arXiv:2601.10910v1 [math.CA] 15 Jan 2026

# 短时傅里叶变换及其非线性变体中的谱干涉

SHRIKANT CHAND、JAMES NOLEN 和 HAU-TIENG WU

摘要。谱干涉是时域中拍频现象 在频域中的对应现象，在物理应用中可能严重扭曲时频表示（TFR）。我们研究高斯窗短时傅里叶变换（STFT）中的这一现象，以及基于重分配方法的非线性改进，重点关注同步压缩变换（SST）。通过研究双分量谐波模型，我们量化了短时傅里叶变换何时能够（以及何时无法）分辨两个相近频率：在一个临界间隔处会出现突变，该间隔与核带宽成反比，并明确取决于振幅比。低于此阈值时，谱图脊线会发生分岔，形成重复出现的时频气泡；我们对其进行渐近描述，并在振幅均衡的情况下用椭圆对其作出精确近似。随后，我们分析短时傅里叶变换相位，揭示其典型的绕行行为，并通过巴格曼变换将复值同步挤压变换重分配映射与全纯结构联系起来。在双分量情形下，重分配规则可用显式的莫比乌斯几何来描述，将频率直线映射为复平面中的圆弧。最后，我们从测度映射视角考察同步压缩变换和重分配，推导小核渐近结果，以解释重分配何时能使能量更加集中、何时会产生失真或误导性的时频表示；我们还提出一种广义同步压缩框架，用以分离短时傅里叶变换加权的作用，并阐明采用其他选择如何在某些条件下减轻干涉。

## 1. 引言

时间序列是现代科学与工程领域中无处不在的数据类型，广泛应用于生理学、地球物理学、金融学和工程学等诸多领域。一种常见的建模观点认为，时间序列由若干振荡分量叠加而成，每个分量都承载着来自不同源的动力学信息，并且可能受到噪声污染。当信号由多个振荡分量构成时，

这些分量具有时变振幅和/或频率，可以采用短时傅里叶变换（STFT） [Grö01] 及其非线性改进方法（例如同步挤压变换（SST） [DLW11], ）等时频（TF）分析工具，来探究信号的“局部频谱”。然而，当不同振荡分量的瞬时频率（IF）接近甚至交叉时，所得的时频表示（TFR）会呈现复杂的模式，我们将其称为谱干涉。

我们需要强调的是，据我们所知，谱干涉尚无普遍认可的定义，其含义会因数据类型和应用领域而有很大差异。这里我们具体聚焦于时间序列文献。考虑二分量信号 $f(t) = \cos(2\pi t) + a\cos(2\pi\phi(t))$，其中 $\phi$ 平滑，且 $\phi'(t) > 0$和 $a > 0$。如果 $\phi''(t) > 0$ 和 $\phi'(t_0) = 1$，那么在时间 $t_0$处频率明显交叉，我们可以将其视为模型层面上的谱干涉。此类模型可使用啁啾小波变换 [MH95] 进行分析，因而不在本文讨论范围内。当瞬时频率不交叉而是彼此接近时，信号在时域中会呈现一种称为拍频现象[RF08], 的典型行为，它是谱干涉在时域中的对应现象。更具体地说，当 $a = 1$和 $\phi(t) = (1+\Delta)t$时，利用简单的三角恒等式可得

$$f(t) = 2\cos(\pi\Delta t)\cos(2\pi(1+\Delta/2)t)\,, \tag{1}$$

通常将 $\cos(\pi\Delta t)$ 称为“拍频包络”。

从算法视角来看，当 $\Delta > 0$ 较小时，如果采样长度 $T > 0$ 不够长，傅里叶变换无法区分这两个振荡分量；同样地，如果分析窗过短，时频分析方法（例如短时傅里叶变换或同步压缩变换）也无法将其区分。我们可以将这种现象视为算法层面的谱干涉。已有许多研究探讨了在这种设置下不同算法的表现 [GH07；RF08；WFD11；LCB21；WZ24；CSZ24]。当采样率较低时 [Mey92], ，甚至采样不均匀时 [LFW15],，可能会出现混叠，这可以视为采样层面的谱干涉。本文的重点是理解算法层面的谱干涉，尤其是时频分析方法中出现的这类现象。

本文关注两个振荡分量的瞬时频率接近时，在算法层面产生的谱干涉。具体而言，我们关注应用时频分析算法（尤其是短时傅里叶变换和同步压缩变换）所产生的谱干涉。不确定性

原理指出，无论如何选择窗函数，短时傅里叶变换都无法同时实现时间和频率上的高精度定位。因此，当两个振荡分量具有非平凡的瞬时频率，且在某个时间区间内彼此接近时，它们的谱内容可能发生重叠，从而导致谱干涉。在实践中，这表现为谱图中的脊线模糊或合并、虚假的旁瓣，以及对窗函数和采样参数的选择高度敏感的振荡模式。谱干涉出现在边界附近时，情况会变得复杂。在边界区域附近，由于数据不完整，时频表示通常会呈现非平凡的过渡行为，这通常称为边界效应。由于边界效应不属于谱干涉的讨论范围，本文不予讨论，并将其留待未来研究。

我们在一个简单但具有代表性的双分量模型下，分析应用短时傅里叶变换和同步压缩变换时出现的拍频现象。对于采用高斯窗的短时傅里叶变换，我们证明其对应的谱图——即短时傅里叶变换的模平方——在干涉区域附近呈现特定的脊状结构。我们推导脊线中形成的“气泡”（即局部最大值）的渐近展开，从而明确展示这一结构，并量化其对频率间隔和模型参数的依赖关系。接下来，我们转而研究短时傅里叶变换相位及其对应的重分配规则；它们为谱图及其脊线提供了互补信息，也是同步压缩变换的基础。我们揭示了复值同步压缩重分配映射中的全纯结构，并运用复分析中的莫比乌斯几何对其进行刻画。最后，我们研究谱干涉如何通过重分配影响同步压缩变换。由于同步压缩变换是根据重分配对短时傅里叶变换能量进行非线性重新定位而构建的，我们的分析揭示了谱干涉在何种情况下、以何种方式会产生更尖锐、失真的甚至具有误导性的表示。总之，这些结果从算法层面为线性和非线性时频分析中的谱干涉提供了统一的图景。

本文其余部分安排如下：第 2 节定义我们研究的双分量模型，并阐明我们感兴趣的谱干涉的具体形式；第 3 节讨论短时傅里叶变换（STFT），以及频率间隔如何明确地影响谱干涉；同时定义脊线，并从数学上描述双分量模型的 STFT 脊线中出现的椭圆；第 4 节讨论并比较基于相位的重分配和同步挤压重分配，并借助莫比乌斯几何更清晰地展示重分配的工作原理；第 5 节描述同步压缩变换（SST）中的谱干涉，并说明驻相法

可用于理解同步压缩变换（SST）的主阶行为，同时提出一种广义同步挤压变换，可用于增强更广泛的一类时频表示。

## 2. 数学模型

回顾满足自适应谐波模型 [DLW11]的函数。

**定义1** (自适应谐波模型)。 满足自适应谐波模型（*AHM*） *[KMW18]*的函数具有如下形式:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{K-1} A_k(t)\cos(2\pi\phi_k(t)),$$

其中 $K \in \mathbb{N}$,

$$A_k \in C^1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}), \qquad \phi_k \in C^2(\mathbb{R}),$$
$$0 < \inf_{t\in\mathbb{R}} \phi_k'(t) \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \phi_k'(t) < \infty, \qquad M_j'' := \sup_x |\phi_j''(x)| < \infty,$$
$$|A_k'(t)|,\ |\phi_k''(t)| \le \epsilon|\phi_k'(t)|, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

并且满足频率分离条件；也就是说， $\phi_k'(t) - \phi_{k-1}' \ge \Delta > 0$ 对于 $k = 1, \ldots, K-1$。

我们分别将 $A_k(t)$、 $\phi_k(t)$ 和 $\phi_k'(t)$ 称为第 $k$ 个内禀模态类型（IMT）函数 $A_k(t)\cos(2\pi\phi_k(t))$ 的调幅（AM）、相位和瞬时频率（IF），并将 $\Delta$ 称为谱间隙。当谱间隙 $\Delta \to 0$ 时，两个分量在某些时刻频率接近并出现拍频现象，而短时傅里叶变换（STFT）会遇到谱干涉。本文旨在理解使用短时傅里叶变换分析上述具有 $K = 2$ 的函数类时谱干涉的行为；也就是说，我们将双分量情形作为简化模型来研究。此外，由于谱干涉是局部现象，我们进一步简化分析，假设 $\phi_k(t)$ 是线性的，且 $A_k(t)$ 是常数，因为在某个固定 $t_0$ 附近进行局部泰勒展开可知，上述分量满足 $A_k(t) = A_k(t_0) + O(\varepsilon|t - t_0|)$ and$\phi_k'(t) = \phi_k'(t_0) + O(\varepsilon|t - t_0|)$。因此，我们首先着重研究双复谐波模型，即

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t), \tag{2}$$

其中， $f_0(t) := e^{2\pi i\xi_0 t}$, $f_1(t) := ae^{2\pi i\xi_1 t}$, $a > 0$ 是第二个分量的振幅，而 $\Delta := \xi_1 - \xi_0 > 0$ 是两个分量 $f_0$ 和 $f_1$之间的谱间隙。在后续章节中，我们将展示如何通过泰勒展开，将我们的分析推广到一般的 AHM 情形。需要指出的是，我们也可以直接研究带有 $K = 2$的一般 AHM，不过

所需的繁琐局部泰勒近似可能会掩盖下文的主要发现。请注意，我们可以选择加入一个相位偏差项（例如$f_1(t) = ae^{2\pi i\xi_1 t+\theta}$），不过，后续分析只需通过时间平移即可轻松调整，因此不失一般性，我们假设 $\theta = 0$。我们还将等权平均频率记为 $\xi := (\xi_0 + \xi_1)/2$。

我们通过证明以下事实来量化拍频现象：当 $\Delta$ 小于某个取决于所选窗长的临界 $\Delta_*$ 时，时频气泡会在时频域 [中的规则位置出现 Del97; MLO22]。在这些气泡开始出现时，TFR 中与瞬时频率相关的不同曲线（或脊线）会合并在一起，因此难以恢复这两个分量。我们量化了应用线性类型（例如 STFT）和非线性类型（例如 SST）时频分析算法时，这些气泡在何时以及如何形成。除非另有说明，以下所有证明均可在附录中找到。

## 3. 线性时频方法

设 $h$ 为施瓦茨函数，$f$ 为缓增分布。$f$ 的修正短时傅里叶变换定义为加窗傅里叶变换

$$V_f^{(h)}(t,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x-t)e^{-2\pi i\eta(x-t)}dx. \tag{3}$$

这是对通常短时傅里叶变换的修改，通过相位因子 $e^{2\pi i\eta t}$ 来简化后续记号。注意，当窗函数 $h$ 为高斯函数时，这通常称为*Gabor* 变换。

在双分量模型中，由映射 $f \mapsto V_f$ 的线性性可知

$$\begin{aligned} V_f^{(h)}(t,\eta) &= V_{f_0}^{(h)}(t,\eta) + V_{f_1}^{(h)}(t,\eta) \\ &= e^{2\pi i\xi_0 t}\left(\hat{h}(\eta-\xi_0) + ae^{2\pi i\Delta t}\hat{h}(\eta-\xi_1)\right). \end{aligned} \tag{4}$$

从 (4) 可以直接看出，忽略全局相位因子 $e^{2\pi i\xi_0 t}$后，$f$ 的短时傅里叶变换由窗函数 $h$ 的两个傅里叶变换的复值加权和构成，其中心分别为 $\xi_0$ 和 $\xi_1$。我们重点讨论 $h$ 为高斯窗的情形，并在本文余下部分采用以下假设。

**假设1**。令 $h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$ 为时间带宽固定的高斯函数 $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$.

在此假设下，我们可知式（4）变为

$$V_f^{(h)}(t,\eta) = e^{2\pi i\xi_0 t}\left(e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_0)^2} + ae^{2\pi i\Delta t}e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_1)^2}\right), \tag{5}$$

因为 $\hat{h}(\omega-\mu) = e^{-\pi^2\sigma^2(\omega-\mu)^2}$是一个中心位于 $\mu$、标准差为 $\sim 1/\sigma$的高斯函数。这说明，相位项 $e^{2\pi i\Delta t}$ 会影响 $|V_{(h)}f(t,\eta)|$ 究竟是两个高斯函数之和的模（例如在 $t = 1/\Delta$这样的时间点）、两个高斯函数之差的模（例如在$t = 1.5/\Delta$这样的时间点），还是介于两者之间。

**3.1. 当 $\sigma\Delta$ 很大时。** 需要注意的是，虽然 $f \mapsto V_f$ 是一个线性算子，但映射 $f \mapsto |V_f|$ 是非线性的。当 $\sigma\Delta$ 很大时，双谐波模型的这种非线性会减弱，这一点由下面的命题说明。

**命题 1。** 对于所有的 $t$ 和 $\eta$ 以及高斯窗，

$$\sup_{t,\eta}\left|\left|V_f^{(h)}(t,\eta)\right| - \left(\left|V_{f_0}^{(h)}(t,\eta)\right| + \left|V_{f_1}^{(h)}(t,\eta)\right|\right)\right| \le 2ae^{-\pi^2\sigma^2(\Delta/2)^2} \xrightarrow[\sigma\Delta\to\infty]{} 0,$$

因此，随着 $\sigma\Delta$ 增大，模 $\left|V_{(h)}f(t,\eta)\right|$ 会均匀地接近$\left|V^{(h)}f_0(t,\eta)\right| + \left|V_{(h)}f_1(t,\eta)\right|$，且与 $t$无关。

该命题的证明见附录A。该命题体现了不确定性原理；也就是说，无论两个频率彼此多么接近，只要选择足够大的 $\sigma$ ，就能分离两个谐波分量。另一方面，如果两个频率相差很大，即使较小的 $\sigma$ 也能分离两个谐波分量。

**3.2. 当 $\sigma\Delta$ 较小时。** 当 $\sigma\Delta$ 较小时，$\hat{h}(\eta-\xi_0)$ 与 $\hat{h}(\eta-\xi_1)$ 之间存在显著重叠。当相位项为 $e^{2\pi i\Delta t} = 1$ 时，(5) 中的两个高斯函数项会相长叠加。然而，当$e^{2\pi i\Delta t} = -1$时，这两个高斯函数项会相消叠加。这种现象类似于物理学中的波干涉概念：两个相位不对齐的相干波叠加后，若两波分别同相或反相，所得振幅可能增大（相长干涉）或减小（相消干涉）。在我们的情形中，若将这两个谐波分量视为两列波，它们并不相干，但相位差恒定。这意味着，我们的信号中每个时间点都可以描述为相长干涉或相消干涉，而非根据相位对齐情况分别出现相长或相消干涉。

**定义 2**（相长与相消时刻）。对于 $k \in \mathbb{Z}$，定义$t_k^+ := \frac{k}{\Delta}$ 为相长时刻，并将 $t_k^- := \frac{k+\frac{1}{2}}{\Delta}$ 定义为相消时刻。

在相长时刻 $t_k^+$，有 $e^{2\pi i \Delta t_k^+} = 1$；在相消时刻 $t_k^-$，有 $e^{2\pi i \Delta t_k^-} = -1$。上述定义刻画了发生相长干涉和相消干涉的两个极端时刻。请注意，在其他时刻 $t$，仍会出现相长或相消的现象，但并非极端情况。还请注意，一对相长时刻与相消时刻之间的差值反映了拍频包络（1）的频率。特别地，我们可以将（5）的模平方写为

$$
\begin{aligned}
\left|V_f^{(h)}(t,\eta)\right|^2 &= \left|\hat{h}(\eta-\xi_0) + a e^{2\pi i \Delta t}\hat{h}(\eta-\xi_1)\right|^2 \\
&= \left(\hat{h}(\eta-\xi_0)\right)^2 + a^2\left(\hat{h}(\eta-\xi_1)\right)^2 \\
&\quad + a\hat{h}(\eta-\xi_0)\hat{h}(\eta-\xi_1)\left(e^{2\pi i\Delta t} + e^{-2\pi i \Delta t}\right) \\
&= e^{-2\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_0)^2} + a^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_1)^2} \\
&\quad + \underbrace{2a e^{-\pi^2\sigma^2\left((\eta-\xi_0)^2+(\eta-\xi_1)^2\right)}}_{>0}\cos(2\pi\Delta t).
\end{aligned} \tag{6}
$$

我们可以看到，（6）中最后一项的符号由 $\cos(2\pi\Delta t) \in [-1,1]$ 控制。特别地，对于 $k \in \mathbb{Z}$，当 $t \in (\frac{k+1/4}{\Delta}, \frac{k+3/4}{\Delta})$ 时，$|V_f|$ 表现为相消干涉，因为 $\cos(2\pi\Delta t) < 0$；类似地，对于 $t \in (\frac{k-1/4}{\Delta}, \frac{k+1/4}{\Delta})$，$|V_f|$ 表现为相长干涉。还要注意，在时刻 $t = \frac{k\pm 1/4}{\Delta}$，有 $|V_f|^2 = |V_{f_0}|^2 + |V_{f_1}|^2$；它似乎由两个高斯函数组成，但当 $\Delta$ 较小时，在 $\eta$ 轴上可能只有一个局部最大值。根据上述相长时刻和相消时刻的定义，我们可以在下述引理中刻画相长时刻的精确行为。

**引理 1**（短时傅里叶变换的相长时刻）。在相长时刻 $t_k^+$，映射 $\eta \mapsto |V^{(h)} f\ (t_k^+, \eta)|$ 在 $\Delta \le \Delta_{\text{critical, STFT}}$ 时具有一个局部最大值（即 $h(\eta-\xi_0)$ 与 $h(\eta-\xi_1)$ 之间的相长干涉）；而在 $\Delta > \Delta_{\text{critical, STFT}}$ 时具有两个局部最大值，其中

$$
\Delta_{\text{critical, STFT}} = \frac{1+s}{\pi\sigma\sqrt{2s}}
$$

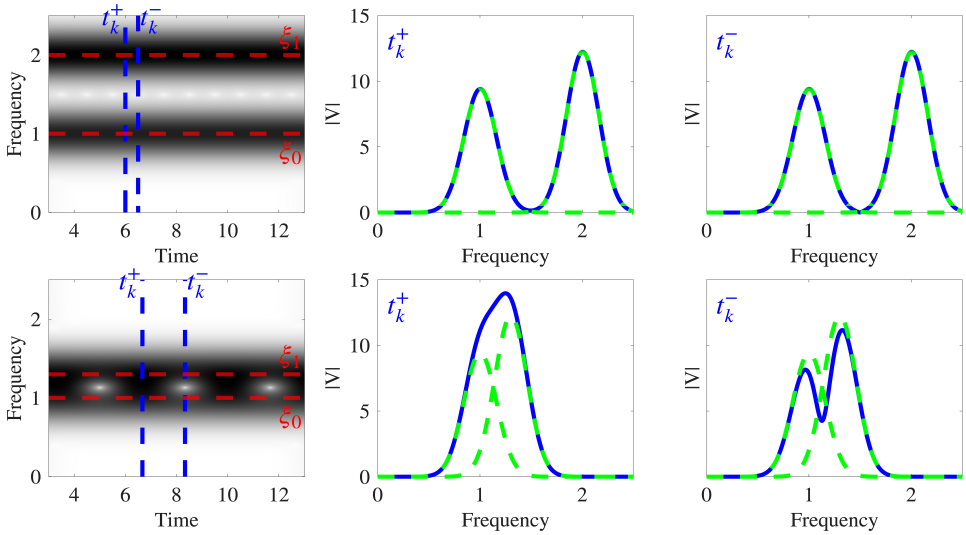


图1。所有情况均为 $\sigma = \sqrt{2}$, $\bar{a} = 1.3$，以及 $\xi_0 = 1$。（顶行）增强谱图 $|V_f^{(h)}|$，其间隔更大 $\xi_1 = 2$，并在相长与相消时刻显示蓝色截面，以及 $|V_{(h)\,f_0}(t,\ \eta)|$ 和 $|V_{(h)\,f_1}(t,\ \eta)|$ 以绿色显示；（底行）与上方相同，但间隔更小 $\xi_1 = 1.3$。

且 $s$ 满足

$$\ln \frac{s}{a} = \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right). \tag{7}$$

该引理的证明见附录A。

注 1。当 $a = 1$ 时，两个分量 $f_0$ 和 $f_1$ 的振幅相等，而引理 1 告诉我们，短时傅里叶变换开始区分众数时，两个众数之间的临界间隔为

$$\Delta_{\text{critical, STFT}}(a = 1) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sigma}$$

因为 $s = 1$ 是式（7）的一个解。

注 2：请注意，[MLO22]中最近证明了一个类似的结果。在上述论文中，$a = 1$ 的情形以完全相同的方式得到了恢复。不过，在我们的表述中，临界间距与第二个分量的振幅之间关于 $s$ 的关系通过一个超越关系得到了精确说明。此外，利用基本微积分可以证明，$a = 1$ 以给定形式提供了最佳的临界间距。

相长时刻是频谱干扰的最坏情况时刻，因为式（6）中的最后一项达到最大值。直观地说，如果我们能够在相长时刻分离两个谐波分量，那么在其他时刻也应当能够将它们分离。下面的引理表明，这一直觉是准确的。

**引理 2.** 当 $\Delta > \Delta_{\text{critical, STFT}}$ 时，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，映射 $\eta \mapsto |V_{(h)} f(t,\eta)|$ 恰有两个局部极大值和一个局部极小值。

该引理的证明见附录A。类似地，我们可以通过以下引理刻画相消时刻的行为。

**引理 3**（短时傅里叶变换在相消时刻）。在相消时刻 $t_k^-$，函数 $\eta \mapsto |V_{(h)} f(t_k^-, \eta)|$ 在频率 $|V(t_k^-, \eta_{\text{AVG}})| = 0$ 处有一个全局最小值

$$\eta_{\text{AVG}} := \bar{\xi} - \frac{\ln a}{2\pi^2 \sigma^2 \Delta},$$

以及两个局部极大值，分别位于频率 $\eta_-$ 和 $\eta_+$，其中

(8)

$$\xi_0 - \Delta \frac{a e^{-C\Delta^2}}{1 + a e^{-C\Delta^2}} \; a \le \eta_- < \xi_0, \qquad \xi_1 < \eta_+ \le \xi_1 + \Delta \frac{e^{-C\Delta^2}}{a + e^{-C\Delta^2}} \; .$$

该引理的证明见附录A。该引理指出，在相消时刻，虽然会得到两个局部极大值，但它们是对真实频率存在偏差的估计量。下一节将进一步通过脊线的概念讨论这种局部极大值结构的自然延伸。

3.2.1. 脊线与气泡形成。在时频分析的应用中，通常会识别并追踪谱图上构成连续链的局部极大值，$|V_f(t, \xi)|^2$，它们编码了底层系统的动力学信息。下文采用以下标准的脊线定义：

(9) $$\mathcal{R}_f = \{(t,\eta) : \partial_\eta |V_f(t,\eta)|^2 = 0 \;\text{ and }\; \partial_{\eta\eta} |V_f(t,\eta)|^2 < 0\} .$$

已有充分研究表明 [Del+92; CHT99; CW21]，在振荡分量满足温和的正则性条件时，具体而言，当它们的瞬时频率充分分离，且窗函数带宽适当（既不能过长，以免瞬时频率在窗内显著变化；也不能过短，以免所得谱支撑超出谱间隙），脊线提取便能为每个内禀模态型分量的瞬时频率提供可靠的估计量。本文不研究含噪信号，但对于信号

受到噪声污染，并请参阅其中关于现有脊线提取算法的参考文献。

现在我们考察当Δ较小时，信号 $f$ 的脊线如何变化。图 2 和图 3 展示了其复杂结构，即使在简单的双谐波模型下也是如此。有趣的是，当两个分量的振幅相等，且我们以这种方式定义脊线时，可以证明脊线集近似包含一种重复椭圆结构，具体表述如下定理。

**定理 1.** 设 $a = 1$ 且 $\Delta \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi\sigma}$。对于 $k \in \mathbb{Z}$，定义时间

$$t_*^{L,k} = \frac{k}{\Delta} + \frac{1}{2\pi\Delta}\cos^{-1}\left(\pi^2\sigma^2\Delta^2 - 1\right), \quad t_*^{R,k} = \frac{k+1}{\Delta} - \frac{1}{2\pi\Delta}\cos^{-1}\left(\pi^2\sigma^2\Delta^2 - 1\right).$$

如果对于某个 $k \in \mathbb{Z}$，$t \in (t_*^{L,k}, t_*^{R,k})$，那么函数 $\eta \mapsto \gamma(t,\eta) := |V_h f(t,\eta)|$ 有两个局部极大值。如果 $t \in (t_*^{R,k-1}, t_*^{L,k})$，那么 $\eta \mapsto \gamma(t,\eta)$ 有一个局部极大值。因此，在时间 $t_*^{L,k}$ 和 $t_*^{R,k}$ 处发生分岔。对于 $t \in (t_*^{L,k}, t_*^{R,k})$，在椭圆 $E_k$ 上的点 $(t,\eta)$ 满足 $\int_{E_k \cap \{t \leq t_*^{L,k}\}} \left|\frac{\partial}{\partial_\eta}\gamma(t,\eta)^2\right| dr = O(\Delta^2)$，该椭圆由下式定义

$$2\pi^2\sigma^2\left(\eta - \bar{\xi}\right)^2 + \frac{4\pi^2\Delta^2(t - \frac{k+1/2}{\Delta})^2}{\arccos^2\left(1 - \pi^2\sigma^2\Delta^2\right)} = 1$$

且 $dr$ 表示 $E_k$上的弧长测度。

定理 *1* 的证明。我们关注发生相长干涉的情形。根据引理 1，当 $\Delta \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi\sigma}$ 时会发生这种情况。从 (5) 出发，我们可以先引入坐标变换 $x = \eta - \xi$，并令 $C := \pi^2\sigma^2$，从而写出

$$\gamma(t,x) = \left|e^{-C(x+\Delta/2)^2} + ae^{2\pi i\Delta t}e^{-C(x-\Delta/2)^2}\right|.$$

为了求出 $\gamma(t,\ \eta)$ 的极值，我们可以等价地求出$\gamma(t,\ x)^2$ 的极值（因为 $\gamma$ 非负，且其最大值与 $\gamma^2$ 的最大值出现在相同位置）。当两个不同的极值合并为一个极值时，便会在分岔时刻发生从双峰到单峰的转变。在这些临界时刻 $t_*$，一阶导数为零，二阶导数也为 0。有趣的是，对于 $a = 1$ 情形，会出现一种简洁的化简；由于我们知道分岔在频率上发生的位置（即平均频率 $\xi$），因此可以用一种简单的方法求出分岔时间。为方便起见，我们记作

$$A_1(x) := e^{-2C(x+\frac{\Delta}{2})^2}, \qquad A_2(x) := a^2e^{-2C(x-\frac{\Delta}{2})^2},$$

$$A_3(x) = 2ae^{-2Cx^2 - C\frac{\Delta^2}{2}}\cos(2\pi\Delta t) = 2\cos(2\pi\Delta t)\sqrt{A_1(x)A_2(x)}.$$

于是我们可以写成

(10)

$$F(t,x) := \gamma(t,x)^2 = e^{-2C(x+\frac{\Delta}{2})^2} + a^2 e^{-2C(x-\frac{\Delta}{2})^2} + 2a\cos(2\pi\Delta t)e^{-C\left(2x^2+\frac{\Delta^2}{2}\right)} = A_1(x) + A_2(x) + A_3(x).$$

我们有

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = -4C\left(x+\frac{\Delta}{2}\right)A_1, \qquad \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} = -4CA_1 + 16C^2\left(x+\frac{\Delta}{2}\right)^2 A_1,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} = -4C\left(x-\frac{\Delta}{2}\right)A_2, \qquad \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} = -4CA_2 + 16C^2\left(x-\frac{\Delta}{2}\right)^2 A_2,$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial x} = -4CxA_3, \qquad \frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} = -4CA_3 + 16C^2x^2A_3,$$

so

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -4C\left[\left(x+\frac{\Delta}{2}\right)A_1 + \left(x-\frac{\Delta}{2}\right)A_2 + xA_3\right],$$

并令其等于零（对于 $a=1$），从 $A_1$、$A_2$以及 $A_3$中提出公指数因子，可得

$$(x+\frac{\Delta}{2})e^{-2C\Delta x} + (x-\frac{\Delta}{2})e^{2C\Delta x} + 2x\cos(2\pi\Delta t) = 0,$$

或者等价地,

(11) $$2x(\cos(2\pi\Delta t) + \cosh(2C\Delta x)) - \Delta\sinh(2C\Delta x) = 0.$$

定义 $H(x)$为（11）的左端。对于 $x > 0$，直接计算得

$$H''(x) = 2C\Delta\sinh(2C\Delta x)(4 - 2C\Delta^2) + 8xC^2\Delta^2\cosh(2C\Delta x) > 0,$$

因为根据假设有 $C\Delta^2 \le 2$ 。因此， $H$ 在 $(0, \infty)$ 上是严格凸的，所以 $H$ 至多有一个正零点。由于 $F$ （从而 $\gamma$）关于 $x$ 为偶函数，因此可知， $\gamma(t, \eta)$要么有一个局部最大值（位于 $x=0$），要么有两个对称的局部最大值。我们还可以求出

(12)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -4C(A_1+A_2+A_3)+16C^2\left[\left(x+\frac{\Delta}{2}\right)^2 A_1 + \left(x-\frac{\Delta}{2}\right)^2 A_2 + x^2A_3\right].$$

在 $x=0$ 处对（12）求值（其中 $a=1$），得到

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,0) = 8Ce^{-C\Delta^2/2}\left(C\Delta^2 - (1+\cos(2\pi\Delta t))\right).$$

因此， $x = 0$ 是局部最大值当且仅当 $1+\cos(2\pi\Delta t) > C\Delta^2$ ，是局部极小值当且仅当 $1+\cos(2\pi\Delta t) < C\Delta^2$。当 $\cos(2\pi\Delta t) = C\Delta^2 - 1$ 时发生转变，由此得到分岔时刻

$$t_*^{L,k} = \frac{k}{\Delta} + \frac{1}{2\pi\Delta}\cos^{-1}\left(C\Delta^2 - 1\right)$$

and

$$t_*^{R,k} = \frac{k+1}{\Delta} - \frac{1}{2\pi\Delta}\cos^{-1}\left(C\Delta^2 - 1\right)$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$ 分别是以每个相消时刻 $t_k^- = \frac{k+1/2}{\Delta}$ 为中心的左、右分岔时刻。根据上述凸性论证，这意味着对于 $t \in (t^{R,}_{*}{}^{k-1}, t^{L,}_{*}{}^{k})$，恰好存在一个局部最大值（位于 $x = 0$），而对于 $t \in (t^{L,}_{*}{}^{k}, t^{R,}_{*}{}^{k})$，则存在恰好两个局部最大值。我们预计（基于数值观察），当 $\Delta$ 较小时，存在某个椭圆 $E$ ，使得该椭圆的参数化满足（11）。如果应用平移 $t \mapsto s + t_k^-$ ，并对较小的 $\Delta$ 进行近似，则（11）变为

$$\begin{aligned}
0 &= 2x(\cos(2\pi\Delta t) + \cosh(2C\Delta x)) - \Delta\sinh(2C\Delta x) \\
&= 2x\left(\cos\left(2\pi\Delta\left(s + \frac{k+1/2}{\Delta}\right)\right) + \cosh(2C\Delta x)\right) - \Delta\sinh(2C\Delta x) \\
&= 2x(\cosh(2C\Delta x) - \cos(2\pi\Delta s)) - \Delta\sinh(2C\Delta x) \\
&= 2x\Delta^2(2C^2x^2 + 2\pi^2 s^2 - C) + O(\Delta^4)
\end{aligned}$$

因此，忽略 $O(\Delta^2)$（且对于 $x \neq 0$），（11）变为

$$2Cx^2 + \frac{2\pi^2}{C}s^2 = 1. \tag{13}$$

上述方程告诉我们，在 $O(\Delta^2)$ 范围内，可以将椭圆的频率维度半径近似为 $1/\sqrt{2C} = 1/(\sqrt{2}\pi\sigma)$。利用这两个半径，我们可以推断出小 $\Delta$ 时椭圆的方程为

$$2Cx^2 + \frac{4\pi^2\Delta^2(t - t_k^-)^2}{\arccos^2(1 - C\Delta^2)} = 1. \tag{14}$$

为证明（14）（将此椭圆记为 $E_k$）确实近似于（11）的解集，我们可以证明

$$\int_{E_k}\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| dr \to 0$$

对于 $E_k$ 的某种有效参数化， $\Delta \to 0$ 如此成立。转换回 $s$ 后，我们可以令

$$E_k = \{(x,s) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1, \text{ where } a = \frac{1}{\sqrt{2C}}, b = \frac{1}{2\pi\Delta}\arccos(1 - C\Delta^2)\}.$$

将该椭圆参数化为 $x(u) = a\cos(u)$， 且$t(u) = b\sin(u)$， 其中 $u \in [0, 2\pi)$, 则可写为

$$\int_{E_k} \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| dr = \int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x(u), t(u))\right| J(u)du\,,$$

其中

$$J(u) = \sqrt{x'(u)^2 + t'(u)^2} = \sqrt{a^2\sin^2(u) + b^2\cos^2(u)}\,.$$

我们可以求得

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x(u), t(u))\right| &= \Delta^2 \left|4C^2a^3\cos^3(u) + 4\pi^2ab^2\cos(u)\sin^2(u) - 2Ca\cos(u)\right| \\
&\le 4C^2\Delta^2a^3\left|\cos^3(u)\right| + 4\pi^2\Delta^2ab^2\left|\cos(u)\sin^2(u)\right| \\
&\quad + 2C\Delta^2a\left|\cos(u)\right| \\
&\le \Delta^2\left(4C^2a^3 + 4\pi^2ab^2 + 2Ca\right) + O(\Delta^4).
\end{aligned}$$

我们还必须计算

$$J(u) = \sqrt{a^2\sin^2(u) + b^2\cos^2(u)} \le a|\sin(u)| + b|\cos(u)|.$$

综合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{E_k} \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| dr &= \int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x(u), t(u))\right| J(u)du \\
&\le \int_0^{2\pi} \Delta^2\left[\left(4C^2a^3 + 4\pi^2ab^2 + 2Ca\right) + O(\Delta^4)\right] J(u)du \\
&= \Delta^2\left[\left(4C^2a^3 + 4\pi^2ab^2 + 2Ca\right) + O(\Delta^4)\right] \int_0^{2\pi} J(u)du \\
&\le \Delta^2\left[\left(4C^2a^3 + 4\pi^2ab^2 + 2Ca\right) + O(\Delta^4)\right] \times \\
&\quad \int_0^{2\pi} a|\sin(u)| + b|\cos(u)|du \\
&= \Delta^2(4a + 4b)\left(4C^2a^3 + 4\pi^2ab^2 + 2Ca\right) + O(\Delta^4). \qquad (15)
\end{aligned}$$

注意，当 $\Delta$ 较小时，我们有 $b = \frac{1}{2\pi\Delta}$ 反余弦$(1-C\Delta^2) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} + O(\Delta^2)$。利用这一点并回想 $a = \frac{1}{\sqrt{2C}}$，由 (~~15~~) 可知

$$\begin{aligned}\int_{E_k} \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| dr &\leq \Delta^2(4a+4b)\left(4C^2a^3 + 4\pi^2ab^2 + 2Ca\right) + O(\Delta^4) \\ &= 12\Delta^2(1+\pi\sigma^2) + O(\Delta^4)\end{aligned}$$

当 $\Delta \to 0$ 趋于零时，它也随之趋于零。 □

注 3。注意，只有当反余弦的自变量介于 $-1$ 和 1 之间时，这个椭圆才存在。这仅在 $\Delta < 1/\sqrt{C} = \sqrt{2}/(\pi\sigma)$ 时发生，这与我们在注 1 中发现的临界阈值一致。当此条件不成立时，可以证明最佳近似是双曲线。在这种情况下，谱间隙足够大，短时傅里叶变换在任意时刻都能分离出两个不同的分量；不过，谱干涉造成的可见伪影在时频域中可用双曲线形状描述，而非谱间隙较小时出现的椭圆形时频气泡。

图 2 展示了该定理的示意图。我们将绿色虚线曲线标示的椭圆形脊线称为“气泡”；定理指出，当 $\Delta$ 足够小时，这些气泡便会出现。气泡的形成源于 $V_f$ 的振幅与相位之间的非线性交互，这反过来也体现了谱干涉的丰富结构，即便是在这个简单的双谐波模型中也是如此。

根据定理 1，我们发现，对于 $a = 1$，气泡的宽度和高度在一阶近似下保持不变（相对于 $\Delta$而言）。高度和宽度分别为$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} + O(\Delta^2)$ 和 $\frac{\sigma}{2} + O(\Delta^2)$，其中我们只是根据定理 1 的证明，对较小的 $\Delta$下的半径 $r_a$ 和 $r_b$ 进行了近似。令人惊讶的是，当 $\Delta$减小时，气泡的宽度和高度仍保持不变，而它们出现的时刻则逐渐分散，其宽度与 $\Delta$成反比。请注意，气泡出现的时刻，正是短时傅里叶变换能够区分两个分量的时刻。该定理证实了这一直觉：两个频率越接近，短时傅里叶变换就越难以区分它们。当$a$ 偏离 1 时，脊线会持续偏离椭圆形状。这一点可见于图 3。

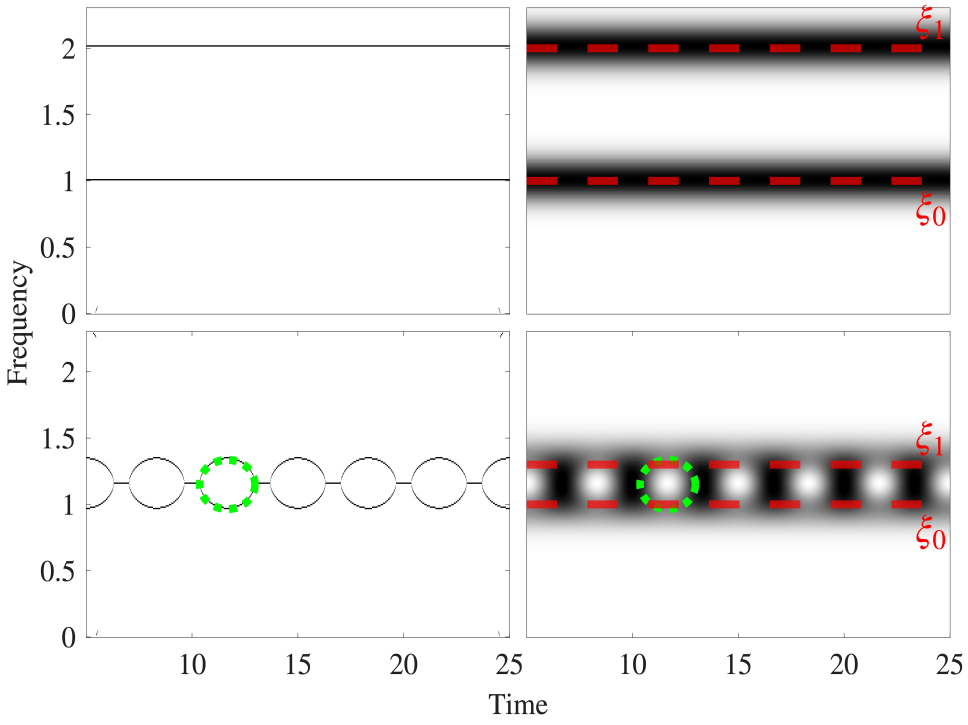


图 2。所有图均采用 $\sigma = \sqrt{2}$，$a = 1$ 和 $\xi_0 = 1$。双分量信号的脊线定义见式（9）。（左上）采用 $\xi_1 = 2$；（左下）采用 $\xi_1 = 1.3$，绿色虚线曲线为定理 1 中的椭圆；（右）为对应的谱图。

**3.3. 推广到双分量 AHM。**前面的结果可以按以下方式推广到双分量 AHM 模型。假设

$$F(x) = A_0(x)e^{2\pi i\phi_0(x)} + A_1(x)e^{2\pi i\phi_1(x)}$$

满足定义1中的 AHM 模型。另固定一个时间 $t_*$ 并设$\xi_j = \phi_j'(t_*)$，$a_j := A_j(t_*)$，以及 $a = a_1/a_0$，并定义双分量谐波模型

$$f(x) = e^{2\pi i\xi_0 x} + ae^{2\pi i\xi_1 x}.$$

不失一般性地假设（通过时间平移消除相位），恒定相位偏移满足 $\phi_j(t_*) = 0$。那么，众所周知

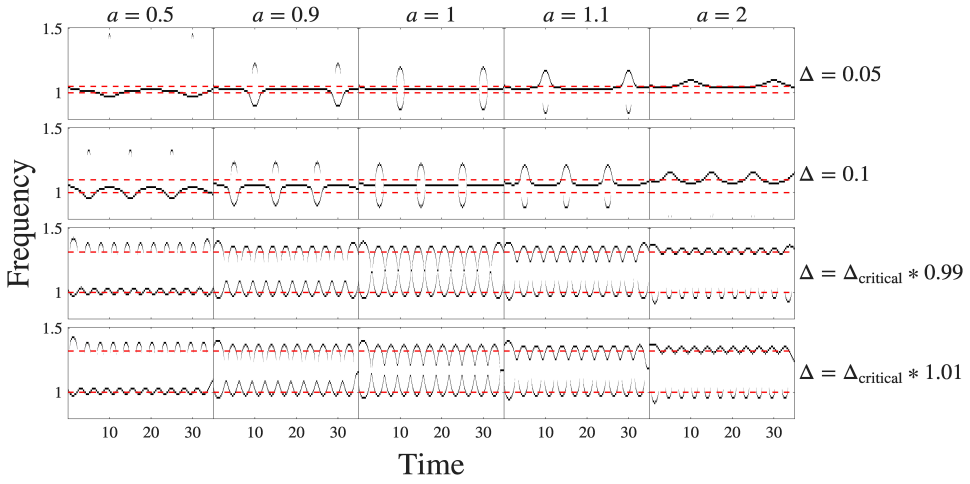


图 3。所有图均具有 $\sigma = \sqrt{2}$ 和 $\xi_0 = 1$。根据（9）定义的双分量信号的脊线，随 $a$、$\Delta$ 变化；底部三行显示 $\Delta \approx \Delta_{\text{critical}}$，短时傅里叶变换($a$ =1) 接近临界点时的情况。

对于所有 $t, \eta$， [DLW11]

$$
\begin{aligned}
|V_F(t,\eta) - a_0 V_f(t-t_*,\eta)| \le \varepsilon \sum_{j=0}^{1} \Bigg[ & |\phi_j'(t_*)| \left( |t-t_*| + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \right) \\
& + \frac{M_j''}{2} \left( (t-t_*)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \right) \Bigg] \\
+ 2\pi\varepsilon \sum_{j=0}^{1} a_j \Bigg[ & \frac{|\phi_j'(t_*)|}{2} \left( (t-t_*)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \right) \\
& + \frac{M_j''}{6} \left( |t-t_*|^3 + \frac{3\sigma}{\sqrt{\pi}} |t-t_*|^2 \right. \\
& \left. + \frac{3}{2}\sigma^2 |t-t_*| + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \right) \Bigg].
\end{aligned}
$$

上述结论的证明见附录A。该近似表明，在 $t_*$ 附近的局部范围内，$F(t)$ 的短时傅里叶变换与 $f(t)$ 的短时傅里叶变换相差至多为 $\varepsilon$ 阶误差。这种偏差表明，$F(t)$ 的脊线与 $f(t)$ 的脊线相差 $\varepsilon$ 阶。图4展示了 AHM 的一个案例，其中第二个分量的瞬时频率随时间缓慢变化，同时仍呈现出椭圆结构。

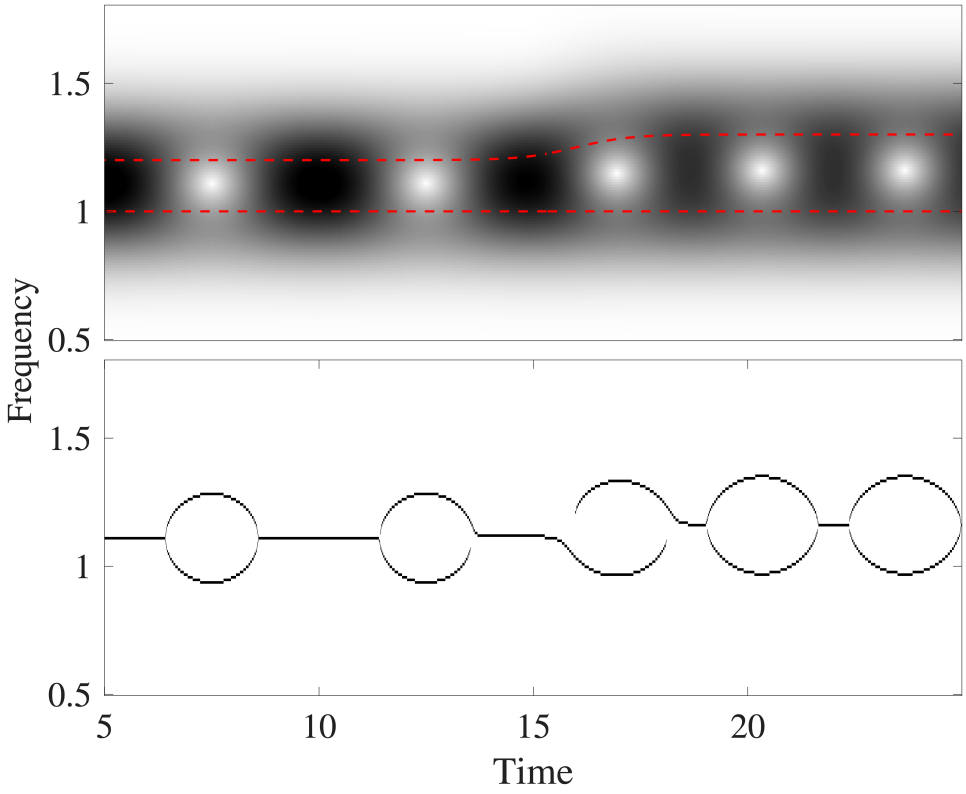


图4。当 $\sigma = \sqrt{2}, a = 1$、$\bar{\xi}_0 = 1$ 和 $\xi_1$ 从 1.2 开始并缓慢变化到 1.3。（上）短时傅里叶变换与真实瞬时频率，以红色虚线叠加显示；（下）根据式（9）定义的双分量信号的脊线。注意，随着 $\xi_1$ 变化，分岔点变得不连续。

## 4. 相位与重分配方法

虽然短时傅里叶变换通常是定义在时频域上的复值函数，但在实际应用中，通常分析的是短时傅里叶变换的幅度信息，$|V^{(h)}f(t,\eta)|$。例如，上一节讨论的脊线完全基于幅度。另一方面，相位信息往往被忽略。然而，从数据分析的角度来看，相位也编码了有意义的信息，我们将在下文探讨这一点。回顾一下，我们在上述脊线分析中看到的谱干涉问题，是相位动力学导致的。记

$$V_f^{(h)}(t,\eta) = |V_f^{(h)}(t,\eta)|e^{i\phi(t,\eta)}, \tag{16}$$

其中 $\phi(t,\ \eta) \in [0, 2\pi)$ 是相位。短时傅里叶变换的相位具有丰富的结构，例如可从图 5 中看到；图中还并列显示了振幅，以便比较。

**4.1. 零点附近的相位结构。** 注意，当 $V_f^{(h)} = 0$ 时，相位 $\phi$ 未定义。我们将回答诸如可以有多少个零点，以及相位在零点附近如何变化等问题。以 $a = 0$ 情形为特例。在这种情况下，$V_{(h)}\, f(t,\ \eta) = e^{2\pi i \xi_0 t} e^{-\pi^2 \sigma^2 (\eta - \xi_0)^2}$，处处非零。然而，当 $a > 0$ 时，我们开始看到由两个分量之间的干涉所导致的零点，尤其是在 $\Delta$ 较小时。为了探究零点附近的相位结构，注意到作为 TF 域上的复值函数，$V_f$ 是有界的，因此根据刘维尔定理，$V_f$ 不是全纯的。首先，回顾短时傅里叶变换与 TF 域上的全纯函数之间的关系。

**定义 3** (巴格曼变换，[Grö01])。 函数 $f$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的巴格曼变换是定义在 $\mathbb{C}^d$ 上的函数 $Bf$，其定义为

$$Bf(z) = 2^{d/4} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp\left(-\pi x^2 + 2\pi x z - \frac{\pi}{2} z^2\right) dx.$$

由于我们选择了高斯窗，可以利用 [Grö01] 中的命题 3.4.1，取 $z = t/\sigma - i\pi\sigma\eta$，得到

$$V_f^{(h)}(t, \eta) = e^{-\frac{1}{2}\left[(t/\sigma)^2 + (\pi\sigma\eta)^2\right]} e^{-i\pi t\eta} B_\sigma f\left(\frac{t}{\sigma} - i\pi\sigma\eta\right) \tag{17}$$

其中

$$B_\sigma f(z) := \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{2x}{\sigma} z - \frac{1}{2} z^2\right) dx$$

是重标度的巴格曼变换。由于 $B$，因而 $B_\sigma$是关于 $z$的整函数，映射 $z \mapsto e^{\frac{1}{2}\left[(t/\sigma)^2 + (\pi\sigma\eta)^2\right]} e^{i\pi t\eta} V_{(h)}\, f(t, \eta)$，其中 $t = \sigma\Re(z)\ \eta = -\Im(z)/(\pi\sigma)$，是整函数。因此，由于 $e^{\frac{1}{2}\left[(t/\sigma)^2 + (\pi\sigma\eta)^2\right]} e^{i\pi t\eta}$处处不为零，$V_f^{(h)}$ 可以写成一个处处不为零的光滑函数与一个关于 $z$的整函数的乘积；$V_f^{(h)}$ 在时频域上的零点恰好对应于 $B_\sigma f$ 的零点，因此是孤立的且具有有限重数。值得一提的是，文献 [Fla15] 研究噪声时曾考察过短时傅里叶变换零点的特殊行为。

接下来，我们观察到，在图 5 中，相位函数在短时傅里叶变换的零点处（时间为 $t = t_k^-$，频率为 $\eta = \eta_{\mathrm{AVG}}$）不连续。下文的命题将说明，在零点附近的一个小邻域内，相位恰好绕行一周。

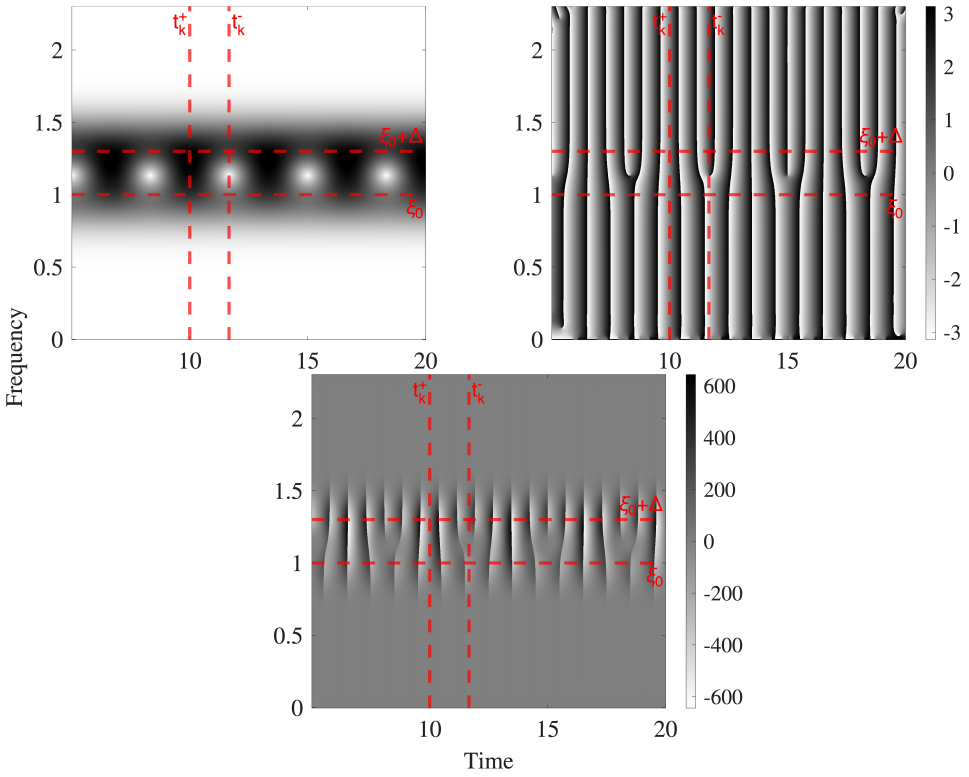


图 5。与图1底行所述相同的信号（取 $\sigma = \sqrt{2}$, $a = 1.3$、 $\xi_0 = 1$ 和 $\xi_1 = 1.3$）；（左上）短时傅里叶变换的振幅$|V|$；（右上）相位 $\phi(t,\ \eta)$（单位：弧度），显示在相长和相消时刻均发生相变；（下）乘积 $|V|\times\phi(t,\ \eta)$，其中相位不再绕着 $V$ 的零点旋转。

**命题2.** 设$(t_0, \eta_0)$ 是 $V_{(h)}f(t,\eta)$的一个零点。存在$r > 0$，使得对于每个 $0 < \rho < r$，椭圆

$$\mathcal{E}_\rho := \{(t,\eta)|\,(t-t_0)^2 + \pi^2\sigma^4(\eta-\eta_0)^2 = (\sigma\rho)^2\} \tag{18}$$

在其边界上不包含 $V_f^{(h)}$ 的零点，且恰好包含一个内部零点。此外，曲线 $V_f^{(h)}|_{\mathcal{E}_\rho}$ 恰好绕 0 一周。

上述命题的证明见附录A。上述命题描述了相位在零点（$t_0$, $\eta_0$）附近的变化。实践中，可以将相位与幅度逐点相乘，以幅度对相位加权，如图 5 下方的图所示，从而增强可视化效果。特别是，通过泰勒

展开可以看出，振幅在零点附近呈线性衰减。因此，尽管相位在趋近零点时会出现不连续行为，用振幅相乘可以掩盖这种行为并增强可视化效果。

**4.2. 基于相位的重分配。** 受 [KGV78; AF95], 启发，众所周知，短时傅里叶变换的相位可用于在时频域对短时傅里叶变换系数进行重分配，从而生成更加集中的时频表示。在众多变体中 [DLW11; OMP15; PM17],我们首先考虑如下相位重分配规则：

$$\hat{\eta}_p(t,\eta) := \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \phi}{\partial t}\,, \tag{19}$$

其中 $\phi(t,\eta) := \arg\, V_{(h)}f(t,\eta)$，参数取其辐角的主值支；而[DLW11]中考虑的同步压缩重分配规则 定义为

$$\hat{\eta}_s(t,\eta) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\partial_t V_f^{(h)}(t,\eta)}{V_f^{(h)}(t,\eta)} & \text{if } V_f^{(h)}(t,\eta) \neq 0 \\ -\infty & \text{else.} \end{cases} \tag{20}$$

请注意，这两种重分配规则密切相关。为说明这一点，我们可以写成

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_s(t,\eta) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial_t V_f^{(h)}(t,\eta)}{V_f^{(h)}(t,\eta)} && \text{when } \left|V_f^{(h)}(t,\eta)\right| \neq 0 \\ &= \frac{1}{2\pi i}\partial_t \log(V_f^{(h)}(t,\eta)) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\partial_t \log\left|V_f^{(h)}(t,\eta)\right| + i\partial_t\phi(t,\eta)\right) && \text{using (16)} \\ &= \hat{\eta}_p(t,\eta) + \frac{1}{2\pi i}\partial_t \log\left|V_f^{(h)}(t,\eta)\right| \\ &= \hat{\eta}_p(t,\eta) + \frac{i}{2\pi}\Re\left(\frac{V_f^{(Dh)}(t,\eta)}{V_f^{(h)}(t,\eta)}\right) \\ &= \hat{\eta}_p(t,\eta) + i\Im\left(\hat{\eta}_s(t,\eta)\right) \\ &\approx \hat{\eta}_p(t,\eta) && \text{if } |V| \text{ varies slowly} \end{aligned}$$

当 $V_{(h)}f(t,\eta) \neq 0$ 时，其中 $Dh$ 表示窗函数 $h$ 的一阶导数，并且我们利用关系 $\partial_t V_{(h)}f(t,\eta) = -V_{(Dh)}f(t,\eta) + 2\pi i\eta V_{(h)}f(t,\eta)$。由此可见，相位重分配算子

是同步挤压重分配算子的实部:

$$\hat{\eta}_p(t,\eta) = \Re\left(\hat{\eta}_s(t,\eta)\right),$$

而同步挤压重分配算子与相位重分配算子的差异，是由 $V$ 的振幅导出的以下纯虚项

(21)

$$\frac{1}{2\pi i}\partial_t \log\left|V_f^{(h)}(t,\eta)\right| = i\frac{a\Delta e^{-\pi^2\sigma^2\left((\eta-\xi_0)^2+(\eta-\xi_1)^2\right)}\sin\left(2\pi\Delta t\right)}{e^{-2\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_0)^2}+a^2e^{-2\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_1)^2}+2ae^{-\pi^2\sigma^2((\eta-\xi_0)^2+(\eta-\xi_1)^2)}\cos\left(2\pi\Delta t\right)}.$$

注意，该项在相长时刻 $t_k^+$ 为零。因此，根据引理 2，两种重分配都会在相同的临界频率间隔处遇到谱干涉；但我们稍后将看到，对于式 (9) 中定义的脊线，同步压缩重分配规则在经验上 表现出比相位重分配规则更少的相长干涉。图6展示了相位重分配算子和同步压缩重分配算子的实部与虚部。注意，左图中的恒定频率线在右图所示的复平面中发生了弯曲。

此外，在我们研究的双分量模型中，同步压缩重分配算子在复平面上具有以下定义的著名有理函数形式。

**定义 4 (**莫比乌斯变换**)**。 莫比乌斯变换 $f$ 是ˆˆ ˆ一种形式为 $f$： $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$的映射，其中 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一点紧化，并且

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

对于 $z\in\mathbb{C}$和 $a,b,c,d\in\mathbb{C}$，满足 $ad-bc\neq 0$。若 $c\neq 0$，则设 $f\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty$；若 $c\neq 0$，则设 $=\frac{a}{c}(\infty)$ $f$；否则设 $=\infty(\infty)=\infty$。

我们可以将双谐波信号的同步压缩重分配规则明确写为

$$\hat{\eta}_s(t,\eta) = \frac{\xi_0\hat{h}(\eta-\xi_0)+a\xi_1e^{2\pi i\Delta t}\hat{h}(\eta-\xi_1)}{\hat{h}(\eta-\xi_0)+ae^{2\pi i\Delta t}\hat{h}(\eta-\xi_1)} = \frac{\xi_0+\xi_1ae^{2\pi i\Delta t}\frac{\hat{h}(\eta-\xi_1)}{\hat{h}(\eta-\xi_0)}}{1+ae^{2\pi i\Delta t}\frac{\hat{h}(\eta-\xi_1)}{\hat{h}(\eta-\xi_0)}}.$$

ˆ$\eta_s(t,\eta)$的有理函数结构表明，它可以写成如下复合形式

$$\hat{\eta}_s(t,\eta) = M(q(t,\eta)),$$

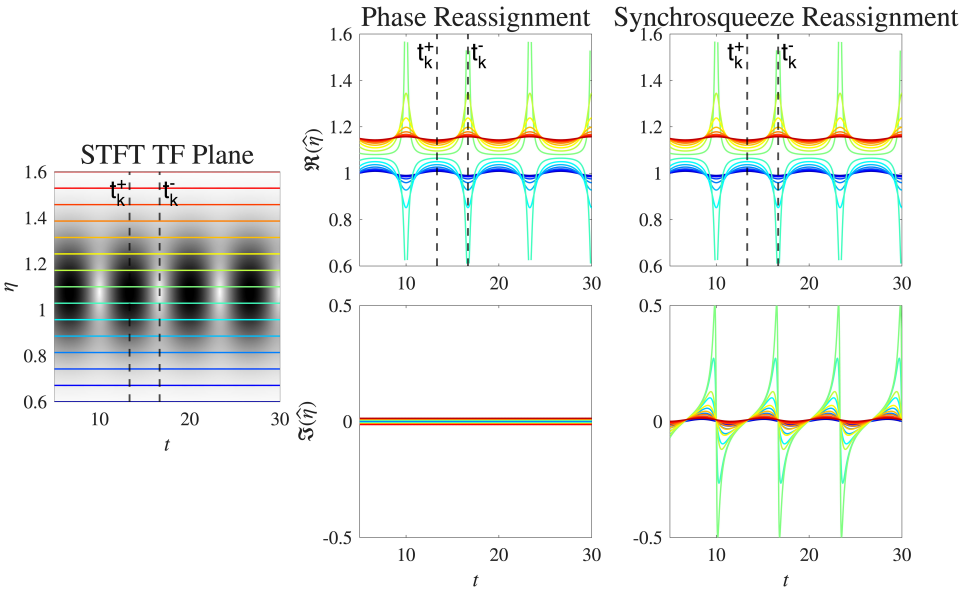


图6。所有结果均采用 $\sigma = \sqrt{2}$、$a = 1$、$\xi_0 = 1$ 和 $\xi_1 = 1.15$。（左）$f$ 的短时傅里叶变换，其中彩色水平线表示时频平面中的恒定线（$t$、$\eta$）；（中）相位重分配时频平面中恒定彩色线的图像，（上）为实部，（下）为虚部，显示频率如何被推向 1 和 1。15 处的真实脊线；（右）同步压缩重分配的图像。请注意，两种重分配的实部完全相同，但虚部不同。

其中 $M$ 是莫比乌斯变换

$$M(z) = \frac{\xi_0 + \xi_1 z}{1 + z}$$

and

$$q(t,\eta) = ae^{2\pi i \Delta t} \frac{\hat{h}(\eta - \xi_1)}{\hat{h}(\eta - \xi_0)} = ae^{2\pi i \Delta t} e^{-\pi^2\sigma^2((\eta-\xi_1)^2-(\eta-\xi_0)^2)} = ae^{2\pi i \Delta t} e^{2\pi^2\sigma^2\Delta(\eta-\bar{\xi})}$$

$\hat{}$ 是时频域上的一个复值函数。将 $M : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ 视为扩充复平面上的映射，可以注意到 $M(0) = \xi_0$ 且 $M(\infty) = \xi_1$。因此，模 $|q| \ll 1$ 较小的点 $q$ 会被映射到靠近 $\xi_0$ 的位置，而模 $|q| \gg 1$ 较大的点会被映射到靠近$\xi_1$的位置。下一个引理将定量描述当$|q|$较小时，这种对 $\xi_0$ 的“吸引”效应。

**引理 4.** 若 $|a|e^{\pi^2\sigma^2\Delta_{(\eta-\bar{\xi})}} \le 1/2$，则

$$|\hat{\eta}_s(t,\eta)-\xi_0| = |M(q(t,\eta))-\xi_0| \le 2\Delta|a|e^{\pi^2\sigma^2\Delta(\eta-\bar{\xi})}, \quad \forall\, t\in\mathbb{R}$$

引理 *4* 的证明。若 $z\neq -1$，则记作

$$M(z)=\frac{\xi_0+\xi_1 z}{1+z}=\xi_0+\frac{z}{1+z}=\xi_1-\frac{\Delta}{1+z}.$$

令 $z=re^{i\theta}$ 满足 $|r|\neq 1$，并定义 $\bar{z}=\frac{1}{1-r^2}\in\mathbb{R}$。则

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z}-\bar{z} &= \frac{1}{1+re^{i\theta}}-\frac{1}{1-r^2}\\ &= -\left(\frac{r}{1-r^2}\right)\left(\frac{r+e^{i\theta}}{1+re^{i\theta}}\right)-\left(\frac{r}{1-r^2}\right)\left(\frac{re^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}+re^{i\theta/2}}\right)\\ &= -\left(\frac{r}{1-r^2}\right)\frac{v}{\bar{v}}, \qquad v=re^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}.\end{aligned}$$

因此，

$$\left|\frac{1}{1+z}-\bar{z}\right|=\frac{|r|}{|1-r^2|},$$

它与 $\theta$ 无关。回到 $M$ 的定义，我们发现

$$|M(z)-(\xi_1-\Delta\bar{z})|=\Delta\left|\frac{1}{1+z}-\bar{z}\right|=\Delta\frac{|r|}{|1-r^2|}$$

现在，令 $y=\Delta\sigma^2(\eta-\bar{\xi})$，并令 $s=\Delta t$，我们有

$$q\left(\frac{s}{\Delta},\bar{\xi}+\frac{y}{2\Delta\sigma^2}\right)=ae^{2\pi is}e^{\pi^2 y}\,.$$

因此，

$\hat{\eta}_s(t,\eta)=\hat{\eta}_s(s/\Delta,\bar{\xi}+y/(\sigma^2\Delta))=M(q(s/\Delta,\bar{\xi}+y/(\sigma^2\Delta)))=M(ae^{2\pi is}e^{\pi^2 y})$

由上述结论可知

$$|M(z)-\xi_0|=\left|(\xi_1-\xi_0)\frac{z}{1+z}\right|=\frac{\Delta|z|}{|1+z|}\,. \tag{22}$$

若 $|a|e^{\pi^2\sigma^2\Delta_{(\eta-\bar{\xi})}}\le 1/2$，那么在新坐标下，我们有 $|ae^{\pi^2 y}|\le 1/2$。因此，应用 (22)，可得

$$|M(ae^{\pi^2 y}e^{2\pi is})-\xi_0|\le 2\Delta|a|e^{\pi^2 y}.$$

□

由引理 4，若 $\sigma \gg 1/\Delta$，则只要 $\eta < \xi$，因子 $e^{\pi^2\sigma^2\Delta_{(\eta-\bar{\xi})}}$ 就会非常小，即使 $a$ 很大也是如此。例如，令$\xi_s = \xi_0 + \Delta/4$ （它更接近 $\xi_0$ 而非 $\xi_1$），我们有

$$|a|e^{\pi^2\sigma^2\Delta(\xi_s-\xi_0)} = |a|e^{-\pi^2\sigma^2\Delta/4},$$

因此，时频平面中的垂直条带（$-\infty$，$\xi_s]$ ）经由 $\hat{}\eta_s$ 映射后，会落在 $\xi_0$ 的一个小邻域内。

为描述重分配的全局几何，方便起见，我们写作

$$\gamma(r,\theta) := M(re^{i\theta}), \qquad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi),$$

因此，对于固定的（$t$，$\eta$），

$$\hat{\eta}_s(t,\eta) = \gamma(r(\eta), \theta(t)), \qquad r(\eta) = |q(t,\eta)|, \theta(t) = 2\pi\Delta t.$$

随着 $t$ 变化，相位 $e^{i\theta(t)}$ 绕单位圆转动，因此 $t \mapsto q$（$t$，$\eta$）描绘圆 $\{z \in \mathbb{C}:\ |z|= r$（$\eta$）$\}$，其圆心位于 0。从这个意义上说，参数 $r = r$（$\eta$）是一个“插值参数”：对于每个固定的 $\theta$，曲线 $r \mapsto \gamma$（$r$，$\theta$）沿复平面中的一段圆弧，从 $\xi_0$ （当 $r = 0$ 时）移向 $\xi_1$（当 $r \to \infty$ 时）。下面的引理将对此作出精确说明。

**引理5**。 定义 $\delta = \frac{\xi_1-\xi_0}{2} = \frac{\Delta}{2} > 0$。对于任意固定的 $\theta \in (0,\ \pi)$，考虑

$$\gamma(r,\theta) = M(re^{i\theta}) = \frac{\xi_0 + \xi_1 re^{i\theta}}{1 + re^{i\theta}}, \qquad r \geq 0.$$

那么，在黎曼球面上，$[0,\infty)$ 在 $r \mapsto \gamma(r,\theta)$ 下的像是唯一一个经过三点 $\xi_0$、$\xi_1$、$\xi + i\delta\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$的圆上的一段圆弧。

引理 5 的证明。 利用 $\xi_0 = \xi - \delta$ 和 $\xi_1 = \xi + \delta$，我们可以将 $M$改写为

$$M(z) = \frac{\xi_0 + \xi_1 z}{1 + z} = \frac{(\bar{\xi} - \delta) + (\bar{\xi} + \delta)z}{1 + z} = \bar{\xi} + \delta\frac{z-1}{1+z}.$$

因此

$$\gamma(r,\theta) = M(re^{i\theta}) = \bar{\xi} + \delta\frac{re^{i\theta}-1}{1+re^{i\theta}} = \bar{\xi} - \delta\frac{1-re^{i\theta}}{1+re^{i\theta}}.$$

我们可以在 $r$ 的三个特定值处计算 $\gamma$。首先，由于 $M(\infty) = \xi_1$，$\gamma(0,\ \theta) = M(0) = \xi_0$，且 $\lim_{r\to\infty}\gamma(r,\ \theta) = \lim_{r\to\infty} M(re^{i\theta}) = \xi_1$。对于 $r = 1$，我们得到

$$\gamma(1,\theta) = \bar{\xi} - \delta\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}.$$

利用
$$\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}=\frac{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right)}=\frac{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}}=\frac{-2i\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)}=-i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right),$$
we get
$$\gamma(1,\theta)=\bar{\xi}-\delta\left(-i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=\bar{\xi}+i\delta\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$
现在，考虑射线 $L_\theta=\{re^{i\theta}:\ r\geq 0\}\subset\mathbb{C}$及其完备化~ $L_\theta=L_\theta\cup\{\infty\}$，它是扩充复平面 $\mathbb{C}$中的一条广义半圆（直线与无穷远点的并集）。莫比乌斯变换将广义圆映射为广义圆，因此 $C_\theta:=$ ~ ^$M(L_\theta)$是 $\mathbb{C}$中的一条广义半圆。我们已经证明，三个点 $\xi_0=\gamma(0,\ \theta)\ \gamma(1,\ \theta)\ =\bar{\xi}+i\delta\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$，$\xi_1=\lim_{r\to\infty}\gamma(r,\ \theta)$ 位于 $C_\theta$上。由于 $\theta\in(0,\ \pi)$ 意味着 $\Im\gamma(1,\ \theta)\neq 0$，这三个点不共线，因此确定了唯一的欧几里得圆 $C_\theta$。最后，随着 $r$ 从 0 增加到 $\infty$，点 $re^{i\theta}$ 沿射线 $L_\theta$移动，根据 $M$ 的连续性，其像

$$\{\gamma(r,\theta):r\geq 0\}=M(L_\theta)$$
是一条包含于 $C_\theta$ 中的连续曲线，从 $\xi_0$ 出发并趋向 $\xi_1$。¯因此，它是经过 $\xi_0$、 $\xi+i\delta\tan(\theta/2)$和$\xi_1$的唯一圆上的一段圆弧。□

映射的示意图见图7。该映射在引理5中进行了描述。最后，我们可以证明，AHM 的同步压缩重分配规则与其局部线性化版本的表现非常接近，而我们已经对后者进行了细致研究。以下命题明确给出了这种近似的误差。

**命题 3**。设
$$F(x)=A_0(x)e^{2\pi i\phi_0(x)}+A_1(x)e^{2\pi i\phi_1(x)}$$
满足定义*1*中的 ***AHM*** 模型。固定一个时间 $t_*$，并令 $\xi_j=\phi_j'(t_*)$、 $a_j:=A_j(t_*)$和 $a=a_1/a_0$，并定义双分量谐波模型
$$f(x)=e^{2\pi i\xi_0 x}+ae^{2\pi i\xi_1 x}.$$
不失一般性地假设（通过时间平移消除相位），恒定相位偏移满足 $\phi_j(t_*)=0$。固定 $T>0$ 和 $0<\beta<\frac{1}{2}$。则存在常数 $\varepsilon_0>0$ 和 $C_{\hat{\eta}}=C_{\hat{\eta}}(T,\sigma,\xi_0,\xi_1,a_0,a_1,M_0'',M_1'')$，使得对于所有 $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$，以及满足 $|t-t_*|\leq T$和 $|V_{(h)}f(t-t_*,\eta)|\geq\varepsilon^\beta$ 的所有 $t,\eta$，都有
$$\left|\hat{\eta}_s^F(t,\eta)-\hat{\eta}_s^f(t-t_*,\eta)\right|\leq C_{\hat{\eta}}\varepsilon^{1-2\beta}$$

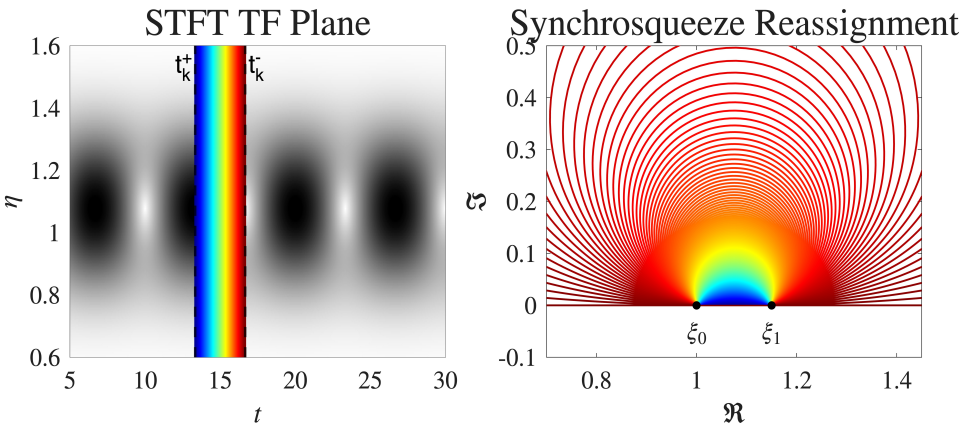


图7。与图6中描述的相同信号（其中 $\sigma = \sqrt{2}$， $a = 1$、$\xi_0 = 1$ 和 $\xi_1 = 1.15$）展示了引理5中的圆弧：左图为带有彩色竖线的短时傅里叶变换；右图为复平面，显示了这些圆弧，它们是彩色线段经过同步压缩重分配后的像。

其中，$\hat{\eta}_s^F$ 和 $\hat{\eta}_s^f$ 分别是与 $F$ 和 $f$ 相关联的同步压缩重分配规则，而 $C_{\hat{\eta}}$ 具有如下形式

$$C_{\hat{\eta}} = \frac{C_{Dh} + (1+|a|)\frac{\sqrt{2}}{\sigma} e^{-1/2} C_h}{\pi |a_0|}$$

其中 $C_h$、$C_{Dh}$ 取决于窗函数 $h$ 和 $Dh$。

上述命题的证明见附录A。

注 4。 由于 $\hat{\eta}_p = \Re(\hat{\eta}_s)$，我们可以立即看到

$$\left|\hat{\eta}_p^F(t,\eta) - \hat{\eta}_p^f(t-t_*,\eta)\right| \le \left|\hat{\eta}_s^F(t,\eta) - \hat{\eta}_s^f(t-t_*,\eta)\right| \le C_{\hat{\eta}} \varepsilon^{1-2\beta},$$

在上述命题之后。

## 5. 非线性时频方法

时频分析的核心目标之一是构造一种能够编码动态信息（例如调幅和瞬时频率）的时频表示，从而使用户能够有效提取信号的内在动态。然而，由于不确定性原理，线性时频分析算法（如短时傅里叶变换或连续小波变换）通常会产生模糊的时频表示 [Grö01]。这一局限促使人们开发短时傅里叶变换或连续小波变换的非线性变体，涵盖重分配方法 [KGV78; AF95]到同步压缩变换 [DLW11; OMP15]。这些方法的一项主要特点是利用由短时傅里叶变换确定的时频表示中编码的信息

或连续小波变换来锐化时频表示，使用户能够更容易地获得信号的预期内在动态。本节重点研究同步压缩变换及其变体；这些方法利用基于由短时傅里叶变换确定的时频表示中编码的相位信息的重分配方法。我们量化同步压缩变换的频谱推断行为，并考察其一种变体，以进一步探究谱干涉的表现。考虑如下的广义同步压缩变换 。

定义 5（广义同步压缩变换）。固定一个窗函数$h$ 和一个光滑核 $g_\alpha(z)$: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ ，满足 $g_\alpha \to \delta$当 $\alpha \to 0$时弱收敛，并且其在 $\mathbb{R}$ 上的限制具有单位 $L^1$ 范数（即$\|g_\alpha\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$）。进一步定义重分配规则 $\hat{\eta}_s(t,\eta)$ 如（20）所示，并令 $G_f^{(h)}(t,\eta)$ 为时频平面上的任意复值函数，其中$\forall t \in \mathbb{R}:\ G_f^{(h)}(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$。则 $f$ 的同步挤压变换定义为

$$S_{G,f}^{(h)}(t,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_f^{(h)}(t,\eta) g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t,\eta) - \xi\right) d\eta.$$

在接下来的讨论中，我们将重点关注两类 $G:\ G = V$和 $G = \mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}}$（对于某些 $R \gg 1$）。当 $G = V$时，我们得到标准的基于短时傅里叶变换的同步压缩变换（同步压缩变换） [DLW11]，其形式为

$$S_{V,f}^{(h)}(t,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} V_f^{(h)}(t,\eta) g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t,\eta) - \xi\right) d\eta\,. \tag{23}$$

为了研究谱干涉对具有不同 $G$的广义同步压缩变换的影响，本文余下部分作如下假设。

**假设 2.** 设 $g_\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{|z|^2}{\alpha}}$，其中 $z \in \mathbb{C}$ 是一个时间带宽为 $\sqrt{\alpha}$ 的高斯函数，其中 $\alpha \ll 1$ 也固定不变。

情形 $G = \mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}}$ 源于一个自然的问题——短时傅里叶变换的幅度和相位分别如何影响重分配结果？出于技术上的原因，引入了 $G = \mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}}$ 对 $R$ 的依赖关系。请注意，当 $R$ 有限且 $\alpha > 0$时，积分是良定义的。然而，当 $G = 1$时，积分会发散。事实上，当 $\alpha > 0$ 且 $\xi = \xi_0 - \delta$ 固定，其中 $\delta > 0$时，引理 4 告诉我们，对于所有 $\eta < C$，存在某个常数$C$，使得$g_\alpha(\hat{\eta}_{s,f}(t,\eta) - \xi) \geq \exp(-2\Delta\epsilon/\alpha)/\sqrt{\pi\alpha}$，因此 $S_{1,f}^{(h)}(t,\xi_0 - \delta) = \infty$。在接下来的分析中，我们将设定 $R = R(\alpha)$，使得当 $\alpha \to 0$时，$R \to \infty$。我们还要指出，当 $G = \mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}}$时，广义同步压缩变换通常不可逆，因为短时傅里叶变换的幅度和相位缺失，因此

无法用于将信号分解为各个独立的振荡分量。

注释 5. 请回忆，当 $G = |V|$ 或 $G = |V|^2$时，上述公式简化为原始重分配方法 [AF95；CAF03], ，其中重分配仅沿频率轴进行。与同步压缩变换不同，由于缺少相位信息，无法从所得时频表示中重构原始信号。由于对该方法的分析类似，为简洁起见，我们省略相关讨论。

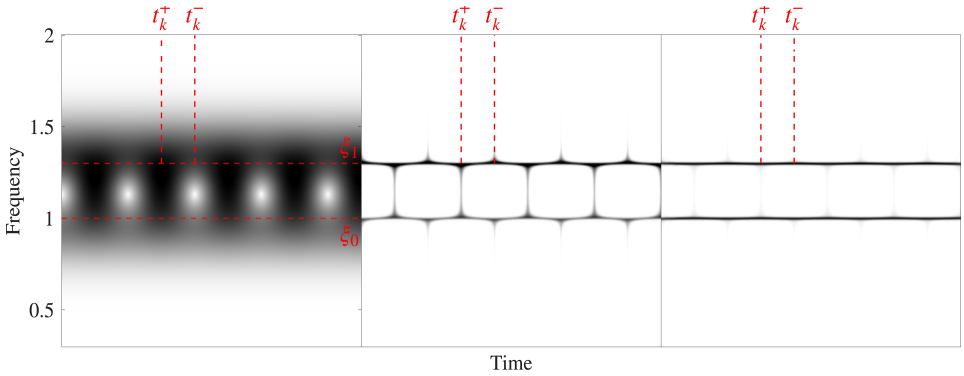


图 8. 与图1底行所述相同的信号（均带有 $\sigma = \sqrt{2}$, $a = 1.3$, $\xi_0 = 1$ 和 $\xi_1 = 1.3$），同时显示短时傅里叶变换和各种压缩变换；（左）短时傅里叶变换 $|V|$; （中）标准同步压缩 $|S_V^{(h)}{}_{,f}|$; （右） $S^{(h)}_{\mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}},f}$。

正如我们稍后将展示的，在我们的特殊双谐波设置中，特殊情形 $G := \mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}}$ 消除了谱干涉的影响，这有助于阐明短时傅里叶变换在诱发谱干涉中的作用。参见图 8，其中的对比清楚地显示了谱干涉方面的差异。我们注意到， $S^{(h)}_{\mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}},\ f}$似乎消除了谱干涉的影响，而谱干涉则很容易通过视觉观察检测出来。

**5.1. 广义同步压缩变换的分析**。现在，我们进行一系列分析，以研究广义同步压缩变换中谱干涉的行为。为此，将同步压缩变换视为某个复测度经重分配映射推前后的正则化是很方便的。固定 $t$ ，并再次令 $G_f^{(h)}(t, \eta)$ 为时频平面上的任意复值函数，其中 $\forall t \in \mathbb{R}: G_f^{(h)}(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$。

在 $\eta$轴上定义一个复测度：

$$\mu_t(d\eta) = G_f^{(h)}(t,\eta)\, d\eta.$$

通过重分配映射 $\eta \mapsto \hat{\eta}_s(t,\eta)$ 将该测度推前，可得到一个测度 $\nu_t$ 于 $\mathbb{C}$，

$$\nu_t = (\hat{\eta}_s(t,\cdot))_{\#}\mu_t.$$

于是， $S_{G,f}^{(h)}(t,\cdot)$ 是复测度 $\nu_t$ 与核 $g_\alpha$的卷积：

$$S_{G,f}^{(h)}(t,\xi) = \int_{\mathbb{C}} g_\alpha(\xi - z)\, \nu_t(dz).$$

在双分量模型中，$\hat{\eta}_s(t,\cdot)$ 的值域是 $\mathbb{C}$中的一维曲线。在下文所考察的相长与相消时刻，我们将发现这条曲线位于实轴上，

$$\hat{\eta}_s(t_k^+, \mathbb{R}) = (\xi_0, \xi_1), \qquad \hat{\eta}_s(t_k^-, \mathbb{R}) = (-\infty, \xi_0) \cup (\xi_1, \infty).$$

在其他时刻，根据引理5的描述， $\nu_t$ 集中在复平面中的一个圆上。当 $\nu_t$ 相对于一维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^1$ 沿其支撑曲线绝对连续时，我们记作

$$\nu_t(dz) = \Theta_{G,t}(z)\, \mathcal{H}^1(dz),$$

并称 $\Theta_{G,t}$ 为推前密度。在上述实轴情形中，$\mathcal{H}^1$ 是 $\mathbb{R}$中相应子集上的勒贝格测度。如果 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得方程 $\hat{\eta}_s(t,\eta) = \xi$ 具有有限个正则解$\eta_j(t,\xi)$，那么

$$\Theta_{G,t}(\xi) = \sum_{\hat{\eta}_s(t,\eta_j)=\xi} \frac{G_f^{(h)}(t,\eta_j)}{|\partial_\eta \hat{\eta}_s(t,\eta_j)|}, \tag{24}$$

在支撑集上，而 $\Theta_{G,t}(\xi) = 0$ 在支撑集之外。我们可以通过以下定理，在相长与相消时刻明确呈现这一测度映射视角。

首先，考虑 $G = \mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}}$ 处于相长与相消时刻的情形。我们可以用 $g_\alpha$ 中关于小参数 $\alpha \ll 1$ 的渐近近似来说明， $S_{\mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}},f}^{(h)}$ 实际上能够分离两个分量的脊线，即使它们之间的间隔任意小。

定理 2（$S_{\mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}},f}^{(h)}(t,\xi)$的渐近行为）。假设假设 2 成立。取如上所定义的 $S_{G,f}^{(h)}$，并固定 $G = \mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}}$。固定一个紧致的 $\Xi \subset (\xi_0, \xi_1)$，并令 $c_\Xi := \inf_{\xi\in\Xi} \min\{(\xi-\xi_0)^2, (\xi-\xi_1)^2\} > 0$，其中 $R = R(\alpha) = o\left(e^{c_\Xi/\alpha}\right)$ 且 $R \to \infty$ 如 $\alpha \to 0$。对于

相长和相消时间，当 $\alpha$ 足够小时，以下分段渐近式成立，

$$S^{(h)}_{\mathbb{1}_{[-R,R]},f}(t_k^+,\xi)=\begin{cases}\Theta_{1,t_k^+}(\xi)+O(\alpha), & \xi\in(\xi_0,\xi_1),\\ O\left(\exp\left(-\frac{M(\xi)}{\alpha}\right)\right), & \xi\in(-\infty,\xi_0)\cup(\xi_1,\infty),\end{cases}$$

$$S^{(h)}_{\mathbb{1}_{[-R,R]},f}(t_k^-,\xi)=\begin{cases}O\left(\exp\left(-\frac{M(\xi)}{\alpha}\right)\right), & \xi\in(\xi_0,\xi_1),\\ \Theta_{1,t_k^-}(\xi)+O(\alpha), & \xi\in(-\infty,\xi_0)\cup(\xi_1,\infty),\end{cases}$$

其中 $\Theta_{1,\ t}$ 由 (24) 定义，并具有显式形式

$$\Theta_{1,t_k^+}(\xi)=\frac{1}{2\pi^2\sigma^2}\frac{1}{|\xi-\xi_0|\,|\xi-\xi_1|}\quad \textit{for } \xi\in(\xi_0,\xi_1),$$

$$\Theta_{1,t_k^-}(\xi)=\frac{1}{2\pi^2\sigma^2}\frac{1}{|\xi-\xi_0|\,|\xi-\xi_1|}\quad \textit{for } \xi\in(-\infty,\xi_0)\cup(\xi_1,\infty),$$

且在指定区间之外，$\Theta_{1,\ t_k^\pm}(\xi)=0$ 以及 $M(\xi)=\min\{(\xi-\xi_0)^2,(\xi-\xi_1)^2\}$。

定理 *2* 的证明。固定 $t=t_k^+$ 并定义 $\zeta(\eta):=\hat{}\eta_s(t_k^+,\ \eta)$。在 $t_k^+$ 处，我们有 $\zeta(\mathbb{R})=(\xi_0,\ \xi_1)$，且 $\zeta$ 严格递增，因此对每个 $\xi\in(\xi_0,\ \xi_1)$，都存在唯一的 $\eta_*=\eta_*(\xi)$，使得 $\zeta(\eta_*)=\xi$。根据定义，

$$S^{(h)}_{1,f}(t_k^+,\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\int_{-R(\alpha)}^{R(\alpha)}\exp\left(-\frac{(\zeta(\eta)-\xi)^2}{\alpha}\right)d\eta.$$

固定一个紧致的 $\Xi\subset(\xi_0,\ \xi_1)$。由于 $R(\alpha)\to\infty$，存在 $\alpha_0>0$，使得对所有 $\alpha\in(0,\ \alpha_0]$ 以及所有 $\xi\in\Xi$，都有 $\eta_*(\xi)\in(-R(\alpha)\ R(\alpha))$。定义

$$g(\eta):=(\zeta(\eta)-\xi)^2.$$

Then

$$g(\eta_*)=0,\qquad g'(\eta)=2(\zeta(\eta)-\xi)\zeta'(\eta)\implies g'(\eta_*)=0,$$

and

$$g''(\eta)=2(\zeta'(\eta))^2+2(\zeta(\eta)-\xi)\zeta''(\eta)\implies g''(\eta_*)=2(\zeta'(\eta_*))^2>0.$$

因此 $\eta_*$ 是一个非退化极小值。泰勒展开给出

$$g(\eta)=(\zeta'(\eta_*))^2(\eta-\eta_*)^2+o((\eta-\eta_*)^2),$$

对 $\xi\in\Xi$ 一致成立。拉普拉斯方法给出

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\int_{-R(\alpha)}^{R(\alpha)}e^{-g(\eta)/\alpha}d\eta=\frac{1}{|\zeta'(\eta_*)|}+O(\alpha),$$

对 $\xi \in \Xi$ 一致成立。因此

$$S_{1,f}^{(h)}(t_k^+,\xi) = \frac{1}{|\partial_\eta \hat{\eta}_s(t_k^+,\eta_*(\xi))|} + O(\alpha),$$

根据（24），由于在（$\xi_0$，$\xi_1$）上原像是唯一的，这与 $\Theta_{1,\ t_k^+}(\xi) + O(\alpha)$ 重合。接下来需要用 $\xi$ 表示 $|\partial_\eta \hat{\eta}_s(t_k^+,\ \eta_*)|$。作代换

$$u = a\exp\left(-\pi^2\sigma^2(\Delta^2 - 2\Delta(\eta-\xi_0))\right), \qquad \frac{du}{d\eta} = 2\pi^2\sigma^2\Delta u.$$

在 $t_k^+$ 处，我们有

$$\hat{\eta}_s(t_k^+,\eta) = \xi_0 + \Delta\frac{u}{1+u}.$$

求导得

$$\partial_\eta \hat{\eta}_s(t_k^+,\eta) = \Delta\frac{1}{(1+u)^2}\frac{du}{d\eta} = 2\pi^2\sigma^2\Delta^2\frac{u}{(1+u)^2}.$$

在 $\eta = \eta_*$ 处，恒等式 $\xi = \xi_0 + \Delta_{1\frac{u}{+u}}$意味着

$$u = \frac{\xi-\xi_0}{\xi_1-\xi}, \qquad 1+u = \frac{\Delta}{\xi_1-\xi},$$

因此

$$\left|\partial_\eta \hat{\eta}_s(t_k^+,\eta_*)\right| = 2\pi^2\sigma^2\Delta^2\frac{u}{(1+u)^2} = 2\pi^2\sigma^2|\xi-\xi_0|\,|\xi-\xi_1|.$$

因此,

$$\Theta_{1,t_k^+}(\xi) = \frac{1}{2\pi^2\sigma^2}\frac{1}{|\xi-\xi_0|\,|\xi-\xi_1|}, \qquad \xi \in (\xi_0,\xi_1),$$

如所声称的那样。

若 $\xi \notin (\xi_0,\xi_1)$，则对所有 $\eta$，$|\zeta(\eta) - \xi| \geq \min\{|\xi-\xi_0|, |\xi-\xi_1|\}$，因此

$$\begin{aligned}\left|S_{1,f}^{(h)}(t_k^+,\xi)\right| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\int_{-R(\alpha)}^{R(\alpha)}\exp\left(-\frac{\min\{(\xi-\xi_0)^2,(\xi-\xi_1)^2\}}{\alpha}\right)d\eta \\ &\leq \frac{2R(\alpha)}{\sqrt{\pi\alpha}}\exp\left(-\frac{\min\{(\xi-\xi_0)^2,(\xi-\xi_1)^2\}}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

附加假设 $R(\alpha) = o(e^{c\Xi/\alpha})$ 保证对于远离 $\xi_0,\xi_1$ 的 $\xi$，该式一致地具有所述的指数级小量形式。

情形 $t = t_k^-$ 完全相同：此时 $\hat{\eta}_s(t_k^-,\mathbb{R}) = (-\infty,\xi_0) \cup (\xi_1,\infty)$，唯一原像的拉普拉斯论证适用于该支集的紧子集；而在 $(\xi_0,\xi_1)$ 上，同一估计给出指数级小量。□

接下来，考虑 $G = V$ 的情形；也就是说，标准同步压缩变换。我们进行如下分析。

**定理 3 (** $S_V^{(h)}$、$_f(t,\xi)$的渐近行为)。 假设假设 *2* 成立。取如上所定义的 $S_V^{(h)}$、$_f$。对于相长与相消时刻，以下分段渐近式成立，

$$S_{V,f}^{(h)}(t_k^+,\xi)=\begin{cases}\Theta_{V,t_k^+}(\xi)+O(\alpha), & \xi\in(\xi_0,\xi_1),\\ O\left(\exp\left(-\frac{M(\xi)}{\alpha}\right)\right), & \xi\in(-\infty,\xi_0)\cup(\xi_1,\infty),\end{cases}$$

$$S_{V,f}^{(h)}(t_k^-,\xi)=\begin{cases}O\left(\exp\left(-\frac{M(\xi)}{\alpha}\right)\right), & \xi\in(\xi_0,\xi_1),\\ \Theta_{V,t_k^-}(\xi)+O(\alpha), & \xi\in(-\infty,\xi_0)\cup(\xi_1,\infty),\end{cases}$$

其中 $\Theta_{V,\ t}$ 由 (24) 定义，其中 $G_f^{(h)}(t,\eta) = V_{(h)}f(t,\eta)$。记作$u_*(\xi) = \frac{\xi-\xi_0}{\xi-\xi_1}$，则有

$$\Theta_{V,t_k^+}(\xi)=\frac{e^{2\pi i\xi_0 t_k^+}}{2\pi^2\sigma^2}\frac{A_+(\xi)}{(\xi-\xi_0)(\xi-\xi_1)}\quad for\ \xi\in(\xi_0,\xi_1),$$

$$\Theta_{V,t_k^-}(\xi)=-\frac{e^{2\pi i\xi_0 t_k^-}}{2\pi^2\sigma^2}\frac{A_-(\xi)}{(\xi-\xi_0)(\xi-\xi_1)}\quad for\ \xi\in(-\infty,\xi_0)\cup(\xi_1,\infty),$$

在指定区间之外的 $\Theta_{V,\ t_k^\pm}(\xi) = 0$，其中

$$A_+(\xi)=(1-u_*(\xi))\exp\left(-\frac{\pi^2\sigma^2\Delta^2}{4}\right)\left(-\frac{a}{u_*(\xi)}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\left[\ln\left(-\frac{u_*(\xi)}{a}\right)\right]^2}{4\pi^2\sigma^2\Delta^2}\right),$$

$$A_-(\xi)=|1-u_*(\xi)|\exp\left(-\frac{\pi^2\sigma^2\Delta^2}{4}\right)\left(\frac{a}{u_*(\xi)}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\left[\ln\left(\frac{u_*(\xi)}{a}\right)\right]^2}{4\pi^2\sigma^2\Delta^2}\right),$$

和 $M(\xi) =$ 分钟$\{(\xi-\xi_0)^2,(\xi-\xi_1)^2\}$。

定理 *3* 的证明。令 $\tau = 2\pi\Delta t$。根据定义，

$$S_{V,f}^{(h)}(t,\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}V_f^{(h)}(t,\eta)\exp\left(-\frac{|\hat\eta_s(t,\eta)-\xi|^2}{\alpha}\right)d\eta.$$

我们可以进行变量代换 $u = a\exp(-\pi^2\sigma^2(\Delta^2-2\Delta(\eta-\xi_0)))$，其中 $\frac{du}{d\eta} = -2\pi^2\sigma^2\Delta u$ 将 $\eta\in\mathbb{R}$ 映射到 $u\in(0,\infty)$，并得到

$$V_f^{(h)}(t,\eta)=e^{2\pi i\xi_0 t}\exp\left(-\frac{\pi^2\sigma^2\Delta^2}{4}\right)\left(\frac{a}{u}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{[\ln(u/a)]^2}{4\pi^2\sigma^2\Delta^2}\right)(1+ue^{i\tau})$$

and

$$\hat\eta_s(t,\eta)=\xi_0+\Delta\frac{ue^{i\tau}}{1+ue^{i\tau}}.$$

还要注意，对于 $t = t_k^+$ ，我们有 $e^{i\tau} = 1$ ，且映射 $\eta \mapsto \hat{\eta}_s(t, \eta)$ 从 $\xi_0$ 到 $\xi_1$严格递增。因此，对于每个 $\xi \in (\xi_0, \xi_1)$，都存在唯一的 $\eta_*$ ，使得 $\hat{\eta}_s(t_k^+, \eta_*) = \xi$。在 $\eta_*$处， $u_* = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi} = -u_*(\xi)$，并且

$$\left|\partial_\eta \hat{\eta}_s(t_k^+, \eta_*)\right| = -2\pi^2\sigma^2(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1).$$

对非退化极小值应用二次型形式的拉普拉斯方法，可设

$$F(\eta) = V_f^{(h)}(t_k^+, \eta), \qquad g(\eta) = |\hat{\eta}_s(t_k^+, \eta) - \xi|^2,$$

so

$$g(\eta_*) = g'(\eta_*) = 0 \quad \text{and} \quad g''(\eta_*) = 2\left(\partial_\eta \hat{\eta}_s(t_k^+, \eta_*)\right)^2 > 0.$$

泰勒展开给出

$$g(\eta) = \left(\partial_\eta \hat{\eta}_s(t_k^+, \eta_*)\right)^2 (\eta - \eta_*)^2 + o\left((\eta - \eta_*)^2\right)$$

因此

$$\begin{aligned} S_{V,f}^{(h)}(t_k^+, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta) \exp\left(-\frac{g(\eta)}{\alpha}\right) d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(\eta_*) + O(|\eta - \eta_*|)\right) \\ &\qquad \times \exp\left(-\frac{\left(\partial_\eta \hat{\eta}_s(t_k^+, \eta_*)\right)^2 (\eta - \eta_*)^2}{\alpha} + o\left(\frac{(\eta - \eta_*)^2}{\alpha}\right)\right) d\eta \\ &= \frac{F(\eta_*)}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\left(\partial_\eta \hat{\eta}_s(t_k^+, \eta_*)\right)^2 (\eta - \eta_*)^2}{\alpha}\right) d\eta + O(\alpha) \\ &= \frac{F(\eta_*)}{\left|\partial_\eta \hat{\eta}_s(t_k^+, \eta_*)\right|} + O(\alpha). \end{aligned}$$

代入上述形式即可得到相应的近似。在互补的 $\xi$ 区域中，不存在内部原像，因此积分关于 $\alpha$ 指数级小。具体而言，若 $\xi$ 位于唯一内部原像存在区域之外（即在 $t_k^+$ 处满足 $\xi \notin (\xi_0, \xi_1)$，或在 $t_k^-$ 处满足 $\xi \in (\xi_0, \xi_1)$），则 $g(\eta) = |\hat{\eta}_s(t, \eta) - \xi|^2$ 满足 $\inf_\eta g(\eta) = c(\xi) > 0$，并且

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |V_f^{(h)}(t, \eta)| e^{-g(\eta)/\alpha} d\eta \le \frac{\|V_f^{(h)}(t, \cdot)\|_\infty}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-c(\xi)/\alpha} d\eta = O\left(e^{-c(\xi)/\alpha}\right).$$

相消时刻的情形也可同样应用拉普拉斯方法，只需互换区间的作用。□

参见附录 B，其中有定理2和定理3随 $\Delta$ 变化的动画。

注记 6。 在相长时刻，形式上的选择 $G \equiv 1$ 会导出推前密度

$$\Theta(\xi) = \frac{1}{2\pi^2\sigma^2} \frac{1}{|\xi - \xi_0|\,|\xi - \xi_1|} \quad \text{for } \xi \in (\xi_0, \xi_1),$$

and

$$\Theta(\xi) = 0 \quad \text{for } \xi \in (-\infty, \xi_0) \cup (\xi_1, \infty).$$

该密度在 $\xi_0$ 和 $\xi_1$附近不可积，因此推前测度的总质量无限，与 $g_\alpha$ 进行卷积会产生 $+\infty$。截断到 $G = \mathbb{1}_{[-R,R]}$ 是一个独立的技术步骤，其作用仅仅是使正则化有限；结构行为则由Θ编码。

请注意定理2和定理3所述的 $S^{(h)}_{\mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}},\, f}$ 与$S^{(h)}_{V\,,\, f}(t,\ \xi)$的渐近形式之间的差异。具体而言，对于相长时刻 $t_k^+$ ， $S^{(h)}_{\mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}},\, f}$ 的渐近形式总是在两个瞬时频率 $\xi_0$和 $\xi_1$处给出两个峰，而标准同步压缩变换 $S^{(h)}_{V\,,\, f}(t,\ \xi)$在 $\Delta$较小时，会在相长时刻给出一个峰。通过数值计算可以观察到这一点以及相应的渐近形式，见图 9 和附录 B 中的动画。

注记 7。 上述同一拉普拉斯方法适用于任意固定时间$t$，但临界点结构取决于 $\tau = 2\pi\Delta t$。例如，写作

$$S^{(h)}_{V,f}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{\mathbb{R}} V^{(h)}_f(t,\eta) \exp\left(-\frac{|\hat{\eta}_s(t,\eta) - \xi|^2}{\alpha}\right) d\eta,$$

当 $\hat{\eta}_s(t,\ \eta) = \xi$ 有实数解$\eta_*$时，会产生内部贡献。令 $u(\eta) = a \exp\left(-\pi^2\sigma^2\left(\Delta^2 - 2\Delta(\eta - \xi_0)\right)\right) > 0$，则得到 $u_* = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi} e^{-i\tau}$。由于 $u(\eta) \in (0,\ \infty)$，当且仅当 $u_* \in (0,\ \infty)$ 时，存在实原像。在这些情况下，

$$S^{(h)}_{V,f}(t,\xi) = \frac{V^{(h)}_f(t,\eta_*)}{|\partial_\eta \hat{\eta}_s(t,\eta_*)|} + O(\alpha),$$

并通过在相应的 $u_*$处计算 $V_{(h)}f(t,\ \eta_*)$和 $\partial_\eta \hat{\eta}_s(t,\ \eta_*)$，即可得到振幅。对于不满足条件 $u_* \in (0,\ \infty)$的一般 $t$ 和 $\xi$ 对，不存在实临界点，因此 $\min_{\eta\in\mathbb{R}} |\hat{\eta}_s(t,\ \eta) - \xi|^2 > 0$ 并且

$$S^{(h)}_{V,f}(t,\xi) = O\left(e^{-c(t,\xi)/\alpha}\right).$$

仍可通过解析延拓和最速下降法得到完整的渐近近似，但这会引入对

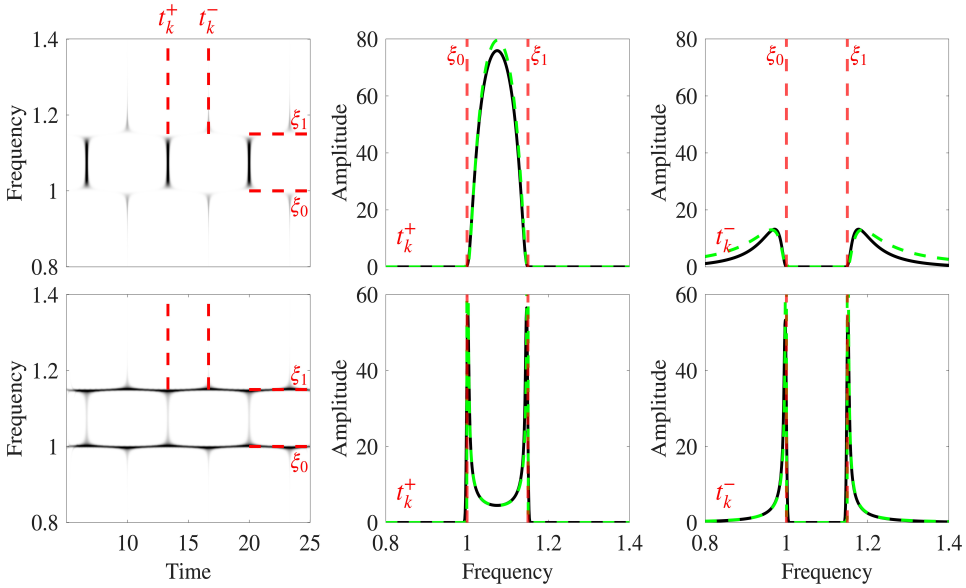


图 9. 与图6和图11中所述相同的信号（其中 $\sigma = \sqrt{2}$, $a = 1$、$\xi_0 = 1$ 和 $\xi_1 = 1.15$），顶行为（左）$|S_{V,\ f}|$;（中）其在相长时刻 $t_k^+$ 的截面；（右）其在相消时刻 $t_k^-$ 的截面；底行则展示 $|S^{(h)}_{\mathbb{1}_{\{\eta\in[-R,R]\}},\ f}|$ 的对应结果，其中绿色曲线为定理2和3给出的渐近近似。

数项的分支选择和分类讨论。因此，为使表述简洁，我们将范围限制在 $t_k^+$ 和 $t_k^-$ 。

**5.2. 标准同步压缩变换的渐近行为。** 前述渐近结果适用于较小的 $\alpha$。在本小节中，我们计算 $\sigma\Delta$较大或较小时同步压缩变换的闭式表达，并探讨由此产生的脊线影响。将同步压缩变换明确写为

$$\begin{aligned} S_f^{(h)}(t,\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} V_f^{(h)}(t,\eta) g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t,\eta)-\xi\right) d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{2\pi i\xi_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{h}(\eta-\xi_0) + a e^{2\pi i\Delta t}\hat{h}(\eta-\xi_1)\right) e^{-|\hat{\eta}_s(t,\eta)-\xi|^2/\alpha} d\eta. \end{aligned}$$

由于 $\hat{}\eta_{s,\ f_0}(t,\ \eta) = \xi_0$ 且 $\hat{}\eta_{s,\ f_1}(t,\ \eta) = \xi_1$，我们也有

$$S_{f_0}^{(h)}(t,\xi) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}} e^{2\pi i\xi_0 t} e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi_0-\xi)^2} \quad \text{and} \quad S_{f_1}^{(h)}(t,\xi) = \frac{a}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}} e^{2\pi i\xi_1 t} e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi_1-\xi)^2},$$

$\hat{}$ 常数来自对高斯函数 $h$积分。

5.2.1. 当 $\sigma\Delta$ “较大”时。 当 $\sigma\Delta$较大时，正如预期的那样，同步压缩变换能够很好地分离分量。以下命题明确地阐述了这一观察。

**命题 4.** 当 $\sigma\Delta > 0$ 足够大时，我们有

$$S_f^{(h)}(t,\xi) = S_{f_0}^{(h)}(t,\xi) + S_{f_1}^{(h)}(t,\xi) + O(e^{-\pi^2\sigma^2\Delta^2/4}).$$

上述命题的证明见附录A。即使 $\sigma\Delta$ 不大，我们仍应预期，当两个分量的振幅极不平衡时，同步压缩变换应近似于相对振幅较大的分量的同步压缩变换。以下命题也可以将这一观察精确化。

**命题 5.** 当 $a \geq 0$ 足够小时，我们有

$$S_f^{(h)}(t,\xi) = S_{f_0}^{(h)}(t,\xi) + O(a),$$

当 $a > 0$ 足够大时，我们有

$$S_f^{(h)}(t,\xi) = S_{f_1}^{(h)}(t,\xi) + O(1/a).$$

上述命题的证明见附录A。

5.2.2. 当 $\sigma\Delta$ 较“小”时。 $\sigma\Delta$较小时所在的区域尤其值得关注，因为短时傅里叶变换中会出现谱干涉，而且正如直觉所预期的那样，同步压缩变换中也会出现谱干涉。虽然引理 1 给出了一个明确的临界间隔，说明对于短时傅里叶变换而言，$\Delta$ 相对于 $\sigma$可以小到何种程度而仍能分离两个分量，但由于重分配和同步压缩变换的非线性，要为同步压缩变换找到类似的界并不容易。不过，第 5.1 节引入的测度映射视角，为理解同步压缩重分配映射将非平凡质量向前推送的区域提供了一些洞见。利用这一洞见，我们可以明确描绘出对同步压缩变换积分产生有意义贡献的各项贡献。

**定理 4。** 假设 $C = \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}}$。基于定理 *5*，定义

$$\begin{aligned} H(\xi) = \alpha^{-1/2}[&\operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_1 - \xi_0)) - \operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_2 - \xi_0)) \\ &+ a\operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_1 - \xi_1)) - a\operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_2 - \xi_1))]. \end{aligned}$$

当 $\alpha$ 足够小时，在 $O\left(\alpha^{-1/2}e^{-C^2}\right)$ 修正的意义下，存在一对 $(\Delta, r)$，满足 $r > 0$，并且

$$s_1 = -\frac{\Delta r}{a+r}, \qquad s_2 = -\frac{\Delta}{ar+1},$$
$$z_1 = \frac{\pi\sigma\Delta}{2} - \frac{\ln r}{2\pi\sigma\Delta}, \qquad z_2 = \frac{\pi\sigma\Delta}{2} + \frac{\ln r}{2\pi\sigma\Delta},$$

*and*

$$\gamma_1' = -\frac{1}{2\pi^2\sigma^2 s_1(s_1+\Delta)}, \quad \gamma_2' = -\frac{1}{2\pi^2\sigma^2 s_2(s_2+\Delta)},$$
$$\gamma_1'' = \frac{2s_1+\Delta}{2\pi^2\sigma^2 s_1^2(s_1+\Delta)^2}, \quad \gamma_2'' = \frac{2s_2+\Delta}{2\pi^2\sigma^2 s_2^2(s_2+\Delta)^2},$$

以下两个方程成立：

$$r = \frac{\gamma_2' - a\gamma_1'}{\gamma_1' - a\gamma_2'}, \tag{25}$$

$$(r+a)\gamma_1'' - (1+ar)\gamma_2'' + 2\pi\sigma\left[(-z_1 r + az_2)(\gamma_1')^2 + (z_2 - arz_1)(\gamma_2')^2\right] = 0. \tag{26}$$

将$\Delta_{critical、同步压缩变换}$记为解 $\Delta$。对于方程$(\Delta, r)$ 的任意解，以及(25) 和(26)，对应的 $H$ 临界点为 $\xi_c = \xi_0 + \frac{3\Delta}{4} + s_1$，因此 $H'(\xi_c) = H''(\xi_c) = 0$。

在时刻$t = t_k^+$，$|S_f^{(h)}(t_k^+, \eta)|$ 有一个局部极大值，当 $\Delta < \Delta_{critical、同步压缩变换}$ 时；而当$\Delta > \Delta_{critical,\ SST}$时有两个局部极大值。

关于该定理证明的细节，请参见附录 A.1。附录中上述部分还包含关于两个干涉时刻同步压缩变换闭式表达式的中间定理，具体而言，即定理 5 和定理 6，它们是命题 4 和命题 5 在 $\sigma\Delta$ 较小且 $a = O(1)$ 区域内的类似版本。此外，附录 B 中还包含了随着 $\Delta$ 变化而呈现上述定理的动画。借助该定理，我们现在可以比较同步压缩变换和短时傅里叶变换，并通过直接比较$\Delta_{\text{critical、短时傅里叶变换}}$与$\Delta_{\text{critical, SST}}$，看出当 $a = 1$时，同步压缩变换能够分离频率间隔更小的两个分量。示意图见图 10。当$a = 1$时，(25)在二重根处给出 $r = \frac{1-\gamma_1'/\gamma_2'}{\gamma_1'/\gamma_2'-1} = \frac{1}{3}$（等价地，$z_1^2 - z_2^2 = \ln 3$）。令 $\bar{z}_1 = \frac{\pi\sigma\Delta}{2} + \ln\sqrt[3]{2\pi\sigma\Delta}$和 $z_2 = \frac{\pi\sigma\Delta}{2} - \ln\sqrt[3]{2\pi\sigma\Delta}$，方程(26)简化为

$$\pi\sigma\Delta - \frac{2}{3}\frac{\ln 3}{\pi\sigma\Delta} = 0,$$

因此 $(\pi\sigma\Delta)^2 = \frac{2}{3}\ln 3$，进而

$$\Delta_{\text{critical, SST}}(a=1) = \frac{1}{\pi\sigma}\sqrt{\frac{2\ln 3}{3}}.$$

另一方面，当 $a = 1$ 注 1 告诉我们，对于 $\Delta_{\text{critical, 短时傅里叶变换}}(a=1) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sigma}$。因此，在振幅平衡情形下，同步压缩变换能够分离频率间隔更小的分量，而临界

分量间隔的值在应用同步压缩变换时会缩小$\sqrt{\ln 3^3} \approx 0.6$倍。

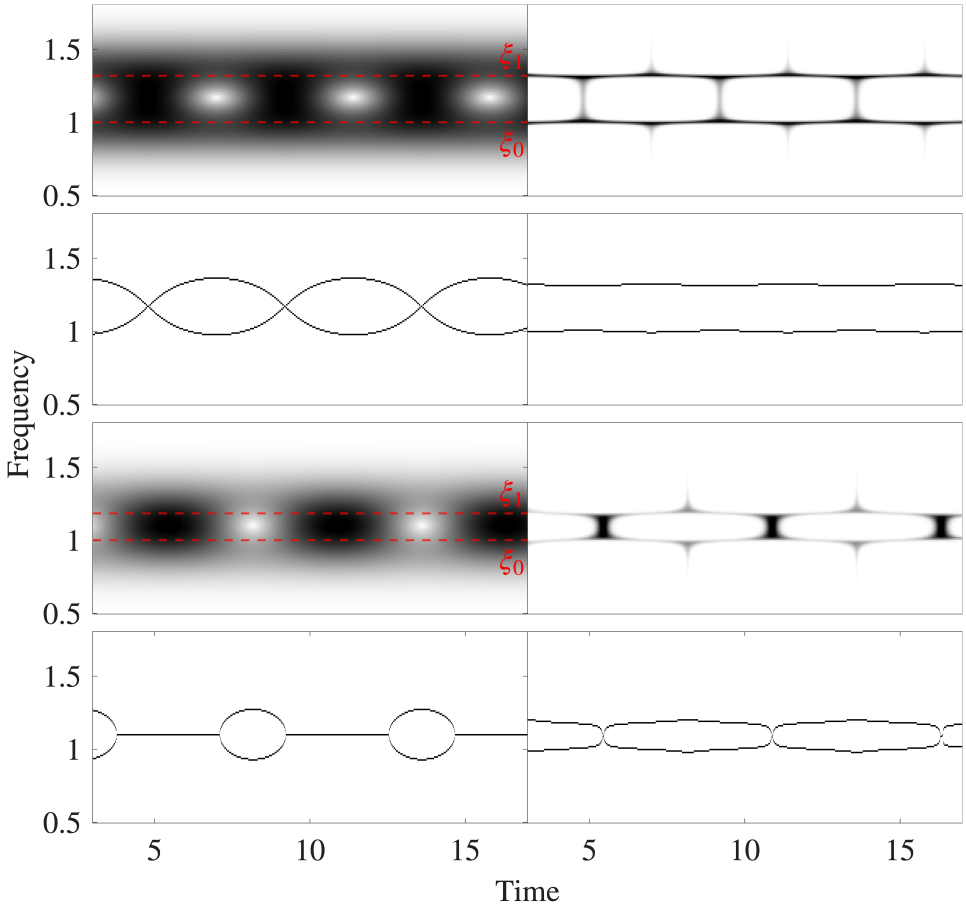


图 10。所有结果均采用 $\sigma = \sqrt{2}$，$a = 1$ 和 $\xi_0 = 1$；（左列）短时傅里叶变换，（右列）同步压缩变换；（上方四幅）上方为时频表示，下方为脊线，采用 $\Delta = \Delta_{\text{cricitcal，短时傅里叶变换}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sigma}$；（下方四幅）同上，采用 $\Delta = \Delta_{\text{cricitcal，同步压缩变换}} = \frac{1}{\pi\sigma}\sqrt{2\ln 3}$。

## 6. 讨论与未来方向

标准同步压缩变换通过同步压缩重分配来定义，但自然会产生一个问题：它是否最优？大量研究表明，纳入相位函数的高阶导数能够改善结果，从而得到所谓的

二阶 [OMP15] 及更高阶 [PM17] 同步压缩变换。此前的分析还表明，短时傅里叶变换的幅度与相位之间的非线性关系，会造成所得时频表示中出现频谱干涉模式。本文考察同步压缩重分配与先前提出的相位导出重分配之间的差异；与高阶同步压缩变换 [OMP15; PM17]相比，前者可视为“零”阶同步压缩变换。为作比较，我们将上述同步压缩变换与另一种版本并列考察：后者采用相位导出频率重分配 $\hat{}\eta_p(t,\ \eta)$，而非 $\hat{}\eta_s(t,\ \eta)$。通过这种方式，我们可以在图11中比较这两种重分配方式的影响（参数与图6相同）。具体而言，可以看到，使用相位重分配会在视觉上使相消时刻出现一定程度的模糊，同时还会加剧频谱干涉，这表现为相长时刻的模糊更加明显。从脊线图中还可以看出，与相位重分配相比，采用同步压缩重分配时，相长时刻集合中的区间长度更短。关于式（21）中的纯虚项如何使同步压缩重分配受益，以及高阶同步压缩变换中的频谱干涉问题，我们留待未来研究。

在实际应用中，信号是离散的。为将我们的连续分析与这一情形联系起来，我们在区间$[-\sqrt{n}/2, \sqrt{n}/2]$ 上以大小为 $n$的均匀网格进行采样，采样周期为 $1/\sqrt{n}$。这对应于 $\sqrt{n}$ Hz 的采样率和$1/\sqrt{n}$的频率分辨率。在此方案下，短时傅里叶变换、重分配和同步压缩变换均通过黎曼和近似实现，并且所得时频表示在 $n \to \infty$时收敛到其连续对应形式。示例见 [CCW14] 。尽管这超出了本文的范围，但当输入为随机过程时，会出现一个重大挑战。近期研究表明，在满足适当的矩条件和依赖条件时，[WZ25], 离散化的时频表示可以用高斯随机场进行近似。理解噪声在这一情形下如何影响谱干涉，是未来研究的一个有趣方向。

本文聚焦于具有两个分量的信号。在实际应用中，我们需要处理具有多个分量的信号。对于多谐波情形 $f^\dagger(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{2\pi i \xi_k t}$，其中 $n > 2$，我们可以将重分配算子计算为 $\hat{}\eta_{s,f^\dagger}(t,\eta) = M^\dagger(q_1(t,\eta) \ldots q_n(t,\eta))$，其中 $q_k(t,\eta) = a_k e^{2\pi i \xi_k t} \hat{}h(\eta - \xi_k)$ 且 $M^\dagger\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ 由$M^\dagger(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k z_k}{\sum_{k=1}^n z_k}$ 定义。注意，对于~~每个~~ $k = 1, \ldots, n$，我们都有$M^\dagger(0, \ldots, 0, z_k, 0, \ldots, 0) = \xi_k$，对所有 $z_k \in \mathbb{C}$均成立，且 $M^\dagger(z_1, \ldots, z_{k-1}, 1, z_{k+1}, \ldots z_n) \approx$

$\xi_k$ 若 $\max_{j\neq k}|z_j| \ll 1$。请注意，在这种情况下，$M^\dagger$ 看起来像是我们先前研究的线性分式变换的高维版本。当多个相邻频率彼此接近时，分析比两个分量的情形更具挑战性。例如，当 $n = 3$ 和 $\xi_{i+1} - \xi_i = \Delta_i$, $i = 1$，2 都很小时，$a_1 e^{2\pi i \xi_1 t}$ 不仅会与 $a_2 e^{2\pi i \xi_2 t}$ 发生干涉，还会与 $a_3 e^{2\pi i \xi_3 t}$发生干涉。此外，在实际应用中，人们可能会在短时傅里叶变换中使用非高斯窗函数。尽管本文不对此进行系统研究，但显然不同的窗函数会产生不同的频谱干涉模式。我们将多个分量情形的探讨以及窗函数选择对谱干涉的影响留待未来研究。

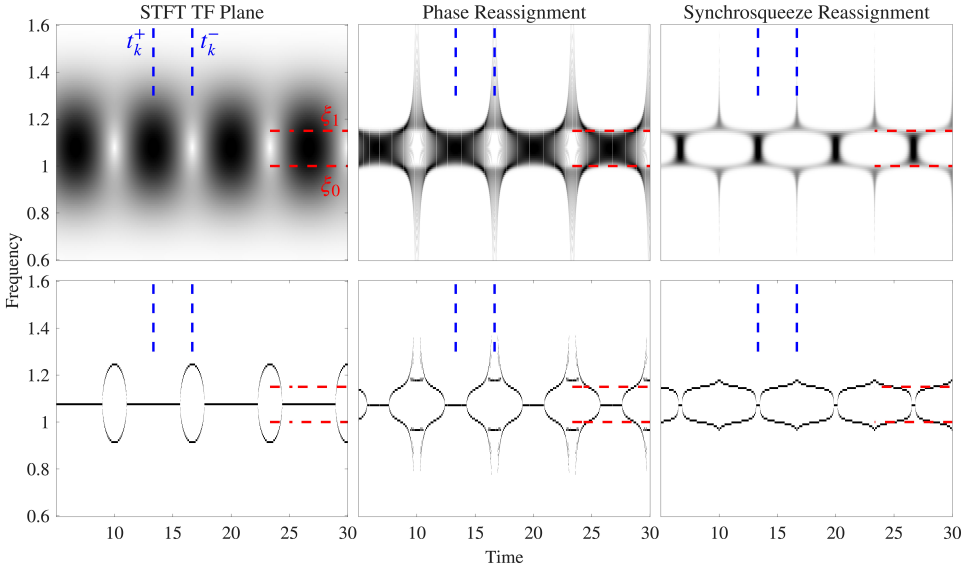


图11。与图6所述相同的信号（其中 $\sigma = \sqrt{2}$，$a = 1$、$\xi_0 = 1$ 和 $\xi_1 = 1.15$），顶行为（左）短时傅里叶变换；（中）使用相位重分配 $\hat{}\eta$ 的同步挤压；（右）使用同步挤压重分配 $\hat{}\eta_s$ 的同步挤压；底行为相应的脊线。

## 致谢

SC 的工作部分由美国国家科学基金会通过项目 DMS-2038056 资助。

# 参考文献

[AF95] F. Auger 和 P. Flandrin。“通过重分配方法提高时频和时标表示的可读性”。载于：*IEEE*信号处理汇刊43.5 (1995)，第 1068–1089 页。[CAF03] Eric Chassande-Mottin、Francois Auger 和 Patrick Flandrin。“时频/时标重分配”。载于：小波与信号处理(2003)，第 233–267 页。[CCW14] Yu-Chun Chen、Ming-Yen Cheng 和 Hau-Tieng Wu。“异方差相关误差下动态周期性与趋势的非参数自适应建模”。载于：英国皇家统计学会杂志*B*辑：统计方法学76.3 (2014)，第 651–682 页。[CHT99] R.A. Carmona、W.L. Hwang 和 B. Torresani。“多脊线检测与时频重建”。载于：*IEEE*信号处理汇刊47.2 (1999)，第 480–492 页。[CSZ24] Antonio Cicone、Stefano Serra-Capizzano 和 Haomin Zhou。“一个还是两个频率？迭代滤波给出答案”。载于：应用数学与计算462 (2024)，第 128322 页。[CW21] Marcelo A Colominas 和 Hau-Tieng Wu。“利用时变波形函数分解非平稳信号”。载于：*IEEE*信号处理汇刊69 (2021)，第 5094–5104 页。[Del+92] N. Delprat 等。“渐近小波与 Gabor分析：瞬时频率的提取”。载于：*IEEE*信息论汇刊38.2 (1992)，第 644–664 页。[Del97] N. Delprat。“从信号的 Gabor 变换中提取全局调频规律：相互作用分量情形的初步研究”。载于：*IEEE*语音与音频处理汇刊5.1 (1997)，第 64–71 页。[DLW11] Ingrid Daubechies、Jianfeng Lu 和 Hau-Tieng Wu。“同步压缩小波变换：一种类似经验模态分解的工具”。载于：应用与计算谐波分析30.2 (2011)，第 243–261 页。[Fla15] Patrick Flandrin。“基于频谱零点的时频滤波”。载于：*IEEE*《信号处理快报》22.11 (2015)，第 2137–2141 页。[GH07] Marc G Genton 和 Peter Hall。“演化周期函数的统计推断”。载于：英国皇家统计学会杂志*B*辑：统计方法学69.4 (2007)，第 643–657 页。

[Grö01] K. Gröchenig. 《时频分析基础》。《应用与计算调和分析》丛书。Birkhäuser Boston，2001。ISBN：9780817640224。网址：https://books.google. com/books?id=sjN2qq99-WwC.[KGV78] K. Kodera、R. Gendrin 和 C. Villedary。“小 BT 值时变信号的分析”。载于：*IEEE*《声学、语音与信号处理汇刊》26.1（1978），第 64–76 页。[KMW18] Matthieu Kowalski、Adrien Meynard 和 Hau-tieng Wu。“采用凸优化方法处理瞬时频率快速变化的信号”。载于：《应用与计算调和分析》44.1（2018），第 89–122 页。[LCB21] Vincent Lostanlen、Alice Cohen-Hadria 和 Juan Pablo Bello。“一个还是两个频率？散射变换给出答案”。载于：*2020*年第*28*届欧洲信号处理会议（*EUSIPCO*）。IEEE。2021，第 2205–2209 页。[LFW15] Yu-Ting Lin、Patrick Flandrin 和 Hau-Tieng Wu。“当插值诱导的反射伪影遇上时频分析”。载于：*IEEE*《生物医学工程汇刊》63.10（2015），第 2133–2141 页。[LSW26] Gi-Ren Liu、Yuan-Chung Sheu 和 Hau-Tieng Wu。“存在噪声时的标度图脊线分析”。载于：《应用数学季刊》（2026）。[Mey92] Yves Meyer. 《小波与算子》。第 37 卷。剑桥大学出版社，1992。[MH95] Steve Mann 和 Simon Haykin。“啁啾小波变换：物理方面的考量”。载于：*IEEE*信号处理汇刊43.11（1995），第 2745–2761 页。[MLO22] Sylvain Meignen、Nils Laurent 和 Thomas Oberlin。“一条还是两条脊线？Gabor 变换的精确模态分离条件”。载于：*IEEE*《信号处理快报》29（2022），第 2507–2511 页。[OMP15] ThomasOberlin、Sylvain Meignen 和 Valérie Perrier。“第二

高阶同步压缩变换还是可逆重分配？迈向理想的时频表示”。载于：*IEEE*信号处理汇刊 63.5（2015），第 1335–1344 页。[PM17] Duong-Hung Pham 和 Sylvain Meignen。“用于多分量信号分析的高阶同步压缩变换——及其在引力波信号中的应用”。载于：*IEEE*信号处理汇刊 65.12（2017），第 3168–3178 页。

[RF08] Gabriel Rilling 和 Patrick Flandrin。“一个还是两个频率？经验模态分解给出答案”。载于：*IEEE*信号处理汇刊 56.1（2008），第 85–95 页。[WFD11] Hau-Tieng Wu、Patrick Flandrin 和 Ingrid Daubechies。“一个还是两个频率？同步压缩给出答案”。载于：自适应数据分析进展 03.01n02（2011），第 29–39 页。[WZ24] Hau-Tieng Wu 和 Zhou Zhou。“复振荡时间序列的频率检测与变点估计”。载于：美国统计学会会刊119.547（2024），第 1945–1956 页。[WZ25] Hau-Tieng Wu 和 ZhouZhou。“复杂非平稳噪声下同步压缩变换的不确定性量化”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2506.00779*（2025）。

## Appendix A. Proofs

命题 *1* 的证明。我们定义正函数

$$A(\eta) := \hat{h}(\eta - \xi_0), \qquad B(\eta) := a\hat{h}(\eta - \xi_1).$$

注意， $A(\eta) = |V_{(h)} f_0(t,\eta)|$ 且 $B(\eta) = |V_{(h)} f_1(t,\eta)|$。于是，(5) 可写为 $|V_{(h)} f(t,\eta)| = |A(\eta) + e^{i\psi(t)} B(\eta)|$ ，其中 $\psi(t) := 2\pi\Delta t$。下界由三角不等式给出。上界则由

$$(A+B) - |A + e^{i\psi}B| \leq (A+B) - |A-B| = 2\min\{A, B\}.$$

对于高斯函数， $A(\eta) = e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_0)^2}$ 以及 $B(\eta) = ae^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_1)^2}$, ，函数 $\eta \mapsto \min\{A(\eta), B(\eta)\}$ 在 $A = B$, 处取得最大值，即在 $\eta = (\xi_0 + \xi_1)/2 = \xi$ 处，因此得到所述一致界。□

引理 *1* 的证明。回顾式 (5)，可知可以写成

$$|V_f^{(h)}(t,\eta)| = \left| e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_0)^2} + ae^{2\pi i\Delta t} e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_1)^2} \right|.$$

当 $t = t_k^+$ 时，这是

$$|V_f^{(h)}(t_k^+, \eta)| = e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_0)^2} + ae^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_1)^2}.$$

我们可以注意到，当各高斯函数的支集显著重叠时，在时间 $t_k^+$ ，若 $\Delta$ 足够小，使各高斯函数的支集显著重叠，则这些高斯函数会相加干涉。在这种情况下，我们在 $|V_{(h)} f(t_k^+, \eta)|$ 中观察到一个单峰；反之，当 $\Delta$ 足够大，使高斯函数彼此充分分离时，则会出现两个分离峰。为了找出关于 $\Delta$ 的这一临界条件，我们可以求 $|V_{(h)} f(t_k^+, \eta)|$ 的一阶导数和二阶导数，并令它们等于 0，从而得到关于临界条件的方程组。应用变量代换 $x = \eta - \xi$ ，并令 $C = \pi^2\sigma^2$，可得

$$g(x) := |V_f^{(h)}(t_k^+, \eta)| = e^{-C(x+\Delta/2)^2} + ae^{-C(x-\Delta/2)^2}.$$

现在，一阶导数

$$g'(x) = -2C\left[\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) e^{-C(x+\Delta/2)^2} + a\left(x - \frac{\Delta}{2}\right) e^{-C(x-\Delta/2)^2}\right] = 0$$

得到方程

$$(x + \frac{\Delta}{2}) e^{-C(x+\Delta/2)^2} + a(x - \frac{\Delta}{2}) e^{-C(x-\Delta/2)^2} = 0.$$

引入一些方便的记号,

$$u := x + \frac{\Delta}{2}, \qquad v := x - \frac{\Delta}{2} = u - \Delta,$$
$$r := e^{-C(v^2-u^2)} = e^{-C\Delta^2+2Cu\Delta} > 0,$$

我们的一阶导数方程变为

$$u + avr = 0.$$

对二阶导数进行同样的处理

$$g''(x) = 2Ce^{-C(x+\Delta/2)^2}\left[1 - 2C\left(x + \frac{\Delta}{2}\right)^2\right] + 2Cae^{-C(x-\Delta/2)^2}\left[1 - 2C\left(x - \frac{\Delta}{2}\right)^2\right] = 0,$$

我们得到

$$1 - 2Cu^2 + ar(1 - 2Cv^2) = 0.$$

现在，如果我们定义 $s := ar > 0$，就可以将一阶导数方程写成

$$u + s(u - \Delta) = 0 \implies u = \frac{s\Delta}{1+s}, v = -\frac{\Delta}{1+s}$$

将第一个方程代入第二个方程可得

$$\Delta_{\text{critical, STFT}} = \frac{1+s}{\sqrt{2Cs}}.$$

乍一看，关于 $\Delta_{\text{critical, STFT}}$ 的这个方程似乎依赖于 $\eta$ ，因为 $s$ 是 $\eta$ 的函数。不过，根据以下关系， $s$ 可以仅表示为 $a$ 的函数。首先，我们有

$$v^2 - u^2 = \left(\Delta\frac{1-s}{1+s}\right)^2 \implies r = \exp\left(-C\Delta^2\frac{1-s}{1+s}\right)$$

so,

$$\begin{aligned}\ln r &= -\frac{(1+s)^2}{2s}\frac{1-s}{1+s} \\ &= \frac{s^2-1}{2s} \\ &= \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right).\end{aligned}$$

这给出了 $s$ 作为 $a$ 的函数时的关系

$$\ln\frac{s}{a} = \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right).$$

□

引理 2 的证明。令 $x = \eta - \bar{\xi}$。若定义 $F(t,\ x) := |V_{(h)} f(t,\ x)|^2$，则有

$$F(t,x) = e^{-2C(x+\Delta/2)^2} + a^2 e^{-2C(x-\Delta/2)^2} + 2ace^{-C(2x^2+\Delta^2/2)} \tag{27}$$

其中 $c = \cos(2\pi\Delta t) \in [-1,1]$。对于任意固定的 $t$（或等价地，固定的$c$），$\eta \mapsto |V_{(h)} f(t,\eta)|$ 的局部极大值数量只有在 $x \mapsto F(t,x)$ 的退化临界点处才会发生变化，即在 $(x,c)$ 处同时满足

$$\partial_x F(t,x) = 0 \quad \text{and} \quad \partial_{xx} F(t,x) = 0.$$

我们可以明确计算这两个方程，消去 $c$，并得到一个不含 $c$ 的代数条件，用以刻画所有此类退化。首先，对式 (27) 求导，

$$\partial_x F(t,x) = -4C\Bigg[\left(x+\frac{\Delta}{2}\right)e^{-2C(x+\Delta/2)^2} + \left(x-\frac{\Delta}{2}\right)a^2 e^{-2C(x-\Delta/2)^2} + 2acxe^{-C(2x^2+\Delta^2/2)}\Bigg].$$

现在，我们可以将 $\partial_x F = 0$ 两边除以公因子 $-4Ce^{-2C(x+\Delta/2)^2}$，并利用

$$\frac{e^{-2C(x-\Delta/2)^2}}{e^{-2C(x+\Delta/2)^2}} = e^{4C\Delta x}, \qquad \frac{e^{-C(2x^2+\Delta^2/2)}}{e^{-2C(x+\Delta/2)^2}} = e^{2C\Delta x},$$

由此得到第一个退化方程

$$\left(x+\frac{\Delta}{2}\right) + a^2\left(x-\frac{\Delta}{2}\right)e^{4C\Delta x} + 2acxe^{2C\Delta x} = 0. \tag{28}$$

现在，我们计算 $\partial_{xx} F$，

$$\begin{aligned}\partial_{xx} F(t,x) = &\left(-4C + 16C^2\left(x+\frac{\Delta}{2}\right)^2\right)e^{-2C(x+\Delta/2)^2} \\ &+ a^2\left(-4C + 16C^2\left(x-\frac{\Delta}{2}\right)^2\right)e^{-2C(x-\Delta/2)^2} \\ &+ 2ac\left(-4C + 16C^2x^2\right)e^{-C(2x^2+\Delta^2/2)}.\end{aligned}$$

将 $\partial_{xx}F = 0$ 除以公因项 $4Ce^{-2C(x+\Delta/2)^2}$，并使用与上文相同的比值，可得

$$0 = \left(-1 + 4C\left(x + \frac{\Delta}{2}\right)^2\right) + a^2\left(-1 + 4C\left(x - \frac{\Delta}{2}\right)^2\right)e^{4C\Delta x} + 2ac(-1 + 4Cx^2)e^{2C\Delta x}. \tag{29}$$

现在由 (28) 可得，

$$2ace^{2C\Delta x} = -\frac{\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) + a^2\left(x - \frac{\Delta}{2}\right)e^{4C\Delta x}}{x}. \tag{30}$$

将 (30) 代入 (29)，乘以 $x$，并展开，

$$\begin{aligned}
0 =& x\left(-1 + 4C\left(x + \frac{\Delta}{2}\right)^2\right) + a^2x\left(-1 + 4C\left(x - \frac{\Delta}{2}\right)^2\right)e^{4C\Delta x} \\
&- \left(-1 + 4Cx^2\right)\left[\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) + a^2\left(x - \frac{\Delta}{2}\right)e^{4C\Delta x}\right] \\
&= \left[x\left(-1 + 4C\left(x + \frac{\Delta}{2}\right)^2\right) - \left(-1 + 4Cx^2\right)\left(x + \frac{\Delta}{2}\right)\right] \\
&+ a^2e^{4C\Delta x}\left[x\left(-1 + 4C\left(x - \frac{\Delta}{2}\right)^2\right) - \left(-1 + 4Cx^2\right)\left(x - \frac{\Delta}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

现在我们可以显式展开上一行中的两个括号。对于第一个括号，

$$\begin{aligned}
&x\left(-1 + 4C\left(x^2 + \Delta x + \frac{\Delta^2}{4}\right)\right) - \left(-1 + 4Cx^2\right)\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) \\
&= \left(-x + 4Cx^3 + 4C\Delta x^2 + C\Delta^2 x\right) + \left(x + \frac{\Delta}{2} - 4Cx^3 - 2C\Delta x^2\right) \\
&= \frac{\Delta}{2} + 2C\Delta x^2 + C\Delta^2 x.
\end{aligned}$$

对于第二个括号，令 $v = x - \Delta/2$，

$$\begin{aligned}
&x\left(-1 + 4C\left(x^2 - \Delta x + \frac{\Delta^2}{4}\right)\right) - \left(-1 + 4Cx^2\right)v \\
&= \left(-x + 4Cx^3 - 4C\Delta x^2 + C\Delta^2 x\right) + \left(x - \frac{\Delta}{2} - 4Cx^3 + 2C\Delta x^2\right) \\
&= -\frac{\Delta}{2} - 2C\Delta x^2 + C\Delta^2 x.
\end{aligned}$$

因此条件变为

$$0 = \left(\frac{\Delta}{2} + 2C\Delta x^2 + C\Delta^2 x\right) + a^2 e^{4C\Delta x}\left(-\frac{\Delta}{2} - 2C\Delta x^2 + C\Delta^2 x\right)$$

(31)

$$= \frac{\Delta}{2}\left[1 + 4Cx^2 + 2C\Delta x + a^2 e^{4C\Delta x}\left(-1 + 2C\Delta x - 4Cx^2\right)\right].$$

由于 $\Delta > 0$，(31) 等价于

$$a^2 e^{4C\Delta x}\left(2C\Delta x - 4Cx^2 - 1\right) + \left(2C\Delta x + 4Cx^2 + 1\right) = 0. \tag{32}$$

方程 (28) 和 (32) 刻画了所有可能导致频率轴极大值数量发生变化的 $(x, c)$。此外，由 (30) 可得

$$c = -\frac{\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) + a^2\left(x - \frac{\Delta}{2}\right)e^{4C\Delta x}}{2axe^{2C\Delta x}}. \tag{33}$$

现在，我们可以将 (32) 和 (33) 与引理 1 中的相长时刻阈值联系起来，并证明当 $\Delta > \Delta_{\text{critical, STFT}}$ 时，不会出现 $c \in [-1, 1]$ 相关的退化（或分岔）。首先，记

$$s := ae^{2C\Delta x} > 0, \qquad L := \ln\frac{s}{a} = 2C\Delta x,$$

于是 $e^{4C\Delta x} = (s/a)^2$，且 $x = L/(2C\Delta)$。用这些变量表示，两 (32) 边同乘 $C\Delta^2$ 后，变为

$$0 = s^2\left(L - \frac{L^2}{C\Delta^2} - 1\right) + \left(L + \frac{L^2}{C\Delta^2} + 1\right)$$

$$= \left(1 - s^2\right)\left(L^2 + C\Delta^2\right) + \left(s^2 + 1\right)C\Delta^2 L. \tag{34}$$

此外，(33) 变为

$$c = -\frac{\left(1 + s^2\right)L + \left(1 - s^2\right)C\Delta^2}{2sL}. \tag{35}$$

在相长时刻（$c = 1$），这恰好化为引理 1 中求解的那组方程。现在我们证明，当 $\Delta$ 增大并超过构造性阈值时，退化条件 (34) 的任意局部解分支必然具有 $c > 1$，因此不可能与真实范围 $c \in [-1, 1]$ 相交。考虑参数为 $s > 0$（回顾 $s = ae^L$）时，变量 $(L, \Delta)$ 中满足 (34) 的解。根据隐函数定理，在任意满足 $L \neq 0$ 的解点 $(L, \Delta)$ 附近，集合 $\{(L, \Delta) : (L, \Delta)$ 满足 (34)$\}$ 是一条光滑曲线。沿着这条曲线，注意到由 (35) 给出的 $c$ 是关于 $\Delta$ 的光滑函数。沿着退化曲线

我们有 $L = L(\Delta)$（$s$ 随 $L$ 变化）。对 (34) 求全导数

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\Delta}\left[\left(1-s^2\right)\left(L^2+C\Delta^2\right)+\left(s^2+1\right)C\Delta^2 L\right] \\ &= \partial_L\left[\left(1-s^2\right)\left(L^2+C\Delta^2\right)+\left(s^2+1\right)C\Delta^2 L\right]\frac{dL}{d\Delta} \\ &\quad + \partial_\Delta\left[\left(1-s^2\right)\left(L^2+C\Delta^2\right)+\left(s^2+1\right)C\Delta^2 L\right], \end{aligned} \tag{36}$$

其中偏导数为

$$\partial_L(\cdots) = -2s^2(L^2+C\Delta^2)+2L(1-s^2)+2s^2C\Delta^2 L+(s^2+1)C\Delta^2,$$
$$\partial_\Delta(\cdots) = 2C\Delta[(1-s^2)+(s^2+1)L].$$

合并后得到

$$\begin{aligned} &\left[-2s^2(L^2+C\Delta^2)+2L(1-s^2)+2s^2C\Delta^2 L+(s^2+1)C\Delta^2\right]\frac{dL}{d\Delta} \\ &\qquad +2C\Delta\left[(1-s^2)+(s^2+1)L\right]=0. \end{aligned} \tag{37}$$

接下来沿退化曲线对 (35) 求导（因此 $L = L(\Delta)$ 满足 (37)）。记 $A(L,\Delta) = (1+s^2)L+(1-s^2)C\Delta^2$ 和 $B(L) = 2sL$，则有 $c = -A/B$。对恒等式求导

$$A(L,\Delta)+c(L,\Delta)B(L)=0$$

沿退化曲线 $L = L(\Delta)$ 得到

$$0 = \frac{d}{d\Delta}(A+cB) = A_\Delta + A_L\frac{dL}{d\Delta} + B\frac{dc}{d\Delta} + cB_L\frac{dL}{d\Delta}. \tag{38}$$

由 (38) 解出全导数 $\frac{dc}{d\Delta}$（不要将其与固定 $t$ 时的导数在记号上混淆），

$$\frac{dc}{d\Delta} = -\frac{A_\Delta + (A_L+cB_L)\frac{dL}{d\Delta}}{B}. \tag{39}$$

现在，我们在引理 1 给出的构造性阈值处计算 (39)，其中

$$c=1, \qquad L=\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right), \qquad C\Delta^2=\frac{(1+s)^2}{2s}.$$

计算导数（$\frac{ds}{dL} = s$ 因为 $s = -ae^L$），

$$A_\Delta = 2C\Delta(1-s^2), \qquad A_L = (1+s^2)+2s^2L-2s^2C\Delta^2, \qquad B_L = 2s(1+L),$$

并将 $L = \frac{1}{2}(s-\frac{1}{s})$ 和 $C\Delta^2 = \frac{(1+s)^2}{2s}$ 代入 $A_L$，$B$，$B_L$：

$$A_L = -(s^2+2s-1), \qquad B = s^2-1, \qquad B_L = s^2+2s-1.$$

因此，在阈值处，我们得到抵消

$$A_L + cB_L = A_L + B_L = 0.$$

因此，全导数（39）化简为

$$\frac{dc}{d\Delta} = -\frac{A_\Delta}{B} = -\frac{2C\Delta(1-s^2)}{s^2-1} = 2C\Delta > 0.$$

因此，沿着经过 $(c,\ \Delta) = (1,\ \Delta_{\text{critical, 短时傅里叶变换}})$ 的退化分支，对于所有足够接近阈值的 $\Delta > \Delta_{\text{critical, STFT}}(a)$，都有 $c(\Delta) > 1$。由于 $c = \cos(2\pi\Delta t) \in [-1,1]$，此处不可能发生退化。根据 (28) 和 (29) 的解集的连续性，若在某个更大的 $\Delta$ 且满足 $c \in [-1,1]$ 时出现潜在退化，则必然会在中间某个 $\Delta$ 处出现另一个构造时刻退化，这与引理 1 矛盾。□

引理*3*的证明。令 $C = \pi^2\sigma^2$ 并且

$$\gamma(\eta) = e^{-C(\eta-\xi_0)^2} - ae^{-C(\eta-\xi_1)^2}.$$

于是 $|V_{(h)}f(t_k^-,\ \eta)| = |\gamma(\eta)|$，且 $(|\gamma|^2)' = 2\gamma\gamma'$，因此 $|V_{(h)}f(t_k^-,\ \eta)|$ 的驻点是 $\gamma = 0$ 或 $\gamma' = 0$ 的实数解。首先，$\gamma(\eta) = 0$ 意味着

$$\begin{aligned} e^{-C(\eta-\xi_0)^2} &= ae^{-C(\eta-\xi_1)^2} \\ (\eta-\xi_0)^2 - (\eta-\xi_1)^2 &= \frac{\ln a}{C} \\ 2\Delta(\eta-\xi_0) - \Delta^2 &= \frac{\ln a}{C}, \end{aligned} \tag{40}$$

这给出了唯一解

$$\eta = \eta_{\text{AVG}} = \bar{\xi} - \frac{\ln a}{2C\Delta}.$$

此时，$|\gamma|$ 达到严格全局最小值。对 $\gamma$ 求导，

$$\gamma'(\eta) = -2C(\eta-\xi_0)e^{-C(\eta-\xi_0)^2} + 2Ca(\eta-\xi_1)e^{-C(\eta-\xi_1)^2},$$

并利用（40）式可得

$$\gamma'(\eta_{\text{AVG}}) = 2C[(\eta_{\text{AVG}}-\xi_1)-(\eta_{\text{AVG}}-\xi_0)]e^{-C(\eta_{\text{AVG}}-\xi_0)^2} = -2C\Delta e^{-C(\eta_{\text{AVG}}-\xi_0)^2} < 0,$$

因此，$\gamma > 0$ 在（$-\infty$，$\eta_{\text{AVG}}$）上以及 $\gamma < 0$ 在（$\eta_{\text{AVG}}$，$\infty$）上。

现在，记$x = \eta - \xi_0$。条件 $\gamma'(\eta) = 0$ 等价于

$$\begin{aligned} -xe^{-Cx^2} + a(x-\Delta)e^{-C(x-\Delta)^2} &= 0 \\ x &= a(x-\Delta)e^{2C\Delta x - C\Delta^2}. \end{aligned} \tag{41}$$

由于 $a > 0$，(41) 式的两边符号相同，因此任意解都满足 $x < 0$ 或 $x > \Delta$，不存在满足以下条件的解

$x \in (0,\ \Delta)$。对于 $x > \Delta$，我们可以对 (41) 式取对数，得到

$$\ln x - \ln(x-\Delta) - 2C\Delta x - \ln a + C\Delta^2 = 0. \tag{42}$$

定义 $h(x) = \ln x - \ln(x-\Delta) - 2C\Delta x - \ln a + C\Delta^2$，其中 $x \in (\Delta, \infty)$。于是

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x-\Delta} - 2C\Delta \\ &= -\frac{\Delta}{x(x-\Delta)} - 2C\Delta \\ &< 0, \end{aligned}$$

因此 $h$ 严格递减，且 $\lim_{x\to\Delta^-} h(x) = \infty$，$\lim_{x\to\infty} h(x) = -\infty$。故 (42) 有唯一解 $x_+ > \Delta$，从而有唯一的 $\eta_+ = \xi_0 + x_+ > \xi_1$ 满足 $\gamma'(\eta_+) = 0$。对于 $x < 0$，由 (41) 得

$$-x = a(\Delta - x)e^{2C\Delta x - C\Delta^2}$$

$$\ln(-x) - \ln(\Delta - x) - 2C\Delta x - \ln a + C\Delta^2 = 0. \tag{43}$$

定义 $H(x) = \ln(-x) - \ln(\Delta - x) - 2C\Delta x - \ln a + C\Delta^2$，其中 $x \in (-\infty, 0)$。于是

$$H''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\Delta - x)^2} < 0,$$

因此 $H$ 严格凹。此外，$\lim_{x\to-\infty} H(x) = \infty$，且 $\lim_{x\to 0^-} H(x) = -\infty$，所以 (43) 有唯一解 $x_- < 0$，从而得到唯一的 $\eta_- = \xi_0 + x_- < \xi_0$ 满足 $\gamma'(\eta_-) = 0$。为将 $\eta_\pm$ 分类为极大值，注意到

$$\gamma'(\eta) = 2Ce^{-Cx^2}\left(a(x-\Delta)e^{2C\Delta x - C\Delta^2} - x\right),$$

因此符号 $(\gamma'(\eta)) = \text{sign}\left(a(x-\Delta)e^{2C\Delta x - C\Delta^2} - x\right)$。对于 $x > \Delta$，令

$$r(x) = \ln\left(\frac{a(x-\Delta)e^{2C\Delta x - C\Delta^2}}{x}\right) = -h(x),$$

它在 $(\Delta, \infty)$ 上严格递增，且 $r(x_+) = 0$。因此，$x < x_+ \Longrightarrow r(x) < 0 \implies \gamma'(\eta) < 0$ 且 $x > x_+ \implies r(x) > 0 \implies \gamma'(\eta) > 0$。由于 $\gamma(\eta) < 0$ 在 $(\eta_{\text{AVG}}, \infty)$ 上，因此 $(|\gamma|^2)' = 2\gamma\gamma'$ 在 $\eta_+$ 处由正变负，所以 $\eta_+$ 是 $|\gamma|$的严格局部最大值。对于 $x < 0$，考虑相同的符号表达式。由于 $x \to -\infty$, $e^{2C\Delta x} \to 0$所以 $a(x-\Delta)e^{2C\Delta x - C\Delta^2} - x \to -x > 0$，而由于 $x \to 0^-$,

$$a(x-\Delta)e^{2C\Delta x - C\Delta^2} - x \to -a\Delta e^{-C\Delta^2} < 0.$$

由连续性以及零点的唯一性可知，$\gamma'(\eta)$ 在 $\eta_-$ 处由正变负。因此，由于 $\gamma(\eta) > 0$ 在 $(-\infty,\ \eta_{\text{AVG}})$ 上，我们得到

$(|\gamma|^2)'$ 在 $\eta_-$ 处由正变负，因此 $\eta_-$ 是 $|\gamma|$ 的严格局部最大值。此外，$\gamma(\eta)$ 恰有一个零点（位于 $\eta_{\mathrm{AVG}}$），而 $\gamma'$ 恰有两个零点（分别位于 $\eta_-$ 和 $\eta_+$），因此 $|\gamma|$ 恰有三个驻点：位于 $\eta_{\mathrm{AVG}}$ 的全局最小值，以及位于 $\eta_\pm$ 的两个严格局部最大值。对于左侧的最大值，令 $x = -y$，其中 $y > 0$:

$$y = a(\Delta + y)e^{-C(\Delta+y)^2+Cy^2} = a(\Delta + y)e^{-C\Delta^2-2C\Delta y} \leq a(\Delta + y)e^{-C\Delta^2}.$$

如果 $ae^{-C\Delta^2} < 1$ 则得到

$$y \leq \frac{ae^{-C\Delta^2}}{1 + ae^{-C\Delta^2}}\Delta,$$

并且当 $ae^{-C\Delta^2} \geq 1$ 时，同一个不等式显然成立，因为此时右侧至少为 $\Delta/2$。对于右侧的最大值，设 $x = \Delta + z$，其中 $z > 0$，于是

$$\Delta + z = aze^{-C(\Delta+z)^2+Cz^2} = aze^{-C\Delta^2-2C\Delta z} \leq aze^{-C\Delta^2},$$

整理可得所述结果。 □

*STFT* 的 *AHM* 局部误差界证明。我们首先可以写成

(44)
$$V_F(t,\eta) - a_0 V_f(t - t_*, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(x) - a_0 f(x - t_*)\right) h(x-t) e^{-2\pi i \eta (x-t)} dx.$$

为了估计该近似中的误差，我们可以应用给定的 AHM 界。利用 $|A_j'(u)| \leq \varepsilon |\phi_j'(u)|$ 以及估计 3.4（应用于 $\phi_j'$ 在 $t_*$ 处），来自 [DLW11],

$$|\phi_j'(t_* + s) - \phi_j'(t_*)| \leq \varepsilon \left( |\phi_j'(t_*)||s| + \frac{1}{2} M'' |s|^2 \right),$$

因此，对于任意介于 $t_*$ 和 $x$ 之间的 $u$，我们有（根据三角不等式）

(45)
$$|\phi_j'(u)| \leq |\phi_j'(t_*)| + \varepsilon \left( |\phi_j'(t_*)||u - t_*| + \frac{1}{2} M'' |u - t_*|^2 \right).$$

利用这一点可得

$$\begin{aligned}|A_j(x)-A_j(t_*)| &= \left|\int_{t_*}^{x} A_j'(u)du\right| \\ &\le \int_{t_*}^{x} |A_j'(u)|du \\ &\le \varepsilon \int_{t_*}^{x} |\phi_j'(u)|du \\ &\le \varepsilon \int_{0}^{|x-t_*|} \left(|\phi_j'(t_*)|+M''v\right) dv \\ &= \varepsilon \left(|\phi_j'(t_*)||x-t_*|+\frac{1}{2}M''|x-t_*|^2\right)\end{aligned}$$

对于 $j=0$，1. 我们还可以写成

$$\phi_j(x)=\phi_j(t_*)+\xi_j(x-t_*)+r_j(x), \qquad r_j(x):=\int_{t_*}^{x}(x-u)\phi_j''(u)du.$$

利用 $|\phi_j''(u)|\le \varepsilon|\phi_j'(u)|$ 和 (45),

$$\begin{aligned}|r_j(x)| &\le \varepsilon \int_{0}^{|x-t_*|} (|x-t_*|-v)\left(|\phi_j'(t_*)|+M''v\right) dv \\ &= \varepsilon \left(\frac{|\xi_j|}{2}|x-t_*|^2+\frac{M''}{6}|x-t_*|^3\right),\end{aligned}$$

so,

$$e^{2\pi i\phi_j(x)} = e^{2\pi i(\phi_j(t_*)+\xi_j(x-t_*))}e^{2\pi i r_j(x)} = e^{2\pi i\xi_j(x-t_*)}\left(1+\delta_j(x)\right)$$

with

$$|\delta_j(x)| = |e^{2\pi i r_j(x)}-1| \le 2\pi|r_j(x)| \le \varepsilon\left(\pi|\xi_j||x-t_*|^2+\frac{\pi M''}{3}|x-t_*|^3\right).$$

现在，由于 $\phi_j(t_*)=0$，我们可以写成

$$F(x)=A_0(x)e^{2\pi i\xi_0(x-t_*)}\left(1+\delta_0(x)\right)+A_1(x)e^{2\pi i\xi_1(x-t_*)}\left(1+\delta_1(x)\right)$$

$$a_0f(x-t_*)=a_0e^{2\pi i\xi_0(x-t_*)}+a_1e^{2\pi i\xi_1(x-t_*)},$$

因此

$$\begin{aligned}F(x)-a_0(x-t_*) = &\underbrace{\left(A_0(x)-a_0\right)e^{2\pi i\xi_0(x-t_*)}+\left(A_1(x)-a_1\right)e^{2\pi i\xi_1(x-t_*)}}_{\text{amplitude error}} \\ &+\underbrace{A_0(x)e^{2\pi i\xi_0(x-t_*)}\delta_0(x)+A_1(x)e^{2\pi i\xi_1(x-t_*)}\delta_1(x)}_{\text{phase error}}.\end{aligned}$$

取绝对值并应用上述界，得到

$$\begin{aligned}|F(x)-a_0f(x-t_*)| \le \varepsilon &\left(|\xi_0||x-t_*|+\frac{M''}{2}|x-t_*|^2\right)\\ &+\varepsilon a\left(|\xi_1||x-t_*|+\frac{M''}{2}|x-t_*|^2\right)\\ &+\varepsilon a_0\left(\pi|\xi_0||x-t_*|^2+\frac{\pi M''}{3}|x-t_*|^3\right)\\ &+\varepsilon a_1\left(\pi|\xi_1||x-t_*|^2+\frac{\pi M''}{3}|x-t_*|^3\right).\end{aligned}$$

现在，将上述界代入（44），即可完成证明。具体而言，

$$\begin{aligned}|V_F(t,\eta)-a_0V_f(t-t_*,\eta)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(x)-a_0f(x-t_*)\right)h(x-t)e^{-2\pi i\eta(x-t)}dx\right|\\ &\le \int_{-\infty}^{\infty}|F(x)-a_0f(x-t_*)|\,|h(x-t)|dx\\ &\le \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg(|\xi_0||x-t_*|+\frac{M''}{2}|x-t_*|^2\\ &\qquad +a\left(|\xi_1||x-t_*|+\frac{M''}{2}|x-t_*|^2\right)\\ &\qquad +a_0\left(\pi|\xi_0||x-t_*|^2+\frac{\pi M''}{3}|x-t_*|^3\right)\\ &\qquad +a_1\left(\pi|\xi_1||x-t_*|^2+\frac{\pi M''}{3}|x-t_*|^3\right)\Bigg)dx.\end{aligned}$$

为计算上述积分，我们可以注意到，所有项的形式均为 $\int h(x-t)$ $|x-t_*|^m$，其中 $m=1$，2，3。利用高斯矩

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(x-t)dx=1,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|x-t|h(x-t)dx=\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}},\quad \int|x-t|^2h(x-t)dx=\frac{\sigma^2}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x-t|^3h(x-t)dx=\frac{\sigma^3}{\sqrt{\pi}}$$

以及二项式界 $|a+b|^3 \leq |a|^3+3a^2|b|+3|a|b^2+|b|^3$，其中 $a = t-t_*$和 $b = x-t$，我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x-t_*|h(x-t)dx \leq |t-t_*|+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x-t_*|^2h(x-t)dx \leq (t-t_*)^2+\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}|t-t_*|+\frac{\sigma^2}{2},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x-t_*|^3h(x-t)dx \leq |t-t_*|^3+\frac{3\sigma}{\sqrt{\pi}}|t-t_*|^2+\frac{3\sigma^2}{2}|t-t_*|+\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}.$$

收集各项并代入，即得所述结果。 □

命题*2*的证明。定义线性变量替换 $z = t/\sigma - i\pi\sigma t\eta$。回顾式（17），并令

$$G(z) := e^{\frac{1}{2}\left[(t/\sigma)^2+(\pi\sigma\eta)^2\right]}e^{i\pi t\eta}V_f^{(h)}(t,\eta)$$

它在 $z$ 中是全纯的。记 $z_0 = t_0/\sigma - i\pi\sigma\eta_0$，并选取 $r > 0$，使圆 $\mathcal{C}_\rho := \{z:\ |z-z_0| = \rho\}$ 的边界上没有 $G$ 的零点，且对所有 $0 < \rho < r$，其内部恰好包含零点 $z_0$。椭圆$\mathcal{E}_\rho$ 是在 $(t,\ \eta) \mapsto z$ 下 $\mathcal{C}_\rho$ 的原像。根据辐角原理，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_\rho}\frac{G'(z)}{G(z)}dz = m\,,$$

其中，$m$ 是 $G$ 在 $z_0$ 处的零点的重数（等价地，是 $V_f^{(h)}$ 在 $(t_0,\ \eta_0)$ 处的零点的重数）。最后，还需证明 $m = 1$。写作 $A(t,\ \eta) := e^{2\pi i\xi_0 t}e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_0)^2}$，以及 $B(t,\ \eta) := ae^{2\pi i\xi_1 t}e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_1)^2}$，因此 $V_{(h)}f = A+B$，并且在 $(t_0,\ \eta_0)$ 处有 $B = -A$。求导，

$$\partial_t V_f^{(h)}(t_0,\eta_0) = 2\pi i(\xi_0 A+\xi_1 B)|_{(t_0,\eta_0)} = -i2\pi\Delta A(t_0,\eta_0)$$

and

$$\partial_\eta V_f^{(h)}(t_0,\eta_0) = -2\pi^2\sigma^2\left((\eta_0-\xi_0)A+(\eta_0-\xi_1)B\right)|_{(t_0,\eta_0)} = -2\pi^2\sigma^2\Delta A(t_0,\eta_0).$$

With

$$\partial_z = \frac{1}{2}\left(\sigma\partial_t+\frac{i}{\pi\sigma}\partial_\eta\right),$$

我们有

$$\begin{aligned}\partial_z G(z)|_{z=z_0} &= \left[\frac{1}{2}\left(\sigma\partial_t + \frac{i}{\pi\sigma}\partial_\eta\right)\left(e^{\frac{1}{2}\left[(t/\sigma)^2+(\pi\sigma\eta)^2\right]}e^{i\pi t\eta}V_f^{(h)}(t,\eta)\right)\right]_{t=t_0,\eta=\eta_0}\\ &= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}[(t_0/\sigma)^2+(\pi\sigma\eta_0)^2]}e^{i\pi t_0\eta_0}\\ &\qquad\times\left(\sigma(-2\pi i\Delta A(t_0,\eta_0)) + \frac{i}{\pi\sigma}(-2\pi^2\sigma^2\Delta A(t_0,\eta_0))\right)\\ &= -2\pi i\sigma\Delta e^{\frac{1}{2}[(t_0/\sigma)^2+(\pi\sigma\eta_0)^2]}e^{i\pi t_0\eta_0}A(t_0,\eta_0)\\ &\neq 0,\end{aligned}$$

因此，该零点是单零点（$m=1$），总相位变化为 $2\pi$，这给出零点周围的相位绕数为 1。□

命题 *3* 的证明。将信号乘以一个非零常数不会改变重分配规则，因为 $V^{(h)}$ 和 $V_{(Dh)}$ 都会乘以相同的因子。特别地，将 $F$ 替换为 $a_0^{-1}F$，并将 $f$ 替换为 $a_0^{-1}f$，比值 $V^{(Dh)}/V_{(h)}$ 保持不变，因此 $\hat{}\eta_s^F$ 和 $\hat{}\eta_s^f$ 不变。因此，我们保留 $a_0$，但注意到不失一般性，可令其为 0。根据第 3.3 节，在 $|t-t_*|\leq T$ 上取值时，我们有

$$\left|V_F^{(h)}(t,\eta) - a_0 V_f^{(h)}(t-t_*,\eta)\right| \leq C_h\varepsilon$$

对所有 $|t-t_*|\leq T$ 和所有 $\eta$ 均成立。将同样的论证应用于以窗函数 $Dh$ 代替 $h$ 的情形，同样可得

$$\left|V_F^{(Dh)}(t,\eta) - a_0 V_f^{(Dh)}(t-t_*,\eta)\right| \leq C_{Dh}\varepsilon$$

对所有 $|t-t_*|\leq T$ 和所有 $\eta$ 均成立。我们可以令

$$B(t,\eta) := V_f^{(h)}(t-t_*,\eta), \qquad A(t,\eta) := V_f^{(Dh)}(t-t_*,\eta),$$

以及误差

$$\delta B(t,\eta) := V_F^{(h)}(t,\eta) - a_0 B(t,\eta), \qquad \delta A(t,\eta) := V_F^{(Dh)}(t,\eta) - a_0 A(t,\eta).$$

那么在 $|t-t_*|\leq T$ 上，我们有

$$|\delta B(t,\eta)|\leq C_h\varepsilon, \qquad |\delta A(t,\eta)|\leq C_{Dh}\varepsilon.$$

对于纯净谐波模型 $f$，使用窗函数 $Dh$ 的短时傅里叶变换可以明确写出，并且我们可以得到

$$A(t,\eta) = V_f^{(Dh)}(t-t_*,\eta) = e^{2\pi i\xi_0(t-t_*)}\widehat{Dh}(\eta-\xi_0) + ae^{2\pi i\xi_1(t-t_*)}\widehat{Dh}(\eta-\xi_1),$$

因此，

$$|A(t,\eta)|\leq (1+|a|)\|\widehat{Dh}\|_\infty.$$

对于高斯函数 $h$，即 $\widehat{h}(\eta) = e^{-\pi^2\sigma^2\eta^2}$ 和 $\widehat{Dh}(\eta) = 2\pi i\eta e^{-\pi^2\sigma^2\eta^2}$，因此

$$\|\widehat{Dh}\|_\infty = \sup_{\eta\in\mathbb{R}} 2\pi|\eta|e^{-\pi^2\sigma^2\eta^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}e^{-1/2},$$

因此，我们可以使用

$$\sup_{t,\eta}|A(t,\eta)| \leq (1+|a|)\frac{\sqrt{2}}{\sigma}e^{-1/2}.$$

现在，固定 $0<\beta\leq\frac{1}{2}$，并且只考虑满足 $t,\eta$ 的 $|t-t_*|\leq T$，其中

$$|B(t,\eta)| = \left|V_f^{(h)}(t-t_*,\eta)\right| \geq \varepsilon^\beta,$$

假设

$$0<\varepsilon\leq\varepsilon_0 := \min\left\{1, \left(\frac{|a_0|}{2C_h}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right\},$$

我们有 $\varepsilon^{1-\beta}\leq\varepsilon_0^{1-\beta}\leq\frac{|a_0|}{2C_h}$，乘以 $C_h\varepsilon^\beta$ 得到 $C_h\varepsilon^{1-\beta}\varepsilon^\beta = C_h\varepsilon\leq\frac{|a_0|}{2}\varepsilon^\beta$。利用三角不等式和界 $|\delta B(t,\eta)|\leq C_h\varepsilon$，可得

$$\begin{aligned}|a_0B(t,\eta)+\delta B(t,\eta)| &\geq |a_0||B(t,\eta)|-|\delta B(t,\eta)|\\ &\geq |a_0|\varepsilon^\beta - C_h\varepsilon\\ &\geq \frac{|a_0|}{2}\varepsilon^\beta.\end{aligned}$$

将此与 $|B(t,\eta)|\geq\varepsilon^\beta$ 结合，得到

$$|B(t,\eta)||a_0B(t,\eta)+\delta B(t,\eta)| \geq \frac{|a_0|}{2}\varepsilon^{2\beta}.$$

现在，重分配规则为

$$\hat{\eta}_s^F(t,\eta) = \eta - \frac{1}{2\pi i}\frac{V_F^{(Dh)}(t,\eta)}{V_F^{(h)}(t,\eta)}, \qquad \hat{\eta}_s^f(t-t_*,\eta) = \eta - \frac{1}{2\pi i}\frac{A(t,\eta)}{B(t,\eta)}.$$

我们还可以进一步定义 $A_F(t,\ \eta) := V^{(Dh)}_F(t,\ \eta) = a_0A(t,\ \eta)+\delta A(t,\ \eta)$ 以及 $B_F(t,\ \eta) := V^{(h)}_F(t,\ \eta) = a_0B(t,\ \eta)+\delta B(t,\ \eta)$，使得

$$\hat{\eta}_s^F(t,\eta) - \hat{\eta}_s^f(t-t_*,\eta) = -\frac{1}{2\pi i}R(t,\eta).$$

其中

$$\begin{aligned} R(t,\eta) &:= \frac{A_F(t,\eta)}{B_F(t,\eta)} - \frac{A(t,\eta)}{B(t,\eta)} \\ &= \frac{A_F B - A B_F}{B B_F} \\ &= \frac{(a_0 A + \delta A)B - A(a_0 B + \delta B)}{B(a_0 B + \delta B)} \\ &= \frac{\delta A(t,\eta) B(t,\eta) - A(t,\eta)\delta B(t,\eta)}{B(t,\eta)\left(a_0 B(t,\eta) + \delta B(t,\eta)\right)}. \end{aligned}$$

对于分子，由三角不等式及上述界可得$|\delta A(t,\eta)B(t,\eta) - A(t,\eta)\delta B(t,\eta)| \le |\delta A(t,\eta)|\,|B(t,\eta)| + |A(t,\eta)||\delta B(t,\eta)|$

$$\begin{aligned} &\le C_{Dh}\varepsilon + C_h \varepsilon \sup_{t,\eta} |A(t,\eta)| \\ &\le C_{Dh}\varepsilon + C_h \varepsilon (1+|a|)\frac{\sqrt{2}}{\sigma} e^{-1/2}. \end{aligned}$$

结合分母的上述界，我们有

$$\begin{aligned} |R(t,\eta)| &\le \frac{C_{Dh}\varepsilon + C_h\varepsilon(1+|a|)\frac{\sqrt{2}}{\sigma}e^{-1/2}}{\frac{|a_0|}{2}\varepsilon^{2\beta}} \\ &= \frac{2}{|a_0|}\left(C_{Dh} + C_h(1+|a|)\frac{\sqrt{2}}{\sigma}e^{-1/2}\right)\varepsilon^{1-2\beta}. \end{aligned}$$

最后，

$$\left|\hat{\eta}_s^F(t,\eta) - \hat{\eta}_s^f(t-t_*,\eta)\right| = \frac{1}{2\pi}|R(t,\eta)| \le \frac{C_{Dh} + (1+|a|)\frac{\sqrt{2}}{\sigma}e^{-1/2}C_h}{\pi|a_0|}\varepsilon^{1-2\beta}$$

如所述。 □

命题 *4* 的证明。 应用坐标变换 $x = \eta - \xi_0$并记

$$t(x) := -\frac{1}{\alpha}\left(\xi_0 - \xi + \Delta\frac{a}{a - \exp\left(\pi^2\sigma^2\Delta(\Delta - 2x) - 2\pi i \Delta t\right)}\right)^2,$$

我们可以写成

(46)

$$S_f^{(h)}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{2\pi i \xi_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-\pi^2\sigma^2x^2} + a e^{2\pi i\Delta t} e^{-\pi^2\sigma^2(x-\Delta)^2}\right)e^{t(x)}dx$$

为了将此积分化为更简单的分量，我们可以写成

$$\sqrt{\pi\alpha}e^{-2\pi i\xi_0 t}S_f^{(h)}(t,\xi) = I_1 + a e^{2\pi i\Delta t} I_2$$

其中 $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2\sigma^2x^2} e^{t(x)} dx$ 和 $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2\sigma^2(x-\Delta)^2} e^{t(x)} dx$。

聚焦于 $I_1$，对于任意 $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2\sigma^2x^2} e^{t(x)} dx \\ &= \underbrace{\int_{|x|<\epsilon} e^{-\pi^2\sigma^2x^2} e^{t(x)} dx}_{:=I_{1A}} + \underbrace{\int_{|x|\geq\epsilon} e^{-\pi^2\sigma^2x^2} e^{t(x)} dx}_{:=I_{1B}}. \end{aligned}$$

注意，对于 $I_{1B}$，当 $\frac{1}{\sigma} \lesssim \epsilon$ 时，$e^{-\pi^2\sigma^2x^2}$ 呈指数级小。此外，当指数函数 $e^{-\pi^2\sigma^2x^2}$ 较小时，我们可以使用平凡界 $e^{t(x)} \leq 1$。假设这一点成立（我们很快会对此给出精确定义），便可聚焦于 $I_{1A}$。我们有，

$$I_{1A} = \int_{|x|<\epsilon} e^{-\pi^2\sigma^2x^2} e^{t(x)} dx.$$

定义 $E := \exp(\pi^2\sigma^2(\Delta^2 - 2\Delta x))$，以及 $c := \cos(2\pi\Delta t)$，展开 $t(x)$ 并利用 $|x| < \epsilon \ll \Delta$，可得，

$$\begin{aligned} -\alpha t(x) &= (\xi_0 - \xi)^2 + \frac{2\Delta(\xi_0 - \xi)\left[1 + a^{-1}\exp\left(\pi^2\sigma^2(\Delta^2 - 2\Delta x)\right)\cos(2\pi\Delta t)\right] + \Delta^2}{1 + 2a^{-1}\exp\left(\pi^2\sigma^2(\Delta^2 - 2\Delta x)\right)\cos(2\pi\Delta t) + a^{-2}\exp\left(2\pi^2\sigma^2(\Delta^2 - 2\Delta x)\right)} \\ &= (\xi_0 - \xi)^2 + \frac{2\Delta(\xi_0 - \xi)\left[a^2 + aEc\right] + a^2\Delta^2}{a^2 + 2aEc + E^2} \\ &= (\xi_0 - \xi)^2 + \frac{2a^2\Delta(\xi_0 - \xi)}{a^2 + 2aEc + E^2} + \frac{2a\Delta(\xi_0 - \xi)Ec}{a^2 + 2aEc + E^2} + \frac{a^2\Delta^2}{a^2 + 2aEc + E^2} \\ &= (\xi_0 - \xi)^2 + \left[2a^2\Delta(\xi_0 - \xi) + 2a\Delta(\xi_0 - \xi)Ec + a^2\Delta^2\right]\frac{1}{E^2}\frac{1}{1 + 2acE^{-1} + a^2E^{-2}} \\ &= (\xi_0 - \xi)^2 + \left[2a^2\Delta(\xi_0 - \xi) + 2a\Delta(\xi_0 - \xi)Ec + a^2\Delta^2\right]E^{-2}\left[1 - 2acE^{-1} + O(E^{-2})\right] \\ &= (\xi_0 - \xi)^2 + 2a\Delta(\xi_0 - \xi)cE^{-1} + O\left(\Delta E^{-2}\right) + O\left(\Delta^2E^{-2}\right) \\ &= (\xi_0 - \xi)^2 + 2a\Delta(\xi_0 - \xi)\cos(2\pi\Delta t)\exp\left(-\pi^2\sigma^2(\Delta^2 - 2\Delta x)\right) \\ &\quad + O\left(\Delta\exp\left(-2\pi^2\sigma^2(\Delta^2 - 2\Delta x)\right)\right) + O\left(\Delta^2\exp\left(-2\pi^2\sigma^2(\Delta^2 - 2\Delta x)\right)\right) \\ &= (\xi_0 - \xi)^2 + O\left(\exp\left(-\pi^2\sigma^2\Delta^2\right)\right). \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \exp\left(t(x)\right) &= \exp\left(-\alpha^{-1}\left[(\xi_0 - \xi)^2 + O\left(\exp\left(-\pi^2\sigma^2\Delta^2\right)\right)\right]\right) \\ &= \exp\left(-\alpha^{-1}(\xi_0 - \xi)^2\right)\left[1 + O\left(\exp\left(-\pi^2\sigma^2\Delta^2\right)\right)\right] \\ &= \exp\left(-\alpha^{-1}(\xi_0 - \xi)^2\right) + O\left(\exp\left(-\pi^2\sigma^2\Delta^2\right)\right) \end{aligned}$$

将这些结果综合起来，可得

$$\begin{aligned} I_{1A} &= \left[\exp\left(-\alpha^{-1}(\xi_0-\xi)^2\right)+O\left(\exp\left(-\pi^2\sigma^2\Delta^2\right)\right)\right]\int_{|x|<\epsilon} e^{-\pi^2\sigma^2x^2}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\operatorname{erf}(\pi\sigma\epsilon)\exp\left(-\alpha^{-1}(\xi_0-\xi)^2\right)+O\left(\exp\left(-\pi^2\sigma^2\Delta^2\right)\right). \end{aligned}$$

对于 $I_{1B}$，由于 $|x|>\epsilon$，高斯被积函数 $e^{-\pi^2\sigma^2x^2}$ 呈指数级小，因此

$$I_{1B} \lesssim \operatorname{erfc}(\pi\sigma\epsilon).$$

当然，我们需要 $0 \ll \epsilon \leq \frac{\Delta}{2}$，才能使我们的近似有效。利用这一点，并对 $\operatorname{erf}(x)$ 在 $x\to\infty$ 时进行渐近展开，$\operatorname{erf}(x) = 1-\operatorname{erfc}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}$，我们得到

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{1A}+I_{1B} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\operatorname{erf}(\pi\sigma\epsilon)\exp\left(-\alpha^{-1}(\xi_0-\xi)^2\right) \\ &\quad + O\left(\exp\left(-\pi^2\sigma^2\Delta^2\right)\right)+O\left(\exp\left(-\frac{\pi^2\sigma^2\Delta^2}{4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\operatorname{erf}(\pi\sigma\epsilon)\exp\left(-\alpha^{-1}(\xi_0-\xi)^2\right)+O\left(\exp\left(-\frac{\pi^2\sigma^2\Delta^2}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

如果我们选取 $\epsilon = \frac{\Delta}{2}$。现在，我们可以考察

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2\sigma^2(x-\Delta)^2}e^{t(x)}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2\sigma^2x^2}e^{u(x)}dx \end{aligned}$$

其中

$$u(x) = -\frac{1}{\alpha}\left(\xi_0-\xi+\Delta\frac{a}{a-\exp\left(-\pi^2\sigma^2\Delta(\Delta+2x)-2\pi i\Delta t\right)}\right)^2.$$

这个积分可以用与 $I_1$ 积分相同的方法进行近似，只需对 $u(x)$ 的近似稍作调整。无论如何，通过展开 $u(x)$，我们得到与 $I_1$ 积分类似的结果，

$$-\alpha u(x) = (\xi_1-\xi)^2+O\left(\exp\left(-\pi^2\sigma^2\Delta^2\right)\right).$$

按照之前相同的步骤，我们得到

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\operatorname{erf}(\pi\sigma\epsilon)\exp\left(-\alpha^{-1}(\xi_1-\xi)^2\right)+O\left(\exp\left(-\frac{\pi^2\sigma^2\Delta^2}{4}\right)\right)$$

将这些合并起来，我们可以得到

$$\begin{aligned}S_f^{(h)}(t,\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}e^{2\pi i\xi_0 t}\left(I_1 + ae^{2\pi i\Delta t}I_2\right)\\ &= \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}}e^{2\pi i\xi_0 t}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi_0-\xi)^2} + O\left(e^{-\pi^2\sigma^2\frac{\Delta^2}{4}}\right) + ae^{2\pi i\Delta t}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi_1-\xi)^2} + O\left(e^{-\pi^2\sigma^2\frac{\Delta^2}{4}}\right)\right)\right]\\ &= \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}}e^{2\pi i\xi_0 t}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi_0-\xi)^2} + ae^{2\pi i\Delta t}\left(e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi_1-\xi)^2}\right)\right] + O\left(e^{-\pi^2\sigma^2\frac{\Delta^2}{4}}\right).\end{aligned}$$

注意到，我们可以显式地求得

$$S_{f_0}^{(h)}(t,\xi) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}}e^{2\pi i\xi_0 t}e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi_0-\xi)^2}$$

and

$$S_{f_1}^{(h)}(t,\xi) = \frac{a}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}}e^{2\pi i(\xi_1)t}e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi_1-\xi)^2}$$

从而完成证明。 □

命题 *5* 的证明。回顾式 (46)，我们可以写成

(47)

$$S_f^{(h)}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}e^{2\pi i\xi_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-\pi^2\sigma^2x^2} + ae^{2\pi i\Delta t}e^{-\pi^2\sigma^2(x-\Delta)^2}\right)e^{t(x)}dx$$

with

$$t(x) := -\frac{1}{\alpha}\left(\xi_0 - \xi + \Delta\frac{a}{a - \exp\left(\pi^2\sigma^2\Delta(\Delta-2x) - 2\pi i\Delta t\right)}\right)^2.$$

我们关注 $a \to 0$ 时的行为，因此可以先展开 $e^{t(x)}$。记

$$C := \frac{1}{D} := e^{\pi^2\sigma^2\Delta(\Delta-2x)-2\pi i\Delta t}.$$

那么，

$$\begin{aligned}\frac{a}{a + e^{\pi^2\sigma^2\Delta(\Delta-2x)-2\pi i\Delta t}} &= \frac{a}{a+C}\\ &= \frac{a}{C}\left(\frac{1}{1+\frac{a}{C}}\right)\\ &\approx \frac{a}{C}\left(1 - \frac{a}{C} + \frac{a^2}{C^2} - \dots\right)\\ &= aD - a^2D^2 + a^3D^3 - \dots\end{aligned}$$

它在 $|\frac{a}{C}|<1$ 时收敛。–因此，我们现在有

$$\begin{aligned}
e^{t(x)} &\approx e^{-\frac{1}{\alpha}\left|\xi-\xi_1\left(aD-O(a^2)\right)\right|^2} \\
&= e^{-\frac{1}{\alpha}\left|\xi-\xi_1 aD+O(a^2)\right|^2} \\
&= e^{-\frac{1}{\alpha}\left[(\xi-\xi_0)^2-2(\xi-\xi_0)\Delta a\Re(D)+O(a^2)\right]} \\
&= e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi-\xi_0)^2} e^{\frac{2}{\alpha}(\xi-\xi_0)\Delta a\Re(D)+O(a^2)} \\
&\approx e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi-\xi_0)^2}\left(1+\frac{2}{\alpha}(\xi-\xi_0)\Delta a\Re(D)+O(a^2)\right).
\end{aligned}$$

利用这一点,

$$\begin{aligned}
S_f^{(h)}(t,\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{2\pi i\xi_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2\sigma^2x^2} e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi-\xi_0)^2}\left(1+\frac{2}{\alpha}(\xi-\xi_0)\Delta a\Re(D)+O(a^2)\right)dx \\
&\quad + \frac{a}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{2\pi i(\xi_1)t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2\sigma^2(x-\Delta^2)} e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi-\xi_0)^2}\left(1+\frac{2}{\alpha}(\xi-\xi_0)\Delta a\Re(D)+O(a^2)\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}} e^{2\pi i\xi_0 t} e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi-\xi_0)^2} + \frac{2a\Delta(\xi-\xi_0)\cos(2\pi\Delta t)}{\pi\sigma\alpha^{3/2}} e^{2\pi i\xi_0 t} e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi-\xi_0)^2} \\
&\quad + \frac{a}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}} e^{2\pi i(\xi_1)t} e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi-\xi_0)^2} + O(a^2) \\
&= \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}} e^{2\pi i\xi_0 t} e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi-\xi_0)^2}\left[1+a\left(\frac{2\Delta(\xi-\xi_0)\cos(2\pi\Delta t)}{\alpha}+e^{2\pi i\Delta t}\right)+O(a^2)\right]
\end{aligned}$$

当 $a\to 0$ 时。记 $f_0(t)=e^{2\pi i\xi_0 t}$，我们有，当 $a\to 0$ 时，$f(t)\to f_0(t)$，因此我们也可以预期，$S_f^{(h)}(t,\eta)\to S_{f_0}^{(h)}(t,\eta)$。事实上，

$$\begin{aligned}
\left|S_f^{(h)}(t,\eta)-S_{f_0}^{(h)}(t,\eta)\right| &= \frac{a}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi-\xi_0)^2}\left|\frac{2\Delta(\xi-\xi_0)}{\alpha}\cos(2\pi\Delta t)+e^{2\pi i\Delta t}+O(a)\right| \\
&\le \frac{a}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi-\xi_0)^2}\left(1+\frac{2\Delta}{\alpha}|\xi-\xi_0||\cos(2\pi\Delta t)|\right)+O(a^2)
\end{aligned}$$

这意味着同步压缩变换呈线性收敛（就 $a$ 而言）。我们可以用类似于处理 $a\to 0$ 情形的方法处理 $a\to\infty$ 情形。令 $b:=1/a$，并考察 $g(t)=bf(t)=\frac{1}{a}e^{2\pi i\xi_0 t}+e^{2\pi i(\xi_1)t}$。现在，对于 $f(t)=\frac{1}{b}g(t)$，$a\to\infty$ 等价于 $b\to 0$。还要注意，$V_{(h)g}(t,\eta)=bV_{(h)f}(t,\eta)$，$\hat{}\eta_{s,g}(t,\eta)=\hat{}\eta_{s,f}(t,\eta)$，且 $S_g^{(h)}(t,\eta)=bS_f^{(h)}(t,\eta)$。据此，我们可以重现处理 $a\to 0$ 情形的步骤，并得到

$$S_f^{(h)}(t,\eta)=\frac{1}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}} e^{2\pi i(\xi_1)t} e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi-\xi_1)^2}\left[a+\left(e^{-2\pi i\Delta t}-\frac{2\Delta(\xi-\xi_1)\cos(2\pi\Delta t)}{\alpha}\right)+O\left(\frac{1}{a}\right)\right]$$

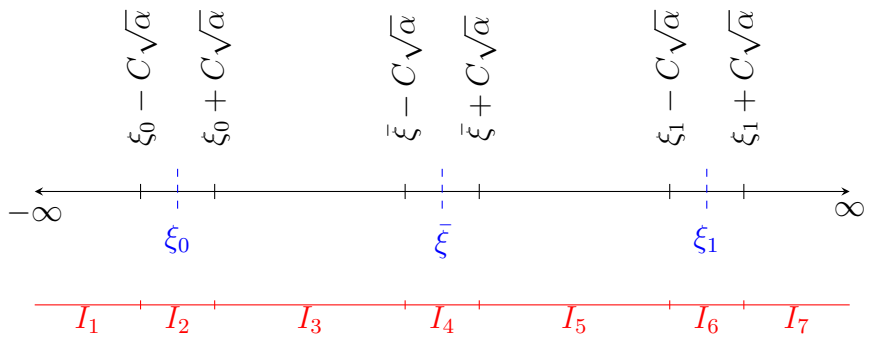


图 12。标有引理6、7和8对应子区间的 $\xi$轴。

如 $a \to \infty$。由 $f_1(t) = ae^{2\pi i(\xi_1)t}$，我们可以看到，当 $a \to \infty$ 时，$f(t) \to f_1(t)$，因此我们也可以预期，$S_f^{(h)}(t,\eta) \to S_{f_1}^{(h)}(t,\eta)$。确实，

$$\left|S_f^{(h)}(t,\eta) - S_{f_1}^{(h)}(t,\eta)\right| = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi-\xi_1)^2} \left| e^{-2\pi i\Delta t} - \frac{2\Delta(\xi-\xi_1)}{\alpha}\cos(2\pi\Delta t) + O\left(\frac{1}{a}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{1}{\alpha}(\xi-\xi_1)^2} \left(1 + \frac{2\Delta}{\alpha}|\xi-\xi_1||\cos(2\pi\Delta t)|\right) + O\left(\frac{1}{a}\right)$$

这再次意味着同步压缩变换呈线性收敛（当然，以 $a$缩放时）。□

**A.1. 定理 4 的证明**。为了证明定理 4，我们重点考察$t_k^+$，但也证明了$t_k^-$ 的类似结果。由于高斯函数 $g_\alpha$ 的标准差为 $\sqrt{\alpha}$，只有满足以下条件的 $\eta$ 才会对积分（23）有贡献：$\eta$

$$|\hat{\eta}_s(t,\eta) - \xi| < C\sqrt{\alpha}\,. \tag{48}$$

如果我们选择 $C = 1$，2，3，.....，我们考察的是满足以下条件的 $\eta$：$\hat{\eta}_s$ 将（$t$，$\eta$）映射到距 $\xi$分别为1，2，3，.....个标准差的位置。因此，我们需要确定$\hat{\eta}_s$的原像。具体而言，我们关注的集合是

$$H = \{\eta : |\hat{\eta}_s(t,\eta) - \xi| < C\sqrt{\alpha}\} \tag{49}$$

对于固定的（$t$，$\xi$）。下文中，定义 $I_1$，.....，$I_7$ 如图 12 所示。

**引理 6.** 令 $t = t_k^+$，并假设 $0 < C \leq \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}}$ 满足(48)。我们按照 (49) 定义原像。定义

$$C_R(\xi) := \frac{1}{2\pi^2\sigma^2\Delta} \ln\left(-1 - \frac{\Delta}{\xi - \xi_1 + C\sqrt{\alpha}}\right)$$

*and*

$$C_L(\xi) := \frac{1}{2\pi^2\sigma^2\Delta}\ln\left(-1-\frac{\Delta}{\xi-\xi_1-C\sqrt{\alpha}}\right),$$

当 $\xi \in (\xi_0 - C\sqrt{\alpha}, \xi_1 - C\sqrt{\alpha})$ 和 $\xi \in (\xi_0 + C\sqrt{\alpha}, \xi_1 + C\sqrt{\alpha})$ 分别成立时，它们都是光滑实函数。于是

- 对于 $\xi \in I_1 \cup I_7$，原像为 $H = \emptyset$,
- 对于 $\xi \in I_2$，原像为 $H = (-\infty, \eta_{AVG} + C_R)$，且在此情况下 $C_R < 0$,
- 对于 $\xi \in I_3 \cup I_4 \cup I_5$，原像 $H = [\eta_{AVG} + C_L, \eta_{AVG} + C_R]$，- 对于 $I_3$，$C_L < C_R < 0$，- 对于 $I_4$，$C_L < 0 < C_R$，- 对于 $I_3$，$0 < C_L < C_R$,
- 对于 $\xi \in I_6$，原像为 $H = (\eta_{AVG} + C_L, \infty)$，且在此情况下 $C_L > 0$。

引理 *6* 的证明。我们可以写成

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_s(t_k^+, \eta) &= \frac{\xi_0 + (\xi_1)q(t_k^+, \eta)}{1 + q(t_k^+, \eta)} \\ &= \xi_0 + \Delta\frac{q(t_k^+, \eta)}{1 + q(t_k^+, \eta)}.\end{aligned}$$

现在令 $d := \xi - \xi_1$，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\hat{\eta}_s(t_k^+, \eta) - \xi\right| &= \left|\Delta\frac{q(t_k^+, \eta)}{1 + q(t_k^+, \eta)} - \Delta - d\right| \\ &= \left|\Delta\left(\frac{q(t_k^+, \eta)}{1 + q(t_k^+, \eta)} - 1\right) - d\right| \\ &= \left|-\Delta\frac{1}{1 + q(t_k^+, \eta)} - d\right| \\ &= \left|\Delta\frac{1}{1 + q(t_k^+, \eta)} + d\right|.\end{aligned}$$

我们想知道 $\left|\hat{\eta}_s(t_k^+, \eta) - \xi\right| < C\sqrt{\alpha}$ 何时成立，这发生在

$$\left|\Delta\frac{1}{1 + q(t_k^+, \eta)} + d\right| < C\sqrt{\alpha}$$

或者等价地，当

$$\underbrace{\frac{-C\sqrt{\alpha} - d}{\Delta}}_{:=\epsilon_1} < \frac{1}{1 + q(t_k^+, \eta)} < \underbrace{\frac{C\sqrt{\alpha} - d}{\Delta}}_{:=\epsilon_2}.$$

注意，对于$0 < \frac{1}{1+q(t_k^+,\eta)} = \frac{1}{1+a\exp\{-\pi^2\sigma^2\Delta(\Delta-2(\eta-\xi_0))\}} < 1$，$\eta \in \mathbb{R}$时成立。特别地，由于 $q(t_k^+,\eta) > 0$，可立即推出$H = \{\emptyset\}$ 对于 $\xi \in I_1 \cup I_7$ 成立（因为当 $d > C\sqrt{\alpha}$ 或 $d \leq -\Delta - C\sqrt{\alpha}$时，上述不等式对任何 $\eta \in \mathbb{R}$ 都不成立）。现在，假设$-\Delta - C\sqrt{\alpha} < d < C\sqrt{\alpha}$。这意味着 $-\frac{2C\sqrt{\alpha}}{\Delta} \leq \epsilon_1 < 1$，并且$0 < \epsilon_2 < 1 + \frac{2C\sqrt{\alpha}}{\Delta}$。现在，我们可以分成两种情况：$\epsilon_1 > 0$($-\Delta - C\sqrt{\alpha} < d < -C\sqrt{\alpha}$)，以及 $\epsilon_1 < 0$ ( $-C\sqrt{\alpha} < d < C\sqrt{\alpha}$)。对于第一种情况，我们有

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_1 < \frac{1}{1+q(t_k^+,\eta)} < \epsilon_2 \\
&\quad \Longrightarrow \ \frac{1}{\epsilon_2} - 1 < q(t_k^+,\eta) < \frac{1}{\epsilon_1} - 1 \\
&\quad \Longrightarrow \ -\frac{\Delta + C\sqrt{\alpha} + d}{C\sqrt{\alpha} + d} < \exp\{-\pi^2\sigma^2\Delta[\Delta - 2(\eta-\xi_0)] + \ln a\} < \frac{\Delta - C\sqrt{\alpha} + d}{C\sqrt{\alpha} - d} \\
&\quad \Longrightarrow \ \eta \in (\eta_{\mathrm{AVG}} + C_2, \eta_{\mathrm{AVG}} + C_1)
\end{aligned}
$$

其中 $C_1$，$C_2$，以及 $\eta_{\mathrm{AVG}}$ 的定义如上。此情形给出了 $\xi \in I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5$ 的结果。另请注意，当 $\xi \to \xi_0 - C\sqrt{\alpha}$从右侧趋近时，$C_2 \to -\infty$。

对于第二种情形，我们有

$$
\begin{aligned}
\epsilon_1 < \frac{1}{1+q(t_k^+,\eta)} < \epsilon_2 \ &\Longrightarrow \ 0 < \frac{1}{1+q(t_k^+,\eta)} < \epsilon_2 \\
&\Longrightarrow \ \frac{1}{\epsilon_2} - 1 < q(t_k^+,\eta) < \infty \\
&\Longrightarrow \ \frac{\Delta - C\sqrt{\alpha} + d}{C\sqrt{\alpha} - d} < \exp\{-\pi^2\sigma^2\Delta[\Delta - 2(\eta-\xi_0)] + \ln a\} < \infty \\
&\Longrightarrow \ \eta \in (\eta_{\mathrm{AVG}} + C_2, \infty)
\end{aligned}
$$

由此得到 $\xi \in I_6$的结果。 □

现在，我们将证明与结果 6 类似的结果，适用于 $t_k^-$ 以及相长与相消时刻之间的时间。

**引理 7**。 设 $t = t_k^-$，并假设 $0 < C \leq \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}}$ 满足 (48)。我们按照 (49) 定义原像。定义

$$
C_L := \frac{1}{2\pi^2\sigma^2\Delta} \ln\left(1 + \frac{\Delta}{\xi - \xi_1 + C\sqrt{\alpha}}\right)
$$

*and*

$$
C_R := \frac{1}{2\pi^2\sigma^2\Delta} \ln\left(1 + \frac{\Delta}{\xi - \xi_1 - C\sqrt{\alpha}}\right)
$$

当 $\xi \in (-\infty, \xi_0 - C\sqrt{\alpha}) \cup (\xi_1 - C\sqrt{\alpha}, \infty)$ 以及 $\xi \in (-\infty, \xi_0 + C\sqrt{\alpha}) \cup (\xi_1 + C\sqrt{\alpha}, \infty)$ 时，它们分别都是光滑实函数。于是

- 对于 $\xi \in I_1 \cup I_7$，原像为 $H = [\eta_{\text{平均值}} + C_L, \eta_{\text{平均值}} + C_R]$，对于 $I_1$, $C_L < C_R < 0$，对于 $I_7$, $0 < C_L < C_R$
- 对于 $\xi \in I_2$，原像为 $H = (-\infty, \eta_{\text{平均值}} + C_R)$ 且在此情形下 $C_R < 0$，
- 对于 $\xi \in I_3 \cup I_4 \cup I_5$，原像为 $H = \emptyset$，
- 而对于 $\xi \in I_6$，原像为 $H = (\eta_{\text{平均值}} + C_L, \infty)$ 且在此情形下 $C_L > 0$。

引理 7 的证明。与前面引理 6 的证明类似，我们可以写成

$$\hat{\eta}_s(t_k^-, \eta) = \xi_0 + \Delta \frac{q(t_k^-, \eta)}{1 + q(t_k^-, \eta)}.$$

再次，令 $d := \xi - \xi_1$，我们有

$$|\hat{\eta}_s(t_{k+-}, \eta) - \xi| = \left| \Delta \frac{1}{1 + q(t_k^-, \eta)} + d \right|.$$

我们想知道何时 $\left|\hat{\eta}_s(t_k^-, \eta) - \xi\right| < C\sqrt{\alpha}$，这发生在

$$\underbrace{\frac{-C\sqrt{\alpha} - d}{\Delta}}_{:=\epsilon_1} < \frac{1}{1 + q(t_k^-, \eta)} < \underbrace{\frac{C\sqrt{\alpha} - d}{\Delta}}_{:=\epsilon_2}.$$

注意，$\frac{1}{1+q(t_k^-, \eta)} = 1 - a \frac{1}{\exp\{-\pi^2\sigma^2\Delta(\Delta - 2(\eta - \xi_0))\}} \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$，对$\eta \in \mathbb{R}$成立。一个直接推论是，对 $\xi \in I_3$，$H = \{\emptyset\}$（因为当 $-\Delta + C\sqrt{\alpha} < -C\sqrt{\alpha}$ 时，不存在任何 $\eta \in \mathbb{R}$ 能满足上述不等式）。$\xi$ 的其余情形可通过与引理 6 的证明中相同类型的分析得出。□

注8. 引理 6 和引理 7 中对 $0 < C \leq \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}}$ 的假设，是图 12 所述不相交分段所必需的。不过，可以去掉这一假设；但采用这种分段方式，能让不同区间上的行为更易于理解。将 $C$ 设为尽可能大，可获得最佳近似。

**引理 8.** 令 $t = t_k^I := k + \frac{1}{4}\frac{\Delta}{\Delta}$ 并假设 $0 < C \leq \frac{\Delta}{2\sqrt{\alpha}}$ 满足(48)。定义

$$C_*(\xi) := \frac{1}{2\pi^2\sigma^2\Delta} \ln\left( \sqrt{\frac{(\xi - \xi_0)^2 - C^2\alpha}{C^2\alpha - (\xi - \xi_1)^2}} \right),$$

由于对 $\xi \in I_2 \cup I_6$，对数内的量严格为正，因此该函数在 $I_2 \cup I_6$ 上取实值且光滑，故 $C_*(\xi)$。按照(49)中的记号，将原像记为，我们有：

- 当 $\xi \in I_1 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_7$ 时，原像 $H = \emptyset$,
- 当 $\xi \in I_2$ 时，原像 $H = (-\infty, \eta_{\text{平均}} + C_*(\xi))$，在这种情况下 $C_*(\xi) < 0$,
- 当 $\xi \in I_6$ 时，原像 $H = (\eta_{\text{平均}} + C_*(\xi)\ \infty)$，在这种情况下 $C_*(\xi) > 0$.

引理 *8* 的证明。 首先，我们可以记作

$$E := e^{2\pi^2\sigma^2\Delta(\eta-\bar{\xi})}$$

并写作

$$\begin{aligned} q(t_k^I, \eta) &= ae^{2\pi i\Delta t_k^I} e^{2\pi^2\sigma^2\Delta(\eta-\bar{\xi}} \\ &= ae^{\frac{\pi i}{2}} E \\ &= iaE. \end{aligned}$$

再次令 $d = \xi_1 - \Delta$，我们得到

$$\begin{aligned} \left|\hat{\eta}_s(t_k^I, \eta) - \xi\right| &= \left|\Delta \frac{1}{1 + q(t_k^I, \eta)} + d\right| \\ &= \left|\Delta \frac{1}{1 + iaE} + d\right| \\ &= \left|d + \Delta \frac{1}{1 + a^2E^2} - i\frac{\Delta aE}{1 + a^2E^2}\right| \\ &= \sqrt{d^2 + \frac{2d\Delta + \Delta^2}{1 + a^2E^2}} \\ &= \sqrt{\frac{d^2(1 + a^2E^2) + 2d\Delta + \Delta^2}{1 + a^2E^2}}. \end{aligned}$$

我们想找出 $\eta$和 $\xi$的哪些集合/区间满足 $\left|\hat{\eta}_s(t_k^I, \eta) - \xi\right| < C\sqrt{\alpha}$，这意味着我们需要

$$d^2(1 + a^2E^2) + 2d\Delta + \Delta^2 < C^2\alpha(1 + a^2E^2)$$

或者等价地，通过配方法，

$$\left(d + \frac{\Delta}{1 + a^2E^2}\right)^2 < C^2\alpha - \frac{\Delta^2a^2E^2}{(1 + a^2E^2)^2}.$$

Set

$$y := \frac{1}{1 + a^2F^2} \in (0, 1],$$

它关于 $\eta$ 严格递减。利用 $a^2E^2 = e^{4\pi^2\sigma^2\Delta_{(\eta-\eta_{\mathrm{AVG}})}}$，我们得到逻辑斯蒂形式

$$y(\eta) = \frac{1}{1 + e^{4\pi^2\sigma^2\Delta(\eta-\eta_{\mathrm{AVG}})}}.$$

展开前面的不等式可得

$$\begin{aligned}(d + \Delta y)^2 + \Delta^2 y(1-y) &< C^2\alpha \\ d^2 + 2d\Delta y + \Delta^2 y &< C^2\alpha \\ \Delta(\Delta + 2d)y &< C^2\alpha - d^2.\end{aligned}$$

现在我们可以根据 $\Delta + 2d$ 的符号进行分类讨论。

**情形 1：** $\Delta + 2d > 0$**(即** $\xi > \bar{\xi}$**)**
在这种情况下

$$y < \frac{C^2\alpha - d^2}{\Delta(\Delta + 2d)}.$$

对于可行解，必须满足 $y \in (0, 1]$ satisfying

$$\frac{C^2\alpha - d^2}{\Delta(\Delta + 2d)} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{C^2\alpha - d^2}{\Delta(\Delta + 2d)} \leq 1.$$

由于在情形 1 中 $\Delta(\Delta + 2d) > 0$，因此它们等价于

$$|d| < C\sqrt{\alpha} \qquad \text{and} \qquad (d + \Delta)^2 > C^2\alpha.$$

第一个不等式意味着

$$\xi \in (\xi_1 - C\sqrt{\alpha}, \xi_1 + C\sqrt{\alpha}) = I_6,$$

而对于 $\xi \in I_6$，第二个不等式自动成立，因为

$$\begin{aligned}(d + \Delta)^2 &= |\xi - \xi_0|^2 \\ &\geq (\Delta - |d|)^2 \\ &> (\Delta - C\sqrt{\alpha})^2 \\ &> C^2\alpha\end{aligned}$$

$^{-}$，其中最后一个不等式用到了 $C < \Delta/(2\sqrt{\alpha})$。反过来，对于任意位于 $I_6$ 之外的 $\xi > \xi^{-}$（即 $\xi \in I_5$ 或 $I_7$，以及 $I_4$ 中满足 $\xi > \xi$ 且与 $I_6$ 不重叠的部分），我们有 $|d| \geq C\sqrt{\alpha}$，因此右侧为 $\leq 0$，不存在$\overline{\text{可}}$行的 $y \in (0, 1]$。因此，在情形 1 中，唯一有效的 $\xi$ 是 $I_6$ 中的那些，而不等式 $y < (\cdots)$ 等价于

$$\eta > \eta_{\mathrm{AVG}} + \frac{1}{2\pi^2\sigma^2\Delta} \ln\left(\sqrt{\frac{(d + \Delta)^2 - C^2\alpha}{C^2\alpha - d^2}}\right) = \eta_{\mathrm{AVG}} + C_*(\xi).$$

因此，$H = (\eta_{\mathrm{AVG}} + C_*(\xi)\ \infty)$ 在 $I_6$ 上满足 $C_*(\xi) > 0$。

**情形 2：** $\Delta + 2d < 0$ （即 $\xi < \xi_0 + \frac{\Delta}{2}$）在这种情况下

$$y > \frac{C^2\alpha - d^2}{\Delta(\Delta + 2d)}.$$

对于可行解，我们需要

$$0 < \frac{C^2\alpha - d^2}{\Delta(\Delta + 2d)} < 1.$$

由于此时 $\Delta(\Delta + 2d) < 0$，这些不等式等价于

$$|d| > C\sqrt{\alpha} \qquad \text{and} \qquad (d + \Delta)^2 < C^2\alpha.$$

第二个不等式表明 $|\xi - \xi_0| < C\sqrt{\alpha}$，因此

$$\xi \in (\xi_0 - C\sqrt{\alpha}, \xi_0 + C\sqrt{\alpha}) = I_2.$$

第一个不等式在 $I_2$ 上自动成立，因为 $|d| = |\xi - \xi_1| \geq \Delta - |\xi - \xi_0| >$ $\Delta - C\sqrt{\alpha} > C\sqrt{\alpha}$。反过来，若 $\xi < \xi$，但 $\xi \notin I_2$（即 $\xi \in I_1$ 或 $I_3$，或 $I_4$ 中满足 $\xi < \xi$ 且与 $I_2$ 不重叠的部分），则 $|\xi - \xi_0| \geq C\sqrt{\alpha}$，因此 $(d + \Delta)^2 \geq C^2\alpha$，使得右侧为 $\leq 0$（或变号后为 $\geq 1$），因而不存在有效的 $y \in (0, 1]$。因此，在情形 2 中，唯一的可行 $\xi$ 是 $I_2$ 中的那些，而不等式 $y > (\cdots)$ 等价于

$$\eta < \eta_{\text{AVG}} + \frac{1}{2\pi^2\sigma^2\Delta} \ln\left(\sqrt{\frac{(d + \Delta)^2 - C^2\alpha}{C^2\alpha - d^2}}\right) = \eta_{\text{AVG}} + C_*(\xi).$$

因此，$H = (-\infty, \quad \eta_{\text{AVG}} + C_*(\xi))$ 与 $C_*(\xi)$ 在 $< 0$ 上。 □

回顾引理 1 和引理 3，在相长与相消时刻，$V_{(h)}f(t, \eta)$ 除了一个复常数因子外，是一个实值函数，

$$V_f^{(h)}(t_k^+, \eta) = e^{2\pi i \frac{\xi_0}{\Delta} k} \left(e^{-\pi^2\sigma^2(\eta - \xi_0)^2} + e^{-\pi^2\sigma^2(\eta - \xi_1)^2}\right),$$

and

$$V_f^{(h)}(t_k^-, \eta) = e^{2\pi i \frac{\xi_0}{\Delta}(k + \frac{1}{2})} \left(e^{-\pi^2\sigma^2(\eta - \xi_0)^2} - e^{-\pi^2\sigma^2(\eta - \xi_1)^2}\right).$$

利用这一点以及引理 6 和引理 7，我们可以计算 $S_f^{(h)}(t, \xi)$ 在 $t = t_k^+$ 或 $t_k^-$ 时的值，精确到一个 $O\left(\alpha^{-1/2}e^{-C^2}\right)$ 修正项。注意，当 (48) 中的 $C = \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}}$ 且 $\alpha$ 足够小时，$\alpha^{-1/2}e^{-C^2}$ 可以忽略。以下两个定理将对此作出明确说明。

**定理 5。** 令 $t = t_k^+$。定义

$$\gamma_1(\xi) = \bar{\xi} + \frac{1}{2\pi^2\sigma^2\Delta} \ln\left(-a^{-1}\left(1 + \frac{\Delta}{\xi - \xi_1 + C\sqrt{\alpha}}\right)\right)$$

*and*

$$\gamma_2(\xi) = \bar{\xi} + \frac{1}{2\pi^2\sigma^2\Delta}\ln\left(-a^{-1}\left(1+\frac{\Delta}{\xi-\xi_1-C\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

当 $\xi \in (\xi_0 - C\sqrt{\alpha}, \xi_1 - C\sqrt{\alpha})$和 $\xi \in (\xi_0 + C\sqrt{\alpha}, \xi_1 + C\sqrt{\alpha})$分别成立时，它们都是光滑实函数。考虑图 *12* 中定义的 $I_1, \ldots, I_7$。假设 $0 < C \leq \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}}$ 满足(48)。当 $\alpha$ 充分小时，经过 $O\left(\alpha^{-1/2}e^{-C^2}\right)$ 修正后，

$$\left|S_f^{(h)}(t_k^+,\xi)\right|$$

$$\sim \begin{cases} 0 & \text{if } \xi \in I_1 \cup I_7, \\ \alpha^{-1/2}\left[1+a+\operatorname{erf}\left(\pi\sigma\left(\gamma_1(\xi)-\xi_0\right)\right)+a\operatorname{erf}\left(\pi\sigma\left(\gamma_1(\xi)-\xi_1\right)\right)\right] & \text{if } \xi \in I_2, \\ \alpha^{-1/2}\left[1+a-\operatorname{erf}\left(\pi\sigma\left(\gamma_2(\xi)-\xi_0\right)\right)-a\operatorname{erf}\left(\pi\sigma\left(\gamma_2(\xi)-\xi_1\right)\right)\right] & \text{if } \xi \in I_6, \\ \alpha^{-1/2}[\operatorname{erf}\left(\pi\sigma\left(\gamma_1(\xi)-\xi_0\right)\right)-\operatorname{erf}\left(\pi\sigma\left(\gamma_2(\xi)-\xi_0\right)\right) & \\ \qquad +a\operatorname{erf}\left(\pi\sigma\left(\gamma_1(\xi)-\xi_1\right)\right)-a\operatorname{erf}\left(\pi\sigma\left(\gamma_2(\xi)-\xi_1\right)\right)] & \text{if } \xi \in I_3 \cup I_4 \cup I_5\,. \end{cases}$$

定理 *5* 的证明。首先，记 $\Psi(\xi) := \sqrt{\pi\alpha}S_f^{(h)}(t_k^+,\xi)$。对于任意区间内的 $\xi$，我们可以写成

$$\begin{aligned}\Psi(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} V_f^{(h)}(t_k^+,\eta)g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t_k^+,\eta)-\xi\right)d\eta \\ &= \underbrace{\int_H V_f^{(h)}(t_k^+,\eta)g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t_k^+,\eta)-\xi\right)d\eta}_{:=\Psi_1} + \underbrace{\int_{H^C} V_f^{(h)}(t_k^+,\eta)g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t_k^+,\eta)-\xi\right)d\eta}_{:=\Psi_2}.\end{aligned}$$

从 $I_1$ 开始（$I_7$ 情形可采用相同的方法），引理 6 表明我们应使用 $H = \emptyset$ 和 $H^C = \mathbb{R}$，因此有 $\Psi_1 = 0$。此外，对于$\Psi_2$，$g_\alpha$ 项可由 $e^{-C^2}$界定，因此对于 $\xi \in I_1$，有

$$\begin{aligned}\Psi(\xi) &= \int_{H^C} V_f^{(h)}(t_k^+,\eta)g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t_k^+,\eta)-\xi\right)d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}} V_f^{(h)}(t_k^+,\eta)g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t_k^+,\eta)-\xi\right)d\eta \\ &\leq e^{-C^2}\int_{\mathbb{R}} V_f^{(h)}(t_k^+,\eta)d\eta \\ &= e^{-C^2}e^{2\pi i\xi_0 t_k^+}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_0)^2}d\eta + a\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_1)^2}d\eta\right] \\ &= \frac{e^{-C^2}e^{2\pi i\xi_0 t_k^+}}{\pi\sigma\sqrt{\alpha}}(1+a) \\ &= O\left(\alpha^{-1/2}e^{-C^2}\right).\end{aligned}$$

对于 $I_2$ （$I_6$ 只需稍作调整即可进行相同的分析），引理 6 表明应令 $\Psi_1$ 大于 $H = (-\infty, \eta_{\mathrm{AVG}} + C_1)$，并令 $\Psi_2$ 大于 $H^C = [\eta_{\mathrm{AVG}} + C_1, \infty)$，从而对于 $\Psi_2$，$g_\alpha$ 项可由$e^{-C^2}$界定。引理 1 还表明，在 $\Psi_1$ 中，$V$ 为指数函数意义下的小量，因此对于$\xi \in I_2$，有

$$
\begin{aligned}
\Psi(\xi) &= \int_{-\infty}^{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1} V_f^{(h)}(t_k^+, \eta) g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t_k^+, \eta) - \xi\right) d\eta \\
&\quad + \int_{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1}^{\infty} V_f^{(h)}(t_k^+, \eta) g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t_k^+, \eta) - \xi\right) d\eta \\
&\leq \int_{-\infty}^{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1} V_f^{(h)}(t_k^+, \eta) d\eta + e^{-C^2} \int_{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1}^{\infty} V_f^{(h)}(t_k^+, \eta) d\eta \\
&= e^{2\pi i \xi_0 t_k^+} \Bigg[ \int_{-\infty}^{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1} e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_0)^2} d\eta + a \int_{-\infty}^{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1} e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_1)^2} d\eta \\
&\quad + e^{-C^2} \int_{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1}^{\infty} e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_0)^2} d\eta + a e^{-C^2} \int_{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1}^{\infty} e^{-\pi^2\sigma^2(\eta-\xi_1)^2} d\eta \Bigg] \\
&= \frac{e^{2\pi i \xi_0 t_k^+}}{2\sigma\sqrt{\pi}} \Bigg[ \operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_1(\xi) - \xi_0)) + 1 + a\left(\operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_1(\xi) - \xi_1)) + 1\right) \\
&\quad + e^{-C^2} \Big( \operatorname{erfc}(\pi\sigma(\gamma_1(\xi) - \xi_0)) + 1 + a\left(\operatorname{erfc}(\pi\sigma(\gamma_1(\xi) - \xi_1)) + 1\right) \Big) \Bigg] \\
&= \frac{e^{2\pi i \xi_0 t_k^+}}{2\pi\sigma\sqrt{\alpha}} \Bigg[ \left(1 - e^{-C^2}\right) \left(\operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_1(\xi) - \xi_0)) + a \operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_1(\xi) - \xi_1))\right) \\
&\quad + \left(1 + e^{-C^2}\right)(1 + a) \Bigg].
\end{aligned}
$$

最后，对于 $\xi \in I_3$ （对于 $I_4$ 或 $I_5$ 也类似），我们可以像上文一样类似地使用引理 1 和引理 6，得到

$$
\begin{aligned}
\Psi(\xi) &= \int_{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_2}^{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1} V_f^{(h)}(t_k^+, \eta) g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t_k^+, \eta) - \xi\right) d\eta \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_2} V_f^{(h)}(t_k^+, \eta) g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t_k^+, \eta) - \xi\right) d\eta \\
&\quad + \int_{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1}^{\infty} V_f^{(h)}(t_k^+, \eta) g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t_k^+, \eta) - \xi\right) d\eta \\
&= \int_{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_2}^{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1} V_f^{(h)}(t_k^+, \eta) g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t_k^+, \eta) - \xi\right) d\eta + O\left(e^{-C^2}\right)
\end{aligned}
$$

因为对于上面的后两个积分， $g_\alpha$ 很小。现在，我们可以写成

$$\begin{aligned}\Psi(\xi) - \int_{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_2}^{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1} V_f^{(h)}(t_k^+,\eta)d\eta &= \int_{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_2}^{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1} V_f^{(h)}(t_k^+,\eta)\left(g_\alpha\left(\hat{\eta}_s(t_k^+,\eta)-\xi\right)-1\right)d\eta \\ &\quad + O\left(e^{-C^2}\right) \\ &= O\left(e^{-C^2}\right)\end{aligned}$$

因为 $g_\alpha = 1 - O\left(e^{-C^2}\right)$ 在此区间内。因此，

$$\begin{aligned}\Psi(\xi) &= \int_{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_2}^{\eta_{\mathrm{AVG}}+C_1} V_f^{(h)}(t_k^+,\eta)d\eta + O\left(e^{-C^2}\right) \\ &= \frac{e^{2\pi i\xi_0 t_k^+}}{2\pi\sigma\sqrt{\alpha}}\Big[\operatorname{erf}\left(\pi\sigma\left(\gamma_1(\xi)-\xi_0\right)\right) - \operatorname{erf}\left(\pi\sigma\left(\gamma_2(\xi)-\xi_0\right)\right) \\ &\quad + a\operatorname{erf}\left(\pi\sigma\left(\gamma_1(\xi)-\xi_0-\Delta\right)\right) - a\operatorname{erf}\left(\pi\sigma\left(\gamma_2(\xi)-\xi_0-\Delta\right)\right)\Big] \\ &\quad + O\left(e^{-C^2}\right)\end{aligned}$$

□

有关上述定理中近似值随 $C = \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}}$ 变化时的动画，请参见附录 B。

**定理 6**。设 $t = t_k^-$ 。定义

$$\gamma_1(\xi) = \bar{\xi} + \frac{1}{2\pi^2\sigma^2\Delta}\ln\left(a^{-1}\left(1+\frac{\Delta}{\xi-\xi_1+C\sqrt{\alpha}}\right)\right)$$

*and*

$$\gamma_2(\xi) = \bar{\xi} + \frac{1}{2\pi^2\sigma^2\Delta}\ln\left(a^{-1}\left(1+\frac{\Delta}{\xi-\xi_1-C\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

当 $\xi \in (-\infty, \xi_0 - C\sqrt{\alpha}) \cup (\xi_1 - C\sqrt{\alpha}, \infty)$ 以及 $\xi \in (-\infty, \xi_0 + C\sqrt{\alpha}) \cup (\xi_1 + C\sqrt{\alpha}, \infty)$ 分别成立时，它们都是光滑实函数。考虑图 *12* 中定义的 $I_1, \ldots, I_7$。假设 $C < \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}}$ 属于 (48)。当 $\alpha$ 充分小时，经过 $O\left(\alpha^{-1/2}e^{-C^2}\right)$ 修正后，

$$\left|S_f^{(h)}(t_k^+,\xi)\right|$$
$$\sim\begin{cases}\alpha^{-1/2}[\operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_1(\xi)-\xi_0))-\operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_2(\xi)-\xi_0)) & \\ \quad +a\operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_1(\xi)-\xi_1))-a\operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_2(\xi)-\xi_1))] & if\ \xi\in I_1\cup I_7,\\ \alpha^{-1/2}[1+a+\operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_2(\xi)-\xi_0))+a\operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_2(\xi)-\xi_1))] & if\ \xi\in I_2,\\ 0 & if\ \xi\in I_3\cup I_4\cup I_5,\\ \alpha^{-1/2}[1+a-\operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_1(\xi)-\xi_0))-a\operatorname{erf}(\pi\sigma(\gamma_1(\xi)-\xi_1))] & if\ \xi\in I_6,\end{cases}$$

定理 *6* 的证明。证明沿用定理 5 的相同分析。□

上述定理中的近似随 $\Delta$ 和 $C=\frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}}$ 变化的动画见附录 B。显然，在相消时刻，即使两个频率很接近，同步压缩变换也能够识别出两个分量，而估计频率则存在偏差。$\Delta$ 越小，偏差越大；上述近似中的 $\gamma_i$ 对此进行了量化。根据上述定理，我们可以证明关于同步压缩变换谱干涉的主定理如下。

定理 *4* 的证明。令 $y=\xi-\xi_0$ 为 $C=\frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}}$，

$$y-\Delta\pm C\sqrt{\alpha}.$$

令 $s_1=y-\frac{3\Delta}{4}$ 和 $s_2=s_1-\frac{\Delta}{2}$ 满足

$$\gamma_1(\xi)=\bar{\xi}+\frac{1}{2\pi^2\sigma^2\Delta}\ln\left(-a^{-1}\left(1+\frac{\Delta}{s_1}\right)\right),$$
$$\gamma_2(\xi)=\bar{\xi}+\frac{1}{2\pi^2\sigma^2\Delta}\ln\left(-a^{-1}\left(1+\frac{\Delta}{s_2}\right)\right).$$

定义 $\ell_1=\ln\left(-a^{-1}(1+\Delta/s_1)\right)$ 和 $\ell_2=\ln\left(-a^{-1}(1+\Delta/s_2)\right)$，并令

$$z_1=\pi\sigma\left(\frac{\Delta}{2}+\frac{\ell_1}{2\pi^2\sigma^2\Delta}\right),\qquad z_2=\pi\sigma\left(\frac{\Delta}{2}+\frac{\ell_2}{2\pi^2\sigma^2\Delta}\right),$$
$$z_3=z_1-\pi\sigma\Delta,\quad z_4=z_2-\pi\sigma\Delta.$$

现在，对 $\ln(-a^{-1}(1+\Delta/s))$ 求导，得到

$$\frac{d}{d\xi}\ln\left(-a^{-1}\left(1+\frac{\Delta}{s}\right)\right)=-\frac{\Delta}{s(s+\Delta)}\frac{ds}{d\xi},$$

并且由于 $\frac{ds_1}{d\xi}=\frac{ds_2}{d\xi}=1$ 我们有

$$\gamma_1'=-\frac{1}{2\pi^2\sigma^2}\frac{1}{s_1(s_1+\Delta)},\qquad \gamma_2'=-\frac{1}{2\pi^2\sigma^2}\frac{1}{s_2(s_2+\Delta)}.$$

再次求导并使用 $\frac{d}{d\xi}(s(s+\Delta)) = 2s+\Delta$ 可得

$$\gamma_1'' = \frac{2s_1+\Delta}{2\pi^2\sigma^2 s_1^2(s_1+\Delta)^2}, \qquad \gamma_2'' = \frac{2s_2+\Delta}{2\pi^2\sigma^2 s_2^2(s_2+\Delta)^2}.$$

由于临界点包含在定理 5 的区间 $I_3 \cup I_4 \cup I_5$ 中，我们可以在 $H(\xi)$. 中寻找分岔点。由于 $\frac{d}{du}$ 误差函数 $(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}u'$ 和 $\frac{d^2}{du^2}$ 误差函数 $(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}(u'' - 2u(u')^2)$，我们有

(50)

$$H'(\xi) = \frac{2\pi\sigma}{\sqrt{\pi\alpha}}\left[\gamma_1'\left(e^{-z_1^2} + ae^{-z_3^2}\right) - \gamma_2'\left(e^{-z_2^2} + ae^{-z_4^2}\right)\right],$$

(51)

$$H''(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi\alpha}}\Big[e^{-z_1^2}\left(\pi\sigma\gamma_1'' - 2z_1(\pi\sigma\gamma_1')^2\right) - e^{-z_2^2}\left(\pi\sigma\gamma_2'' - 2z_2(\pi\sigma\gamma_2')^2\right) + ae^{-z_3^2}\left(\pi\sigma\gamma_1'' - 2z_3(\pi\sigma\gamma_1')^2\right) - ae^{-z_4^2}\left(\pi\sigma\gamma_2'' - 2z_4(\pi\sigma\gamma_2')^2\right)\Big].$$

我们首先证明临界间距的存在性。固定 $\Delta > 0$，并考虑区间 $I_\Delta = (\xi_0 + \Delta/4, \xi_0 + 3\Delta/4)$。我们可以计算 $I_\Delta$ 端点处 $H'(\xi)$ 的单侧极限。由于 $\xi \downarrow \xi_0 + \frac{\Delta}{4}$ 我们有 $s_2 \to -\Delta^+$和 $s_2 + \Delta \to 0^+$，因此 $s_2(s_2+\Delta) \to 0^-$ 并且

$$\gamma_2'(\xi) = -\frac{1}{2\pi^2\sigma^2 s_2(s_2+\Delta)} \to \infty,$$

当 $\gamma_1'(\xi)$ 保持有限时。因此，我们得到 $\lim_{\xi\downarrow\xi_0+\frac{\Delta}{4}} f'(\xi) = -\infty$. 类似地，当 $\xi \uparrow \xi_0 + \frac{3\Delta}{4}$时，我们有 $s_1 \to 0^-$ 和 $s_1 + \Delta \to \Delta > 0$，因此 $s_1(s_1+\Delta) \to 0^-$ 且 $\gamma_1'(\xi) \to \infty$，当 $\gamma_2'(\xi)$ 保持有限时。因此，$\lim_{\xi\uparrow\xi_0+\frac{3\Delta}{4}} H'(\xi) = +\infty$. 为简化记法，在必要时我们将写作 $H = H(\xi) = H(\xi, \Delta)$，以明确其对 $\Delta$ 的依赖。由$H'$ 在 $I_\Delta$上的连续性，介值定理保证至少存在一个内部零点 $\xi_*(\Delta) \in I_\Delta$，使得 $H'(\xi_*(\Delta), \Delta) = 0$。此外，$H$ 在 $I_\Delta \times (0,\infty)$ 上的 $(\xi, \Delta)$ 内为 $C^2$，因此 $H''(\xi, \Delta)$ 在那里连续。对充分小的 $\Delta$，直接计算 $\xi = \xi$ 处的值可得 $H''(\xi, \Delta) < 0$，因此由连续性可知，对所有足够小的 $\Delta$，$H''(\xi_*(\Delta), \Delta) \neq 0$。将隐函数定理应用于 $G(\xi, \Delta) := H'(\xi, \Delta)$ 在 $(\xi_*(\Delta), \Delta)$ 处，且$\partial_\xi G(\xi_*(\Delta), \Delta) = H''(\xi_*(\Delta), \Delta) \neq 0$，便可得到在该值的某个邻域内关于 $\Delta$ 的唯一 $C^1$ 分支$\Delta \mapsto \xi_*(\Delta)$，其由内部驻点组成。最后，当 $\Delta$ 较大时，$f$ 的两个众数相距甚远，沿此分支的驻点 $\xi_*(\Delta)$ 满足 $H''(\xi_*(\Delta), \Delta) > 0$（它是一个局部极小值）。由关于 $\Delta$的连续性，存在 $\Delta_{\text{critical}} > 0$使得 $H''(\xi_*(\Delta_{\text{critical}}), \Delta_{\text{critical}}) = 0$，且在 $\xi_c = \xi_*(\Delta_{\text{critical}})$ 处，我们有

$H'(\xi_c) = H''(\xi_c) = 0$，如所声称。现在，令 $\Delta > 0$ 和 $\xi_c$ 满足$H'(\xi_c) = H''(\xi_c) = 0$。记 $E_k = e^{-z_k(\xi_c)^2}$，其中 $k = 1$、2、3、4。由式（50）可得，

$$\gamma_1'(E_1 + aE_3) = \gamma_2'(E_2 + aE_4).$$

由（51）式整理可得，

$$\begin{aligned} &E_1\left(\pi\sigma\gamma_1'' - 2z_1(\pi\sigma\gamma_1')^2\right) - E_2\left(\pi\sigma\gamma_2'' - 2z_2(\pi\sigma\gamma_2')^2\right) \\ &\quad + a\left[E_3\left(\pi\sigma\gamma_1'' - 2z_3(\pi\sigma\gamma_1')^2\right) - E_4\left(\pi\sigma\gamma_2'' - 2z_4(\pi\sigma\gamma_2')^2\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

直接计算可知，$E_3 = E_2$ 和 $E_4 = E_1$ 等价于 $z_3^2 = z_2^2$ 和 $z_4^2 = z_1^2$，而后者又等价于 $z_1 + z_2 = \pi\sigma\Delta$。因此，$z_3 = z_1 - \pi\sigma\Delta$ 给出 $z_3^2 = z_2^2$ 当且仅当（$z_1 - z_2$）（$z_1 + z_2 - \pi\sigma\Delta$）$= 0$，且在内部有 $z_1 \neq z_2$，故 $z_1 + z_2 = \pi\sigma\Delta$。对 $z_4^2 = z_1^2$也可作同样的推理。若 $E_3 \neq E_2$ 或 $E_4 \neq E_1$，则关于变量对（$\gamma_1''$，$\gamma_2''$）的上述两个线性方程的系数与 $z_1$，$z_2$，$z_3$，$z_4$给出的符号不相容，因此无解。所以，在二重根处必须有 $E_3 = E_2$ 和 $E_4 = E_1$，或等价地，$z_1 + z_2 = \pi\sigma\Delta$。定义 $r$：$= E_1/E_2 = e^{-(z_1^2 - z_2^2)} > 0$。利用 $z_1 + z_2 = \pi\sigma\Delta$，可得

$$z_1 - z_2 = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2\pi\sigma\Delta}, \qquad z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2},$$

因此 $r = e^{-(\ell_1 - \ell_2)/2}$。令 $u := 1 + \Delta/s_1$ 和 $v := 1 + \Delta/s_2$，则有$\ell_1 = \ln(-a^{-1}u)$ 和 $\ell_2 = \ln(-a^{-1}v)$，所以 $r = \sqrt{v/u}$。此外，$z_1 + z_2 = \pi\sigma\Delta$ 等价于 $\ell_1 + \ell_2 = 0$，也就是说 $uv = a^2$。在约束条件 $u, v < 0$ 下（这是由对数的真数决定的），求解 $uv = a^2$ 和$v/u = r^2$，得

$$u = -\frac{a}{r}, \qquad v = -ar.$$

因此

$$1 + \frac{\Delta}{s_1} = -\frac{a}{r} \implies s_1 = -\frac{\Delta r}{a + r}, \qquad 1 + \frac{\Delta}{s_2} = -ar \implies s_2 = -\frac{\Delta}{ar + 1}.$$

将 $E_1 = rE_2$、$E_3 = E_2$、$E_4 = E_1$ 代入由（50）得到的 $H'(\xi_c) = 0$，可得

$$0 = \gamma_1'\left(rE_2 + aE_2\right) - \gamma_2'\left(E_2 + arE_2\right) = E_2\left(\gamma_1'(r + a) - \gamma_2'(1 + ar)\right),$$

so

$$r = \frac{\gamma_2' - a\gamma_1'}{\gamma_1' - a\gamma_2'},$$

这就是（25）。同样，将 $E_1 = rE_2$、$E_3 = E_2$、$E_4 = E_1$ 代入（51），除以正因子 $E_2$，并合并各项，可得

$$\begin{aligned}0 &= r\left(\pi\sigma\gamma_1'' - 2z_1(\pi\sigma\gamma_1')^2\right) - \left(\pi\sigma\gamma_2'' - 2z_2(\pi\sigma\gamma_2')^2\right) \\ &\quad + a\left(\pi\sigma\gamma_1'' + 2z_2(\pi\sigma\gamma_1')^2\right) - ar\left(\pi\sigma\gamma_2'' + 2z_1(\pi\sigma\gamma_2')^2\right) \\ &= (r+a)\pi\sigma\gamma_1'' - (1+ar)\pi\sigma\gamma_2'' + 2\left[(-z_1 r + az_2)(\pi\sigma\gamma_1')^2 + (z_2 - arz_1)(\pi\sigma\gamma_2')^2\right],\end{aligned}$$

这与 (26) 等价。这证明，任何二重根都会产生一对满足 (25)–(26) 的 $(\Delta, r)$，且 $\xi_c = \xi_0 + \frac{3\Delta}{4} + s_1$ with $s_1 = -\frac{\Delta r}{a+r}$。反过来，假设 $(\Delta, r)$ 满足 (25)–(26)。按陈述中的定义设 $s_1, s_2, z_1, z_2$，并令 $\xi_c = \xi_0 + \frac{3\Delta}{4} + s_1$。那么 $u = 1 + \Delta/s_1 = -a/r$ 和 $v = 1 + \Delta/s_2 = -ar$ 意味着 $\ell_1 = -\ln r$，$\ell_2 = \ln r$，因此 $z_1 + z_2 = \pi\sigma\Delta$，$z_3 = -z_2$，$z_4 = -z_1$，且 $E_1/E_2 = r$，$E_3 = E_2$，$E_4 = E_1$。将这些代入 (50) 和 (51)，由 (25) 得到 $H'(\xi_c) = 0$，由 (26) 得到 $H''(\xi_c) = 0$。因此 $\xi_c$ 是一个内部二重根，而 $\Delta$ 是一个临界间距。由于上述关于 $s_1, s_2, z_1, z_2$ 的公式不涉及 $\alpha$，一旦施加 $C = \Delta/(4\sqrt{\alpha})$，该刻画便与 $\alpha$ 无关。□

## 附录 B. 动画

请点击此处观看定理2和定理3随 Δ变化的动画。请注意，在此动画中，黑色曲线是根据上述定理推导出的近似结果。若要了解两种广义同步挤压变换的近似结果与精确曲线的对比，请参见图 9。

请点击此处观看定理 5 中近似结果随Δ 和$C = \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}}$变化的动画。在上述链接中，动画展示的是近似结果本身。请注意，由于 $C = \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}}$，区间 $I_2$ 和$I_6$ 不存在。此外，还可以清楚地看到，随着 Δ 变化，峰的数量如何从一个变为两个。

请点击此处观看定理 6 中近似结果随 Δ和 $C = \frac{\Delta}{4\sqrt{\alpha}}$变化的动画。

美国杜克大学数学系，北卡罗来纳州达勒姆电子邮箱：shrikant.chand@duke.edu

美国北卡罗来纳州达勒姆，杜克大学数学系电子邮箱地址：
james.nolen@duke.edu

美国纽约州纽约市，纽约大学库朗数学科学研究所数学系

电子邮箱地址：hw3635@nyu.edu