\mathbb{Q}]}-(d+1)B_1(d)-\frac{7(d+1)}{2}\log(n+1)\\ &\quad+(N(n,d)+1)\log 2+4\log(N(n,d)+1)-\frac{1}{2}\mathcal{H}_{N(n,d)}\Big).\end{aligned}$$

与引理 4.2 的证明相同，我们有

$$\delta^2 b'(\psi_X)\leqslant C_2(n,d,K)\left(h(\psi_X)+\delta^2\right)$$

根据命题 2.6。再由定理 4.5 中辅助超曲面的次数上界，考虑上述 $h(\psi_{X,\,\delta})$ 的上界，即可得到所需结果。

此外，若假设 $\psi_{X,\,\delta}$ 是绝对不可约的，那么 ψ_X 的非绝对不可约约化集合是 $\psi_{X,\,\delta}$ 的非绝对不可约约化集合的子集，因此有 $b'(\psi_X)\leqslant b'(\psi_{X,\,\delta})$。于是得到

$$\begin{aligned}\omega &\leqslant C_3(n,d,K)\delta^{2-\frac{1}{d}}B^{\frac{1}{\delta^{1/d}}}\frac{b'(X)}{H_K(\psi_{X,\delta})^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}}\\ &\leqslant C_3(n,d,K)\delta^{2-\frac{1}{d}}B^{\frac{1}{\delta^{1/d}}}\frac{b'(\psi_{X,\delta})}{H_K(\psi_{X,\delta})^{\frac{1}{d\delta^{1+1/d}}}}\\ &\leqslant C_4(n,d,K)\delta^3 B^{\frac{1}{\delta^{1/d}}}\end{aligned}$$

经过一些初等计算，我们得到该估计。 □

4.3.2。—接下来，我们考虑维数为 1 和 2 的情形，稍后可直接应用这些结果。

推论 ***4.9***。—设 X' 是 $\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$ 中的一条几何整曲线，其射影闭包 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中某个平面的超曲面，次数为 δ。那么有

$$\#s(X';B)\leqslant C_4(n,1,K)\delta^3\frac{B^{1/\delta}\max\{\log B,\delta\}}{H_K(\psi_{X,\delta})^{1/\delta^2}}.$$

如果我们进一步假设$\psi_{X,\,\delta}$ 是绝对不可约的，那么我们有

$$\#s(X';B)\leqslant C_4(n,1,K)\delta^4 B^{1/\delta},$$

其中，$\psi_{X,\,\delta}$ 遵循 *§4.2.1* 中的记号，而常数 C_4（n，1，K）在推论 *4.8* 中定义。

证明。——这两个估计是以下事实的推论：将 $d=1$ 的情形与交理论中的贝祖定理（参见 [**21**, 定理 8.4]）结合起来，以及事实 $H_K(\psi_{X,\,\delta})\geqslant 1$。

□

推论 ***4.10***。——设 X 是 $\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$ 中的一个几何整曲面，其射影闭包 X 是 $\mathbb{P}$ 中一个超平面的超曲面。若 $\psi_{X,\,\delta}$ 是绝对不可约的，则 $s(X';\ B)$ 可由一个超平面覆盖，而该超平面的射影闭包次数小于

$$C_4(n,2,K)\delta^3 B^{1/\sqrt{\delta}},$$

其中常数 $C_4(n,2,K)$ 的记号遵循推论 *4.8*。

证明。——这可直接由推论 4.8 得出。 □

5. 一些预备知识

一般而言，研究任意射影簇 X 上 $S(X;B)$ 的一致上界颇为困难。然而，借助特定方法，通常可以将一般情形归约为特殊情形，而这些特殊情形本身也构成了一个重要的研究课题。研究某些特殊情形时，还会涉及相关的几何性质和算术性质。

本节给出后续研究有界高度有理点的一致上界所需的预备结果。

5.1. 归约到满足 NCC 条件的仿射曲面情形。——在这一部分，我们将研究对象归约到满足某些条件的低维情形。

5.1.1。— 对于嵌入在 $\mathbb{P}^n$ 中、维数为 d、次数为 δ 的任意射影簇 X，可以构造一个双有理投影 $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{d+1}$，使其在 X 上的限制双有理地映到其像。同时，X 上有理点高度的变化可以用 n、d 和 δ 一致控制。如果不考虑 $\#S(X;B)$ 的一致上界对 δ 的依赖性，我们只需研究射影超曲面的情形。

这一思想源自 [**10**]；进一步的发展和应用参见 [**47, 50, 13, 43, 17**]。

5.1.2。— 设 $f(T_0,\dots,T_n)$ 是数域 K 上次数为 δ 的绝对不可约齐次多项式，它定义了 $\mathbb{A}_0(\mathcal{E}'_K)$ 中的超曲面 X'，以及 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的超曲面 X；其中 $\underline{\mathrm{Spec}}\,\mathcal{O}_K$ 上的厄米向量丛 $\mathcal{E}'=(\mathcal{O}_K^{n+2},(\|\cdot\|_v)_{v\in M_{K,\infty}})$ 对所有 $v\in M_{K,\infty}$ 都配备了 ℓ^2-范数。在这种情形下，我们有

$$\#S(X;B)\leqslant \#s(X';B)$$

对于一个 $B\in\mathbb{R}$，其中 $s(X';B)$ 引自 §4.1.2。

根据上述论证，我们只需考虑 $\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$ 中几何不可约超曲面的情形，其在 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的射影闭包的次数为 δ。

5.1.3. — 事实上，并非 $\mathbb{A}_K^{n+1}$ 中的所有仿射超曲面都与本研究相关。在 [**17**]，中，作者阐明了哪些类型的超曲面需要纳入考量。为使论述自成一体，我们概述 [**17**], 的部分内容，尤其是其中关于全局域的 [**17**, §4] 的论证。

定义 ***5.1*** **(NCC 条件).** — 设 $f \in K[T_1, \dots, T_n]$ 是数域 K 上的一个多项式，其中 $n \geqslant 3$，并设 X' 是 $\mathbb{A}^n_K$ 中由 f 定义的仿射超曲面。若存在一个 K-线性态射，则称多项式 f 关于某条曲线是柱状的

$$\ell : \mathbb{A}^n_K \to \mathbb{A}^2_K$$

以及一条曲线 C 位于 $\mathbb{A}^2_K$ 中，满足 $X' = \ell^*(C)$。我们将“不以某条曲线为柱面”简称为 NCC，并称 X' 满足 NCC 条件，若 f 满足该条件。

注意，若不存在 K-线性形式 $\ell_1(T_1, \dots, T_n)$ $\ell_2(T_1, \dots, T_n)$ 及多项式 $g \in K[T_1, T_2]$ 使得.....，则 $f \in K[T_1, \dots, T_n]$ 满足关于 K 的 NCC 条件。

$$f(T_1, \dots, T_n) = g\left(\ell_1(T_1, \dots, T_n), \ell_2(T_1, \dots, T_n)\right).$$

定义 ***5.2*** **(r-不可约)** 。——设 K 是一个数域，且 $f \in K[T_1, \dots, T_n]$。若 f 在 K上没有次数小于或等于 r 的因子，则称多项式 f在 K 上是 r-不可约的（若基域没有歧义，也称为 r-不可约）。

下文将用到推论 4.20] [**17**, ; 借助 [**17**, §4.2]中的有效希尔伯特不可约性结果，该推论允许我们用超平面截取高维仿射超曲面，同时保持 NCC 条件和 2-不可约性。对于多项式 $f \in \mathcal{O}_K[T_1, \dots, T_n]$，我们用 $V(f)$ 表示由 f定义的 $\mathbb{A}^n_K$的闭子概形。

命题 ***5.3***。——设 $f \in \mathcal{O}_K[T_1, \dots, T_n]$ 是一个次数为 $\delta \geqslant 2$ 的多项式，其中 $n \geqslant 4$。假设 f 满足 *NCC* 条件，且其最高次齐次部分 f_δ 对某个整数 $r \geqslant 1$ 是 r- 不可约的。那么，存在高度至多为 $O_n(\delta^3)$ 和 $t \in [O_n(\delta^3)]_{\mathcal{O}_K}$ 的线性无关线性形式 ℓ、ℓ'，使得 $f_\delta|_{V(\ell - t\ell')}$ 是 r- 不可约的，并且至多有 $O_n(\delta)$ 个值 $b \in K$ 使得 $f_\delta|_{V(\ell - t\ell' - b)}$ 不满足 *NCC* 条件。

5.1.4。——我们总结一下下面将要证明的结果。设 K 是一个数域，且 $f(t_1, t_2, t_3)$ 是一个次数为 δ 的绝对多项式。我们假设 f 的齐次次数 δ 部分 f_δ 在定义 5.2 中是 2-不可约的，并且 f 满足定义 5.1 中的 NCC 条件。设 $\mathbb{A}^3_K$ 中由 f 定义的超曲面为 X'。根据命题 5.3，对于固定的 $\theta \in \mathbb{R}$，如果我们证明

$$\#s(X'; B) \ll_{K,\delta,\epsilon} B^{\theta+\epsilon}$$

对所有 $\epsilon > 0$均成立，因此，对于 $\mathbb{A}^n_K$中由满足 NCC 条件的 2-不可约方程定义、次数为 δ 的任意超曲面 X''，我们有

$$\#s(X''; B) \ll_{K,\delta,\epsilon} B^{\theta+n-3+\epsilon}.$$

特别地，如果我们能够在不含 ϵ因子的情况下，为 $\mathbb{A}^3_K$ 中的曲面证明一个一致上界，那么对于一般超曲面也同样如此。

当我们考虑 $\delta = 3$的情形时，1-不可约性可以直接推出2-不可约性。因此，在这种情况下，我们只需假设 f_δ 是绝对不可约的。

5.2. 三次曲面的分类回顾。— 本节中，我们列出 $\mathbb{P}^3_k$ 上定义在任意域 k上的三次曲面的一些有用的几何性质。关于这一主题的系统介绍，请读者参阅 [**19**, 第 9] 章。

5.2.1. — 设 X 是 $\mathbb{P}^3_k$ 中的三次曲面。若 X 不是直纹曲面，则 X 是正规的，且不可能是曲线锥。此外， X 在 $\mathbb{P}^3_k$ 中至多包含 27 条直线。关于这一性质的证明以及 $\mathbb{P}^3_k$ 中正规三次曲面的更精确分类，请参阅 [**19**, §9.3] 。

我们将 $\mathbb{P}^3_k$ 中位于 X 内的圆锥曲线的希尔伯特概形记为 $\mathrm{Hilb}^{2t+1}(X)$，因为众所周知，此类圆锥曲线的希尔伯特多项式为 $2t+1 \in \mathbb{Q}[t]$。每条圆锥曲线都是由 X 与一个经过 X中一条直线的平面的交得到的。在此情形下，$\dim(\mathrm{Hilb}^{2t+1}(X)) = 1$ ，且 $\mathrm{Hilb}^{2t+1}(X)$ 至多包含 27 个不可约分支。

5.2.2. — 设 X 是 $\mathbb{P}^3_k$ 中的直纹三次曲面。在此情形下，除锥面以及以平面三次曲线为准线的柱面之外，其他直纹三次曲面（即所谓的斜直纹三次曲面）均可按如下方式定义：给定一个位于平面 P 中的圆锥曲线 C ，一条在 O处与 P 相交的直线 L_1，以及 C 上的点 A 与 L_1 上的点 B之间的一个射影变换，使得 O 不是重点，则该直纹三次曲面就是直线 AB 的并。

根据 [**19**, §9.2], , 如果 X 不是平面曲线的锥面，它就一定不是正规曲面。此外 , 其奇异轨迹是 $\mathbb{P}^3_k = \mathrm{Proj}\,(k[T_0, T_1, T_2, T_3])$ 中的一条直线，维数为 **1**。

若我们假设奇异轨迹的重数为 $T_0 = T_1 = 0$ 2，那么 X 射影等价于以下两者之一

$$T_0^2 T_2 + T_1^2 T_3 = 0$$

or

$$T_2 T_0 T_1 + T_3 T_0^2 + T_1^3 = 0.$$

5.2.3。——根据命题 5.3，若要研究满足 NCC 条件的 $\mathbb{A}^3_K$ 三次曲面，就不必考虑锥面的情形。相反，我们只需考虑射影闭包为非直纹曲面或斜直纹曲面的情形，此时定义方程是 2-不可约的。

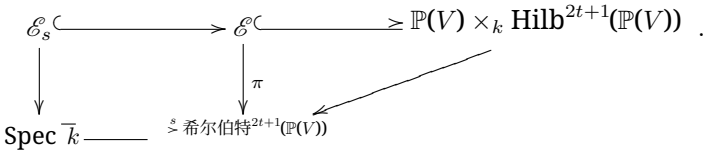
5.3. 三次曲面中圆锥曲线的几何性质。——在本部分中，我们介绍域 $\mathbb{P}^3$ 上三次曲面中圆锥曲线希尔伯特概形的一些几何性质。由于控制圆锥曲线中有理点的贡献十分重要，因此需要考虑一些相关的几何性质。本部分中，我们始终在特征为 0 的任意域 k 上进行讨论。

5.3.1. — 设 V 是一个 4 维的 k-向量空间。我们考虑 $\mathbb{P}(V)$ 中的圆锥曲线，并要求它们是绝对不可约的。根据 [**29**, §1.b], , 每条圆锥曲线 C 都是一条正则曲线，且位于 $\mathbb{P}(V)$ 的一个平面内；通过直接计算可得，它关于典范丛的希尔伯特多项式为 $p_C(t) = 2t+1 \in \mathbb{Q}[t]$ 。我们用 $\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(V))$ 表示 $\mathbb{P}(V)$ 中圆锥曲线的希尔伯特概形。

令 S 为 $\mathbb{P}(V^\vee)$ 上的通用子丛。那么，$\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(V))$ 是对称平方 $\mathrm{Sym}^2(S^\vee)$ 的射影化。简而言之，这个希尔伯特概形

是 $\mathbb{P}(V^\vee)$ 上的 $\mathbb{P}^5$-丛。关于这一主题的更多细节，请参阅 [**54**, 第 198] 页和 [**21**, §B.5]，另见 [**50**, §4]。

5.3.2. — 我们将 $\mathscr{E}$ 记为 $\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(V))$ 上的泛族，并将 $\pi:\mathscr{E}\to\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(V))$ 记为结构态射。这意味着，对于每个 $s\in\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(V))(k)$，纤维 $\mathscr{E}_s$ 是 $\mathbb{P}(V)$ 中与点 s 对应的圆锥曲线。换言之，我们有如下交换图



Let

$$\tau:\mathscr{E}\to\mathbb{P}(V)$$

是从 $\mathscr{E}$ 到 $\mathbb{P}(V)\times_k\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(V))$ 的嵌入与从 $\mathbb{P}(V)\times_k\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(V))$ 到 $\mathbb{P}(V)$ 的典范投影的复合映射，并令 $M=\tau^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$。

我们考虑

$$\pi:\mathscr{E}\longrightarrow\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(V)),$$

其相对维数为 1。根据 Deligne 配对的函子性，存在一个线丛 $N=\langle M,\ M\rangle$ 于 $\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(V))$ 上，其中 Deligne 配对 $\langle .,\ .\rangle$ 是多重线性的。我们有如下性质。

命题 ***5.4***。——沿用以上所有记号和构造，对于每个 $s\in\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(V))(k)$，我们有 $\deg(N|_s)=2$。

证明。——我们有 $M\cdot\mathscr{E}_s=\mathcal{O}(1)\cdot\mathscr{E}_s$，其中前一个交在 $\mathscr{E}$ 中，后一个交在 $\mathbb{P}(V)$ 中。于是根据 [**22**, 定理 5.3.1]（另见 [**35**, 定理 5.8]），可得

$$\langle M|_{\mathscr{E}_s},M|_{\mathscr{E}_s}\rangle=\langle M,M\rangle|_s=N|_s.$$

于是我们有

$$\deg(N|_s)=\deg(M\cdot\mathscr{E}_s)=\deg(\mathcal{O}(1)\cdot\mathscr{E}_s)=2,$$

其中最后一个等式来自圆锥曲线的定义。 □

5.3.3. — 设 X 是 $\mathbb{P}(V)$ 中一个非 ruled 的几何不可约三次曲面。根据 [**19**, §9.3] 中总结于 §5.2.1 的事实，X 在 $\mathbb{P}(V)$ 中至多包含 27 条直线。在这种情况下，我们用 $\mathrm{Hilb}^{2t+1}(X)$ 表示 $\mathbb{P}(V)$ 中包含于 X 的圆锥曲线的希尔伯特概形。根据 [**50**, 引理 4.3],，我们有 $\dim\left(\mathrm{Hilb}^{2t+1}(X)\right)=1$，且它至多由 27 个不可约分支组成。

我们将 $\mathrm{Hilb}^{2t+1}(X)=\bigcup H_i$ 记为，其中 I 是指标集，且每个 H_i 都是 $i\in I$ 的一个$_{i\in I}$不可约分支。

对于每个 $s\in\mathrm{Hilb}^{2t+1}(X)(k)\subseteq\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(V))(k)$，我们有 $\deg(N|_s)=2$。根据交理论中的贝祖定理（参见 [**21**, 命题 8.4]），每个 H_i 都是 $\mathbb{P}^1_k$的非空开子集。线丛 $N|_{H_i}$ 可唯一延拓到 $\mathbb{P}^1_k$上，且仅由其次数决定，因为 $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_k)\cong\mathbb{Z}$。于是我们有

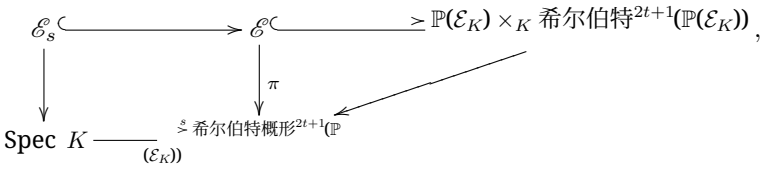
$$N|_{H_i}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)|_{H_i}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)|_{H_i}^{\otimes 2}\tag{28}$$

在每个 H_i 上通过上述概形同构，其中 $i \in I$。

5.4. 算术交的 Deligne 配对。 — 在本部分中，我们比较 $\mathbb{P}^3_K$ 中圆锥曲线的高度与其在数域上的希尔伯特概形中对应点的高度，其中 K 是一个数域。得益于 [**59**], 的准射影簇上的阿拉克洛夫理论，我们得以比较算术簇的高度与其在模空间中对应点的高度。

5.4.1. — 设 K 为一个数域， $\mathcal{E}$ 为 §2.3.3 中定义在 Spec $\mathcal{O}_K$ 上的秩为 4 的厄米向量丛。令 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)$ 为万有丛 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$，并令 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)$ 为厄米线丛，其配备了对应的 Fubini–Study 范数，对每个 $v \in M_{K,\infty}$ 均如此。

我们将 §5.3.2 中的构造保留在数域 K 上或其整数环 $\mathcal{O}_K$ 上。设 $\mathscr{E}$ 为 Spec K 上希尔伯特概形 $\mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K))$ 的泛族，且 $s \in \mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K))(K)$。于是我们有交换图



其中， $\mathscr{E}_s$ 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中对应于 $s \in \mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K))(K)$的圆锥曲线。

Let

$$\tau : \mathscr{E} \to X$$

是从 $\mathscr{E}$ 到 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K) \times_K \mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K))$的嵌入与从 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K) \times_k \mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K))$到 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 的典范投影的复合映射，并令 $M = \tau^* \mathcal{O}(1)$。

5.4.2。—根据算术交理论，我们有

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(\mathscr{E}_s) = h_{\overline{M}}(\mathscr{E}_s) = \widehat{\deg}_n(\widehat{c}_1(\overline{M})^2 \cdot \mathscr{E}_s)$$

对于每个 $s \in \mathrm{Hilb}^{2t+1}(\mathbb{P}(\mathcal{E}_K))(K)$。

令$\overline{N} = \langle \overline{M}, \overline{M} \rangle$为 $\mathscr{E}$上的Deligne 配对。我们考虑 $\langle M|_{\mathscr{E}_s}, M|_{\mathscr{E}_s} \rangle$。由Deligne 配对关于 [**59**, §4.3.2], 的函子性，我们有

$$\langle \overline{M}|_{\mathscr{E}_s}, \overline{M}|_{\mathscr{E}_s} \rangle = \langle \overline{M}, \overline{M} \rangle|_s = \overline{N} \cdot s,$$

这意味着

$$h_{\overline{M}}(\mathscr{E}_s) = h_{\overline{N}}(s),$$

其中 N 配备了诱导度量。

5.4.3. — 令 $\mathcal{E}$ 为 §2.3.3 中定义在 Spec $\mathcal{O}_K$ 上的秩为 4 的厄米向量丛，并令 X 为 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的一条几何不可约三次曲面，它非直纹且至少包含一条 K-有理直线。由 §5.3.3，$\mathrm{Hilb}^{2t+1}(X) = \bigcup_{i \in I} H_i$, 其中 I 为指标集，且每个 H_i 都是一个维数为 1 的不可约分支。此外，每个 H_i 都是 $\mathbb{P}^1_K$, $i \in I$ 的非空开子集。

设 $h(.)$ 是 $\mathbb{P}^1_K$ 上的一个经典高度，它通过从 H_i 到 $\mathbb{P}^1_K$ 的同构，在 $\mathrm{Hilb}^{2t+1}(X)$ 的任意不可约分支上定义一个高度函数。根据 Weil 的

高度机器（参见 [**32**, 定理 B.3.2]）， $h(.)$ 关于 $\mathcal{O}(1)$ 确定。根据事实 (28) 和 §5.4.2，存在一个常数 $C(X,\ K)$，它取决于 X 和 K，使得

$$\left|h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(\mathscr{E}_s)-2h(s)\right|\leqslant C(X,K), \tag{29}$$

其中 $s\in \mathrm{Hilb}^{2t+1}(X)(K)$，而 $C(X,\ K)$ 来自对厄米线丛度量的比较。

在§6.2中，我们将通过考察其凯莱形式，更精确地比较圆锥曲线的高度与其在圆锥曲线希尔伯特概形中的参数化点的高度。

6. 圆锥曲线中的有理点与整点

在 [**48**], 中，作者考察了任意次数曲面中的圆锥曲线希尔伯特概形内点的高度，并计算了曲面中直线补集内有界高度有理点的数量。在[**49, 50**] 中，我们改进了其中一些技术，以完善先前的工作。在本节中，我们运用凯莱形式和阿拉克洛夫的技术，改进先前的一些工作，特别是针对非直纹三次曲面的情形。

6.1. 完全交的凯莱形式。— 在本部分中，我们描述非直纹三次曲面中圆锥曲线的凯莱形式的结构。

6.1.1. — 设 k 是一个域， V 是一个 4 维 k-向量空间， X 是 $\mathbb{P}(V)$ 中一个非直纹三次曲面，它自然地是几何整的。在这种情况下， X 在 k 上至多包含 27 条直线。我们考虑 X 至少包含一条 k-有理直线的情形；否则，根据交理论中的贝祖定理， X 不包含 k 上的圆锥曲线。

在这种情况下，设 $\ell_1,\ \ell_2\in V^\vee$ 是生成这条直线的两个线性形式，且它们 k-线性无关。也就是说，对于每个非零元组 $(t_1,\ t_2)\in k^2$，由 $t_1\ell_1+t_2\ell_2$ 定义的超平面都包含这条直线。我们将这个超平面记作 $H_{t_1,\ t_2}$。

我们考虑 X 与 $H_{t_1,\ t_2}$ 在 $\mathbb{P}(V)$ 中的交。随着 t_1 和 t_2 变化， $H_{t_1,\ t_2}$ 与 X 的交循环由 ℓ_1 和 ℓ_2 定义的直线，以及 $\mathbb{P}(V)$ 中的一条圆锥曲线或两条直线组成。根据上述构造，由 ℓ_1 和 ℓ_2 定义的直线与 $t_1,\ t_2\in k$ 在 $H_{t_1,\ t_2}$ 中的选取无关。

6.1.2. — 我们考虑交循环 $H_{t_1,t_2}\cdot X$ 在 $\mathbb{P}(V)$ 中的凯莱形式。根据命题 3.1，该凯莱形式由 $\mathbb{P}\left(\bigwedge^2 V^\vee\right)$ 中的一个超平面和一个圆锥曲面组成（若圆锥曲线退化，则圆锥曲面可能退化为两个超平面）。设 T_0,T_1,T_2,T_3 是 V 的一组基，而 s_0,s_1,s_2,s_3 是其在 $V^\vee$ 中的对偶基，那么上述凯莱形式由变量 $(s_i\wedge s_j)_{0\leqslant i<j\leqslant 3}$ 的一个齐次多项式确定。此外，上述直线和圆锥曲线的几何重数均为 1。

我们将上述构造所得交循环的凯莱形式记为$\psi_{H_{t_1,t_2}\cdot X}$。于是我们将$\psi_{H_{t_1,t_2}\cdot X}$ 写成如下形式

$$\psi_{H_{t_1,t_2}\cdot X}=b(t_1,t_2)\cdot\psi_{X,\mathrm{line}}^{t_1,t_2}\cdot\psi_{X,\mathrm{conic}}^{t_1,t_2}, \tag{30}$$

其中， $\psi^{t_1,X^{t_2}}$,line 是直线的凯莱形式， $\psi^{t_1,X^{t_2}}$,conic 是圆锥曲线的凯莱形式，而 $b(t_1,t_2)$ 是变量 t_1,t_2 的齐次多项式，也可能是常数。 $\psi^{t_1,X^{t_2}}$,line 和 $\psi^{t_1,X^{t_2}}$,conic 在分式域 $k(t_1,t_2)$ 上均为绝对不可约，并且要求它们在 $k[t_1,t_2]$ 中没有因子。更确切地说， $\psi^{t_1,X^{t_2}}$,line 是变量 $(s_i\wedge s_j)_{0\leqslant i<j\leqslant 3}$ 的一次齐次多项式，而 $\psi^{t_1,X^{t_2}}$,conic 是关于相同变量的二次齐次多项式。

根据凯莱形式的结式定义，$\psi_{H_{t_1,\,t_2}\cdot X}$ 是变量 $(s_i\wedge s_j)_{0\leqslant i<j\leqslant 3}$ 的一个三次齐次多项式，其所有系数都是变量 t_1， t_2 的三次齐次多项式。

根据（30）， $\psi^{t_1,\,X^{t_2},\,\text{直线}}$ 与 t_1， t_2的选取无关，因为交循环 $H_{t_1,\,t_2}\cdot X$ 中的直线对所有 t_1， $t_2\in k$均保持不变。

6.1.3. — 假设 X 是嵌入在 $\mathbb{P}(V)$ 中且满足定义 5.2 中绝对不可约条件的非直纹三次曲面。那么我们有如下性质。

引理 ***6.1.*** — 保留上述所有记号和构造。若 X 是嵌入在 $\mathbb{P}(V)$ 中的三次曲面，由齐次多项式 $f(T_0,T_1,T_2,T_3)$定义，且关于变量 T_1,T_2,T_3 的三次齐次部分是绝对不可约的，那么 X 中的任何直线都不能位于平面 $T_0=0$中。

证明。—— 若平面 $T_0=0$中有一条直线，则 X 与 $T_0=0$ 所定义的平面的交就是这条直线和一条可能退化的圆锥曲线。由此可知， $f(0,\ T_1,\ T_2,\ T_3)$是可约的，而它恰好是变量 T_1， T_2， T_3的齐次三次部分。这与该部分绝对不可约相矛盾。

□

6.2. 凯莱形式的高度。——在§6.1.2中，我们描述了 $\mathbb{P}^3$中的非直纹三次曲面上一条圆锥曲线的凯莱形式。本节中，我们将借助式(29)中对其高度的估计，给出更精确的描述。由于我们将应用一些算术性质，因此将在数域上进行研究。

6.2.1。——设 K 为一个数域， $\mathcal{E}$ 为§2.3.$\overline{3}$中定义的秩为4、底域为Spec $\mathcal{O}_K$的厄米向量丛。设 X 为嵌入在$\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中的非直纹三次曲面。在此情形下，受 [**56**]的启发，我们考察算术情形下式(30)定义的 $\psi^{t_1,\,X^{t_2},\,\text{圆锥曲线}}$对 t_1， t_2 的依赖关系。

命题 ***6.2***。——我们沿用上述所有记号和构造。 ψ^{t_1}、X^{t_2}、圆锥曲线 的系数都是关于 t_1、t_2 的次数为 2 的齐次多项式，且没有公因子。

证明。——根据 §6.1.2， ψ^{t_1}、X^{t_2}、圆锥曲线 是次数为 2 的齐次多项式，其系数是关于变量 t_1、t_2 的次数至多为 3 的齐次多项式。

我们用 s 表示由 X 与 H_{t_1}、$_{t_2}$ 相交所得圆锥曲线在希尔伯特概形中的对应点。由 (29) 和命题 3.4，得

$$h(\psi^{t_1,t_2}_{X,\mathrm{conic}})-2h(s)=O_{X,K}(1),$$

其中一致常数取决于 X 和基域 K。令 $h([t_1:t_2])$ 表示 (2) 中定义的对数高度，其中我们将 $[t_1:t_2]$ 视为 $\mathbb{P}^1_K$ 中的有理点。由韦伊高度机器，得

$$h(s)-h([t_1:t_2])=O_{H_{t_1,t_2},K}(1),$$

其中，一致常数取决于生成H_{t_1}, ℓ_2 ℓ_{1,t_2}的线性形式的选择，以及基域 K。

根据上述两个关于高度的估计， $\psi^{t_1,X}{}^{t_2}{}_{,\text{圆锥曲线}}$的系数是变量 t_1,t_2的二次齐次多项式。如果它们有公因子，就会与上述高度比较矛盾。证明至此完成。

□

根据命题 6.2，我们可以将 $\psi^{t_1,X}{}^{t_2}{}_{,\text{圆锥曲线}}$写成如下形式

$$\psi^{t_1,t_2}_{X,\text{conic}}=\sum_{\substack{I=(i_1,i_2),0\leqslant i_1<i_2\leqslant 3\\ J=(j_1,j_2),0\leqslant j_1<j_2\leqslant 3}} b_{IJ}(t_1,t_2)(s_{i_1}\wedge s_{i_2})(s_{j_1}\wedge s_{j_2}), \tag{31}$$

其中， $b_{IJ}(t_1,t_2)$是一个关于变量 t_1,t_2的二次齐次多项式， $I=(i_1,i_2)\in\mathbb{N}^2$, $0\leqslant i_1<i_2\leqslant 3$，而 $J=(j_1,j_2)\in\mathbb{N}^2, 0\leqslant j_1<j_2\leqslant 3$。

6.3. 有理点计数。— 根据（31），我们可以控制三次曲面上圆锥曲线的高度。这个说明有助于控制位于圆锥曲线上的有界高度有理点。

6.3.1. — 关于这些 $b_{IJ}(t_1,t_2)$，我们有如下性质。

命题 ***6.3.***— 沿用上述所有记号和条件。对于所有这些$b_{IJ}(t_1,t_2)$，不可能对所有不全为零的 $t_1,t_2\in K$ 同时取零；或者等价地，所有 $b_{IJ}(t_1,t_2)$ 没有公因子。

证明. — 若存在这样的 $(t_1,t_2)\in K^2\smallsetminus\{(0,0)\}$，则考虑超平面$H_{t_1,t_2}$及其与 X 的交。在此情形下，所有 $b_{IJ}(t_1,t_2)$ 均为零，意味着 H_{t_1,t_2} 与 X 的交所得轨迹与 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的所有直线都有公共点，这是不可能的。

□

6.3.2. — 我们用 $x_1=t_1^2$, $x_2=t_1t_2$, $x_3=t_2^2$表示。对于所有 $I=(i_1,i_2)\in\mathbb{N}^2$, $0\leqslant i_1<i_2\leqslant 3$ 和 $J=(j_1,j_2)\in\mathbb{N}^2, 0\leqslant j_1<j_2\leqslant 3$，我们将 (31) 中的 $b_{IJ}(x_1,x_2,x_3)$ 记为 $=b_{IJ}(t_1,t_2)$，其中将 $a_i(x_1,x_2,x_3)$ 视为变量 x_1,x_2,x_3 的线性形式。此外，令

$$\begin{array}{rccc}\iota_1: & \mathbb{P}^1_K & \longrightarrow & \mathbb{P}^2_K\\ & [t_1:t_2] & \mapsto & [t_1^2:t_1t_2:t_2^2]\end{array} \tag{32}$$

是一个态射，并且

(33)

$$\begin{array}{rccc}\iota_2: & \mathbb{P}^2_K & \dashrightarrow & \mathbb{P}^{20}_K\\ & [x_1:x_2:x_3] & \mapsto & \left[\{b_{IJ}(x_1,x_2,x_3)\}_{I=(i_1,i_2),0\leqslant i_1<i_2\leqslant 3;J=(j_1,j_2),0\leqslant j_1<j_2\leqslant 3}\right]\end{array}$$

是一个有理映射。根据命题 6.9， $\iota = \iota_2 \circ \iota_1$ 与它的复合映射

$$\begin{array}{rccc} \iota: & \mathbb{P}^1_K & \longrightarrow & \mathbb{P}^{20}_K \\ & [t_1 : t_2] & \mapsto & \left[\{b_{IJ}(t_1,t_2)\}_{I=(i_1,i_2),0\leqslant i_1<i_2\leqslant 3;J=(j_1,j_2),0\leqslant j_1<j_2\leqslant 3}\right] \end{array} \tag{34}$$

是一个态射。

关于 Im(ι)，我们有以下性质。

引理 ***6.4.*** — 沿用以上所有记号和构造。 b_{IJ} 在(33) 中的系数矩阵的秩为2 或3。

证明. — 根据命题 6.3，对于所有的 $I = (i_1, i_2)$ $0 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3$ 和 $J = (j_1, j_2)$ $0 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant 3$, 所有 $b_{IJ}(t_1, t_2)$ 均无公因子且至多含有 3 个单项式，因此秩至少为 2，至多为 3。

□

命题 ***6.5.***— 沿用以上所有记号和构造。若引理 *6.4* 中确定的矩阵的秩为3，则$\mathrm{Im}(\iota)$是 $\mathbb{P}^{20}_K$ 中一条次数为2的几何整曲线。若引理 *6.4* 中确定的矩阵的秩为2，则$\mathrm{Im}(\iota)$是 $\mathbb{P}^{20}_K$ 中一条次数为2 的直线，并带有二重覆盖 $\iota : \mathbb{P}^1_K \to \mathrm{Im}(\iota)$。

证明。——经过初等计算，（32）中的像 Im(ι_1) 是 $\mathbb{P}^2_K$ =Proj $(K[X, Y, Z])$ 中由方程 $XZ - Y^2 = 0$ 确定的一条圆锥曲线。由引理 6.4，我们只需考虑秩为 2 和 3 的情形。

如果上述秩为 3，那么 ι_2 （33）中的映射通过一个线性映射将 Im(ι_1) 嵌入 $\mathbb{P}^{20}_K$。那么，（34）中的 Im(ι) 在 $\mathbb{P}^{20}_K$ 中仍然是次数为 2、维数为 1 的曲线。

如果上述秩为 2，那么 ι_2 将 Im(ι_1) 映射到 $\mathbb{P}^{20}_K$ 中的一条直线上。此外，由命题 6.9，Im(ι) 中除有限个点以外的所有点在 $\mathbb{P}^1_K$ 中都有 2 个逆像，由此证明完毕。 □

6.3.3。——由命题 6.5，我们可以估计非直纹三次曲面X 中由希尔伯特概形的一个不可约分支参数化、且高度为 $\psi^{t_1,t_2}_{X,\text{圆锥曲线}}$ 有界的圆锥曲线。更确切地说，我们要研究集合

$$\left\{[t_1 : t_2] \in \mathbb{P}^1_K(K) \mid H_K\left(\psi^{t_1,t_2}_{X,\mathrm{conic}}\right) \leqslant B\right\},$$

其中，多项式的朴素高度 H_K(.) 在 (5) 中定义。我们有以下估计。

命题 ***6.6***。——对于 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中非 *ruled* 三次曲面上的圆锥曲线希尔伯特概形的一个固定不可约分支，我们有

$$\#\left\{[t_1 : t_2] \in \mathbb{P}^1_K(K) \mid H_K\left(\psi^{t_1,t_2}_{X,conic}\right) \leqslant B\right\} \leqslant 16C_1'(20, 1, K)B \ll_K B,$$

其中，常数 $C_1'(n, d, K)$ 在推论 *2.12* 中引入。

证明。 — 当矩阵 (b_{IJ}) 的秩为 3 时，我们有

$$\left\{[t_1 : t_2] \in \mathbb{P}^1_K(K) \mid H_K\left(\psi^{t_1,t_2}_{X,\mathrm{conic}}\right) \leqslant B\right\} \subseteq S(\mathrm{Im}(\iota); B),$$

其中，$\mathrm{Im}(\iota)$ 中有理点的高度是在 $\mathbb{P}^{20}_K$ 中考虑的。根据推论 2.14，对于位于 $\mathbb{P}^{20}_K$ 中某个平面内、次数为 2 的几何射影曲线 $\mathrm{Im}(\iota)$，我们有

$$\#S(\mathrm{Im}(\iota);B) \leqslant 16C_1'(20,1,K)B.$$

当矩阵 (b_{IJ}) 的秩为 2 时，不失一般性，我们可以假设 $(b_{IJ}(t_1,t_2))$ 中 $b_1(t_1,t_2)$ 和 $b_2(t_1,t_2)$ 的系数向量在 K 上线性无关。首先考虑集合

$$\left\{[X:Y:Z]\in\mathbb{P}^2_K(K) \mid H_K([b_1(X,Y,Z):b_2(X,Y,Z)]) \leqslant B\right\}.$$

根据推论 2.14 中直线上有理点的一致上界，我们有

$$\begin{aligned}(35)\qquad &\#\left\{[X:Y:Z]\in\mathbb{P}^2_K(K) \mid H_K([b_1(X,Y,Z):b_2(X,Y,Z)]) \leqslant B\right\}\\ \leqslant\ & C_1'(2,1,K)B^2.\end{aligned}$$

事实上，态射

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathbb{P}^1_K & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_K\\ & [s:t] & \mapsto & [b_1(s,t):b_2(s,t)]\end{array}$$

它是极化的，并且我们有 $\varphi^*\mathcal{O}(1)\cong\mathcal{O}(2)$。当 $b_1(s,t)$ 和 $b_2(s,t)$ 的系数变化时，我们可以考虑右侧 $\mathbb{P}^1_K$ 上 $\mathcal{O}(2)$ 的度量也随之变化。从这个角度来看，上界 (35) 适用于 $\mathbb{P}^1_K$ 上 $\mathcal{O}(2)$ 的所有可能度量。因此，一致上界 (35) 的平方根给出了关于 $\mathcal{O}(1)$ 的一致上界。最后，将常数针对秩 3 的情形作相应调整，即可得到所述结论。 □

由上述结果，我们可以给出非直纹三次曲面上有界高度圆锥曲线的上界。

推论 ***6.7***。——设 X 是嵌入在 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的非直纹三次曲面。对于 X中的圆锥曲线 C，设 ψ_C 是定义 *3.2* 中 C 的凯莱形式。则有

$$\#\{C\subseteq X \mid H_K(\psi_C)\leqslant B\}\leqslant 432C_1'(20,1,K)B\ll_K B,$$

其中，高度 $H_K(.)$ 是 *(2)* 中定义的经典高度，而常数 $C_1'(n,d,K)$ 在推论 *2.12* 中引入。

证明。——这是命题 6.6 的直接推论，因为 X 至多包含 §5.2.1 中提及的 27 条直线。 □

6.3.4。——这里我们给出由圆锥曲线提供的非直纹三次曲面上有界高度有理点的一致上界。

定理 ***6.8.*** — 设 $\mathcal{E}$ 为 *§2.3.3* 中定义的秩为4 的厄米向量丛，X 为 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的非直纹三次曲面。那么，对于 $B\in\mathbb{R}$，至多有

$$\begin{aligned}&93312\exp\left(\frac{23040\log 2\log 12}{137}\right)C_1''(3,1,K)C_1'(20,1,K)C_1'(3,2,K)^{3/4}\\ &\cdot B^{\frac{3\sqrt{3}}{8}+1}\max\left\{\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]},2\right\}\\ \ll_K\ & B^{\frac{3\sqrt{3}}{8}+1}\max\left\{\log B,2\right\},\end{aligned}$$

$S(X;B)$ 中由 X 内的圆锥曲线提供的点，其中常数 $C_1'(n,d,K)$ 和 $C_1''(n,d,K)$ 分别在推论 *2.12* 和推论 *2.13* 中引入。

证明。——由推论 2.12，集合 $S(X;B)$ 可被一个次数小于的超曲面覆盖

$$27C_1'(3,2,K)B^{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

该超曲面不包含 X的一般点。根据交理论中的贝祖定理（参见 [**21**, 命题 8.4]），X 与上述超曲面的交循环中至多有 $\frac{81}{2}C_1'(3,2,K)B^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 条圆锥曲线。—

由推论 2.14 中有界高度有理点数的一致上界，以及命题 3.4 中高度的比较，对于 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的一条圆锥曲线 C，有

$$\#S(C;B)\leqslant 8\exp\left(\frac{23040\log 2\log 12}{137}\right)C_1''(3,1,K)\frac{B}{H_K(\psi_C)^{1/4}}\max\left\{\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]},2\right\}.$$

于是，由推论 6.7，圆锥曲线提供的 X 中高度小于 B 的有理点至多为

$$\begin{aligned}
&8\exp\left(\frac{23040\log 2\log 12}{137}\right)C_1''(3,1,K)B\max\left\{\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]},2\right\}\\
&\cdot\int_1^{\frac{81}{2}C_1'(3,2,K)B^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}\frac{432C_1'(20,1,K)}{k^{1/4}}\mathrm{d}k\\
\leqslant\ & 93312\exp\left(\frac{23040\log 2\log 12}{137}\right)C_1''(3,1,K)C_1'(20,1,K)C_1'(3,2,K)^{3/4}\\
&\cdot B^{\frac{3\sqrt{3}}{8}+1}\max\left\{\frac{\log B}{[K:\mathbb{Q}]},2\right\},
\end{aligned}$$

由此得到所需的上界。 □

6.4. 整点计数。——对于非直纹三次曲面，我们考察其中的圆锥曲线，并要求其凯莱形式的高次部分的高度有界。本节将给出这类圆锥曲线数量的一致上界。

6.4.1。 — 保留上述所有记号和构造。根据命题 6.2，我们将 $\psi^{t_1,X^{t_2},\text{圆锥曲线}}$ 写成如下形式

$$\psi_{X,\mathrm{conic}}^{t_1,t_2}=\psi_{X,2}^{t_1,t_2}+\psi_{X,1}^{t_1,t_2}+\psi_{X,0}^{t_1,t_2},$$

其中，$\psi^{t_1,X^{t_2}}_i$,是变量 $(s_0\wedge s_i)_{1\leqslant\leqslant 3}$ 中次数为 i 的齐次部分，$\psi^{t_1,X^{t_2}}$,是满足 $i=0,1,2$ 的圆锥曲线。此外，我们记作

$$\begin{aligned}
(36)\quad \psi_{X,2}^{t_1,t_2} \ =\ & a_1(t_1,t_2)(s_0\wedge s_1)^2+a_2(t_1,t_2)(s_0\wedge s_2)^2+a_3(t_1,t_2)(s_0\wedge s_3)^2\\
& a_4(t_1,t_2)(s_0\wedge s_1)(s_0\wedge s_2)+a_5(t_1,t_2)(s_0\wedge s_1)(s_0\wedge s_3)\\
& +a_6(t_1,t_2)(s_0\wedge s_2)(s_0\wedge s_3),
\end{aligned}$$

其中， $a_i(t_1,t_2)$ 是关于变量 t_1,t_2 的二次齐次多项式， $i=1,\dots,6$。

此外，我们假设 X 由齐次多项式 $f(T_0,T_1,T_2,T_3)$ 定义，其中变量 T_1,T_2,T_3 的齐次三次部分是绝对不可约的。在这种情况下， $\psi^{t_1,X}{}_2^{t_2}$ 具有以下性质。

命题 ***6.9***。——沿用以上所有记号和条件。多项式 $a_1(t_1,t_2)\dots,a_6(t_1,t_2)$ 不可能对所有不全为零的 $t_1,t_2\in K$ 同时为零。换言之，对于所有 $(t_1,t_2)\in K^2\smallsetminus\{(0,0)\}$， $\psi^{t_1,X}{}_2^{t_2}\neq 0$。

证明。——如果存在一对 $(\lambda_1,\lambda_2)\in K^2\smallsetminus\{(0,0)\}$，使得 $a_1(\lambda_1,\lambda_2)=\cdots=a_6(\lambda_1,\lambda_2)=0$，那么在 $\psi^{\lambda_1,X}{}^{\lambda_2}$ 圆锥曲线中的所有非零项都必须至少含有 $s_1\wedge s_2$, $s_1\wedge s_3$, $s_2\wedge s_3$ 中的一个。

我们考虑平面 $T_0=0$ in $\mathbb{P}\left(\bigwedge^2\mathcal{E}_K^\vee\right)$ 中所有直线的普吕克坐标，这些直线是 $T_0=0$ 与由线性形式 $c_1T_1+c_2T_2+c_3T_3=0$ 定义的平面的完全交，其中 c_1， c_2， $c_3\in K$ 不全为零。于是，这类直线满足 $s_1\wedge s_2=s_1\wedge s_3=s_2\wedge s_3=0$，并且 $s_0\wedge s_1$、 $s_0\wedge s_2$、 $s_0\wedge s_3$ 中至少有一个不为零。

如果 $\psi^{t_1,}{}_X{}^{t_2,}$ 圆锥曲线 满足上述假设，那么所有这类直线都必须与该圆锥曲线有非空交。因此，该圆锥曲线必定位于平面 $T_0=0$ 中，由 $H_{\lambda_1,\ \lambda_2}$ 与 X 的交得到的直线也位于该平面中，这与引理 6.1 矛盾。 □

6.4.2. — 与 §6.3.2 类似，我们有如下对 $\psi^{t_1,}{}_X{}^{t_2}$ 的参数化。记 $x_1=t_1^2$， $x_2=t_1t_2$， $x_3=t_2^2$。对于每个 $i=1,\dots,6$，我们将 (36) 中的 $a_i(x_1,x_2,x_3)$ 记为 $=a_i(t_1,t_2)$，其中将 $a_i(x_1,x_2,x_3)$ 视为变量 x_1,x_2,x_3 的线性形式。此外，令 ι_1 与 (32) 中相同，并

$$\begin{array}{rccc}\iota_2': & \mathbb{P}^2_K & \dashrightarrow & \mathbb{P}^5_K\\ & [x_1:x_2:x_3] & \mapsto & [a_1(x_1,x_2,x_3):\cdots:a_6(x_1,x_2,x_3)]\end{array}\tag{37}$$

是一个有理映射。根据命题 6.9， $\iota'=\iota_2'\circ\iota_1$ 与

$$\begin{array}{rccc}\iota': & \mathbb{P}^1_K & \longrightarrow & \mathbb{P}^5_K\\ & [t_1:t_2] & \mapsto & [a_1(t_1,t_2):\cdots:a_6(t_1,t_2)]\end{array}\tag{38}$$

的复合映射是一个态射。

与引理 6.4 类似，我们有如下结果。由于该结果可直接由命题 6.9 推出，故略去其证明。

引理 ***6.10.*** — 沿用以上所有记号和构造。设由多项式 $f(T_0,\dots,T_4)$ 定义在 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$ 中的非直纹三次曲面，关于变量 T_1,T_2,T_3 的齐次次数为 3，且绝对不可约。那么，式 (37) 中 $a_1,\dots,a_6$ 的系数矩阵的秩为 2 或 3。

根据引理 6.10，我们可以确定式 (38) 中 $\mathrm{Im}(\iota')$ 的几何结构。其证明与命题 6.5 的证明没有本质区别，因此略去。

命题 ***6.11.***— 沿用上述所有记号和构造。若引理 *6.10* 中确定的矩阵的秩为 3，则 $\mathrm{Im}(\iota')$ 是 $\mathbb{P}^5_K$ 中一条次数为 2 的几何整曲线。若引理 *6.10* 中确定的矩阵的秩为 2，则$\mathrm{Im}(\iota')$ 是 $\mathbb{P}^5_K$ 中一条次数为 2 的直线，并带有二重覆盖 $\iota' : \mathbb{P}^1_K \to \mathrm{Im}(\iota')$。

6.4.3. — 根据命题 6.11，我们可以估计由希尔伯特概形某个不可约分支参数化的非直纹三次曲面X 中的圆锥曲线，其高度 $\psi^{t_1,X}{}^{t_2}_2$,有界。更确切地说，我们希望研究以下集合

$$\left\{[t_1 : t_2] \in \mathbb{P}^1_K(K) \mid H_K\left(\psi^{t_1,t_2}_{X,2}\right) \leqslant B\right\},$$

其中，多项式的朴素高度 H_K(.) 在 (5) 中定义。与命题 6.6 类似，我们可以得到以下估计，其证明从略。

命题 ***6.12.*** — 我们有

$$\#\left\{[t_1 : t_2] \in \mathbb{P}^1_K(K) \mid H_K\left(\psi^{t_1,t_2}_{X,2}\right) \leqslant B\right\} \leqslant 16C_1'(5,2,K)B \ll_K B,$$

其中，常数 $C_1'(n,d,K)$ 在推论 *2.12* 中引入。

以下推论直接由命题 6.12 推出，它按照本部分所研究的意义，对非直纹三次曲面中所有有界高度的圆锥曲线给出了一个控制。

推论 ***6.13.*** — 设 X' 是 $\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$ 中的一个曲面，满足定义 *5.2* 中的1-不可约条件，其射影闭包 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中的非直纹几何不可约三次曲面，且 C 是 X 中的一条圆锥曲线。设 $\psi_{C,2}$ 按 *§3.3.3* 定义。则有

$$\#\{C \subseteq X \mid H_K(\psi_{C,2}) \leqslant B\} \leqslant 432C_1'(5,2,K)B \ll_K B,$$

其中，高度 H_K(.) 是式(2)中定义的经典高度，而常数 $C_1'(n,d,K)$在推论 *2.12* 中引入。

6.4.4. — 对于满足定义 5.1 中 NCC 条件和定义 5.2 中 1-不可约条件的非直纹三次曲面，我们给出由圆锥曲线提供的有界高度整点数的一致上界。

定理 ***6.14.*** — 设 $\mathcal{E}$ 是 *§2.3.3* 中定义在 $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ 上秩为4 的厄米向量丛， X' 是 $\mathbb{A}_0(\mathcal{E}_K)$中的一个曲面，其射影闭包 X 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中的几何整三次曲面。假设 X' 满足定义 *5.1* 中的 *NCC* 条件，并且在定义 *5.2* 中是2-不可约的。那么对于一个 $B \in \mathbb{R}$，至多有

$$\begin{aligned} & 93312C_4(3,1,K)C_1'(5,2,K)C_4(3,2,K)^{\frac{3}{4}}B^{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}}\max\{\log B, 2\} \\ \ll_K \quad & B^{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}}\max\{\log B, 2\} \end{aligned}$$

由 $s(X';\ B)$ 中的圆锥曲线提供的点，其中集合 $s(X';\ B)$ 定义于 *§4.1.2*，而常数 $C_1'(n,d,K)$ 和 $C_4(n,d,K)$ 分别在推论 *2.12* 和推论 *4.8* 中引入。

证明. — 根据交理论中的贝祖定理（参见 [**21**, 命题 8.4]）和推论 4.10，集合 $s(X';B)$ 被一个次数小于……的超曲面覆盖

$$27C_4(3,2,K)B^{\frac{1}{\sqrt{3}}},$$

其中，仿射超曲面的次数是指其在$\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中的射影闭包的次数。那么，由上述超曲面确定的交循环中至多有 $\frac{81}{2}C_4(3,2,K)B^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ 条圆锥曲线。

由推论 4.8，对于 X' 中的每条圆锥曲线 C' 及其在 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_K)$中的射影闭包 C，有

$$\#s(C';B)\leqslant 8C_4(3,1,K)\frac{B^{1/2}\max\{\log B,2\}}{H_K(\psi_{C,2})^{1/4}}.$$

由推论 6.13，圆锥曲线所提供的 X' 中高度小于 B 的整点至多有

$$\begin{aligned}&8C_4(3,1,K)B^{1/2}\max\{\log B,2\}\int_1^{\frac{81}{2}C_4(3,2,K)B^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}\frac{432C_1'(5,2,K)}{k^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}k\\ \leqslant\ & 93312C_4(3,1,K)C_1'(5,2,K)C_4(3,2,K)^{\frac{3}{4}}B^{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}}\max\{\log B,2\}.\end{aligned}$$

这就得到了所需的上界。 □

声明

利益冲突声明。——作者声明不存在潜在的利益冲突。

伦理声明。— 作者保证，该手稿未曾在其他地方发表，也未曾提交至其他期刊发表，并且在审稿期间不会提交给其他期刊。作者证明手稿完全由其撰写，主要研究结果均为原创，并引用了所有必要来源。若在提交后发现手稿中存在任何错误，作者将立即通知编辑。

数据可用性声明。— 支持本研究结果的数据可公开获取。

参考文献

[1] G. Binyamini, R. Cluckers & F. Kato – “关于所有全局域上代数曲线上有理点数目的锐利上界及维数增长”，伦敦数学会会刊 *(3)* **130**(2025年), 第 1 期, 第 e70016 号论文, 20.[2] G. Binyamini, R. Cluckers & D. Novikov –“关于代数曲线上有理点的上界：次数意义下的最优结果及维数增长”，国际数学研究通知(2024年), 第 11 期, 第 9256–9265 页。[3] E. Bombieri & J. Pila – “弧与卵形线上整点的数目”，《杜克数学杂志》**59** (1989), 第 2 期, 第 337–357 页。

[4] J.-B. Bost – “数域上阿贝尔簇的周期与同源（据 D. Masser 和 G. Wüstholz）”, Astérisque (1996 795, 4, 115 237, 161, 1994年 1995年), 第 – 期, 布尔巴基研讨班，第 / 卷。[5] J.-B. Bost, H. Gillet & C. Soulé – “射影簇的高度”，美国数学会杂志 7 (1994), 第 4 期, 第 903–1027 页。[6] N. Broberg – “关于 R. Heath-Brown 论文《曲线与曲面上有理点的密度》的一则注记” [Ann. of Math. (2) 155 (2002年), 第 2 期, 553–595]”, 《纯粹与应用数学杂志》571 (2004年), 第 159–178 页。[7] T. D. Browning & D. R. Heath-Brown – “超曲面上有理点的计数”, 《纯粹与应用数学杂志》584 (2005年), 第 83–115 页。[8] , “非奇异超曲面上有理点的密度 I”，伦敦数学会通报 38 (2006), 第 3 期, 第 401–410 页。[9] , “非奇异超曲面上有理点的密度 II”, 《伦敦数学会会刊》第三辑 93 (2006), 第 2 期, 第 273–303 页，附有 J. M. Starr 的附录。[10] T. D. Browning, D. R. Heath-Brown & P. Salberger – “ 代数簇上有理点的计数”, 《杜克数学杂志》132 (2006), 第 3 期, 第 545–578 页。[11] T. D. Browning – 射影簇的定量算术, 《数学进展》，第 277 卷，Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2009年。[12] A. Cafure & G. Matera – “关于有限域上方程解数的改进显式估计”，有限域及其应用 12 (2006), 第 2 期, 第 155–185 页。[13] W. Castryck, R. Cluckers, P. Dittmann & K. H. Nguyen – “多项式次数且不含对数因子的维数增长猜想”, 《代数与数论》14 (2020), 第 8 期, 第 2261–2294 页。[14] H. Chen – “Harder-Narasimhan 多边形的收敛性”，法国数学会回忆录 120 (2010), 第 1–120 页。[15] , “有理点的显式一致估计 I：高度估计”, 《纯粹与应用数学杂志》668 (2012), 第 59–88 页。[16] , “有理点的显式一致估计 II：超曲面覆盖”, 《纯粹与应用数学杂志》668 (2012), 第 89–108 页。[17] R. Cluckers, P. Dèbes, Y. I. Hendel, K. H. Nguyen & F. Vermeulen – “维数增长结果的改进及有效的希尔伯特不可约性定理”，数学论坛：Sigma 13 (2025年), 第 e153 页。[18] S. David & P. Philippon – “环面子簇的标准化高度下界”，比萨高等师范学院年刊。科学类。第四辑 28 (1999年), 第 3 期, 第 489–543 页。[19] I. V. Dolgachev – 经典代数几何，剑桥大学出版社，剑桥，2012年，现代观点。[20] J. Ellenberg & A. Venkatesh – “关于非有理曲线上有理点的一致上界”, 《国际数学研究通报》(2005), 第 35 期, 第 2163–2181 页。[21] W. Fulton – 交理论，第二版, 《数学及其边缘领域成果》。第三辑。现代数学综述系列 [《数学及相关领域成果》第三辑。现代数学综述系列], 第 2 卷，施普林格出版社，柏林，1998年。[22] E. Muñóz García – “交丛”，数学汇刊 124 (2000年), 第 3 期, 第 219–252 页。

[23] I. M. Gel′fand、M. M. Kapranov 和 A. V. Zelevinsky——《判别式、结式与多维行列式》，《数学：理论与应用》，Birkhäuser Boston Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，1994年。[24] H. Gillet 和 C. Soulé——“凸对称体及其对偶体中的格点数”，《以色列数学杂志》74（1991年），第2–3期，第347–357页。[25] H. Gillet 和 C. Soulé——“算术交理论”，高等科学研究所。《数学出版物》（1990年），第72期，第93–174页（1991年）。[26] L. Grenié 和 G. Molteni——“广义黎曼猜想下戴德金ζ函数素理想定理的显式版本”，《计算数学》85（2016年），第298期，第889–906页。[27] A. Grothendieck 和 J. Dieudonné——“《代数几何基础》IV：概形与概形态射的局部研究 III”，高等科学研究所。《数学出版物》（1966年），第28期，第255页。[28] M. Grześkowiak——“剩余类中素理想定理的显式上界”，载于《国际数论密码学方法会议》，Springer，2017年，第48–68页。[29] J. Harris——《射影空间中的曲线》，高等数学研讨班 [高等数学研讨班], 第85卷，蒙特利尔大学出版社，加拿大魁北克省蒙特利尔，1982年，由 David Eisenbud 协助完成。[30] R. Hartshorne——《代数几何》，施普林格出版社，纽约，1977年，《数学研究生教材》第52卷。[31] D. R. Heath-Brown——“曲线与曲面上有理点的密度”，《数学年刊》第二辑155（2002年），第2期，第553–595页。[32] M. Hindry 和 J. H. Silverman——《丢番图几何》，《数学研究生教材》第201卷，施普林格出版社，纽约，2000年，导论。[33] J. Kollár——《奇点消解讲义》，《数学年刊研究》第166卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2007年。[34] J. C. Lagarias 和 A. M. Odlyzko——“切博塔廖夫密度定理的有效版本”，载于《代数数域：ζ函数与伽罗瓦性质》（杜伦大学杜伦研讨会论文集，1975年），Academic Press，伦敦，1977年，第409–464页。[35] S. Li——“等维态射的 Deligne 配对”（2024年），arXiv:2411.17410。[36] C. Liu——“算术概形的非约化纤维”，《数学杂志》299（2021年），第3–4期，第1275–1302页。[37] , “非几何整约化的控制”，《国际数论杂志》18（2022年），第1期，第47–60页。[38] , “有限域上超曲面中的重数计数”，《京都数学杂志》62（2022年），第2期，第313–356页。[39] , “关于全局行列式方法”，《法国数学会通报》150（2022年），第4期，第699–741页。[40] , “超曲面算术希尔伯特–塞缪尔函数的一致下界”（2024年），arXiv:2410.12821。[41] A. Moriwaki——《阿拉克洛夫几何》，《数学专著译丛》第244卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2014年，由2008年日文原版译出。[42] J. Neukirch——《代数数论》，《数学科学基础原理》 [《数学科学基础原理》], 第322卷，施普林格出版社，柏林，1999年，由1992年德文原版译出，Norbert Schappacher 撰写附注，G. Harder 作序。

———

———

———

[43] M. Paredes 和 R. Sasyk——“全局域上簇的有理点数的一致上界”，《代数与数论》16（2022年），第8期，第1941–2000页。[44] J. Pila——“簇上整点与有理点的密度”，Astérisque（1995年），第228期，第4、183–187页，哥伦比亚大学数论研讨班（纽约，1992年）。[45] M. Rosen——“Mertens定理的推广”，《Ramanujan数学会杂志》14（1999年），第1–19页。[46] W. Ruppert——“平面曲线的可约性”，《纯粹与应用数学杂志》369（1986年），第167–191页。[47] P. Salberger——“代数簇上有理点与整点的密度”，《纯粹与应用数学杂志》606（2007年），第123–147页。[48] , “射影曲面上有界高度的有理点”，《数学杂志》258（2008年），第4期，第805–826页。[49] , “三次超曲面上有理点的一致上界”，载于《算术与几何》，伦敦数学会讲义丛书第420卷，剑桥大学出版社，剑桥，2015年，第401–421页。[50] , “射影簇上的有理点计数”，《伦敦数学会会刊》第三辑126（2023年），第4期，第1092–1133页。[51] P. Samuel——《代数数论》，Hermann，巴黎，1967年。[52] J.-P. Serre——“切博塔廖夫密度定理的若干应用”，高等科学研究所。《数学出版物》（1981年），第54期，第323–401页。[53] ，《莫德尔–韦伊定理讲义》，第三版，《数学概览》，Friedr. Vieweg & Sohn，不伦瑞克，1997年。由 Martin Brown 根据 Michel Waldschmidt 的讲义从法文译出并编辑，Brown 和 Serre 作序。[54] I. R. Shafarevich（编）——《代数几何 I》，《数学百科全书》第23卷，施普林格出版社，柏林，1994年，代数曲线、代数流形与概形；译自《数学中的当前问题：基础方向》第23卷（俄文），苏联科学院，全苏科学与技术信息研究所，莫斯科，1988年；D. Coray 和 V. N. Shokurov 译。[55] C. Soulé——《阿拉克洛夫几何讲义》，《剑桥高等数学研究》第33卷，剑桥大学出版社，剑桥，1992年，由 D. Abramovich、J.-F. Burnol 和 J. Kramer 协助完成。[56] T. Tanaka——“乔形式的算术上界”，《筑波数学杂志》28（2004年），第2期，第363–376页。[57] A. C. Thompson——《闵可夫斯基几何》，《数学及其应用百科全书》第63卷，剑桥大学出版社，剑桥，1996年。[58] M. N. Walsh——“曲线上有界的有理点”，《国际数学研究通讯》（IMRN）（2015年），第14期，第5644–5658页。[59] X. Yuan 和 S.-W. Zhang——《准射影簇上的阿代尔线丛》，《数学年刊研究》第221卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2026年。

*2026*年*1*月*19*日刘春晖，哈尔滨工业大学数学高等研究院，中华人民共和国哈尔滨市150001 ● 电子邮箱：chunhui.liu@hit.edu.cn