arXiv:2601.10924v1 [math.SP] 16 Jan 2026

受扰扭曲管上的磁狄利克雷拉普拉斯算子

Diana Barseghyan[1], Ricardo Abreu Blaya[2], Juan Bory-Reyes[3],和 Baruch Schneider[1]

[1] 俄斯特拉发大学数学系，30.dubna 22, 70103 俄斯特拉发，捷克共和国，[2] 格雷罗自治大学数学系，墨西哥，[3] ESIME-Zacatenco，国立理工学院，墨西哥城，CDMX. 07738. 墨西哥。电子邮箱：diana.schneiderova@osu.cz, baruch.schneider@osu.cz, rabreublaya@yahoo.es, juanboryreyes@yahoo.com

摘要

众所周知，对于三维周期性扭转管的紧支扰动，其狄利克雷拉普拉斯算子的谱对区域形变并不稳定。这意味着，如果周期性扭转管未受扰动，那么狄利克雷拉普拉斯算子的谱是纯本质谱。另一方面，对该区域的扰动会在本质谱以下产生特征值。本文研究带磁场的狄利克雷拉普拉斯算子，并明确证明磁性拉普拉斯算子的谱在区域发生小幅局部形变时保持稳定。

关键词. 磁狄利克雷拉普拉斯算子，周期性扭转管，局部扰动，离散谱，本质谱

数学主题分类（2020）. 35P15，81Q10，81Q37

1 引言

数理物理研究区域几何与描述其动力学的算子谱性质之间的关系。在过去25年里，关于无限延伸管状区域中的狄利克雷拉普拉斯算子，人们开展了大量研究。一个尤为有趣的问题类别涉及扭曲管的性质。

非圆形管的扭转会产生有效排斥相互作用，这一事实最早见于 [7], ；后来通过适当的 Hardy型不等式赋予了这一事实严格的数学含义 [11]。在

另一方面，尽管无限直管的周期性扭转会抬高本质谱的阈值，但合理的预期是，局部减速会起到吸引作用。因此，这可能会使相应的狄利克雷拉普拉斯算子产生离散谱； [10], 证明了事实确实如此。此后，人们进一步研究了这一效应。特别是，论文 [5]分析了在“减速”扰动无限延伸且具有指定衰减性质时特征值的渐近分布。

本文探讨谱问题的另一个方面。具体而言，我们研究定义在一个局部扰动的周期性扭转管上的磁狄利克雷拉普拉斯算子，其中磁场具有紧支撑。我们证明，紧支撑磁场可以破坏离散谱，却保留本质谱。以下文献 [2], [3] 和 [4]已展示磁场对谱行为的类似影响。

2 磁狄利克雷拉普拉斯算子

设 ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开有界区域，其边界属于C^2类，并设 $\theta:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个可微函数。对于给定的 $s\in\mathbb{R}$ 和$t:=(t_2,t_3)\in\omega$，我们定义映射 $\mathfrak{L}:\ \mathbb{R}\times\omega\to\mathbb{R}^3$ 如下:

$$\mathfrak{L}(s,t)=(s,t_2\cos\theta(s)+t_3\sin\theta(s),t_3\cos\theta(s)-t_2\sin\theta(s))\,. \tag{2.1}$$

像 $\mathfrak{L}(\mathbb{R}\times\omega)$是 $\mathbb{R}^3$中的一个区域，若满足以下两个条件，我们称其为扭曲管：

(i) 函数 θ 不是常数；(ii) 集合 ω 相对于 $\mathbb{R}^2$中的原点不具有旋转对称性；

特别地，当 θ 是线性函数时，该管被设定为周期性扭转。

正如我们所指出的，我们关注的是受到周期性扭转局部扰动的管。因此，我们将考虑满足下述条件的角函数 θ

$$\dot\theta(s)=\beta(s)=\beta_0-\mu(s)\,, \tag{2.2}$$

其中 β_0 是正常数[1]，而 $\mu(\cdot)$是正的有界函数，其支集满足 $\operatorname{supp}\mu\subset[-s_0,s_0]$，其中某个 $s_0>0$。我们将研究如下管

$$\Omega_\beta:=\mathfrak{L}(\mathbb{R}\times\omega) \tag{2.3}$$

由对应于 $\theta(s)=\int_{-s_0}^{s}\beta(s)\mathrm{d}s$ 的 $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_\theta$ 定义，该角度在一个常数范围内确定。

[1]作此正性假设仅仅是为了简化起见，因为当 $\beta_0<0$ 时，可以通过镜像变换得到一个酉等价算子 $(s,\ t)\mapsto(-s,\ t)$。

本文将重点研究磁狄利克雷拉普拉斯算子，其构造如下。考虑闭二次型

$$Q_{\beta,\mathcal{A}}[u] = \|(i\nabla + \mathcal{A})u\|_{L^2(\Omega_\beta)}, \quad u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\beta),$$

其中，实值函数 $\mathcal{A}$ 是一个矢势。

根据第一表示定理 [12], ，存在一个与该形式相关联的唯一非负自伴算子:

$$H_{\Omega_\beta}(\mathcal{A}) = (i\nabla + \mathcal{A})^2. \tag{2.4}$$

在本文中，我们假设磁矢势 $\mathcal{A}$ 是紧支撑的。

为了表述这一结果，我们需要引入作用于 $L^2(\omega)$ 上的以下算子，

$$h_{\beta_0} = -\partial_{t_2}^2 - \partial_{t_3}^2 - \beta_0^2(t_2\partial_{t_3} - t_3\partial_{t_2})^2$$

由于 ω 的边界光滑，该算子的区域为

$$D(h_{\beta_0}) = \mathcal{H}_0^1(\omega) \cap \mathcal{H}^2(\omega)\,.$$

由于狄利克雷拉普拉斯算子 $-\partial_{t_2}^2 - \partial_{t_3}^2$ 在有界区域上具有纯离散谱，且第二项为正，因此 h_{β_0} 的谱也为纯离散谱。记

$$E = \inf \sigma(h_{\beta_0})\,. \tag{2.5}$$

如 [13], 所示，只要 ω 不是旋转对称的， E 就大于定义在 ω上的狄利克雷拉普拉斯算子的基态特征值。

于是，零磁场下狄利克雷拉普拉斯算子 $H_{\Omega_\beta}(0)$ 有如下结果 [10]:

定理 2.1. $H_{\Omega_\beta}(0)$ 的谱纯粹绝对连续，并覆盖半直线 $[E,\infty)$。

定理 2.2. 假设 ω 不是旋转对称的，并且

$$\int_{-s_0}^{s_0} (\dot{\theta}^2(s) - \beta_0^2)\,ds < 0\,, \tag{2.6}$$

其中 $\theta(\cdot)$ 由 *(2.2)* 给出。那么，算子 $H_{\Omega_\beta}(0)$ 在本质谱阈值以下至少有一个有限重数的特征值。

下面，我们给出磁场对算子 $H_{\Omega_\beta}(\mathcal{A})$ 的谱行为影响的结果。

定理 2.3。 设 Ω^β 由式 *(2.3)* 给出，其中 β 由式 *(2.2)* 描述。设 $B = \mathrm{rot}(\mathcal{A}) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ 为实值紧支撑磁场。则算子 (2.4) 的本质谱与半直线 $[E,\infty)$重合。

定理 2.4。 假设定理 *2.3* 的条件成立。此外，假设 ω 包含原点，且其边界属于 C^2 类。设磁矢势具有如下形式： $\mathcal{A} = (0, A, 0)$ ，其中 A 满足以下条件：存在一个二维球 $\mathcal{B}(0,\tau)$，其中心在原点、半径为 $\tau > 0$ ，并包含于 $\Omega_\beta \cap \{s = s^*\}$的每个横截面 $s^* \in (-s_0, s_0)$中；在 $\mathcal{B}(0,\tau)$ 上，偏导数 $\partial_y A$ 与 s^* 无关，且作为变量 t的函数非平凡。则存在一个正数 β_0，使得当 $\beta \in (0, 2\beta_0)$ 时，算子 (2.4) 在 E 以下的离散谱为空。

3 证明

本节将给出上述定理的证明。首先，我们证明定理 2.4。然后，我们证明定理 2.3。

3.1 定理 2.4 的证明

给定 $\psi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R} \times \omega)$，引入以下简写形式很有用，

$$\partial_\alpha \psi = t_2 \partial_{t_3} \psi - t_3 \partial_{t_2} \psi.$$

然后，利用变量替换 (2.1)，可以验证，对于任意$u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\beta)$，我们有

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_{t_2} v \cos\theta + \partial_{t_3} v \sin\theta, \\ \partial_y u &= -\partial_{t_2} v \sin\theta + \partial_{t_3} v \cos\theta, \\ \partial_s u &= \partial_s v + \dot{\theta} \partial_\alpha v \,, \end{aligned}$$

其中

$$v(s,t) = u(s, t_2 \cos\theta + t_3 \sin\theta, t_3 \cos\theta - t_2 \sin\theta) \tag{3.7}$$

点表示对 s 的导数。

因此，采用如下记号

$$\tilde{A}(s,t) = A(s, t_2 \cos\theta + t_3 \sin\theta, t_3 \cos\theta - t_2 \sin\theta) \tag{3.8}$$

与算子 (2.4) 对应的二次型 $Q_{\beta,\mathcal{A}}[u]$, $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\beta)$ 可改写如下

$$\begin{aligned} &Q_{\beta,\mathcal{A}}[u] - E\|u\|^2_{L^2(\Omega_\beta)} = \\ &\int_{\mathbb{R}\times\omega} \left(\left| i\partial_{t_2} v \cos\theta + i\partial_{t_3} v \sin\theta + \tilde{A} v \right|^2 + \left| -\partial_{t_2} v \sin\theta + \partial_{t_3} v \cos\theta \right|^2 + \left| \partial_s v + \dot{\theta} \partial_\alpha v \right|^2 \right) ds\, dt \\ &\qquad - E\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}\times\omega}\Big(|\partial_{t_2}v|^2 + i\tilde{A}\partial_{t_2}v\overline{v}\cos\theta + |\partial_{t_3}v|^2 + i\tilde{A}\overline{v}\partial_{t_3}v\sin\theta - i\tilde{A}v\partial_{t_2}\overline{v}\cos\theta - i\tilde{A}v\partial_{t_3}\overline{v}\sin\theta\\
&+ \tilde{A}^2|v|^2 + |\partial_s v|^2 + \dot{\theta}\partial_s v\partial_\alpha\overline{v} + \dot{\theta}\partial_s\overline{v}\partial_\alpha v + \dot{\theta}^2\,|\partial_\alpha v|^2\Big)\,ds\,dt - E\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)}\\
&= \int_{\mathbb{R}\times\omega}\left(\left|i\partial_{t_2}v + \tilde{A}v\cos\theta\right|^2 + \left|i\partial_{t_3}v + \tilde{A}v\sin\theta\right|^2\right)ds\,dt\\
&+ \int_{\mathbb{R}\times\omega}\left(|\partial_s v|^2 + \dot{\theta}\partial_s v\partial_\alpha\overline{v} + \dot{\theta}\partial_s\overline{v}\partial_\alpha v + \dot{\theta}^2\,|\partial_\alpha v|^2\right)ds\,dt - E\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)}\,. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

利用 h_{β_0} 的基态特征函数 f 在 ω 中严格为正这一事实——参见 [10] ——我们可以将任意 $v\in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\omega)$ 分解为

$$
v(s,t) = f(t)g(s,t)\,. \qquad (3.10)
$$

将其代入（3.9）

$$
\begin{aligned}
&Q_{\beta,\mathcal{A}}[u] - E\|u\|^2\\
&= \int_{\mathbb{R}\times\omega}\left(|ig\partial_{t_2}f + if\partial_{t_2}g + \tilde{A}fg\cos\theta|^2\right)ds\,dt + \int_{\mathbb{R}\times\omega}\left(|ig\partial_{t_3}f + if\partial_{t_3}g + \tilde{A}fg\sin\theta|^2\right)ds\,dt\\
&+ \int_{\mathbb{R}\times\omega}\left(f^2|\partial_s g|^2 + \dot{\theta}f\partial_s g(f\partial_\alpha\overline{g} + \overline{g}\partial_\alpha f)\right)ds\,dt + \int_{\mathbb{R}\times\omega}\dot{\theta}f\partial_s\overline{g}(f\partial_\alpha g + g\partial_\alpha f)\Big)\,ds\,dt\\
&+ \int_{\mathbb{R}\times\omega}\dot{\theta}^2|f\partial_\alpha g + g\partial_\alpha f|^2\,ds\,dt - E\int_{\mathbb{R}\times\omega}f^2|g|^2\,ds\,dt. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

我们将估计（3.11）右端的前五个积分。我们先从第一和第二个积分之和开始，如下所示

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}\times\omega}\left(|ig\partial_{t_2}f + if\partial_{t_2}g + \tilde{A}fg\cos\theta|^2\right)ds\,dt + \int_{\mathbb{R}\times\omega}\left(|ig\partial_{t_3}f + if\partial_{t_3}g + \tilde{A}fg\sin\theta|^2\right)ds\,dt\\
&= \int_{\mathbb{R}\times\omega}\left(ig\partial_{t_2}f + if\partial_{t_2}g + \tilde{A}fg\cos\theta\right)\left(-i\overline{g}\partial_{t_2}f - if\partial_{t_2}\overline{g} + \tilde{A}f\overline{g}\cos\theta\right)\\
&+ \int_{\mathbb{R}\times\omega}\left(ig\partial_{t_3}f + if\partial_{t_3}g + \tilde{A}fg\sin\theta\right)\left(-i\overline{g}\partial_{t_3}f - if\partial_{t_3}\overline{g} + \tilde{A}f\overline{g}\sin\theta\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}\times\omega}\Big((\partial_{t_2}f)^2|g|^2 + fg\partial_{t_2}f\partial_{t_2}\overline{g} + f\overline{g}\partial_{t_2}g\partial_{t_2}f + |\partial_{t_2}g|^2f^2 + i\tilde{A}f^2\overline{g}\partial_{t_2}g\cos\theta\\
&- i\tilde{A}f^2g\partial_{t_2}\overline{g}\cos\theta + \tilde{A}^2f^2|g|^2\cos^2\theta + |g|^2(\partial_{t_3}f)^2 + fg\partial_{t_3}\overline{g}\partial_{t_3}f + f\overline{g}\partial_{t_3}g\partial_{t_3}f\\
&+ f^2|\partial_{t_3}g|^2 + i\tilde{A}f^2\overline{g}\partial_{t_3}g\sin\theta - i\tilde{A}f^2g\partial_{t_3}\overline{g}\sin\theta + \tilde{A}^2f^2|g|^2\sin^2\theta\Big)\,ds\,dt\,. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

利用分部积分，容易验证

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}\times\omega}(fg\partial_{t_2}\overline{g}\partial_{t_2}f + f\overline{g}\partial_{t_2}g\partial_{t_2}f)\;ds\,dt = -\int_{\mathbb{R}\times\omega}|g|^2(f\partial_{t_2}^2f + (\partial_{t_2}f)^2)\,ds\,dt\\
&\int_{\mathbb{R}\times\omega}(fg\partial_{t_3}\overline{g}\partial_{t_3}f + f\overline{g}\partial_{t_3}g\partial_{t_3}f)\;ds\,dt = -\int_{\mathbb{R}\times\omega}|g|^2(f\partial_{t_3}^2f + (\partial_{t_3}f)^2)\,ds\,dt\,.
\end{aligned}
$$

将上述表达式代入（3.12）的右端，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}\times\omega}\Big(|ig\partial_{t_2}f+if\partial_{t_2}g+\tilde{A}fg\cos\theta|^2\Big)\,ds\,dt+\int_{\mathbb{R}\times\omega}\Big(|ig\partial_{t_3}f+if\partial_{t_3}g+\tilde{A}fg\sin\theta|^2\Big)\,ds\,dt\\
=\;&-\int_{\mathbb{R}\times\omega}|g|^2f(\partial_{t_2}^2f+\partial_{t_3}^2f)+f^2|\partial_{t_2}g|^2+i\tilde{A}f^2\overline{g}\partial_{t_2}g\cos\theta-i\tilde{A}\partial_{t_2}\overline{g}gf^2\cos\theta\\
+\;&\tilde{A}^2f^2|g|^2\cos^2\theta+|\partial_{t_3}g|^2f^2+i\tilde{A}\overline{g}\partial_{t_2}gf^2\sin\theta-i\tilde{A}f^2\partial_{t_3}\overline{g}g\sin\theta+\tilde{A}^2f^2|g|^2\sin^2\theta\Big)\,ds\,dt\\
=\;&-\int_{\mathbb{R}\times\omega}|g|^2f(\partial_{t_2}^2f+\partial_{t_3}^2f)\,ds\,dt \qquad (3.13)\\
+\;&\int_{\mathbb{R}\times\omega}f^2\left(|i\partial_{t_2}g+\tilde{A}g\cos\theta|^2+|i\partial_{t_3}g+\tilde{A}g\sin\theta|^2\right)\,ds\,dt\,.
\end{aligned}
$$

接下来，我们将研究第三个和第四个积分。由于

$$
\int_{\mathbb{R}\times\omega}(f\overline{g}\partial_sg\partial_\alpha f+fg\partial_s\overline{g}\partial_\alpha f)\;ds\,dt=0\,,
$$

$$
\int_{\mathbb{R}\times\omega}(f\overline{g}\partial_\alpha g\partial_\alpha f+fg\partial_\alpha f\partial_\alpha\overline{g})\;ds\,dt=-\int_{\mathbb{R}\times\omega}|g|^2\left(f\partial_\alpha^2f+(\partial_\alpha f)^2\right)\;ds\,dt\,,
$$

那么利用 (2.2) 容易验证

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}\times\omega}\Big(f^2|\partial_sg|^2+\dot{\theta}f\partial_sg(f\partial_\alpha\overline{g}+\overline{g}\partial_\alpha f)\Big)\,ds\,dt+\int_{\mathbb{R}\times\omega}\dot{\theta}f\partial_s\overline{g}(f\partial_\alpha g+g\partial_\alpha f)\Big)\,ds\,dt\\
+\;&\int_{\mathbb{R}\times\omega}\dot{\theta}^2|f\partial_\alpha g+g\partial_\alpha f|^2\,ds\,dt\\
=\;&\int_{\mathbb{R}\times\omega}\Big(f^2|\partial_sg|^2+(\beta-\mu)f\partial_sg(f\partial_\alpha\overline{g}+\overline{g}\partial_\alpha f)\Big)\,ds\,dt+\int_{\mathbb{R}\times\omega}(\beta_0-\mu)f\partial_s\overline{g}(f\partial_\alpha g+g\partial_\alpha f)\Big)\,ds\,dt\\
+\;&\int_{\mathbb{R}\times\omega}(\beta_0-\mu)^2(f^2|\partial_\alpha g|^2+f\overline{g}\partial_\alpha g\partial_\alpha f+fg\partial_\alpha\overline{g}\partial_\alpha f+|g|^2(\partial_\alpha f)^2)\,ds\,dt\\
=\;&\int_{\mathbb{R}\times\omega}f^2|\partial_sg+\beta_0\partial_\alpha g|^2\,ds\,dt-\beta_0^2\int_{\mathbb{R}\times\omega}f|g|^2\partial_\alpha^2f-I_\mu\,, \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_\mu:=\int_{\mathbb{R}\times\omega}\Big(&\mu\,f^2\partial_sg\partial_\alpha\overline{g}+\mu\,f\overline{g}\partial_sg\partial_\alpha f+\mu f^2\partial_s\overline{g}\partial_\alpha g+\mu\,fg\partial_s\overline{g}\partial_\alpha f\\
&+(2\beta_0\mu-\mu^2)(f^2|\partial_\alpha g|^2+f\overline{g}\partial_\alpha g\partial_\alpha f+fg\partial_\alpha f\partial_\alpha\overline{g}+|g|^2(\partial_\alpha f)^2)\Big)\,ds\,dt
\end{aligned}
$$

结合 (3.13) 和 (3.14)，并利用 f 是算子 h_{β_0} 对应于特征值 E 的基态特征函数这一事实，表达式 (3.11) 可得

$$
\begin{aligned}
& Q_{\beta,\mathcal{A}}[u] - E\|u\|^2 \\
= & -\int_{\mathbb{R}\times\omega} |g|^2 f(\partial_{t_2}^2 f + \partial_{t_3}^2 f)\, ds\, dt + \int_{\mathbb{R}\times\omega} f^2 \left(|i\partial_{t_2} g + \tilde{A} g \cos\theta|^2 + |i\partial_{t_3} g + \tilde{A} g \sin\theta|^2 \right) ds\, dt \\
+ & \int_{\mathbb{R}\times\omega} f^2 |\partial_s g + \beta_0 \partial_\alpha g|^2\, ds\, dt - \beta_0^2 \int_{\mathbb{R}\times\omega} f|g|^2 \partial_\alpha^2 f - E\int_{\mathbb{R}\times\omega} f^2 |g|^2\, ds\, dt - I_\mu \\
= & \int_{\mathbb{R}\times\omega} f^2 \left(|i\partial_{t_2} g + \tilde{A} g \cos\theta|^2 + |i\partial_{t_3} g + \tilde{A} g \sin\theta|^2 \right) ds\, dt \\
+ & \int_{\mathbb{R}\times\omega} f^2 |\partial_s g + \beta_0 \partial_\alpha g|^2\, ds\, dt - I_\mu\,. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

我们来估计它。首先，从 I_μ 开始。利用柯西不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
I_\mu \le\; & 2\left(\int_{\mathbb{R}\times\omega} \mu f^2 |\partial_\alpha g|^2\, ds\, dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}\times\omega} \mu f^2 |\partial_s g|^2\, ds\, dt \right)^{1/2} \\
& + 2\beta_0 \int_{\mathbb{R}\times\omega} \mu f^2 |\partial_\alpha g|^2\, ds\, dt + \int_{\mathbb{R}\times\omega} \mu \left(f\overline{g}\partial_s g \partial_\alpha f + f g \partial_s \overline{g} \partial_\alpha f \right) ds\, dt \\
& + \int_{\mathbb{R}\times\omega} (2\beta_0\mu - \mu^2) \left(f\overline{g}\partial_\alpha g \partial_\alpha f + f g \partial_\alpha \overline{g} \partial_\alpha f + |g|^2 (\partial_\alpha f)^2 \right) ds\, dt \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

利用分部积分，并注意到函数 f 是算子h_{β_0} 的基态特征函数，我们得到

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}\times\omega} \mu \left(f\overline{g}\partial_s g \partial_\alpha f + f g \partial_s \overline{g} \partial_\alpha f \right) ds\, dt = -\int_{\mathbb{R}\times\omega} \dot{\mu} f \partial_\alpha f |g|^2\, ds\, dt \\
& \quad = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}\times\omega} \dot{\mu} (\overline{g}\partial_\alpha g + g \partial_\alpha \overline{g}) f^2\, ds\, dt \le \int_{\mathbb{R}\times\omega} |\dot{\mu}| f^2 |g| |\partial_\alpha g|\, ds\, dt \\
& \quad \le \left(\int_{\mathbb{R}\times\omega} |\dot{\mu}| f^2 |\partial_\alpha g|^2\, ds\, dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}\times\omega} |\dot{\mu}| f^2 |g|^2\, ds\, dt \right)^{1/2} \\
& \quad \le \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}\times\omega} |\dot{\mu}| f^2 |\partial_\alpha g|^2\, ds\, dt + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}\times\omega} |\dot{\mu}| f^2 |g|^2\, ds\, dt\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}\times\omega} (2\beta_0\mu - \mu^2) \left(f\overline{g}\partial_\alpha g \partial_\alpha f + f g \partial_\alpha \overline{g} \partial_\alpha f + |g|^2 (\partial_\alpha f)^2 \right) ds\, dt \\
= & -\int_{\mathbb{R}\times\omega} (2\beta_0\mu - \mu^2) |g|^2 f \partial_\alpha^2 f\, ds\, dt \\
= & \frac{1}{\beta_0^2} \int_{\mathbb{R}\times\omega} (2\beta_0\mu - \mu^2) \left(Ef + \partial_{t_2}^2 f + \partial_{t_3}^2 f \right) |g|^2 f\, ds\, dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{E}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f^2|g|^2\,ds\,dt+\frac{1}{\beta_0^2}\sum_{j=2}^{3}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)\partial_{t_j}^2 f|g|^2\,ds\,dt\\
&= \frac{E}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f^2|g|^2\,ds\,dt-\frac{1}{\beta_0^2}\sum_{j=2}^{3}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)(\partial_{t_j} f)^2|g|^2\,ds\,dt\\
&- \frac{1}{\beta_0^2}\sum_{j=2}^{3}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f\partial_{t_j} f\left(\overline{g}\partial_{t_j} g+g\partial_{t_j}\overline{g}\right)\,ds\,dt\\
&\le \frac{E}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f^2|g|^2\,ds\,dt-\frac{1}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)\left((\partial_{t_2} f)^2+(\partial_{t_3} f)^2\right)|g|^2\,ds\,dt\\
&+ \frac{2}{\beta_0^2}\sum_{j=2}^{3}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f|g|\left|\partial_{t_j} f\right|\left|\partial_{t_j} g\right|\,ds\,dt\\
&\le \frac{E}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f^2|g|^2\,ds\,dt-\frac{1}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)\left((\partial_{t_2} f)^2+(\partial_{t_3} f)^2\right)|g|^2\,ds\,dt\\
&+ \frac{2}{\beta_0^2}\sum_{j=2}^{3}\left(\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f^2|\partial_{t_j} g|^2\,ds\,dt\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)|g|^2(\partial_{t_j} f)^2\,ds\,dt\right)^{1/2}\\
&\le \frac{E}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f^2|g|^2\,ds\,dt-\frac{1}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)\left((\partial_{t_2} f)^2+(\partial_{t_3} f)^2\right)|g|^2\,ds\,dt\\
&+ \frac{1}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f^2\left(|\partial_{t_2} g|^2+|\partial_{t_3} g|^2\right)\,ds\,dt+\frac{1}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)|g|^2\left((\partial_{t_2} f)^2+(\partial_{t_3} f)^2\right)\,ds\,dt\\
&= \frac{E}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f^2|g|^2\,ds\,dt+\frac{2}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f^2\left(|\partial_{t_2} g|^2+|\partial_{t_3} g|^2\right)\,ds\,dt\,.
\end{aligned}
$$

将上述表达式代入（3.16）的右端，得到

$$
\begin{aligned}
I_\mu &\le 2\left(\int_{\mathbb{R}\times\omega}\mu f^2|\partial_\alpha g|^2\,ds\,dt\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}\times\omega}\mu f^2|\partial_s g|^2\,ds\,dt\right)^{1/2}\\
&+2\beta_0\int_{\mathbb{R}\times\omega}\mu f^2|\partial_\alpha g|^2\,ds\,dt+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}|\dot\mu|f^2|\partial_\alpha g|^2\,ds\,dt+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}|\dot\mu|f^2|g|^2\,ds\,dt\\
&+\frac{E}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f^2|g|^2\,ds\,dt+\frac{2}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f^2\left(|\partial_{t_2} g|^2+|\partial_{t_3} g|^2\right)\,ds\,dt\\
&\le c\int_{\mathbb{R}\times\omega}\mu f^2|\partial_s g|^2\,ds\,dt+\int_{\mathbb{R}\times\omega}\left(c^{-1}\mu+2\beta_0\mu+\frac{1}{2}|\dot\mu|\right)f^2|\partial_\alpha g|^2\,ds\,dt+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}|\dot\mu|f^2|g|^2\,ds\,dt\\
&+\frac{E}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f^2|g|^2\,ds\,dt+\frac{2}{\beta_0^2}\int_{\mathbb{R}\times\omega}(2\beta_0\mu-\mu^2)f^2\left(|\partial_{t_2} g|^2+|\partial_{t_3} g|^2\right)\,ds\,dt
\end{aligned}
$$

对于任意的 $c>0$ （我们稍后会再讨论这个数）。此外，考虑到以下显然的不等式

$$
\begin{aligned}
|\partial_\alpha g| &\le d\sqrt{|\partial_{t_2} g|^2+|\partial_{t_3} g|^2}\,,\\
|\partial_{t_2} g|^2+|\partial_{t_3} g|^2 &\le 2(|i\partial_{t_2} g+\tilde{A}g\cos\theta|^2+|i\partial_{t_3} g+Ag\sin\tilde{}\theta|^2)+2A^2|g|^2\tilde{},
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

其中 $d := \sup_{(t_2,t_3)\in\omega} \sqrt{t_2^2 + t_3^2}$，并且 $\operatorname{supp}\mu \subset [-s_0, s_0]$ 这一事实意味着上述界

$$
\begin{aligned}
& I_\mu \le c \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \mu f^2 |\partial_s g|^2 \, ds\, dt \\
+ \quad & 2d^2 \left(\frac{1}{c} + 2\beta_0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{\beta_0 d^2} \right) \max\left\{ \|\mu\|_\infty, \|\dot\mu\|_\infty \right\} \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} f^2 (|i\partial_{t_2} g + \tilde A g \cos\theta|^2 \\
+ \quad & |i\partial_{t_3} g + \tilde A g \sin\theta|^2) \, ds\, dt \\
+ \quad & \left(2d^2 \left(\frac{1}{c} + 2\beta_0 + \frac{1}{2} \right) \|\tilde A\|_\infty^2 \right. \\
+ \quad & \left. \frac{2E}{\beta_0} + \frac{8}{\beta_0} \|\tilde A\|_\infty^2 + \frac{1}{2} \right) \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \max\left\{ |\mu|, |\dot\mu| \right\} f^2 |g|^2 \, ds\, dt \,.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

现在让我们回到二次型表达式 (3.15)。如果

$$
2\beta_0 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} f^2 |\partial_s g| |\partial_\alpha g| \, ds\, dt \le \frac{1}{2} \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} f^2 |\partial_s g|^2 \, ds\, dt
$$

那么容易验证，对表达式 (3.15) 右端的前两个积分进行估计，可得

$$
\begin{aligned}
& Q_{\beta,\mathcal{A}}[u] - E\|u\|^2 \\
\ge \frac{1}{2} & \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} f^2 \left(|i\partial_{t_2} g + \tilde A g \cos\theta|^2 + |i\partial_{t_3} g + \tilde A g \sin\theta|^2 + |\partial_s g|^2 \right) ds\, dt - I_\mu \,.
\end{aligned}
$$

因此，由上述公式和 (3.18) 可得估计

$$
\begin{aligned}
& Q_{\beta,\mathcal{A}}[u] - E\|u\|^2 \ge \\
\gamma^1_{\beta_0} & \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} f^2 \left(|i\partial_{t_2} g + \tilde A g \cos\theta|^2 + |i\partial_{t_3} g + \tilde A g \sin\theta|^2 + |\partial_s g|^2 \right) ds\, dt \\
& - \gamma^2_{\beta_0} \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \max\left\{ |\mu|, |\dot\mu| \right\} f^2 |g|^2 \, ds\, dt,
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

其中

$$
\gamma^1_{\beta_0} = \max\left\{ \frac{1}{2} - 2d^2 \left(\frac{1}{c} + 2\beta_0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{\beta_0 d^2} \right) \max\left\{ \|\mu\|_\infty, \|\dot\mu\|_\infty \right\}, \frac{1}{2} - c\|\mu\|_\infty \right\} ,
$$

$$
\gamma^2_{\beta_0} = 2d^2 \left(\frac{1}{c} + 2\beta_0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{\beta_0 d^2} \right) \|\tilde A\|_\infty^2 + \frac{2E}{\beta_0} + \frac{1}{2} \,. \tag{3.20}
$$

在相反的情况下，也就是在假设

$$
2\beta_0 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} f^2 |\partial_s g| |\partial_\alpha g| \, ds\, dt > \frac{1}{2} \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} f^2 |\partial_s g|^2 \, ds\, dt \,,
$$

利用不等式（3.17），并对上述估计的左端应用柯西不等式，我们得到

$$\int_{(-s_0,s_0)\times\omega} f^2|\partial_s g|^2\,ds\,dt < 32\beta_0^2 d^2 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} f^2\left(|i\partial_{t_2}g+\tilde{A}g\cos\theta|^2+|i\partial_{t_3}g+\tilde{A}g\sin\theta|^2\right)\,ds\,dt$$
$$+32\beta_0^2 d^2\int_{(-s_0,s_0)\times\omega}\tilde{A}^2 f^2|g|^2\,ds\,dt\,.$$

结合这一估计和 (3.18)，由 (3.15) 可得

$$\begin{aligned} & Q_{\beta,\mathcal{A}}[u]-E\|u\|^2 \\ \geq\ & \tilde{\gamma}^1_{\beta_0}\int_{(-s_0,s_0)\times\omega} f^2\left(|i\partial_{t_2}g+\tilde{A}g\cos\theta|^2+|i\partial_{t_3}g+\tilde{A}g\sin\theta|^2\right)\,ds\,dt \\ -\ & \gamma^2_{\beta_0}\int_{(-s_0,s_0)\times\omega}\max\{|\mu|,|\dot{\mu}|\}\,f^2|g|^2\,ds\,dt \\ -\ & 32cd^2\beta_0^2\int_{(-s_0,s_0)\times\omega}\tilde{A}^2 f^2|g|^2\,ds\,dt\,, \end{aligned} \tag{3.21}$$

其中

$$\tilde{\gamma}^1_{\beta_0}=1-32cd^2\beta_0^2-2d^2\left(\frac{1}{c}+2\beta_0+\frac{1}{2}+\frac{4}{\beta_0 d^2}\right)\max\{\|\mu\|_\infty,\|\dot{\mu}\|_\infty\}\,.$$

结合不等式 (3.19) 和 (3.21)，可得

$$\begin{aligned} & Q_{\beta,\mathcal{A}}[u]-E\|u\|^2 \\ \geq\ & \overline{\gamma}^1_{\beta_0}\int_{(-s_0,s_0)\times\omega} f^2\left(|i\partial_{t_2}g+\tilde{A}g\cos\theta|^2+|i\partial_{t_3}g+\tilde{A}g\sin\theta|^2\right)\,ds\,dt \\ -\ & \gamma^2_{\beta_0}\int_{(-s_0,s_0)\times\omega}\max\{|\mu|,|\dot{\mu}|\}\,f^2|g|^2\,ds\,dt \\ -\ & 32cd^2\beta_0^2\int_{(-s_0,s_0)\times\omega}\tilde{A}^2 f^2|g|^2\,ds\,dt\,, \end{aligned} \tag{3.22}$$

其中

$$\overline{\gamma}^1_{\beta_0}=\min\{\gamma^1_{\beta_0},\tilde{\gamma}^1_{\beta_0}\}\,. \tag{3.23}$$

固定一个正常数 δ（稍后确定），并令 $\omega_\delta=\{(t_2,t_3)\in\omega\colon \mathrm{dist}\,((t_2,t_3),\,\omega)\geq\delta\}$.我们将考虑两种不同的情况:

(a)

$$\int_{[-s_0,s_0]\times\omega_\delta} f^2|g|^2\,ds\,dt\geq\frac{1}{2}\int_{[-s_0,s_0]\times\omega} f^2|g|^2\,ds\,dt\,,$$

(b)

$$\int_{[-s_0,s_0]\times\omega_\delta} f^2|g|^2\,ds\,dt<\frac{1}{2}\int_{[-s_0,s_0]\times\omega} f^2|g|^2\,ds\,dt\,.$$

设情况 (a) 成立。我们将利用磁场的影响。在继续之前，请读者参阅文献 [4] 中引理 1 的证明。作者证明了：对于一个有界二维区域上的磁性 Neumann 拉普拉斯算子，若磁场在某个球上的积分非零，则其基态特征值有一个严格为正的下界，且该下界与所提及球外的磁场取值无关。

由 (3.8) 可得

$$\partial_{t_2}\tilde{A} = \partial_x A\cos\theta - \partial_y A\sin\theta\,,$$
$$\partial_{t_3}\tilde{A} = \partial_x A\sin\theta + \partial_y A\cos\theta\,.$$

因此，对于任意固定的 $s\in(-s_0,s_0)$，定义在 ω 上的二维矢势 $(A\cos\theta, A\sin\theta)$ 所对应的磁场与定义在 $\{(t_2\cos\theta(s)+t_3\sin\theta(s)\ t_3\cos\theta(s)-t_2\sin\theta(s))$ 上的 $-\partial_y A : (t_2,t_2)\in\omega\}$ 相同。此外，由于定理 (2.4) 的假设，该量与 $s\in(-s_0,s_0)$ 无关，且在球$\mathcal{B}(0,\tau)$ 上非平凡。因此，鉴于上述讨论，存在一个常数 $\tau_A>0$，使得定义在 $(-s_0,s_0)\times\omega$ 上、矢势为 $(A\cos\theta, A\sin\theta)$ 的 Neumann 磁性拉普拉斯算子的基态特征值大于 τ_A。结合这一事实与假设 (a)（这意味着 $\int_{(-s_0,\ s_0)\times\omega} f^2|g|^2\,ds\,dt \le 2\int_{(-s_0,\ s_0)\times\omega_\delta} f^2|g|^2\,ds\,dt$) 不等式 (3.22) 推出

$$\begin{aligned}
&Q_{\beta,\mathcal{A}}[u] - E\|u\|^2\\
&\ge \overline{\gamma}^1_{\beta_0}\tau_A \inf_{\omega_\delta}(f^2)\int_{(-s_0,s_0)\times\omega_\delta}|g|^2\,ds\,dt - \gamma^2_{\beta_0}\max\{\|\mu\|_\infty,\|\dot{\mu}\|_\infty\}\int_{(-s_0,s_0)\times\omega} f^2|g|^2\,ds\,dt\\
&\qquad -32cd^2\beta_0^2\int_{(-s_0,s_0)\times\omega}\tilde{A}^2 f^2|g|^2\,ds\,dt\\
&\ge \left(\frac{\overline{\gamma}^1_{\beta_0}\tau_A\inf_{\omega_\delta}(f^2)}{\|f\|^2_\infty} - 2\gamma^2_{\beta_0}\max\{\|\mu\|_\infty,\|\dot{\mu}\|_\infty\}\right)\int_{(-s_0,s_0)\times\omega_\delta} f^2|g|^2\,ds\,dt\\
&\qquad -64cd^2\beta_0^2\|\tilde{A}\|^2_\infty\int_{(-s_0,s_0)\times\omega_\delta} f^2|g|^2\,ds\,dt\,.
\end{aligned}$$

利用常数 $\gamma^2_{\beta_0}$ 和 $\gamma^1_{\beta_0}$ 的表达式 (3.20) 和 (3.23)，以及函数 f [10] 严格为正这一事实，很容易验证：通过将数值 c 和函数 μ 取得足够小，可以保证以下关系成立

$$\frac{\overline{\gamma}^1_{\beta_0}\tau_A\inf_{\omega_\delta}(f^2)}{\|f\|^2_\infty} - 2\gamma^2_{\beta_0}\max\{\|\mu\|_\infty,\|\dot{\mu}\|_\infty\} - 64cd^2\beta_0^2\|\tilde{A}\|^2_\infty > 0$$

这意味着

$$Q_{\beta,\mathcal{A}}[u] - E\|u\|^2 \ge 0\,. \tag{3.24}$$

现在我们转向情形（b）。根据不等式 (3.22) 和简单的不等式 $|a+b|^2 \geq \frac{|a|^2}{2} - |b|^2$，我们有

$$\begin{aligned} & Q_{\beta,\mathcal{A}}[u] - E\|u\|^2 \\ \geq\ & \frac{\overline{\gamma}^1_{\beta_0}}{2} \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} f^2 \left(|\partial_{t_2} g|^2 + |\partial_{t_3} g|^2\right) ds\, dt - \overline{\gamma}^1_{\beta_0} \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \tilde{A}^2 f^2 |g|^2 \, ds\, dt \\ -\ & \gamma^2_{\beta_0} \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \max\left\{|\mu|, |\dot{\mu}|\right\} f^2 |g|^2 \, ds\, dt \qquad (3.25) \\ -\ & 32cd^2\beta_0^2 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \tilde{A}^2 f^2 |g|^2 \, ds\, dt\,. \end{aligned}$$

回到记号（3.10）：$v(s,\ t) = f(t)g(s,\ t)$。通过分部积分，容易验证

$$\begin{aligned} & \int_{[-s_0,s_0]\times\omega} \left(|\partial_{t_2} v|^2 + |\partial_{t_3} v)|^2\right) ds\, dt \\ =\ & \int_{[-s_0,s_0]\times\omega} \left(|f\partial_{t_2} g + \partial_{t_2} f g|^2\right) ds\, dt + \int_{[-s_0,s_0]\times\omega} \left(|f\partial_{t_3} g + \partial_{t_3} f g|^2\right) ds\, dt \\ =\ & \int_{[-s_0,s_0]\times\omega} f^2 \left(|\partial_{t_2} g|^2 + |\partial_{t_3} g|^2\right) ds\, dt - \int_{[-s_0,s_0]\times\omega} f\Delta f |g|^2 \, ds\, dt \qquad (3.26) \end{aligned}$$

为继续证明，我们将用到以下事实：

(i) 根据标准椭圆正则性理论（见 [9, 第 6.3] 节），我们有$f \in H^4(\omega)$。因此，$\nabla f \in H^3(\omega)$ 且 $\Delta f \in H^2(\omega)$。利用索博列夫嵌入 [1, 定理 5.4] $H^2(\omega) \hookrightarrow C^0(\omega)$。于是，我们有$\|\Delta f\|_{L^\infty(\omega)} < \infty$。

(ii) 对于任意区域 ω，若 $\partial\omega$ 属于 C^2 类，则存在 [8, 引理 4.6.1]中的一个正数 α_0，使得 $f \geq \alpha_0\tau$，其中 $\tau(t) := \mathrm{dist}(t,\ \partial\omega)$。(iii) 对于任意强正则区域 ω，在当前光滑性假设下尤其满足这一条件，哈代不等式 $-\Delta^\omega_D \geq c_0/\tau^2$，$c_0 > 0$成立，见 [8, 第 1.5] 节。

结合 (3.25) 和 (3.26)，得到

$$\begin{aligned} & Q_{\beta,\ \mathcal{A}}[u] - E\|u\|^2 \geq \\ & \frac{\overline{\gamma}^1_{\beta_0}}{2} \left(\int_{[-s_0,s_0]\times\omega} \left(|\partial_{t_2} v|^2 + |\partial_{t_3} v|^2\right) ds\, dt + \int_{[-s_0,s_0]\times\omega} f\Delta f |g|^2 \, ds\, dt \right) - \overline{\gamma}^1_{\beta_0} \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \tilde{A}^2 |v|^2 \, ds\, dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad \gamma_{\beta_0}^2 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \max\left\{|\mu|,|\dot{\mu}|\right\}|v|^2\,ds\,dt - 32cd^2\beta_0^2 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \tilde{A}^2|v|^2\,ds\,dt \\
&\geq \quad \frac{\overline{\gamma}_{\beta_0}^1}{2}\left(\int_{[-s_0,s_0]\times\omega}\left(|\partial_{t_2}v|^2+|\partial_{t_3}v|^2\right)\,ds\,dt - \|\Delta f\|_\infty \int_{[-s_0,s_0]\times\omega}\frac{|v|^2}{f}\,ds\,dt\right) \\
&- \quad \overline{\gamma}_{\beta_0}^1 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \tilde{A}^2|v|^2\,ds\,dt - \gamma_{\beta_0}^2 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \max\left\{|\mu|,|\dot{\mu}|\right\}|v|^2\,ds\,dt \\
&- \quad 32cd^2\beta_0^2 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \tilde{A}^2|v|^2\,ds\,dt \\
&\geq \quad \frac{\overline{\gamma}_{\beta_0}^1}{2}\left(\int_{[-s_0,s_0]\times\omega}\left(|\partial_{t_2}v|^2+|\partial_{t_3}v|^2\right)\,ds\,dt - \frac{\|\Delta f\|_\infty}{\alpha_0}\int_{[-s_0,s_0]\times\omega}\frac{|v|^2}{\tau(t)}\,ds\,dt\right) \\
&- \quad \overline{\gamma}_{\beta_0}^1 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \tilde{A}^2|v|^2\,ds\,dt - \gamma_{\beta_0}^2 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \max\left\{|\mu|,|\dot{\mu}|\right\}|v|^2\,ds\,dt \\
&- \quad 32cd^2\beta_0^2 \int_{\mathbb{R}\times\omega} \tilde{A}^2|v|^2\,ds\,dt \\
&\geq \quad \frac{\overline{\gamma}_{\beta_0}^1}{2}\left(\int_{[-s_0,s_0]\times\omega}\left(|\partial_{t_2}v|^2+|\partial_{t_3}v|^2\right)\,ds\,dt - \frac{\|\Delta f\|_\infty}{2\alpha_0}\int_{[-s_0,s_0]\times\omega}\left(\frac{\varepsilon|v|^2}{\tau(t)^2}+\frac{1}{\varepsilon}|v|^2\right)\,ds\,dt\right) \\
&- \quad \overline{\gamma}_{\beta_0}^1 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \tilde{A}^2|v|^2\,ds\,dt - \gamma_{\beta_0}^2 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \max\left\{|\mu|,|\dot{\mu}|\right\}|v|^2\,ds\,dt \\
&- \quad 32cd^2\beta_0^2 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \tilde{A}^2|v|^2\,ds\,dt \\
&\geq \quad \frac{\overline{\gamma}_{\beta_0}^1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon\|\Delta f\|_\infty}{2c_0\alpha_0}\right)\int_{[-s_0,s_0]\times\omega}\left(|\partial_{t_2}v|^2+|\partial_{t_3}v|^2\right)\,ds\,dt - \frac{\overline{\gamma}_{\beta_0}^1\|\Delta f\|_\infty}{4\varepsilon\alpha_0}\int_{[-s_0,s_0]\times\omega}|v|^2\,ds\,dt \\
&- \quad \overline{\gamma}_{\beta_0}^1 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \tilde{A}^2|v|^2\,ds\,dt - \gamma_{\beta_0}^2 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \max\left\{|\mu|,|\dot{\mu}|\right\}|v|^2\,ds\,dt \qquad (3.27) \\
&- \quad 32cd^2\beta_0^2 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \tilde{A}^2|v|^2\,ds\,dt\,,
\end{aligned}
$$

其中 ε 是一个满足 $1-\frac{\varepsilon\|\Delta f\|_\infty}{2c_0\alpha_0}>0$的正数。———

为继续证明，我们需要以下引理（证明将在最后一节给出）。

引理 3.1. 假设假设 ***(b)*** 成立，则存在一个常数$C>0$ 使得

$$
\int_{[-s_0,s_0]\times\omega}\left(|\partial_{t_2}v|^2+|\partial_{t_3}v|^2\right)\,ds\,dt \geq \frac{C}{\delta^2}\int_{[-s_0,s_0]\times\omega}|v|^2\,ds\,dt\,.
$$

利用上述引理以及磁矢势和扰动 μ 的支集的紧性，我们可以将不等式（3.27）的右端估计如下

$$
\begin{aligned}
&Q_{\beta,\mathcal{A}}[u] - E\|u\|^2 \\
&\geq \frac{\overline{\gamma}^1_{\beta_0} C}{2\delta^2}\left(1 - \frac{\varepsilon\|\Delta f\|_\infty}{2c_0\alpha_0}\right)\int_{[-s_0,s_0]\times\omega} |v|^2\, ds\, dt \\
&\quad - \frac{\overline{\gamma}^1_{\beta_0}\|\Delta f\|_\infty}{4\varepsilon\alpha_0}\int_{[-s_0,s_0]\times\omega} |v|^2\, ds\, dt - \overline{\gamma}^1_{\beta_0}\int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \tilde{A}^2|v|^2\, ds\, dt \\
&\quad - \gamma^2_{\beta_0}\int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \max\{|\mu|, |\dot{\mu}|\}\, |v|^2\, ds\, dt - 32cd^2\beta_0^2\int_{(-s_0,s_0)\times\omega} \tilde{A}^2|v|^2\, ds\, dt \\
&\geq \left(\frac{\overline{\gamma}^1_{\beta_0} C}{2\delta^2}\left(1 - \frac{\varepsilon\|\Delta f\|_\infty}{2c_0\alpha_0}\right) - \frac{\overline{\gamma}^1_{\beta_0}\|\Delta f\|_{L^\infty(\omega)}}{4\varepsilon\alpha_0} - \overline{\gamma}^1_{\beta_0}\|\tilde{A}\|^2_\infty\right. \\
&\quad \left. - \gamma^2_{\beta_0}\max\{\|\mu\|_\infty, \|\dot{\mu}\|_\infty\} - 32cd^2\beta_0^2\|\tilde{A}\|^2_\infty\right)\int_{(-s_0,s_0)\times\omega} |v|^2\, ds\, dt\,. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

我们选择 δ 使其满足

$$
\begin{aligned}
&\frac{\overline{\gamma}^1_{\beta_0} C}{2\delta^2}\left(1 - \frac{\varepsilon\|\Delta f\|_\infty}{2c_0\alpha_0}\right) - \frac{\overline{\gamma}^1_{\beta_0}\|\Delta f\|_{L^\infty(\omega)}}{4\varepsilon\alpha_0} - \overline{\gamma}^1_{\beta_0}\|\tilde{A}\|^2_\infty \\
&\quad - \gamma^2_{\beta_0}\max\{\|\mu\|_\infty, \|\dot{\mu}\|_\infty\} - 32cd^2\beta_0^2\|\tilde{A}\|^2_\infty \geq 0\,,
\end{aligned}
$$

这保证了估计 (3.28) 右端的非负性。结合 (3.24)，定理的证明至此完成。

3.2 定理 2.3 的证明

本节将沿用 [5] 中提出的证明方法。磁性拉普拉斯算子 $H_{\Omega_\beta}(\mathcal{A})$ 可写为

$$
H_{\Omega_\beta}(\mathcal{A}) = H_{\Omega_\beta}(0) + W,
$$

其中

$$
W := 2iA\partial_{t_2} + i(\partial_{t_2}A) + A^2
$$

是定义在 $H_{\Omega_\beta}(\mathcal{A})$ 的区域上，也就是定义在 $\mathcal{H}^1_0(\Omega_\beta)$ 上的算子。显然，算子 $W(H_{\Omega_\beta}(0))^{-1/2}$ 在 $L^2(\Omega_\beta)$ 中有界。由于 Sobolev 嵌入定理以及 A 是紧支撑的这一事实，很容易看出算子 $W(H_{\Omega_\beta}(0))^{-1}$ 在 $L^2(\Omega_\beta)$ 中是紧算子。因此，算子 $(H_{\Omega_\beta}(0))^{-1/2}W(H_{\Omega_\beta}(0))^{-1}$ 是紧算子。由于算子 $(H_{\Omega_\beta}(\mathcal{A}))^{-1/2}(H_{\Omega_\beta}(0))^{1/2}$ 有界，因此 $(H_{\Omega_\beta}(\mathcal{A}))^{-1}(H_{\Omega_\beta}(0))^{1/2}$ 也有界，故预解式之差 $(H_{\Omega_\beta}(\mathcal{A}))^{-1} - (H_{\Omega_\beta}(0))^{-1}$ 是紧算子。由 [6, 定理 4，第 9], 章第 1 节，我们得到

$$
\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\Omega_\beta}(\mathcal{A})) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\Omega_\beta}(0)) = [E, \infty).
$$

4 引理 3.1 的证明

由于
$$\int_{[-s_0,s_0]\times\omega} \left(|\partial_{t_2} v|^2 + |\partial_{t_3} v|^2\right)\, ds\, dt \geq \int_{[-s_0,s_0]\times(\omega\setminus\omega_\delta)} \left(|\partial_{t_2} v|^2 + |\partial_{t_3} v|^2\right)\, ds\, dt$$
只需估计 $\int_{[-s_0,s_0]\times(\omega\setminus\omega_\delta)} \left(|\partial_{t_2} v|^2 + |\partial_{t_3} v|^2\right) ds\, dt$。

容易看出，集合 $\omega \setminus \omega_\delta$ 可以表示如下
$$\omega \setminus \omega_\delta = \left(\cup_{i=1}^N \omega_\delta^i\right) \cup \left(\cup_{j=1}^M \omega_\delta^j\right), \tag{4.29}$$
其中 N, M 是一些自然数，并且
$$\begin{aligned} \omega_\delta^i &= \{t_2 \in (x_1^i, x_2^i),\, t_3 \in (y_1^i(t_2), y_2^i(t_2))\}, \\ \omega_\delta^j &= \{t_3 \in (y_1^j, y_2^j),\, t_2 \in (x_1^j(t_3), x_2^j(t_3))\}, \end{aligned} \tag{4.30}$$
其中存在一些 $x_1^i < x_2^i,\ y_1^j < y_2^j$ 以及光滑函数 $x_1^j(t_3) < x_2^j(t_3),\ y_1^i(t_2) < y_2^i(t_2)$，使得 $\|x_2^j(t_3) - x_1^j(t_3)\|_{L^\infty(y_1^j, y_2^j)} \leq C'\delta$，且 $\|y_2^i(t_2) - y_1^i(t_2)\|_{L^\infty(x_1^i, x_2^i)} \leq C'\delta$，其中 $C' > 0$ 是一个依赖于 ω 的常数。

我们首先从下方估计 $\int_{(-s_0,s_0)\times\omega_\delta^i} |v|^2\, ds\, dt$。由于对于任意 $t_2 \in (x_1^i, x_2^i)$，都有 $v(s, t_2, y_2^i(t_2)) = 0,\ s \in (-s_0, s_0)$，因此对每个 $t_3 \in (y_1^i(t_2),\ y_2^i(t_2))$，均有

$$|v(s,t_2,t_3)| = \left|\int_{t_3}^{y_2^i(t_2)} \partial_z v(s,t_2,z)\, dz\right| \leq (y_2^i(t_2) - t_3)^{1/2} \left(\int_{t_3}^{y_2^i(t_2)} |\partial_z v(s,t_2,z)|\, dz\right)^{1/2}$$
$$\leq (C'\delta)^{1/2} \left(\int_{t_3}^{y_2^i(t_2)} |\partial_z v(s,t_2,z)|^2\, dz\right)^{1/2} \leq (C'\delta)^{1/2} \left(\int_{y_1^i(t_2)}^{y_2^i(t_2)} |\partial_z v(s,t_2,z)|^2\, dz\right)^{1/2}.$$

因此
$$\begin{aligned} \int_{(-s_0,s_0)\times\omega_\delta^1} |v|^2\, ds\, dt &\leq C'\delta \int_{(-s_0,s_0)\times\omega_\delta^1} \int_{y_1^i(t_2)}^{y_2^i(t_2)} |\partial_z v(s,t_2,z)|^2\, dz\, ds\, dt \\ &\leq C'\delta \int_{(-s_0,s_0)\times\omega_\delta^1} (y_2^i(t_2) - y_1^i(t_2)) |\partial_z v(s,t_2,z)|^2\, dz\, ds\, dt \\ &\leq C'^2\delta^2 \int_{(-s_0,s_0)\times\omega_\delta^1} |\partial_z v(s,t_2,z)|^2\, dz\, ds\, dt\,. \end{aligned}$$

其余涉及 ω_δ^j 的情形也将以同样的方式处理。由此可得引理 3.1，其中常数为 $C = \frac{1}{C'^2}$。 —

贡献

各位作者共同讨论并撰写了该手稿，在内容、呈现方式以及手稿审阅方面贡献相同。

数据可用性

本研究未生成或分析任何数据集。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] R. A. Adams, 《索伯列夫空间》, 学术出版社, 纽约, 1975年。[2] J. Bory-Reyes, D. Barseghyan, B. Schneider, 《弯曲二维带中势支集于其中的磁薛定谔算子》, 地中海数学杂志 21(3)（2024）, 1–15。[3] D. Barseghyan, P. Exner, 《磁场对局部变形的泄漏线离散谱的影响》。数学物理报告 88（2021）, 47–57。[5] Ph. Briet, G. Raikov, H. Kovaˇr´ık, E. Soccorsi, 《扭曲波导中的特征值渐近》, 偏微分方程通讯 34（2009）, 818–836。[6] M. S. Birman, M.Z. Solomjak, 《希尔伯特空间自伴算子的谱理论》, 雷德尔出版公司, 多德雷赫特, 1987年。[7] I. J. Clark, A. J. Bracken, 《具有挠率的管状量子波导中的束缚态》, 物理学杂志A: 数学与一般 29（1996）, 4527–4535。[8] E. B. Davies, 《热核与谱理论》, 剑桥大学出版社, 1989年。[9] L. C. Evans, 《偏微分方程》, 《数学研究生教程》第19卷, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 1998年[10] P. Exner, H. Kovaˇr´ık, 《受扰周期性扭曲管中薛定谔算子的谱》, 数学物理通讯 73（2005）, 183–192。[11] T. Ekholm, H. Kovaˇr´ık, D. Krejˇciˇr´ık, 《扭曲波导中的哈代不等式》, 理性力学与分析档案 188（2008）, 245–264。[12] T. Kato, 《线性算子扰动理论》, 《数学经典丛书》, 施普林格出版社, 柏林, 1995年。[13] D. Krejˇciˇr´ık, 《量子波导中的扭转与弯曲》, 《图上的分析及其应用》（剑桥, 2007）, 纯数学专题讨论会论文集, 第77卷, 第617–636页, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2008年。