欧拉示性数为 $-p^4$ 的正则地图分类，其中$p \geq 5$为素数

Xiaogang Li* 和**Yao Tian**

arXiv:2601.10969v1 [math.GR] 16 Jan 2026

摘要

地图是闭曲面的胞腔分解。在按照承载曲面对所有正则地图进行分类的框架下，找出所有不承载任何正则地图的闭曲面仍是一个未解决的问题。若曲面的欧拉示性数为 $-\mathrm{p}$ $-\mathrm{p}^2$、$-\mathrm{p}^3$、$-2\mathrm{p}$ 和 $-3\mathrm{p}$，已有多位作者通过一系列论文完成了这些曲面上正则地图的分类；这些论文还表明，若相应的素数 p 满足某些条件，则具有这些欧拉示性数的曲面不承载任何正则地图。本文假设 $\mathrm{p} \geq 5$ 是素数且 $\mathrm{i} \geq 4$，证明欧拉示性数为 $-\mathrm{p}^i$的正则地图的 Sylow p-子群的阶不超过 p^{i-1}，除非 $\mathrm{p} \in \{5,7,13\}$；并证明只要 Sylow p-子群的阶至少为 $\sqrt{\mathrm{p}^i}$，这些正则地图就存在一个正规 p-子群，从而为采用归纳方法彻底刻画欧拉示性数为 $-\mathrm{p}^i$的正则地图奠定了坚实基础。在此基础上，我们根据其自同构群的约化表示，对素数 $\mathrm{p} \geq 5$ 时所有欧拉示性数为 $-\mathrm{p}^4$ 的正则地图进行分类。因此，欧拉示性数为 $-\mathrm{p}^4$ 的闭曲面不承载任何正则地图，当且仅当 $\mathrm{p} \notin \{2,3,5,7,13\}$。

1 引言

地图是闭曲面的胞腔分解。换言之，地图$\mathcal{M}$是图（或多重图）$\mathcal{G}$到闭曲面$\mathcal{S}$中的嵌入（无交叉），且$\mathcal{S} \setminus \mathcal{G}$的连通分支均为单连通。给定闭曲面$\mathcal{S}$ 上的地图$\mathcal{M}$，其底层图为$\mathcal{G}$，则$\mathcal{S} \setminus \mathcal{G}$ 的连通分支称为地图$\mathcal{M}$的面，而$\mathcal{G}$的顶点和边分别称为$\mathcal{M}$的顶点和边。地图$\mathcal{M}$的自同构是指底层图$\mathcal{G}\mathcal{G}$ 的自同构，且该自同构可扩展为曲面的自同胚。这些自同构构成$\mathcal{G}$的自同构群 Aut($\mathcal{G}$) 的子群 Aut($\mathcal{M}$)。众所周知，Aut($\mathcal{M}$) 在所有旗的集合上半正则地作用（在大多数情况下，旗是相互关联的顶点-边-面三元组）。若该作用是正则的，则称该地图及相应的嵌入为正则。若承载曲面可定向（不可定向），则称该地图为可定向（不可定向）的。正则地图的欧拉示性数是指其承载曲面的欧拉示性数。

正则地图与群论、双曲几何和复曲线等其他数学分支密切相关。在过去四十年间，正则地图领域取得了丰硕的研究成果，综述请见 [2, 4, 6, 14, 19, 20]。

研究正则地图有三种方法：按曲面分类（拓扑学方法）；按基础图分类（图论方法）；按自同构群分类（群论方法）。本文将重点讨论拓扑学方法——按曲面分类。长期以来，人们只在有限列曲面上完成了正则地图的分类 [5, 7]。第一次突破是 A. D'azevedo、R. Nedela 和 J. Sir´aˇn 对欧拉示性数为 $-p$ 的正则地图进行的分类，该工作发表于 [12], ，开启了对欧拉示性数为 $-p^n$ 、其中 p 为素数且 n 为正整数的正则地图分类。几年后，M. Conder、

* 通讯作者。电子邮箱：2200501002@cnu.edu.cn。2020 年数学主题分类：主要分类 05C10，次要分类 20B25。关键词：正则地图；自同构群；不可定向曲面；欧拉示性数。

ˇ P. Potoˇcnik 和 J. Sir´aˇn 在 [10] 中给出了具有几乎 Sylow 循环群的正则地图分类，并成功将其应用于欧拉示性数为 $-p^2$的正则地图分类。他们的工作强调了几乎 Sylow 循环群这一概念，并为这一方向的研究提供了启示。此后，欧拉示性数为 $-2p$ $-3p$ $-p^3$的正则地图，以及欧拉示性数为$-2p^2$ 的可定向正则映射，也在过去二十年中相继完成了分类，综述见 [9, 11, 22, 25] 。所有这些分类所采用的技术主要来自群论。根据 [12], , 人们得知，当 $p \geq 17$ 且 $p \equiv 1$（模 12）时，欧拉示性数为 $-p$ 的闭曲面不支持正则地图；此外，由 [10] 可知，只要 $p \notin \{3,7\}$，欧拉示性数为 $-p^2$ 的闭曲面就不支持正则地图； [25]证明了，当 $p \equiv 1$（模 12）时，欧拉示性数为 $-p^3$ 的闭曲面不支持正则地图。受这些工作的启发，我们提出以下两个问题:

问题 1.1. 所有满足以下条件的正整数$\mathcal{A}$的集合是什么：对于仅有限多个素数p，欧拉示性数为 $-p^i$ 的闭曲面才支持正则地图?

问题 1.2. 所有满足以下条件的正整数$\mathcal{B}$ 的集合是什么：除有限多个素数p 外，欧拉示性数为 $-p^i$ 的闭曲面都只支持可解正则地图（自同构群为可解群的正则地图）？

关于问题 1.1 和 1.2，我们注意到，$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, $2 \in \mathcal{A}$ 由 [10, 定理 6.1] 和 $1, 3 \in \mathcal{B}$ 分别由 [12] 和 [25], 中的主要定理推出。理解集合$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$之所以重要，有以下两个原因:

(1) 这拓展了对欧拉示性数为 $-p^i$ 且p为素数的正则地图的分类;

（2）这扩大了不支持正则地图的曲面清单。

本文将对欧拉示性数为 $-p^4$ 、其中 p 为素数$p \geq 5$的正则地图进行分类。

定理1.3。 正则地图$\mathcal{M}$的欧拉示性数为 $-p^4$，其中 p 为素数 $p \geq 5$，当且仅当以下条件之一成立

(1)$p = 5$，$\mathcal{M}$与$\mathcal{M}_1(1,3,4)$同构，或与其对偶；(2)$p = 7$，$\mathcal{M}$与$\mathcal{M}_4(1,1,4)$或$\mathcal{M}_6(1,1,3)$同构，或与它们的对偶同构；(3)$p = 13$，$\mathcal{M}$与$\mathcal{M}_7(1,7,6)$同构，或与其对偶同构。

其中$\mathcal{M}_1(1,3,4)$、$\mathcal{M}_4(1,1,4)$、$\mathcal{M}_6(1,1,3)$和$\mathcal{M}_7(1,7,6)$在第4节中定义。

注意，根据 [5]中的列表，存在欧拉示性数为 -2^4 的正则地图（它们全都可定向），也存在欧拉示性数为 -3^4 的正则地图（它们全都不可定向）。由定理1.3及这一事实，我们得到以下结果，它证明了 $4 \in \mathcal{A}$。

推论1.4. 设 p 为素数。当且仅当 $p \in \{2,3,5,7,13\}$ 时，欧拉示性数为 $-p^4$ 的闭曲面不支持正则地图。

注1.5. 在撰写本文期间，我们注意到 [8] 为欧拉示性数为 $-p^k$（其中 p为奇素数，k为正整数）的正则地图 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G; r, t\ \ell)$ 提供了一个粗略刻画，该刻画依据 $\mathcal{M}$ 的类型以及商群 G/N 的类型，其中 N 是最大的奇数阶正规子群或正规 p-子群；推论1.4可由 [8, 推论1.1]推出。然而，我们的研究与 [8]不同，并且基于以下三个原因具有独立意义:

(1) 方法论——本文采用的方法继承自我们的先前工作 [25] ，与 [8], 中的方法不同；在 [25, 中, Lemma3.5] 是我们方法的基石之一;

(2) 目标——与 [8], 中给出的粗略刻画相比，我们的目标（在 [25] 和本文中实现）是通过归纳方法刻画欧拉示性数为 $-p^i$ 的正则地图，其中 p 是素数，i 是一个固定数：具体而言，当欧拉示性数为 $-p^j$ 且满足 $j < i$ 的所有正则地图都已知时，刻画欧拉示性数为 $-p^i$ 的正则地图。我们相信，对于素数 p 和相对较小的整数 i，欧拉示性数为 $-p^i$ 的正则地图可以通过这种方式得到完整分类；

(3) 结果——[8, 推论 1.1] 给出了欧拉示性数为 $-p^4$（其中 $p \in \{5, 7, 13\}$）的正则地图类型列表，并对其自同构群作了粗略刻画。我们明确给出了这些正则地图自同构群的约化表示，并揭示了研究某些特征为 char-的二维射影特殊（一般）线性群的不可约表示，对于刻画欧拉示性数为 $-p^i$的正则地图的重要性。

在本引言之后，第2节将介绍一些记号、术语、已知结果以及正则地图的基础理论，而定理1.3将在第3节中证明。在第4节中，我们将刻画欧拉示性数为 -5^4, -7^4 和 -13^4 的正则地图，并确认它们的存在。

2 预备知识

本节将介绍一些记号和术语，简要介绍正则地图以及本文中用到的一些已知结果。

2.1 符号与术语

对于有限集 Ω，其基数 Ω 记为 $|\Omega|$。给定素数 p 和任意整数 m，p-部分和 p'-部分分别指整除 m 的最大 p 次幂，以及与p互素的 m 的最大因数。

设 G 是一个有限群。对于 H $<$ G、H $\leq$G 和 H charG，分别表示 H 是 G 的真子群、正规子群和特征子群。对于 g $\in$G 和 H $\leq$G，分别用 $|g|$ 和 $|G : H|$ 表示 g 的阶和 H 在 G 中的指数。对于素数 p，分别用 Syl$_p$(G) 和 n$_p$(G) 表示 G 的 Sylow p-子群集合（若 p $\nmid |G|$，则将 G 的 Sylow p-子群视为平凡子群{1}）及其个数。G 的最大正规 p-子群记为 O$_p$(G)，G 的奇数阶最大正规子群记为 O$_{2'}$(G)。G 的中心、G 的 Fitting子群（所有幂零正规子群的乘积）和换位子群分别记为 Z(G)、F(G) 和 G′。

对于有限群G 和A，若存在同态 $\phi : A \to \mathrm{Aut}(G)$，则将关于 ϕ 的G 与A 的半直积记作$G \rtimes_\phi A$。

我们分别用 GL(n,q)、PGL(n,q) 和 PSL(n,q) 表示有限域F_q上维数为n的一般线性群、射影一般线性群和射影特殊线性群。我们用 $\mathbb{Z}_m$和 $\mathbb{D}_{2n}$ ($n \geq 2$)分别表示阶为m 的循环群和阶为2n的二面体群。

我们引入一个重要术语，该术语在 [10] 中定义如下。若一个群G的所有奇数阶西洛子群都是循环的，且其所有 2-西洛子群要么是平凡群，要么包含一个指数为 2 的循环子群，则称G为几乎 *Sylow* 循环群。

2.2 正则地图

本小节将以组合方式描述地图和正则地图。我们从以下定义开始。

定义 2.1。 给定一个有限集 F 以及作用于 F 上的三个无不动点对合置换 r、t ℓ，四元组 $\mathcal{M}=\mathcal{M}(F;$ r、t $\ell)$ 称为组合地图，若它们满足以下两个条件:

(1)t 与 ℓ 可交换；(2) 群 $\langle r$、t $\ell\rangle$ 在 F

上传递作用。

对于组合地图 $\mathcal{M}=\mathcal{M}(F;$ r、t $\ell)$，F 称为旗标集合，r、t ℓ 分别称为旋转对合、横向对合和纵向对合。群 $\langle r$、t $\ell\rangle$ 称为 M 的单值化群，记作 Mon($\mathcal{M}$)。我们将 $\mathcal{M}$ 的顶点、边和面边界定义为子群$\langle r$、$t\rangle$、 $\langle t$ $\ell\rangle$ 和 $\langle r$ $\ell\rangle$ 的轨道。$\mathcal{M}$中的关联由非平凡的集合交集定义。

给定两个地图 $\mathrm{M_1}=\mathrm{M}$ ($\mathrm{F_1}$; $\mathrm{r_1}$,t1,ℓ_1) 和 $\mathrm{M_2}=\mathrm{M_2}$($\mathrm{F_2}$; $\mathrm{r_2}$,t2,ℓ_2)，若双射 ϕ from $\mathrm{F_1}$ to $\mathrm{F_2}$ 满足 ϕ $\mathrm{r_1}=\mathrm{r_2}\phi$, $\phi\mathrm{t_1}=\mathrm{t_2}\phi$ and $\phi\ell_1=\ell_2\phi$，则称其为地图同构。特别地，若 $\mathrm{M_1}=\mathrm{M_2}=\mathrm{M}$，则称 ϕ 为 M 的自同构。M 的所有自同构构成的集合 Aut(M) 是一个群，称为 M 的自同构群。根据地图同构的定义，我们有 Aut(M) $=\mathrm{C}_{S_F}$(Mon(M))，即 Mon(M) 在 S_F 中的中心化子。由 Mon(M) 在 F 上的传递性可知，Aut(M) 在 F 上半正则地作用。若该作用是正则的，则称 M 为正则地图。

设 $\mathcal{M}=\mathcal{M}(F;$ r,t $\ell)$ 是一个正则地图，并固定一个旗标 $\alpha\in F$。那么对于每个 $\beta\in F$，存在唯一的$g_\beta\in$ Aut($\mathcal{M}$)，使得 $\beta=\alpha^{g_\beta}$，且映射

$$\varphi: F\to \mathrm{Aut}(\mathcal{M}),\ \beta\mapsto g_\beta$$

是一个双射。令R(Aut($\mathcal{M}$))为 Aut($\mathcal{M}$) 的右正则表示。则映射

$$\phi: \mathrm{Aut}(\mathcal{M})\to R(\mathrm{Aut}(\mathcal{M})),\ h\mapsto R(h), \forall\, h\in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$$

是一个群同构。由于

$$\varphi(\beta^h)=\varphi(\alpha^{g_\beta h})=g_\beta h=g_\beta^{R(h)}=\varphi(\beta)^{\phi(h)}$$

对于每个 $\beta\in$ F 和每个 h $\in$ Aut(M)，可知两个置换群 Aut(M) $\le$ Sym(F) 和 R(Aut(M)) $\le$ Sym(Aut(M)) 是置换同构的。在此意义下，我们将 F 与群 G $=\langle$r,t $\ell\rangle$ 等同，并分别将 F 上的旋转、横向和纵向二阶元与 r、t 和 ℓ 的左正则表示等同。因此，M 的单群（自同构群）是 G 的左（右）正则表示。通常，我们将 R(G) 与 G 等同，并称 M :=M (G; r,t ℓ) 为代数地图。显然, M *:=M (G; r ℓ,t) 也是一个代数地图。我们称其为 M 的对偶。容易验证，G 的偶字子群 $\langle$tr, r $\ell\rangle$ 的指数至多为 2。若指数为 2，则可以为 M 固定一个定向，因此称 M 为可定向的。若指数为 1，则称 M 为不可定向的。M 的类型定义为 $\{|\mathrm{rt}|,|\mathrm{r}\ell|\}$，而 M 的欧拉示性数 χ 是 M 的承载曲面的欧拉示性数，即 χM := V $+$F $-$E。特别地，若令 x := |rt| 且 y := |rℓ|，则得到如下关于 χ M 的公式:

$$(*)\qquad \chi_{\mathcal{M}}=-\frac{|G|(xy-2x-2y)}{4xy}.$$

显然，$\chi_{\mathcal{M}}=\chi_{\mathcal{M}^*}$。当$xy-2x-2y$为正时（等价地，$\chi_{\mathcal{M}}$为负），著名的 Hurwitz 界指出$xy$ $xy-2x-2y\le 21$，且当 $\{x,y\}=\{3,7\}$时等号成立。特别地,

$|G| \le -84\chi_{\mathcal{M}}$在此情形下。著名的欧拉-庞加莱公式将曲面$\mathcal{S}$的亏格$g_{\mathcal{S}}$与其欧拉示性数$\chi_{\mathcal{S}}$联系起来，如下所示：

$$\chi_{\mathcal{S}} = \begin{cases} 2-2g_{\mathcal{S}} & \text{if } \mathcal{S} \text{ is orientable,} \\ 2-g_{\mathcal{S}} & \text{if } \mathcal{S} \text{ is non-orientable.} \end{cases}$$

因此，只有不可定向曲面才可能具有奇数欧拉示性数。

按照 [25, 节 1],，对于两个互素奇整数j和k，我们用$\mathcal{M}(j, k)$表示群$G = \mathbb{D}_{2j} \times \mathbb{D}_{2k}$上的正则地图$\mathcal{M}(G; r, t\ell)$，其型为 $\{2j, 2k\}$；对于任意满足$m \equiv 3 \pmod 6$的整数m，我们用$\mathcal{M}(m)$表示群$G = \mathbb{D}_4 \rtimes_\phi \mathbb{D}_{2m}$上的正则地图$\mathcal{M}(G; r, t\ell)$（其中$\phi$是一个从$\mathbb{D}_{2m}$到$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}_4)$的满同态），其型为 $\{4, m\}$。

2.3 一些已知结果

命题 2.2 ([24, 第1章，定理6。11])。 设 H 是群 G 的一个子群。那么，$C_G(H)$ 是 $N_G(H)$ 的正规子群，并且商群 $N_G(H)/C_G(H)$同构于$\mathrm{Aut}(H)$的一个子群。

命题 2.3 ([17, 第 1 章，定理 1。16])。 设 G 是一个有限群，满足 $n_p(G) > 1$，并选取不同的 *Sylow* p-子群 S 和 T，使阶 $|S \cap T|$ 尽可能大。那么 $n_p(G) \equiv 1$ (模 $|S : S \cap T|$)。

命题 2.4 ([17, 第 5 章，定理 5。3])。 设 G 是一个有限群，且 p 是 $|Z(G) \cap G'|$ 的素因子。那么 G 的 *Sylow-p* 子群是非阿贝尔的。

命题 2.5 ([10, 引理 3。2])。 设 $\mathcal{M}(G;\ r, t\ \ell)$ 是一个正则地图。若 p 是 $|G|$ 的素因子，且与 $\mathcal{M}$ 的欧拉示性数互素，那么 G 的 *Sylow* p-子群是循环的（若 p 为奇数）或二面体的（若 $p = 2$）。

命题 2.6 ([10, 定理 5.4])。 设$\mathcal{M}(G;\ r, t\ \ell)$ 是一个正则地图。若 G 是不可解几乎 *Sylow*-循环群，则存在一个素数 q 和一个与 q 互素的整数 $d(q^2 - 1)$，使得 $G \cong \mathrm{PSL}(2, q)$ 或 $\mathbb{Z}_d \rtimes_\phi \mathrm{PGL}(2, q)$，其中 ϕ是从$\mathrm{PGL}(2, q)$到 $\langle \sigma_{\mathbb{Z}_d} \rangle$ 的同态，其中 $\sigma_{\mathbb{Z}_d}$是将每个 $i \in \mathbb{Z}_d$ 发送到 $-i$ 的 $\mathbb{Z}_d$ 的自同构。

命题 2.7 ([15, 定理 1])。 设 G 是一个 *Sylow* 2 子群为二面体群的有限群。则 $G/O_{2'}(G)$ 同构于以下两者之一：底为$\mathrm{PSL}(2, q)$ （其中 q 为奇素数）的几乎单群，或 A_7，或 G 的一个 *Sylow* 2 子群。

命题 2.8 ([10, 表 1])。 设 $\mathcal{M}(G; r, t\ \ell)$ 是一个非定向正则地图，其中 G 是一个可解几乎 *Sylow*-循环群。那么以下情况之一成立：

(i) $\mathcal{M}$具有 $\{2, n\}$ 型，且 $G \cong \mathbb{D}_{2n}$，其中 $n \ge 4$ 为偶数；

(ii) $\mathcal{M}$或 $\mathcal{M}^* \cong \mathcal{M}(m, n)$，其中 $2 \nmid mn$，$1 \ne m < n$ 且 最大公约数$(m, n) = 1$;

(iii) $\mathcal{M}$或 $\mathcal{M}^* \cong \mathcal{M}(m)$，其中 $m \equiv 3$(模 6)，且 $\mathcal{M}(m)$ 和 $\mathcal{M}(m, n)$ 定义见第 *2.2* 节。

命题 2.9 ([16, 定理 II.7.3a, p.187])。 设 G 是 $\mathrm{GL}(n, p)$ 中 *Singer* 循环 S 的一个不可约子群。那么 G 在 $\mathrm{GL}(n, p)$ 中的中心化子是 S，而 G 在 $\mathrm{GL}(n, p)$ 中的正规化子是 S 与一个阶为 n 的循环群 C 的半直积。

命题 2.10 ([25, 引理 3。5])。 设 $\mathcal{M}(G; r, t\ \ell)$ 是一个欧拉示性数为 $-p^k$ 的正则地图，其中 p 是奇素数，k 是正整数 ≥ 3，且 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$。若 $O_p(G) = 1$，则 $O_{2'}(G)$ 是一个阶不被 p 整除的循环群，并且以下情况之一成立。

(1) $P = 1$，$M(G; r,t\ \ell) \cong M(m, n)$ 或 $M(m, n)^*$，其中 $2 \nmid mn$，$gcd(m, n) = 1$，$1 \neq m < n$ 且 $mn - m - n = p^k$；*(2)* $P = 1$，$M(G; r,t\ \ell) \cong M(m)$ 或 $M(m)^*$，其中 $m \equiv 3$（模 *6*）且 $m - 4 = p^k$；*(3) P* 是循环的且 $G \cong \mathbb{Z}_d \rtimes_\phi PGL(2, q)$，其中 q 是奇素数，$gcd(d, q(q^2 - 1)) = 1$ 且 ϕ 是从 $PGL(2,q)$ 到 $\langle \sigma_{\mathbb{Z}_d} \rangle$ 的同态；*(4) P* 是秩至少为 *2* 的初等阿贝尔群，$G/O_{2'}(G)$ 同构于几乎单群 N，其底为 $PSL(2, r)$，且 $|N : PSL(2,r)| \leq 2$，其中 $r = |P|$。

特别地，若 P 既非循环的也非初等阿贝尔，则 $O_P(G) > 1$。

命题 2.11 ([25,引理 3.6])。 设 G 为PSL$(2,q)$ 或 $\mathbb{Z}_d \rtimes_\phi$PGL$(2, q)$，其中 q 为某个奇素数 ≥ 5，且 ϕ 是从 PGL$(2,q)$ 到 $\langle \sigma_{\mathbb{Z}_d} \rangle$ 的同态。若 $G = \langle a, b \rangle$，其中 a 和 b 是两个元素，并且 $|G|$ 的任一奇素数因子都整除 $|a||b|$，则最大公约数$(|a|, |b|) = 1$。

我们指出， [12, 定理 2.2(3)] 排除了欧拉示性数为 -5 、型为 $\{4,6\}$ 且自同构群为 PGL(2,5) 的 a 型正则映射。以下结论由这一事实和[12,定理 2.2]推出。

命题 2.12。 设$\mathcal{M}(G;\ r,t\ \ell)$ 是一个欧拉示性数为 $-p$ 的非定向正则地图，其中 $p \geq 5$ 是素数。假设 G 不可解，或者 G 不含正规 *Sylow p*-子群。则以下情况之一成立：

(i) $p = 5$，$\mathcal{M}$的型为 $\{4,6\}$，且 $G \cong$PGL$(2,\ 5)$；

(ii) $p = 7$，$\mathcal{M}$的型为 $\{3,8\}$，且 $G \cong$PGL$(2,\ 7)$；

(iii) $p = 13$，$\mathcal{M}$的型为 $\{3,7\}$，且 $G \cong$PSL$(2,\ 13)$。

以下结果可由 [10,定理 6.1]立即推出。

命题 2.13。 设$\mathcal{M}$ 是一个欧拉示性数为 $-p^2$ 的非定向正则地图，其中 $p \geq 5$ 是素数。则$\mathcal{M}$的型为 $\{3,13\}$，Aut$(\mathcal{M}) \cong$ PSL$(2,\ 13)$ 且 $p = 7$。

以下结果是 [25, 定理 1.1]的直接推论。

命题 2.14. 设$\mathcal{M}(G;r,t\ \ell)$ 是一个欧拉示性数为 $-p^3$、其中 $p \geq 5$为奇素数的正则地图。则 G 的 *Sylow p*-子群是平凡子群，且 G 可解。

3 定理1.3的证明

定理1.3的证明纯属群论。继续之前，我们先固定一个条件，提及若干基本事实，并证明关于欧拉示性数为 $-p^i$ （其中$p \geq 5$ 为素数且 $i \geq 4$）的正则地图的两个一般结果。

为方便起见，我们固定以下条件：

(⋆) $\mathcal{M}(G;r,t\ \ell)$ 是一个欧拉示性数为 $-p^i$的正则地图，其中$p \geq 5$为素数，且$i \geq 4$.

假设条件 **(⋆)** 成立。于是我们有以下三个基本事实：

(1) $G = \langle rt, r\ell \rangle$;

(2) $\langle rt \rangle \cap \langle r\ell \rangle = 1$;

(3) $|rt| \geq 3$ 和 $|r\ell| \geq 3$。

这些事实将在本节中反复使用，后文不再另行说明。

以下一般性引理将在后续分析中起关键作用。

定理 3.1. 假设条件 $(\star)$成立。那么，除非 $p \in \{5,7,13\}$，否则 $p^i \nmid |G|$。

证明 我们将 $\mathcal{M}(G; r,t\ \ell)$ 简记为 $\mathcal{M}$，并分别设 x和 y为 rt和 $r\ell$ 的阶。反设 $p^i \mid |G|$。由公式 $(*)$，可推出 $k(x,y) = xyxy-2x-2y$是一个正整数。从 [10] 中定理 3.4 的证明可知，满足 ~~$k(x,y)$~~ 为正整数的数对 $\{x,y\}$只有有限多个，列举如下：

表 1：$\{x,y\}$ 的列表及对应的 $k(x,y)$ 整数值

{x,y}	k(x,y)	{x,y}	k(x,y)	{x,y}	k(x,y)
{3,7}	21	{3,24}	4	{5,5}	5
{3,8}	12	{4,5}	10	{5,20}	2
{3,9}	9	{4,6}	6	{6,6}	3
{3,12}	6	{4,8}	4	{6,12}	2
{3,15}	5	{4,12}	3	{8,8}	2

我们断言 $p \nmid xy$。反设 $p \mid xy$。令 P 为 G 的一个 Sylow p-子群。检查列表可知，$p = 5$ and $\{x, y\} = \{3,15\},\{4,5\},\{5,5\},\{5,20\}$ or $p = 7$ and $\{x, y\} = \{3,7\}$。假设 $p = 5$。利用公式 $(*)$ 计算 G 的阶，可以排除情形 $\{x, y\} = \{3,15\}$，因为在这种情形下 $3 \nmid |G|$。对于其余情形，由 Sylow 定理可得 $P \trianglelefteq G$。考虑商群 $G := G/P$。我们发现 $G \neq \langle rt, r\ell\rangle$。因此 $G \neq \langle rt, r\ell\rangle$，这就产生了矛盾。故 $p = 7$ and $\{x, y\} = \{3,7\}$。结合 Sylow 定理可知，G 有一个正规 Sylow 7-子群，记为 R。由于 R 和商群 G/R 都是可解的，因此 G 也是可解的。特别地，$G' < G$。另一方面，由 $G = \langle r,t\ \ell\rangle$ 可知，商群 G/G' 是一个阿贝尔 2-群。这与 $\{x, y\} = \{3,7\}$ 结合可得 $rt, r\ell \in G'$。于是 $G = \langle rt, r\ell\rangle \leq G' < G$，产生矛盾。断言得证。接下来我们分以下两步进行证明。

步骤 *1*：证明 $|P: O_p(G)| \leq p$。

若 P 正规，则 $P = O_p(G)$，因此 $|P : O_p(G)| = 1$，如所求。因此我们可以假设 P 是非正规子群。特别地，$n_p(G) > 1$，其中 $n_p(G)$ 是 G 的 Sylow p-子群的个数。检查列表可知，$|G|$ 的唯一一个与 1 模 p 同余的因数是 1。因此 $n_p(G) \not\equiv 1 \pmod{p^2}$。应用命题 2.3，我们知道 G 存在两个不同的 Sylow p-子群，记为 R 和 Q，使得 $|R : R \cap Q| = p$。我们证明 $R \cap Q \trianglelefteq G$。为此，观察表中的列表可知，$|G|$ 除了 $p = 5$ and $\{x, y\} = \{3,7\},\{3,8\}$ or $\{3,9\}$ 这些情形外，至多只有一个不同于 1 且与 1 模 p 同余的因数。

首先，假设 $p \neq 5$，或者 $\{x,y\} \neq \{3,7\},\{3,8\}$，或者 $\{3,9\}$。令 $N = N_G(R \cap Q)$。那么 R 和 Q 都包含在 N 中。特别地，$n_p(N) > 1$。注意，$n_p(N)$ 和 $n_p(G)$ 都是 $|G|$ 的因数，且 $|G|$ 模 p 同余于 1。因此，N 的 Sylow p-子群集合与 G 的相同。令 M 为 G 的正规子群，它由 G 的所有 Sylow p-子群生成。于是 $\langle R,Q\rangle \leq M \leq N$。由于 $N = N_G(R \cap Q)$，可得 $R \cap Q \trianglelefteq M$。特别地，$R \cap Q = O_p(M)$。由于 $O_p(M)$ 是 M 的特征子群，且 $M \trianglelefteq G$，因此 $R \cap Q = O_p(M) \trianglelefteq G$。由 $O_p(M) \leq O_p(G)$ 可知，$|P : O_p(G)| \leq |P : O_p(M)| = p$，证毕。

接下来，我们考虑$p = 5$且 $\{x、y\} = \{3,7\}$，$\{3,8\}$或 $\{3,9\}$的情形。设$p = 5$且 $\{x、y\} = \{3,7\}$。那么 $|G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7$。由命题 2.5，$G$的 Sylow 2-子群是二面体群，因此由命题 2.7 可知，$G/O_2(G)$ 同构于A_7，一个 2-群，或是一个底为

对于某个奇数 q，PSL(2, q)。情形 $G/O_{2'}(G) \cong A_7$ 可以排除，因为前者可由其二阶元生成，而后者则不能。假设 G 不可解，则可得 $G/O_{2'}(G)$ 同构于一个底为 PSL(2, q) 的几乎单群。特别地，$q(q^2-1)$ 2 整除 |G|。比较 $q(q^2-1)$ 2 与 |G|，可得 $q = 5$。因此 $|O_{2'}(G)| = 5^3 \cdot 7$。由 Sylow 定理，我们推得 $O_{2'}(G)$ 有一个正规 Sylow 5-子群，记作 K。于是 K 特征子群 $O_{2'}(G) \trianglelefteq G$，因此 $K \trianglelefteq G$。故 $|P : O_5(G)| \leq |P : K| = 5$，如所求。假设 G 可解。容易看出，$G/O_{2'}(G)$ 是一个 2-群（情形 $G/O_{2'}(G) \cong A_4$ 可基于与 $G/O_{2'}(G) \cong A_7$ 相同的理由排除）。特别地，$|O_{2'}(G)| = 3 \cdot 5^4 \cdot 7$。然后，类似于上一段的论证可得 $|O_5(O_{2'}(G))| \geq 5^3$。这意味着 $|O_5(G)| \geq 5^3$。故 $|P : O_5(G)| \leq 5$，如所求。类似地，对于 $p = 5$ 且 $\{x, y\} = \{3, 8\}$ 或 $\{3, 9\}$ 的情形，我们有 $|P : O_5(G)| \leq 5$，如所求。

步骤 *2*：证明当 $p \notin \{5, 7, 13\}$ 时，由 $O_p(G)$ 诱导的商映射不存在。

设 $\overline{M}$ 为由 $O_p(G)$ 诱导的 M 的商映射。若 $P = O_p(G)$，则 $\chi_M = -1$，由[7] 可知此类映射不存在。因此，我们可以假设 $|P : O_p(G)| = p$。于是，$G/O_p(G)$ 的一个 Sylow p-子群是非正规的，且 M 是欧拉示性数为 $-p$ 的不可定向映射。根据命题 2.12，有以下三种可能：$p = 5, \{x, y\} = \{4, 6\}$ 且 $G/O_p(G) \cong PGL(2, 5)$；$p = 7, \{x, y\} = \{3, 8\}$ 且 $G/O_p(G) \cong PGL(2, 7)$；$p = 13, \{x, y\} = \{3, 7\}$ 且 $G/O_p(G) \cong PSL(2,13)$。结论得证。 □

备注 3.2. [25, 定理 3.1] 的证明在步骤 1 中有一个小缺漏，因为 $p = 5$ 和 $\{x, y\} = \{3, 7\}$，$\{3, 8\}$ 或 $\{3, 9\}$ 这些情形必须分别考虑。不过，修订后证明的步骤 1 已弥补了这一缺漏。

刻画具有欧拉示性数 $-p^i$ 的正则地图 $\mathcal{M}(G; r, t, \ell)$ 的障碍之一，是我们并不知道 G 的 Sylow p-子群的结构。解决这一问题的一种方法是将 G 替换为其关于一个正规 p-子群的商群。以下引理对我们的约化方法至关重要。

命题 3.3. 假设条件 $(\star)$ 成立，且 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$。那么，只要 $|P|^2 \geq p^i$，就有 $O_p(G) > 1$。

证明 设 p_j 为 P 的阶。我们用反证法，假设 $O_p(G) = 1$ 且 $j \geq \lceil i_2 \rceil$，其中 $\lceil k \rceil$ 表示不小于 k 的最小整数。于是由命题 2.10，得到以下两种情形之一：

(1) P 是循环群，且 $G \cong \mathbb{Z}_d \rtimes_\phi \mathrm{PGL}(2, q)$，其中 q 是奇素数，$p \nmid d, \gcd(d, q(q^2-1)) = 1$ 且 ϕ 是从 $\mathrm{PGL}(2, q)$ 到 $\langle \sigma_{\mathbb{Z}_d} \rangle$ 的同态；(2) P 是秩至少为 2 的初等阿贝尔群，$G/O_{2'}(G)$ 同构于一个几乎单群 N，其底为 $\mathrm{PSL}(2, p_j)$，且 $|N : \mathrm{PSL}(2, p^j)| \leq 2$。

假设情形 (1) 成立。则 P 是循环群。假设 $p^{2j} \geq p^i \geq p^3$ 意味着 $j \geq 2$ 且 $p \neq q$。因此 $p \mid q+1$ 或 $p \mid q-1$。由于 $q+1$ 和 $q-1$ 是偶数，而 p 是奇数，可知两种情形下 $q+1 \geq 2p^j$。因此 $|G| = dq(q^2-1) \geq 2p(2p-1)(2p-2)$。另一方面，由 Hurwitz 界可得 $|G| \leq 84p^i$。于是 $2p^j(2p-1)(2p-2) \leq 84p^i$。然而，这与 $p \geq 5$ 一起推出 $2 \cdot 5^2(5^2-12) + 1 \leq 2p^j(p-12) + 1 \leq 0$，矛盾。

假设情形 (2)。于是

$$|G| = |O_{2'}(G)||G/O_{2'}(G)| \geq |G/O_{2'}(G)| \geq |\mathrm{PSL}(2, p^j)| = \frac{p^j(p^{2j}-1)}{2}.$$

由此结合 $|G| \le 84p^i$ 可得 $p^j(p^{2j}-1)_2 \le 84p^i$。分别令 x 和 y 表示 $|rt|$ 和 $|r\ell|$，并令 x' 和 y' 分别表示 $|O_{2'}(G)rt|$ 和 $|O_{2'}(G)r\ell|$ 在 $G/O_{2'}(G)$ 中的阶。于是 $x' \mid x$ 且 $y' \mid y$。由公式 $(*)$ 可知，对于任意与 p 不同的 $|G|$ 的奇素数因子 s，$|G|_s$ 至少整除 x 和 y 中的一个。因此，与 p 不同的 $|G/O_{2'}(G)|$ 的任意奇素数因子都整除 x' 和 y' 中的一个。另一方面，由 $G/O_{2'}(G) \cong N$ 且 $|N : PSL(2, p^j)| \le 2$ 可知，$x'_{2'}$（分别地，$y'_{2'}$）整除 p、p_2^{j-1} 和 p_2^{j+1} 中的一个。特别地，$x'_{2'}$（分别地，$y'_{2'}$）整除 p、$(p_2^{j-1})_{2'}$ 和 $(p_2^{j+1})_{2'}$ 中的一个。这意味着$\{x'_{2'}, y'_{2'}\} = \{(p_2^{j-1})_{2'}, (p_2^{j+1})_{2'}\}$。注意，假设 $p \ge 5$ 等价于 $p = 5$ 或 $p \ge 7$。接下来，我们分别讨论这两种情形。

设$p \ge 7$。我们首先证明$j = 2$ 且$i = 4$。反设$j \ge 3$ 或$i \ge 5$。那么$j \ge 3$ 在这两种情形下都成立，由不等式$p^j(p^{2j}-1)_2 \le 84p^i$ 可得

$$\frac{7^3(p^i-1)}{2} \le \frac{p^3(p^i-1)}{2} \le \frac{p^j(p^{2j}-1)}{2} \le 84p^i.$$

因此 $7^3(p^i-1)_2 \le 84p^i$。这意味着 $p^i \ge \frac{175}{343}$，这与 $p^i \le \frac{1}{7^5} < \frac{175}{343}$ 这一事实矛盾。现在，将 $j = i = 2$ 代入不等式 $p^j(p^{2j}-1)_2 \le 84p^{2i}$，可得 $p^2(p^4-1) \le 168p^4$。解得，在我们的假设下 $p \in \{7, 11, 13\}$。对于三种情形 $p = 7$、$p = 11$ 和 $p = 13$，我们推得

$$\frac{1}{x'_{2'}} + \frac{1}{y'_{2'}} \le \max\{\frac{1}{3}+\frac{1}{25}, \frac{1}{15}+\frac{1}{61}, \frac{1}{17}+\frac{1}{21}\} = \frac{28}{75}.$$

因此

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le \frac{1}{x'}+\frac{1}{y'} \le \frac{1}{x'_{2'}}+\frac{1}{y'_{2'}} \le \frac{28}{75}.$$

但这样便得到

$$24p^4 = \frac{49(p^4 - \frac{p^4}{49})}{2} \le \frac{49(p^4-1)}{2} \le |\mathrm{PSL}(2,p^2)| \le |G| = \frac{4p^4}{1-2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})} \le \frac{4p^4}{1-\frac{56}{75}} < 24p^4.$$

这显然矛盾。

现在只剩下情形 $p = 5$ $\lceil_2\rceil \ge 2$ $= 4$ $\in \{2,3\}$ $_2 \le 84$ $\ge$。由不等式 $p^j(p^{2j}-1)p^i$ 和假设 j_i，容易看出 i 和 j。仿照情形$p \ge 7$中对x和y的类似论证，我们也可以推出矛盾。

□

以下结果对于定理1.3的证明至关重要。

命题 3.4. 设$\mathcal{M}(G;r,t\ \ell)$ 是一个欧拉示性数为 $-p^4$ 的正则地图，其中 $p \ge 5$ 为素数。那么 $p^4 \mid\mid |G|$。

证明 为方便起见，我们固定以下条件：

$$(\star\star)\ \mathcal{M} = \mathcal{M}(G;r,t,\ell) \text{ is a regular map with } \chi_{\mathcal{M}} = -p^4 \text{ for some prime } p \ge 5 \text{ and } p^4 \nmid |G|$$

为了证明该结论，只需证明在条件 $(\star\star)$ 下$\mathcal{M}$ 不存在。设条件 $(\star\star)$ 成立，并令 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$。在接下来的两个小节中，我们将推导出两个事实：

(1) G是可解的，且 $P \trianglelefteq G$（定理 3.5）；以及

(2) P 是平凡的（定理 3.14）。

由命题 2.5，我们推得G是一个可解几乎 Sylow-循环群（其定义见第2节）。此外，由命题 2.8，以下情况之一成立：

(1) $\{x,y\}=\{2,n\}$, n为偶数，$G\cong\mathbb{D}_{2n}$;

(2) $\mathcal{M}\cong\mathcal{M}(m)$ 或 $\mathcal{M}(m)^*$，其中 $m\equiv 3$（模 6），

(3) $\mathcal{M}\cong\mathcal{M}(m,n)$ 或 $\mathcal{M}(m,n)^*$，其中 $2\nmid mn$，$1\neq m<n$且最大公约数$(m,n)=1$;

其中 $\mathcal{M}(m)$ 和 $\mathcal{M}(m,n)$ 在第2节中定义。

第一种情形很容易排除，因为$\chi_{\mathcal{M}}=1\neq -p^4$。假设情形 (2)。那么 $-p^4=\chi_{\mathcal{M}}=4-m$。因此 $0\equiv m=p^4+4\equiv 2$（模 3），这就产生了矛盾。假设情形 (3)。那么 $-p^4=\chi_{\mathcal{M}}=m+n-mn$。因此 $2\equiv p^4+1=(m-1)(n-1)\equiv 0$（模 4），这就产生了矛盾。 □

现在，我们可以证明定理1.3。

定理1.3的证明 设$\mathcal{M}(G;r,t\ \ell)$是一个欧拉示性数为 $-p^4$的正则地图，其中$p\geq 5$为某个素数。由定理 3.1和命题 3.4可得$p\in\{5,7,13\}$。根据定理 3.18，定理1.3得证。

□

3.1 G的可解性与P的正规性

在本小节中，我们主要证明：

Th定理 3.5。 假设条件$(\star\star)$成立，并令 $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$。则 G 可解，且 $P\trianglelefteq G$.

证明定理 3.5的一个关键步骤是排除G为不可解的近似 Sylow-循环群的情形。这将在下面几个引理中完成。

后续证明中将用到以下初等引理。该引理可通过逐案分析得到，这里省略证明。

引理 3.6. 设 j,k 是两个正整数，满足 $j+k=4$，且 $p\geq 5$ 是素数。那么集合$\left\{2p^k+4p^j-4(2p^j-1)(2p^j-4),\ \frac{2}{2}p^k+4\frac{j}{2}p^j+4p(p),\ \frac{2}{2}p^k+4p^j-2(2p^j-2)(2p^j-3),\ \frac{2}{2}p^k+4p^j+2(2p^j-1)(2p^j+2)\right\}$不含整数。

假设条件 $(\star\star)$ 成立。以下引理给出了当G 是一个不可解几乎 Sylow 循环群时G的一些刻画。

引理 3.7. 假设$(\star\star)$成立，并设 G 是一个不可解几乎 *Sylow*-循环群。那么 G 同构于$\mathrm{PSL}(2,p)$ 或 $\mathbb{Z}_d\rtimes_\phi\mathrm{PGL}(2,p)$，且 $p\nmid|rt||r\ell|$。

证明 我们将 $\mathcal{M}(G;r,t\ \ell)$ 简记为 $\mathcal{M}$，并令 $\{x,y\}$ 为 $\mathcal{M}$ 的型。根据命题 2.6，我们知道 G 同构于 $\mathrm{PSL}(2,q)$ 或 $\mathbb{Z}_d\rtimes_\phi\mathrm{PGL}(2,q)$，其中 $q\geq 5$ 为某个素数；在后一种情形下，d 恰好整除 x 和 y 中的一个。不失一般性，我们可以假设 $d\mid x$。由公式 $(*)$，可得以下方程：

$$(\dagger)\qquad (xy-2x-2y)\cdot q\cdot\frac{q+1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}=\alpha\cdot\frac{x}{s}\cdot y\cdot p^4,$$

其中 $\alpha=2$ 且 $s=1$（若 $G\cong\mathrm{PSL}(2,q)$），而 $\alpha=1$ 且 $s=d$（若 $G\cong\mathbb{Z}_d\rtimes_\phi\mathrm{PGL}(2,q)$）.

我们断言 $q\nmid xy$。注意，如果该断言成立，则可立即由方程（†）推出 $q=p$。反设 $q\mid xy$。那么 $q\mid x$ 或 $q\mid y$。假设 $q\mid\gcd(x,y)$。那么 $q=x\,s$, $q=y$。将其代入方程（†），得到 $(sq-2s-2)\frac{q+1}{2}q_2^{-1}=\alpha p^4$。由于 $\gcd(q_2^{+1},q_2^{-1})=1$，由此方程可推得 $2\in\{\frac{q+1}{2},q_2^{-1}\}$，且 p 整除 q_2^{+1} 和 q_2^{-1} 中的一个。因此 $q=5$ 且 $p=3$，这与我们的假设 $p\geq 5$矛盾。这说明 q 恰好整除 $x\,s$ 和 y 中的一个。因此，$\{q\}\subsetneq\{x\,s,y\}$。令 $h\in\{x\,s,y\}\backslash q$。根据 [10,表 2],，若 $G\cong\mathrm{PSL}(2,q)$，则 $h\mid q_2^{\pm1}$；若 $G\cong$，则 $h\mid q\pm1$，但 $h\nmid q_2^{\pm1}$

$\mathbb{Z}_d \rtimes_\phi \mathrm{PGL}(2, q)$。下文中，我们分别考察两种情形：$G \cong \mathrm{PSL}(2, q)$ 和 $G \cong \mathbb{Z}_d \rtimes_\phi \mathrm{PGL}(2, q)$。

情形 (1)：$G \cong \mathrm{PSL}(2, q)$。

在此情形下 $s = 1$，不妨设 $q \mid x$ 而 $q \nmid y$。于是 $x = q$，且 y 整除 q_2^{-1} 或 q_2^{+1}。特别地，$\gcd(x, y) = 1$，因此 $\gcd(x, xy - 2x - 2y) = \gcd(x, 2) \le 2$。我们首先考虑 $y \mid q_2^{-1}$ 的情形。由方程（†）可知，q_2^{+1} 和 $xy - 2x - 2y$ 都整除 $2p^4$。注意 $q_2^{+1} \ge 5+1 = 3$。因此 $p \mid q_2^{+1}$，等价地，$q \equiv -1$（模 p）。假设 $p \nmid xy - 2x - 2y$。于是 $xy - 2x - 2y \le 2$。解此不等式，得到 $q = x = 5$ 且 $y = 4$。但这意味着 $y = 4 \nmid q_2^{-1} = 2$，与我们的假设矛盾。因此 $p \mid xy - 2x - 2y$。将 $x = q \equiv -1$（模 p）代入此同余方程，得到 $xy - 2x - 2y \equiv -y + 2 - 2y$（模 p）。另一方面，由方程（†）可得 $y = q_4^{-1}$ 或 q_2^{-1}。将 y 代入同余方程 $-3y + 2 \equiv 0$（模 p），当 $y = q_4^{-1}$ 时得到 $3q \equiv 11$（模 p），当 $y = q_2^{-1}$ 时得到 $3q \equiv 7$（模 p）。结合 $q \equiv -1$（模 p），可知当 $y = q_2^{-1}$ 时 $p = 5$，而当 $y = q_4^{-1}$ 时 $p = 7$。将 p 和 y 代入方程（†），得到 $2 \cdot 7^4 = q^{+1} \cdot q^2 - aq_2^{+2}$，其中当 $p = 5$ 时 $a = 7$，当 $p = 7$ 时 $a = 11$。然而，很容易看出没有素数是此方程的解，这与 q 为素数的事实矛盾。类似地，在 $y \mid q_2^{+1}$ 的情形下，我们得到两个同余方程 $q \equiv 1$（模 p）和 $y + 2 \equiv 0$（模 p）。于是，当 $y = q_2^{+1}$ 时 $p = 3$，当 $y = q_4^{+1}$ 时 $p = 5$。根据我们的假设，当 $y = q_4^{+1}$ 时 $p = 5$。将 p 和 y 代入方程（†），得到 $2 \cdot 5^4 = q^{-1} \cdot q^2 - 9q_2^{-2}$。显然，没有素数是此方程的解，这与 q 为素数的事实矛盾。因此，情形（1）不可能发生。

Case (2)*:* $G \cong \mathbb{Z}_d \rtimes_\phi \mathrm{PGL}(2, q)$.

在这种情形下，$\alpha = 1$ 且 $s = d$。我们需要考虑四种情形：$q \mid s$ 且 $y \mid q - 1$；$q \mid s$ 且 $y \mid q + 1$；$s \mid q - 1$ 且 $q \mid y$；$s \mid q + 1$ 且 $q \mid y$。

对于第一种情形，$q = xs$ 且 $q^{+1} y$ 是一个奇整数。由此结合 $\gcd(d, q(q^2 - 1)) = 1$ 可得，$\gcd(y, xy - 2x - 2y) = \gcd(y, 2) \le 2$。观察方程（†），可推得 $y = q - 1$，并且存在正整数 j 和 k，使得 $j + k = 4$，$q_2^{+1} = p^j$ 且 $xy - 2x - 2y = 2p^k$。由等式 $q_2^{+1} = pj$，可得 $q = 2pj - 1$。将 $q = 2p^j - 1$、$x = sq = s(2pj - 1)$ 和 $y = q - 1 = 2pj - 2$ 代入方程 $xy - 2x - 2y = 2p^k$，得到 $s = 2p^{k+4} p^{j-4} (2p^{j-1})(2p^{j-4})$。类似地，对于其余三种情形，分别得到 $s = 2p^{k+4} {}^{j+4} p\, p\, (p)$、$s = 2p^{k+4} p^{j-2} (2p^{j-2})(2p^{j-3})$ 和 $s = 2p^{k+4} p^{j+2} (2p^{j-1})(2p^{j+2})$。由引理 3.6 可知，$2^{j\,2\,j+1}$ 在所有这些情况下，s 都不可能是整数。因此，情形 (2) 不成立。这就产生了最终的矛盾，故结论得证。

□

现在我们可以排除 G 是不可解几乎 Sylow 循环群的情形。下面给出相应的引理。

引理 3。 8. 假设满足条件 $(\star\star)$。则 G 不可能是不可解几乎 *Sylow* 循环群。

证明 沿用引理 3.7 中的记号，并记 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G; r, t\ \ell)$。反设 G 是不可解几乎 Sylow 循环群。由引理 3.7 可知，G 同构于 $\mathrm{PSL}(2, p)$ 或 $\mathbb{Z}_d \rtimes_\phi \mathrm{PGL}(2, p)$，且 $p \nmid xy$。因此，引理 3.7 中的方程（†）成立。下文将分别讨论这两种情形。

情形 (1)：$G \cong \mathrm{PSL}(2, p)$

在此情形下，我们有 $|G| = |\mathrm{PSL}(2, p)| = p(p^2 - 1)\,2$。但另一方面，我们有 $|G| = 4_{xy\,xy-2}$ $x\{v28'>yp^4 > p^4 > p(p^2-1)\,2$，矛盾。

情形 (2)：$G \cong \mathbb{Z}_d \rtimes_\phi \mathrm{PGL}(2, p)$

在此情形下，$d > 1$ 且 $\gcd(d, p(p^2-1)) = 1$。不妨设 $d \mid x$。因此，子群 $\mathbb{Z}_d \rtimes \mathrm{PSL}(2,p)$ 包含一个阶为 x 的元素。特别地，$x \mid p_2^{\pm 1}$。观察方程（†），可得 $p^{2-1} \mid xdy$ 为偶数，因此 $(xdy) = (p_2^{-1}, p+1)$ 或 $(p_2^{\pm 1}, p-1)$，且 $xy - 2x - 2y = 2p^3$。求解方程 $xy - 2x - 2y = 2p^3$，，根据 $xd = p_2^{-1}$ 和 $xd = p_2^{+1}$ 这两种情形，分别得到 $d = p^3+4p+4/(p-1)^2$ 和 $d = p^3+4p-4/(p+1)(p-3)$。由于 d 是一个整数，故 $(p-1)^2 \mid 4p^3+4p+4$ 或 $(p+1)(p-3) \mid 4p^3+4p-4$。于是，当 $(p-1)^2 \mid 4p^3+4p+4$ 时，$p-1 \mid 12$；当 $(p+1)(p-3) \mid 4p^3+4p-4$ 时，$p+1 \mid 12$。由于我们假设 $p \geq 5$，因此当 $p-1 \mid 12$ 时，$p = 5、7、13$；当 $p+1 \mid 12$ 时，$p = 5、11$。显然，d 为整数时仅有两种情形：$p = 5$ 且 $d = 43$；$p = 7$ 且 $d = 39$。对于 $p = 7$ 且 $d = 39$ 的情形，有 $\gcd(39, 7(7^2-1)) = 3 > 1$，这与 $\gcd(d, q(q^2-1)) = 1$ 矛盾。因此只剩下 $p = 5$ 且 $d = 43$ 的情形。在此情形下，不难看出 $\{x, y\} = \{4, 129\}$。设 M 为由阶为 $\overline{d}$ 的正规子群诱导的 M 的商映射。则 M 的型为 $\{3,4\}$，且 $\mathrm{Aut}(M) \cong \mathrm{PGL}(2,5)$。然而，型为 $\{3,4\}$ 的正则地图的自同构群的阶至多为 48。这与 $48 < 120 = |\mathrm{PGL}(2,5)|$ 这一事实矛盾。

□

假设满足条件（⋆⋆）。下面的引理给出了 $O_p(G)$ 在 P 中的指数上界。特别地，由命题 2.5 和定理 3.1 可知，$G/O_p(G)$ 是一个几乎 Sylow 循环群。

引理 3.9. 假设满足条件(⋆⋆)，且 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$。则 $|P : O_p(G)| \leq p$。

证明 记 $M(G; r,t\ \ell)$ 为 M，并令 $\{x, y\}$ 为 M 的类型。如果 P 是平凡群，则结论显然成立。因此，我们可以假设 P 非平凡，即 $p \mid |G|$。假设 P 是循环的。由命题 2.5 可知，G 是几乎 Sylow 循环群。根据引理 3.8，可知 G 是可解的。但由命题 2.8 可知，$p \nmid |G|$，这与假设矛盾。因此，我们可以假设 P 是非循环的。特别地，我们有 $|P| = p^2$ 或 p^3。由命题 3.3 可得 $|O_p(G)| \geq p$。若 $|P| = p^2$，则 $|P : O_p(G)| \leq p^2$ $p = p$，结论成立。因此，我们只需考虑情形 $|P| = p^3$。

假设 $|P| = p^3$。我们只需证明 $O_p(G) \ncong \mathbb{Z}_p$。反设 $O_p(G) \cong \mathbb{Z}_p$。那么 $G/O_p(G)$ 有非平凡的 Sylow p-子群。特别地，由命题 2.14 可知，M 经 $O_p(G)$ 诱导的商映射的欧拉示性数不可能为 $-p^3$。这意味着 $O_p(G)$ 包含于 $\langle rt \rangle$ 或 $\langle r\ell \rangle$。由 $|P| = p^3$ 及公式 $(*)$ 可得 $p \mid x$ 且 $p \mid y$。令 L 表示 G 的奇数阶最大正规子群。我们断言 $p^2 \nmid |L|$。为此，注意到由 $O_p(G) = O_p(L)$ 可知，$F(L) \leq L$ 是一个循环群。注意，G 的任意 Sylow l-子群（其中 $l \neq p$ 为奇素数）都是循环的。因此，由 $G = \langle rt, t\ell \rangle = \langle r\ell, t\ell \rangle$ 及命题 2.2 可得 $L \leq C_G(F(L))$。另一方面，L 的可解性意味着 $C_L(F(L)) \leq F(L) \leq L$。因此 $F(L) = L$ 是循环的。这意味着 $O_p(G)$ 是 L 的一个 Sylow p-子群。因此，$p^2 \mid |G/L|$。根据命题 2.7，G/L 同构于一个以 $\mathrm{PSL}(2,d)$ 为底的几乎单群。显然，$p^2 \leq d$。因此 $|G| = |L||G/L| \geq p \cdot d(d^{2-1})_2 \geq p \cdot p^2(p^{4-1})_2$。然而另一方面，我们有 $|G| \leq 84p^4$。因此 $p \cdot p^2(p^{4-1})_2 \leq 84p^4$。在我们的假设下，这个不等式成立当且仅当 $p = 5$。用与命题 3.3 类似的论证，我们推得

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{3} + \frac{1}{13} = \frac{16}{39}.$$

但这样一来

$$\frac{5^3(5^4-1)}{2} \leq |G| = \frac{4}{1 - 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})} \cdot 5^4 \leq 4 \cdot \frac{39}{7} \cdot 5^4,$$

就产生了矛盾。 □

以下引理将在后续证明中发挥作用。

引理 3.10. 设 $p \geq 5$ 为素数。则以下结论成立：

(1) 方程 $pmn - km - kn = dp^2$（其中 d、$k \in \{1,2\}$）对 (m,n) 有正整数解，当且仅当

$(a)\, d = 1,\ p = 5,$ 且 $k = 1$ 且 $\{m、n\} = \{2,3\},$ 或 $k = 2$ 且 $\{m、n\} = \{1,9\}$；$(b)\, d = 2,\ p = 7,\ k = 2$ 且 $\{m、n\} = \{1,20\}$。(2)方程

$$pmn - m - n = p^3$$

没有满足 $2 \nmid mn$ 的 (m,n) 正整数解。

证明 为方便起见，我们将方程 pmn –km – kn = d p² 简记为方程（‡）。设 m 和 n 是方程（‡）的正整数解。不失一般性，我们可以假设 m ≤ n。首先考虑 d = 1 的情形。设 (m – 2)(n – 2) ≤ 0。那么 m = 1 或 m = 2。设 m = 1。则 pn – k – kn = p²。因此 n = p + k + k²+k p–k 。特别地，k²+k p–k 是一个整数。结合假设 p ≥ 5，可得 p = 5 且 k = 2。因此在这种情形下 n = 9。设 m = 2。由方程（‡）两边的奇偶性可知，k = 1。于是由方程（‡）得到 4n = 2p + 1 + 2 9 p–1。特别地，9 2p–1 是一个整数。结合假设 p ≥ 5，可得 p = 5。在这种情形下，n = 3。假设 (m – 2)(n – 2) ≥ 6，等价地，2(m + n) ≤ mn – 2。因此我们有 pmn –(mn – 2) ≤ pmn –k(m + n) = p²。于是 mn < p + 1 – 1 p–1 < p + 1。另一方面，由方程（‡）可推出 p² < p² + k(m + n) = pmn。这意味着 mn > p。因此，mn 不可能是整数，矛盾。现在只剩下情形 1 ≤ (m – 2)(n – 2) ≤ 5。那么 m = 3 且 n ∈ {3,4,5,6,7}，或 m = n = 4。通过直接的逐案分析可知，在这些情形下，m 和 n 都不是方程（‡）的解。类似地，我们可以推出，当 d = 2 时，p = 7，k = 2 且 {m、n} = {1,20}。

反设方程 $pmn - m - n = p^3$ 有关于（m,n）的正整数解，满足 $2 \nmid mn$。那么 m 和 n 都是奇数。特别地，（$m-1$）（$n-1$）$\equiv 0 \pmod 4$。因此

$$(p-1)mn \equiv (p-1)mn + (m-1)(n-1) \equiv p^3 + 1 \pmod 4.$$

由于假设 $p \geq 5$，所以 $p \equiv 1 \pmod 4$ 或 $p \equiv 3 \pmod 4$。设 $p \equiv 1 \pmod 4$。则（$p-1$）$mn \equiv 0 \pmod 4$），而 $p^3 + 1 \equiv 2 \pmod 4$），矛盾。设 $p \equiv 3 \pmod 4$。则（$p-1$）$mn \equiv 2 \pmod 4$），而 $p^3 + 1 \equiv 0 \pmod 4$），矛盾。 □

下面的引理将在后面的证明中发挥作用。

引理 3。 11. 假设满足条件 (⋆⋆)，并设 G 不可解。那么 最大公约数$(|rt|_{p'}, |r\ell|_{p'}) >$ 1.

证明 令 x 和 y 分别表示 $|rt|$ 和 $|r\ell|$，并令 x' 和 y' 分别表示 $x^{p'}$ 和 $y^{p'}$。反设 $\gcd(x',y') = 1$。于是，2 不可能同时整除 x' 和 y'。这意味着 x' 和 y' 中至少有一个为奇数。不妨设 y' 为奇数。

令 P ∈ Syl$_p$(G)，并令 p^k 和 p^s 分别为 P 的阶以及 gcd(x, y) 的 p-部分。于是 k ≤ 3，由公式（∗）可得 x = p^s ·x′ 和 y = p^s ·y′。根据引理 3.8，我们知道 P 是非循环的。特别地，k ≥ 2，且 ⟨rt⟩ 和 ⟨rℓ⟩ 均不包含 G 的 Sylow p-子群。这意味着 $p^s < p^k$，从而 s ≤ k – 1 ≤ 2。由于 | G : ⟨rt⟩| = |G2 | x = 2y′p^4 p^sx′y′–2x′–2y′ 是一个正整数，其 p-部分恰好为 p^{k-s}，且 gcd(y′, p^s x′y′ – 2x′ – 2y′) = gcd(y′, 2x′) = 1，我们得到以下情况之一：

(1) x' 为奇数，且 $p^s x'y' - 2x' - 2y' = p^{4+s-k}$；

(2) x' 为偶数，且 $p^s x'y' - 2x' - 2y' = 2p^{4+s-k}$。

因此，$|G| = {}^4_{xyp^{k-2s}}$ 最大公约数$(2,\ x')$。特别地，$|G| \leq 4xyp^{k-2s}$。

我们证明 $s \neq 0$。反设 $s = 0$。于是 $p \nmid xy$。因此，由 $O_p(G)$ 诱导的 $\mathcal{M}$ 的商映射属于 $\{x,y\}$ 型，且欧拉示性数为 $-p_j = {}^-_{p|\ p}\ O(G)|$。由于 $k \geq 2$，它

由命题 3.3 可知，$O_p(G) > 1$。这与 $O_p(G) \leq P$ 一起意味着 $1 \leq j < 4$。假设 $j = 1$。则 $|O_p(G)| = p^3$。由于 $G/O_p(G)$ 不可解，由命题 2.12 可知，$G/O_p(G)$ 有非平凡的 Sylow p-子群。这说明 $P > O_p(G)$，因此 $|P| \geq p^4$, ，这与我们的假设矛盾。假设 $j = 2$。那么由命题 2.13 可知，$p = 7$, $\{x, y\} = \{3, 13\}$，且 $G/O_p(G) \cong PSL(2, 13)$。根据命题 2.2，我们推得 $O_p(G) \leq Z(G)$。因此，$O_p(G) \leq Z(P)$。由于 $O_p(G) \leq Z(P)$，且 $P/O_p(G)$ 是循环的，可知 P 是阿贝尔群。由命题 2.4 可知，$O_p(G) \cap G' = 1$。特别地，$[O_p(G), G'] = 1$ 且 $G' < G$。显然，$G' > 1$，因为 G 不可解。因此，由 $1 < (O_p(G)G')/O_p(G) \trianglelefteq G/O_p(G)$ 可得 $G = O_p(G) \times G'$。但此时 $r_t, r_\ell \in G'$，因此 $G = \langle r_t, r_\ell \rangle \leq G' < G$，这就产生了矛盾。假设 $j = 3$。那么由命题 2.14 可推出 $G/O_p(G)$ 可解。这意味着 G 可解，与我们的假设矛盾。因此，$s \geq 1$，从而 $(s, k) = (1, 2), (1, 3)$ 或 $(2, 3)$。

我们断言 $(s, k) = (1, 2)$。若能证明这一点，则 $|G| = {}^4xy$ ~~$\gcd(2, x')$~~。反设 $(s, k) = (1, 3)$ 或 $(2, 3)$。假设 $(s, k) = (2, 3)$。那么 $G \leq {}^4xy\, p < xy$，因为 $p \geq 5$。但另一方面，由 $\langle r_t \rangle \cap \langle r_\ell \rangle = 1$ 和 $\langle r_t \rangle \langle r_\ell \rangle \subseteq G$ 可得 $|G| \geq xy$。这是一个矛盾。假设 $(s, k) = (1, 3)$。由引理 3.10 可知，要么 $p = 5$ 且 $\{x', y'\} = \{1, 9\}$，要么 $p = 7$ 且 $\{x', y'\} = \{1, 20\}$。因此，要么 $p = 5, \{x, y\} = \{5, 45\}$ 且 $|G| = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$，要么 $p = 7, \{x, y\} = \{7, 140\}$ 且 $|G| = 5 \cdot 2^3 \cdot 7^3$。由于我们假设 G 不可解，由命题 2.7 可得 $3 \mid |G|$。这意味着 $|G| = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$。比较 $|G|$ 的阶与以 $PSL(2, f)$ 为底的几乎单群 N 的阶，可推出 $G/O_{2'}(G) \cong PSL(2, 5)$ 且 $|O_{2'}(G)| = 3 \cdot 5^2$。根据引理 3.9，有 $|O_5(G)| \geq 5^2$。结合 $G/O_{2'}(G) \cong PSL(2, 5)$，可知 $G/O_5(G) \cong \mathbb{Z}_3 \times PSL(2, 5)$。另一方面，由命题 2.5 可知 $G/O_5(G)$ 几乎 Sylow 循环。然而，$G/O_5(G) \cong \mathbb{Z}_3 \times PSL(2, 5)$ 并非几乎 Sylow 循环，这就产生了矛盾。断言得证。

我们证明 $O_p(G)$ 为奇数。若不然，则 $O_2(G) \neq 1$。因此 $\hat{\varphi} : G \twoheadrightarrow G, \hat{g} \mapsto g$，对所有 $g \in G$ 均成立。注意，$\langle r_t \rangle \cap \langle r_\ell \rangle = 1$。由此得到 $|\langle \hat{r}t \rangle \langle \hat{r}\ell \rangle| \geq \gcd(2, x')|G|$ 和 $|\langle \hat{r}t \rangle \langle \hat{r}\ell \rangle| \geq \gcd(2, x')|G|$。根据命题 2.5，G 有二面体 Sylow 2-子群。根据命题 2.7，G 同构于以下两者之一：底为 PSL(2,q)（其中 q 为奇数）的几乎单群，或 A_7, ，或 G 的一个 Sylow 2-子群。容易验证，A_7 不能由三个对合生成，其中两个对合彼此交换。因此，我们可以排除 $G \cong A_7$ 这一情形。由于我们假设 G 可解，显然 G 不可能是 2-群。因此，G 同构于一个底为 PSL(2,q) 的几乎单群，其中 $q \geq 5$ 是素数幂。另一方面，根据引理 3.9，G 是几乎 Sylow 循环不可解群。由于 G 是 G 的同态像，G 也几乎 Sylow 循环。这意味着 q 是素数，因此 $PSL(2,q) \leq G \leq PGL(2,q)$。令 $PSL(2, q) \leq N \leq PGL(2,q)$，并令 $R,S \leq N$ 为任意两个循环子群。利用 PGL(2,q) 中元素阶的著名结论，我们得到以下事实：

$$|R||S| < \frac{|N|}{4} \text{ for } q \geq 7 \text{ and } |R||S| < \frac{|N|}{2} \text{ for } q = 5.$$

这一事实结合 $|\langle \hat{r}t \rangle \langle \hat{r}\ell \rangle| \geq$ 最大公约数$(2, x')|G|$ 可推出 $q = 5$ 和 x' 都是奇数。

由于 x' 是奇数，且 $(s,k) = (1,2)$，由 (1) 得 $px'y' - 2x' - 2y' = p^3$。然而，根据引理 3.10(2)，对于满足 $2 \nmid x'y'$ 的 (x', y')，此方程没有正整数解。因此我们最终得到了矛盾。

□

现在，所需的所有工具都已具备，我们可以证明定理 3.5 了。

定理 3.5 的证明。设 $\{x, y\}$ 为 M 的类型，x', y' 分别为 x 和 y 的 p′-部分。由命题 2.5 和引理 3.9，M 在 $O_p(G)$ 作用下诱导的商地图（记为 $\overline{M}$）是一个非定向正则地图，其自同构群 $\overline{G} := G/O_p(G)$ 几乎西洛循环。设 $\{x_1, y_1\}$ 为 $\overline{M}$ 的类型。显然，$x' \mid x_1$ 且 $y' \mid y_1$。注意，$\overline{G} \cong PSL(2, q)$ 或 $\mathbb{Z}_d \rtimes PGL(2, q)$，其中 q 为某个素数

以及满足最大公约数$(d, q(q^2-1)) = 1$的整数。无妨设在后一种情形下，$d \mid x_1$。我们只需证明G可解。若此结论成立，则 $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}) = G$ 将是一个可解的几乎 Sylow-循环群，因此G 由命题 2.5 可知有一个正规 Sylow p-子群，从而$P = O_p(G) \trianglelefteq G$。反设$G$不可解。接下来，我们证明$q = p$且$O_p(G) \cong \mathbb{Z}_p^2$。

我们首先证明 $q = p$。反设 $q \neq p$。由于 $|G|$ 的任意奇素数因子（p 除外）都整除 x_1y_1，由 $3q \mid |G|$ 可知，3q 整除 x_1y_1。结合 $G \cong \mathrm{PSL}(2, q)$ 或 $\mathbb{Z}_d \rtimes \mathrm{PGL}(2, q)$，可推出 $q \in \{x_\alpha^1、y_1\}$，且 3 整除 $\{x_\alpha^1、y_1\} \setminus \{q\}$ 中的元素，其中 $\alpha = 1$ 当 $G \cong \mathrm{PSL}(2, q)$ 时，而 $\alpha = d$ 当 $G \cong \mathbb{Z}_d \rtimes \mathrm{PGL}(2, q)$ 时。由于 $\{x_\alpha^1, y_1\} \setminus \{q\}$ 中的元素被 3 整除，因此该元素整除 $(q-1)(q+1)$。于是 $\gcd(x', y') \leq \gcd(x_1, y_1) \leq \gcd(q, (q+1)\cdot(q-1)) = 1$。这与引理 3.11 矛盾，结论得证。

接下来证明 $O_p(G) \cong \mathbb{Z}_p^2$。由命题 2.6，$G \cong \mathrm{PSL}(2, q)$ 或 $\mathbb{Z}_d \rtimes_\phi \mathrm{PGL}(2, q)$（此处不失一般性地可设 $d \mid x_1$），其中 $q \geq 5$ 是素数，d 是与 $q(q^2-1)$ 互素的整数，且ϕ：$\mathrm{PGL}(2, q) \twoheadrightarrow \langle \sigma_{\mathbb{Z}_d} \rangle$ 是一个同态。特别地，$1, 2 \notin \{x_1, y_1\}$，因为 G 不可能是二面体群。假设 P 正规。则 $\{x_1, y_1\} = \{x', y'\}$，并且 $|G|$ 的任一奇素数因子都整除 x_1y_1。注意，$G = \langle \mathrm{rt}, \mathrm{r}\ell \rangle$。应用引理 2.11，我们得出 $\gcd(x', y') = 1$，这与引理 3.11 矛盾。因此 $P > O_p(G)$。由于根据我们的假设，$|P| \leq p^3$，故可得 $|O_p(G)| \leq p^2$。我们声称 $p \mid xy$。反设 $p \nmid xy$。则 $\{x_1, y_1\} = \{x, y\}$，且商映射 M 是一个亏格为 $\chi_M = -p$ 的正则地图。假设 $|O_p(G)| = p^2$。则 $\chi_M = -p^2$。由命题 2.13，我们推得 $p = 7$，$G \cong \mathrm{PSL}(2, 13)$，且 $\{x_1, y_1\} = \{3, 13\}$。应用命题 2.2，我们得到 $G = O_p(G) \times H$，其中 $H \cong \mathrm{PSL}(2, 13)$ 的某个子群。但此时，任何 3 阶或 13 阶元素都属于 H，这与 $G = \langle \mathrm{rt}, \mathrm{r}\ell \rangle$ 是由一个 3 阶元素和一个 13 阶元素生成的事实矛盾。假设$|O_p(G)| = p$。则 $\chi_M = -p^3$。由命题 2.14，我们推得 $G/O_p(G)$ 可解，因此 G 可解，这与我们的假设矛盾。于是该断言成立。结合公式 $(*)$ 和 $|P| \leq p^3$，可得 $x^p = y^p \geq p$。假设 $O_p(G)$ 与 $\langle \mathrm{rt} \rangle$ 和 $\langle \mathrm{r}\ell \rangle$ 中至少一个交集平凡。则 $p \mid x_1y_1$。因此，$|G|$ 的任一奇素数因子都整除 x_1y_1。由命题 2.11，我们得出 $\gcd(x_1, y_1) = 1$。这意味着 $\gcd(x', y') = 1$，与引理 3.11 矛盾。因此 $O_p(G)$ 与 $\langle \mathrm{rt} \rangle$ 和 $\langle \mathrm{r}\ell \rangle$ 都有非平凡交集。由于 $\langle \mathrm{rt} \rangle \cap \langle \mathrm{r}\ell \rangle = 1$ 且 $|O_p(G)| \leq p^2$，可知 $O_p(G) \cong \mathbb{Z}_p^2$，证毕。

由于 $q = p$，可知 $|G|_{p'}$ 整除 $4x_1y_1$。结合最大公约数$(x_1, y_1) \geq$ 最大公约数$(x', y') > 1$，可得到以下三种情况:

(a) $G/O_p(G) \cong \mathrm{PSL}(2, p)$，$x_1$ 和 y_1 均整除 p_2^{-1}（分别为 p_2^{+1}），且 p_2^{+1}（分别为 p_2^{-1}）是 8 的因数；(b) $G/O_p(G) \cong \mathbb{Z}_d \rtimes_\phi \mathrm{PGL}(2, p)$，$x_1d$ 和 y_1 均整除 $p-1$（分别为 $p+1$），且 $p+1$（分别为 $p-1$）是 8 的因数

(c) $G/O_p(G) \cong \mathbb{Z}_d \rtimes_\phi \mathrm{PGL}(2, p)$，$x_1d = p^{+1}k$，$y_1 = p^{-1}l$ 或 $x_1d = p^{-1}k$，$y_1 = p^{+1}l$，其中 $kl \mid 4$。

假设情形 (a)。则有 $p = 7$ and $\{x_1, y_1\} = \{3, 3\}$，或者 $p = 17$ and $x_1, y_1 \in \{3, 9\}$。假设情形 (b)。则有 $p = 5, 7$ and $x_1d, y_1 \in \{3, 6\}$，或者 $p = 17$ and $x_1d, y_1 \in \{3, 6, 9, 18\}$。将 $x = px_1, y = py_1$ 以及 p 的所有这些可能取值代入公式 $(*)$，得到矛盾。假设情形 (c)。由公式 $(*)$ 可得 $dp(p^{2-1})\,kl = 2d(p^{\pm 1})\,k = 2(p^{\mp 1})\,l = p^2$。假设 $d > 1$。由 $\gcd(d, p(p^2-1)) = 1$ 可知 $d \geq 5$。因此

$$p^2 = \frac{dp(p^2-1)}{kl} - \frac{2d(p\pm 1)}{k} - \frac{2(p\mp 1)}{l} \geq \frac{dp(p^2-1)}{kl} - \frac{2d(p\pm 1)}{k} - \frac{2d(p\mp 1)}{k} = \frac{dp(p^2-1-4l)}{kl}.$$

由于我们假设 $p \geq 5$，因此 $p^2 - 1 - 4l \geq p^2 - 9 \geq p$。这意味着 $dp(p^{2-1-4l})\,kl \geq d\,p_4^{\,2} > p^2$，矛盾。于是 $d = 1$。分别考虑四种情形 $(k, l) = (1, 1)$、$(1, 2)$、$(2, 1)$ 和 $(2, 2)$，可得 $(k, l) = (1, 1)$，$p = 5$ 且 $\{x_1, y_1\} = \{4, 6\}$。在这种情形下，M 的型为 $\{20, 30\}$，且 G 是由 $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ 扩张 $\mathrm{PGL}(2, 5)$ 得到的群。但由引理 3.12 可知这是不可能的，因而得到最终矛盾。 □

引理 3.12。 正则地图的自同构群绝不同构于由 $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ 扩张 *PGL(2, 5)* 得到的群。

证明 设 G 是由 $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ 扩张得到的 PGL(2,5) 的扩张。我们首先证明，G 含有一个子群，记为 H，使得 $G = O_5(G) \rtimes H$，且 $H \cong PGL(2, 5)$。为此，设 $K \leq G$ 是包含 $O_5(G)$ 且满足 $K/O_5(G) \cong PSL(2, 5)$ 的子群。由命题 2.2 可得 $O_5(G) \leq Z(K)$，因为 PSL(2, 5) 不同构于 GL(2,5) 的子群。通过与引理 3.11 证明中 $s \neq 0$ in 所作的类似论证，我们看到 $K = O_5(G) \times K'$。显然，$K' \cong PSL(2,5)$。由于 $K' \text{ char } K \trianglelefteq G$，可推出 $K' \trianglelefteq G$。由于 $K < G = \langle r,t\ \ell\rangle$，因此 r 、 t 中至少有一个不在 K 中，记其为 z。于是 $K'\langle z\rangle \cap O_5(G) = 1$，且 $K'\langle z\rangle O_5(G) = K\langle z\rangle = G$。结合 $G/O_5(G) \cong PGL(2,5)$，可知 $K'\langle z\rangle \cong PGL(2,5)$。因此 $H := K'\langle z\rangle$ 就是所需的子群。显然，$[z, O_5(G)] \neq 1$，否则 $H \trianglelefteq G$ 是一个包含 G 中所有对合的真子群，这与 $G = \langle r,t\ \ell\rangle$矛盾。

反设 $M = M(G; r,t\ \ell)$ 是一个正则地图。由于 $2 \mid |G : H| = |O_5(G)|$，H 包含 G 的一个 Sylow 2-子群。因此，根据 Sylow 定理，必要时利用共轭作用，我们可以假设 $\langle t\ \ell\rangle \leq H$。由于 $G = O_5(G) \rtimes H$，我们可以将 r 写成 $r = gh$，其中 $g \in O_5(G)$，$h \in H$，且表示唯一。显然，由 $r^2 = (gh)^2 = 1$ 可得 $g^h = g^{-1}$。显然，$g \neq 1$，否则 $H < G = \langle r,t\ \ell\rangle = \langle h,t\ \ell\rangle \leq H$，这就导致矛盾。结合 $[K', O_5(G)] = 1$ 可知 $h \notin K'$。因此 $H = K'\langle h\rangle$，从而 H 将 $\langle g\rangle$正规化。特别地，h、t 和 ℓ 都将 $\langle g\rangle$正规化。因此

$$G = \langle r,t,\ell\rangle = \langle gh,t,\ell\rangle \leq \langle g\rangle\langle h,t,\ell\rangle \leq \langle g\rangle H \leq G.$$

这就得到 即 $G = \langle g\rangle H$。然而，通过比较 G and $\langle g\rangle H$ 的阶，我们发现了矛盾 . □

注 3.13。 正如命题 2.12, [12, 之前所指出的，定理 2.2(3)] 排除了具有 $\{4,6\}$ 型且欧拉示性数为 -5、自同构群为 PGL(2，5) 的 a 型正则映射。因此，在证明 [25, 定理 3.1]的步骤 2 中，没有考虑 $p = 5$ 以及 $G/O_5(G) \cong PGL(2，5)$ 的情形。但幸运的是，由引理 3.12 可知，这种情形是不可能的。

3.2 P 的分析

在本小节中，我们主要证明:

定理 3.14。 假设条件 $(\star\star)$ 成立，并令 $P \in Syl_p(G)$。则 P 是平凡的。

证明 令 $\{x, y\}$ 为 $M = M(G; r,t\ \ell)$ 的类型，并令 p^d 为 P 的阶。根据我们的假设，$d < 4$。我们声称 G 是几乎 Sylow 循环群。若该断言成立，则结论可由命题 2.8 立即得出。反设 G 不是几乎 Sylow 循环群。于是命题 2.5 表明 P 不可能是循环群。特别地，$d \geq 2$。注意，根据定理 3.5，$P \trianglelefteq G$。令 M 为由 P 诱导的 M 的商映射，并令 $x' := x^{p'}$，$y' := y^{p'}$。于是 M 的类型为 $\{x', y'\}$；由命题 2.5 和定理 3.5 可知，$Aut(M) = G/P$ 是一个可解几乎 Sylow-循环群。应用命题 2.8，以下情况之一成立

(1) $\{x', y'\} = \{2, n\}$, t 为偶数，$G/P \cong \mathbb{D}_{2n}$; (2) $\{x', y'\} = \{2a, 2b\}$, $G/P \cong G(a, b)$，其中 $2 \nmid ab$，$1 \neq a < b$ 且 $\gcd(a, b) = 1$; (3) $\{x', y'\} = \{4, j\}$, $G/P \cong G(j)$，其中 $j \equiv 3$(模 6)。

我们首先证明 $p \nmid xy$。为此，我们采用反证法，假设 $p \mid xy$。由公式（$*$）以及假设 $|P| < p^4$，可得 $x^p = y^p > 1$。令 $R \in Syl_p(\langle rt\rangle)$，$Q \in Syl_p(\langle r\ell\rangle)$。则 $R \cap Q \leq \langle rt\rangle \cap \langle r\ell\rangle = 1$，且 $RQ \subseteq P$。特别地，可得 $|R||Q| \leq |P| < p^4$。这说明

$x_p = y_p = p$，因此 $2 \le d < 4$。对于情形 (1)，$\{x, y\} = \{2p, pn\}, |G| = 2p^d n$；对于情形 (2)，$\{x, y\} = \{2pa, 2pb\}, |G| = 4p^d ab$；对于情形 (3)，$\{x, y\} = \{4p, jp\}, |G| = 8p^d j$。将 x、y 和 $|G|$ 代入公式（$*$），可得：情形 (1) 中 $n = 2(p^{5-d-1}p-1 + {}^{2}p-1)$；情形 (2) 中 $pab - a - b = p^{4-d}$；情形 (3) 中 $2pj - j = p^{5-d} + 4$。第一种情形不可能发生，因为 ${}^{2}p-1$ 永远不是 $p \ge 5$时的整数；第二种情形由引理 3.10 排除。对于第三种情形，由于等式 $2pj - j = p^{5-d} + 4$的左边能被 3 整除，因此 $d = 2$且 $p \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$。但此时，等式 $2pj - j = p^{5-d} + 4$的左边能被 9 整除，而右边不能，矛盾。因此 $p \nmid xy$。这意味着 M 是一个欧拉示性数为 $-p^{4-d}$的正则地图。由于 G 可解，由命题 2.13 可得 $d = 3$且 $\chi_M = -p$。因此 $|P| = p^3$。假设 P 不是初等阿贝尔群。那么 P 的特征子群 K 也是 p 阶正规子群，记为 K，其阶为 p^2。考虑由 K 诱导的商映射 $|G/M|$，这与 $K < P$矛盾。因此 P 是秩 3 的初等阿贝尔群，且只有情形 (2) 和情形 (3) 可能出现。

假设情形 (2) 成立。那么 $ab - a - b = p$，$G = P \rtimes H$，其中 $H \cong G(a, b)$ 是某个子群，且 M 的类型为 $\{2a, 2b\}$。考虑 H 在 P 上的共轭作用。我们断言，P 没有非平凡的 H-不变子群。为此，假设 P 有一个非平凡的 H-不变子群，记为 T。那么 $T \trianglelefteq G$，因此由 T 诱导的 M 的商映射的欧拉示性数为 $-p^2$ 或 $-p^3$。然而，由命题 2.13 和 [25,定理 1.1], 可知，$p \nmid |G/T|$。这意味着 $T = P$，与 $T < P$ 矛盾。令 A 和 B 分别为 H 中阶为 a 和 b 的子群。我们断言，A 和 B 都不在 P 上平凡作用。为此，不妨设 A 在 P 上平凡作用（B 在 P 上平凡作用的分析类似）。那么 $A \trianglelefteq G$，由 A 诱导的 M 的商映射的类型为 $\{2, 2b\}$。这意味着

$$4 \cdot 5^3 \cdot ab \le 4p^3 ab = |G| = |A||G/A| \le a \cdot 8b,$$

这显然是一个矛盾。根据命题 2.2，我们知道 $H/C_H(P) \cong G(a', b')$ 同构于 GL(3, p) 的一个不可约子群，其中 $a' > 1$ 和 $b' > 1$ 分别是 a 和 b 的因子。根据群表示中著名的克利福德理论，我们推得 G(a′,b′) 的阶为 a′b′ 的正规子群 L 是不可约的。回想一下，一般线性群的每个不可约循环子群都是某个 Singer 循环群的子群（例如参见 [3, 定理 2.32、2.33]）。但是，根据命题 2.9, GL(3, p) 的一个不可约循环子群的正规化子同构于$\mathbb{Z}_{p^3-1} \rtimes \mathbb{Z}_3$。因此，G(a′,b′) 同构于 $\mathbb{Z}_{p^3-1} \rtimes \mathbb{Z}_3$ 的一个子群，这显然是一个矛盾。

假设为情形 (3)。那么，对于某个子群 $S \cong G(j)$，有 $j - 4 = p$、$G = P \rtimes S$，且 $\mathcal{M}$ 的型为$\{4, j\}$。理由与情形 (2) 相同，我们知道 S 在 P 上不可约作用。设 S 的阶为 4 的正规子群为 D。假设 D 在 P 上平凡作用。那么 $D \trianglelefteq G$，因此由 D 诱导的 $\mathcal{M}$的商映射为 $\{2, j\}$ 型。因此

$$8 \cdot 5^3 \cdot j \le 8p^3 j = |G| = |D||G/D| \le 4 \cdot 4j,$$

这显然是一个矛盾。根据命题 2.2，我们得到 $S = S/C_S(P) \cong G(j')$ 同构于 GL(3, p) 的一个不可约子群，其中 j′ 是 j 的一个因数。不失一般性，可假设 $S/C_S(P) \le GL(3, p)$。由于 $\gcd(p+4, p+1) = \gcd(p+4,3)$，$\gcd(p+4, p-1) = \gcd(p+4,5)$，且 $\gcd(p+4, p^2+p+1) = \gcd(p+4, 13)$，由 $|GL(3, p)| = p^3(p-1)^3(p+1)(p^2+p+1)$可知 $j' = 3$、15 或 39。对于 $j' = 3$ 的情形（注意，当 $p = 5$时 $j' = 3$），由 $C_S(P)$ 诱导的 M 的商映射为 $\{3, 4\}$ 型。这意味着

$$8 \cdot 5^3 \cdot j \le 8p^3 j = |G| = |C_S(P)||G/C_S(P)| \le \frac{j}{3} \cdot 48,$$

这显然是一个矛盾。对于情形$j' = 39$，令$I \le S$为 13 阶子群。由于 13 整除$p^3 - 1$，但不整除 $p^2 - 1$，我们推得I是 GL(3, p) 的不可约子群。由命题 2.9,

I 在 GL(3, p)中的中心化子是阶为 p^3-1 的循环群，这与 D 中心化 I 但并非循环群这一事实矛盾。最后，剩下情形 $j'=15$，此时 $p\equiv 1 \pmod 5$。设 $D=\langle a, b\rangle$。那么我们可以找到元素 u、v、w $\in P$，使得 $P=\langle u\rangle\times\langle v\rangle\times\langle w\rangle$ 分解为一个 D-模。由 P 作为 S-模的不可约性可知，D 不固定 P 的任何非恒等元素。因此，我们可以假设相对于基 u、v、w，a 和 b 分别由对角矩阵 diag(1, −1, −1) 和 diag(−1, 1, −1) 表示。令 c $\in$S 为一个 5 阶元素。那么 c 与 $\langle a, b\rangle$ 交换，由此可知 $\langle u\rangle$、$\langle v\rangle$ 和 $\langle w\rangle$ 均被 c 稳定。因此，我们可以假设相对于基 u、v、w，c 由矩阵 diag(λ_1, λ_2, λ_3) 表示。由于 c $\notin$Z(S)，diag($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) 不可能是数量矩阵。因此，我们可以假设 λ_1 与 λ_2 和 λ_3 不同。令 d $\in$S 为一个 3 阶元素。由于 c 与 d 交换，根据 $\lambda_1\notin\{\lambda_2, \lambda_2\}$ 可知 d 稳定 $\langle u\rangle$。于是 $\langle a, b\rangle\rtimes\langle c, d\rangle\trianglelefteq$S 稳定 $\langle u\rangle$。但另一方面，应用克利福德定理，我们推得 $\langle a, b\rangle\rtimes\langle c, d\rangle$ 应在 P 上不可约地作用，这与 $\langle a, b\rangle\rtimes\langle c, d\rangle$ 稳定 $\langle u\rangle$ 这一事实矛盾。 □

3.3 欧拉示性数为 $-5^4, -7^4$ 或 -13^4 的$\mathcal{M}(G; r,t\ \ell)$的分类

本节将根据某些参数，刻画欧拉示性数为$-5^4, -7^4$ 或 -13^4 的正则地图$\mathcal{M}(G; r,t\ \ell)$。

以下引理对这些地图的自同构群作出初步刻画.

引理 3.15. 设$\mathcal{M}(G; r,t\ \ell)$是一个欧拉示性数为 $-p^4$（其中 $p\in\{5,7,13\}$）的正则地图。那么，$O_p(G)\cong\mathbb{Z}_p^3$ 是 G 的一个极小正规子群，并且以下情形之一成立：

(1) $p=5$，M 的型为 $\{4,6\}$，且 $G/O_5(G)\cong PGL(2, 5)$；
(2) $p=7$，M 的型为 $\{3,8\}$，且 $G/O_7(G)\cong PGL(2, 7)$；；
(3) $p=13$，M 的型为 $\{3,7\}$，且 $G/O_{13}(G)\cong PSL(2, 13)$；.

证明 记 M (G; r,t ℓ) 为 M。设 P $\in$Syl$_p$(G)，且 {x, y} 是 M 的类型。根据命题 3.4，我们推得 $|P|\geq p^4$。由定理 3.1 及其证明可知，$p\nmid xy$ 且 $|P : O_p(G)|\leq p$。因此，由 $O_p(G)$ 诱导的 M 的商映射的欧拉示性数为 $-p|_{p}\ O(G)|$。再结合 $|P : O_p(G)|\leq p$，可得 $|O_p(G)|=p^3$ 且 $|P|=p^4$。根据命题 2.12，有以下三种情形：{x, y} = {4,6} 且 G/O$_p$(G) $\cong$PGL(2, 5)；{x, y} = {3,8} 且 G/O$_p$(G) $\cong$PGL(2, 7)；或{x, y} = {3,7} G/O$_p$(G) $\cong$PSL(2, 13)。特别地，G 不可解。

我们证明 O$_p$(G) 是 G 的极小正规子群。若能证明这一点，则 O$_p$(G) $\cong\mathbb{Z}_p^3$将立即成立。反设存在 G 的正规子群 N，使得 $1<N<O_p(G)$。令 M 为由 N 诱导的 M 的商映射。则 M 的型为 {4,6} (或 {3,8}或 {3,7})，且 $\chi(M)=-p|N|$。假设 $|N|=p^2$。那么由命题 2.13 可知，这种商映射的型为 $\{3,13\}$，矛盾。假设 $|N|=p$。则由命题 2.14 可知 G/N 可解。这意味着 G 可解，这与 G 不可解这一事实矛盾，证毕。

□

注 3.16. 根据引理 3.15，具有 $\chi M=-5^4$（分别为 -7^4或 -13^4）的正则地图 M := M (G; r,t ℓ) 的自同构群，是由其一个三维不可约模扩张 PGL(2,5)（分别为 PGL(2, 7) 或 PSL(2,13)）得到的扩张。注意，对于给定的群 G 和一个 G-模 M，二次上同调群 H^2(G, M) 中的元素与由 M 扩张 G 得到的群一一对应，其中元素 0 对应于由 M 扩张 G 得到的分裂扩张。群 G = PGL(2,5)（分别为 PGL(2, 7)）有两个三维不可约模，其中恰有一个（分别记为 M（或 N））满足 H^2(G, M) = 0（分别为 H^2(G, N) = 0）。

给定一个非定向正则地图 M (G; r,t ℓ)，回忆一下，G 的约化表示是指用 tr 和 rℓ 表示的 G 的表示。设 M (PGL(2, 5); r_1,t1,ℓ_1)、M (PGL(2, 7); r_2,t2,ℓ_2) 和 M (PSL(2, 7); r_3,t3,ℓ_3) 分别是类型为 $\{4,6\}$、$\{8,3\}$ 和 $\{7,3\}$ 的正则地图。那么，PGL(2, 5)、PGL(2, 7) 和 PSL(2, 13) 的约化表示如下:

$$\mathrm{PGL}(2,5) = \langle R,S \mid R^4 = S^6 = (RS)^2 = (S^{-1}R)^3 = 1\rangle,$$

$$\text{(Pre.1)}\quad \mathrm{PGL}(2,7) = \langle \mathrm{R},\mathrm{S} \mid \mathrm{R}^8 = \mathrm{S}^3 = (\mathrm{RS})^2 = (\mathrm{SR}^{-2})^4 = 1\rangle,$$

$$\text{(Pre.2)}\quad \mathrm{PGL}(2,7) = \langle \mathrm{R},\mathrm{S} \mid \mathrm{R}^8 = \mathrm{S}^3 = (\mathrm{RS})^2 = ((\mathrm{SR}^{-2})^2\mathrm{R}^{-2})^2 = 1\rangle,$$

$$\mathrm{PSL}(2,13) = \langle R,S \mid R^7 = S^3 = (RS)^2 = ((SR^{-2})^4SR^3)^2 = 1\rangle.$$

现在，设$\mathcal{M}$(*G*; *r*,*t* ℓ)是欧拉示性数为 $-p^4$的正则地图，其中$p \in \{5,7,13\}$，并设$\bar{\mathcal{M}}$是由$O_p(G)$诱导的商映射。根据引理 3.15，我们可以将$O_p(G)$视为不可约$G/O_p(G)$-模，因此有以下七种情形:

(1) p $=5$ 且 H^2(G/O_5(G), O_5(G)) $=0$；(2) p $=5$ 且 H^2(G/O_5(G), O_5(G)) $\neq 0$；(3) p $=7$，H^2(G/O_7(G), O_7(G)) $=0$，且 Aut(M) 的约化表示为 (Pre.1)；(4) p $=7$，H^2(G/O_7(G), O_7(G)) $\neq 0$，且 Aut(M) 的约化表示为 (Pre.1)；(5) p $=7$，H^2(G/O_7(G), O_7(G)) $=0$，且 Aut(M) 的约化表示为 (Pre.2)；(6) p $=7$，H^2(G/O_7(G), O_7(G)) $\neq 0$，且 Aut(M) 的约化表示为 (Pre.1)；(7) p $=13$。 —

根据 这七种情形，我们定义如下七个群及其相关的正则地图 s:

$$\begin{aligned} G_1(a_1,b_1,c_1) := \quad & \langle w,s,z | w^4 = s^6 = z^5 = (ws)^2 = 1, (s^{-1}w)^3 = z^{a_1}(z^{s^2})^{b_1}(z^{s^4})^{c_1}, \\ & z^w = z^3(z^{s^4})^4, z^{s^2w} = (z^{s^2})^2(z^{s^4})^3, z^{s^4w} = (z^{s^4})^4, z^s = zz^{s^2}(z^{s^4})^2, \\ & z^{s^3} = z^2z^{s^2}z^{s^4}, z^{s^5} = z(z^{s^2})^2z^{s^4}, (z,z^{s^2}) = (z,z^{s^4}) = 1\rangle. \end{aligned}$$

其中 $(a_1,b_1,c_1) \in \mathbb{F}_5^3$ 且

$$\begin{aligned} G_2(a_2,b_2,c_2) := \quad & \langle w,s,z | w^4 = s^6 = z^5 = (ws)^2 = 1, (s^{-1}w)^3 = z^{a_2}(z^{s^2})^{b_2}(z^{s^4})^{c_2}, \\ & z^w = z(z^{s^2})^2z^{s^4}, z^{s^2w} = z^4z^{s^2}), z^{s^4w} = z^{s^2}(z^{s^4})^4, z^s = z^4(z^{s^2})^4(z^{s^4})^3, \\ & z^{s^3} = z^3(z^{s^2})^4(z^{s^4})^4, z^{s^5} = z^{s^2}, (z,z^{s^2}) = (z,z^{s^4}) = 1\rangle. \end{aligned}$$

其中 $(a_2,b_2,c_2) \in \mathbb{F}_5^3$ 且

$$\begin{aligned} G_3(a_3,b_3,c_3) := \quad & \langle w,s,z | w^8 = s^3 = (ws)^2 = z^7 = 1, (sw^{-2})^4 = z^{a_3}(z^s)^{b_3}(z^{s^{-1}})^{c_3}, \\ & z^w = z(z^s)^3(z^{s^{-1}})^6, z^{sw} = z^6z^s(z^{s^{-1}})^4, z^{s^{-1}w} = z^3(z^s)^3z^{s^{-1}}, \\ & (z,z^s) = (z,z^{s^{-1}}) = 1\rangle. \end{aligned}$$

其中 $(a_3,b_3,c_3) \in \mathbb{F}_7^3$ 且

$$\begin{aligned} G_4(a_4,b_4,c_4) := \quad & \langle w,s,z | w^8 = s^3 = (ws)^2 = z^7 = 1, (sw^{-2})^4 = z^{a_4}(z^s)^{b_4}(z^{s^{-1}})^{c_4}, \\ & z^w = z^3(z^s)^3(z^{s^{-1}})^5, z^{sw} = z^4(z^s)^5(z^{s^{-1}})^3, z^{s^{-1}w} = z^5(z^s)^4(z^{s^{-1}})^3, \\ & (z,z^s) = (z,z^{s^{-1}}) = 1\rangle. \end{aligned}$$

其中 $(a_4,b_4,c_4) \in \mathbb{F}_7^3$ 且且

$$\begin{aligned} G_5(a_5,b_5,c_5) := \quad & \langle w,s,z | w^8 = s^3 = (ws)^2 = z^7 = 1, ((sw^{-2})^2w^{-2})^2 = z^{a_5}(z^s)^{b_5}(z^{s^{-1}})^{c_5}, \\ & z^w = z^{s^{-1}}, z^{sw} = z^6(z^s)^2(z^{s^{-1}})^2, z^{s^{-1}w} = z^s, \\ & (z,z^s) = (z,z^{s^{-1}}) = 1\rangle. \end{aligned}$$

其中 $(a_5,b_5,c_5) \in \mathbb{F}_7^3$ 且

$$\begin{aligned} G_6(a_6,b_6,c_6) := \quad & \langle w,s,z | w^8 = s^3 = (ws)^2 = z^7 = 1, ((sw^{-2})^2 w^{-2})^2 = z^{a_6}(z^s)^{b_6}(z^{s^{-1}})^{c_6}, \\ & z^w = (z^s)^5 (z^{s^{-1}})^2, z^{sw} = z^6, z^{s^{-1}w} = (z^s)^5 (z^{s^{-1}})^5, \\ & (z, z^s) = (z, z^{s^{-1}}) = 1 \rangle. \end{aligned}$$

其中 $(a_6,b_6,c_6) \in \mathbb{F}_7^3$ 且

$$\begin{aligned} G_7(a_7,b_7,c_7) := \quad & \langle w,s,z | w^7 = s^3 = (ws)^2 = z^{13} = 1, z^w = z^9 (z^s)^5 (z^{s^{-1}})^2, z^{sw} = z^{12}, \\ & z^{s^{-1}w} = z^6 (z^s)^{11} (z^{s^{-1}})^2, (z, z^s) = (z, z^{s^{-1}}) = 1, \\ & ((sw^{-2})^4 sw^3)^2 = z^{a_7}(z^s)^{b_7}(z^{s^{-1}})^{c_7} \rangle \end{aligned}$$

其中 $(a_7,b_7,c_7) \in \mathbb{F}_{13}^3$。显然，对于 $1 \le i \le 7$，以及任意三元组 $(a_i,b_i,c_i) \neq (0,0,0)$，群 $G_i(a_i,b_i,c_i)$ 可由 r 和 s 生成，且其中心平凡。对于任意 $1 \le i \le 7$，由 [23, 定理 7.7] 可知，对于 $i = 1, 2$（分别对于 $i = 3$、4、5、6，或对于 $i = 7$），在同构和对偶意义下，只有一个类型为 $\{4,6\}$ 且自同构群为 $G_i(a_i,b_i,c_i)$ 的正则地图，我们将其记为 $M_i(a_i, b_i, c_i)$。

为方便起见，令 $p_1 = p_2 = 5$、$p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 7$ 且 $p_7 = 13$。容易得出，对于 $1 \le i \le 7$ 和 $1 \le j \le p_i - 1$，$M_i(a_i, b_i, c_i) \cong M_i(ja_i, jb_i, jc_i)$。因此，对于 $1 \le i \le 7$，可以说 $M_i(a_i, b_i, c_i)$ 对应于 $PG(2, p_i)$ 中的一个射影点 (a_i, b_i, c_i)。若 $(a_i, b_i, c_i) \neq (0, 0, 0)$，且 $M_i(a_i, b_i, c_i)$ 的欧拉示性数为 $-p_i^4$，则称其为 $PG(2, \mathbb{F}_{p_i})$ 中的可容许点；也就是说，$|G_i(a_i, b_i, c_i)| = {}^4 x_i y_i p_i^4 x_i y_{i-2} x_{i-2} y_i$，其中 $\{x_i, y_i\}$ 是 $M_i(a_i, b_i, c_i)$ 的类型。因此，要确定点 $(a_i, b_i, c_i) \neq (0, 0, 0)$ 是否为可容许点，只需检查 $G_i(a_i, b_i, c_i)$ 的阶。

对于 $1 \le i \le 7$，令 $N_i(a_i, b_i, c_i)$ 为 z 在 $G_i(a_i, b_i, c_i)$ 中的正规闭包，并令 Ω_i 为欧拉示性数为 $-p_i^4$、且 G 满足上述情形 (i) 的正则地图 M (G; r,t ℓ) 的集合（模同构与对偶性）。令 X_i 为 $GL(3, p_i)$ 中的矩阵，它表示 w 在 $N_i(a_i, b_i, c_i)$ 上相对于基 $z, z^s, z^{s^{-1}}$（或当 $i = 1$ 时为 z, z^{s^2}, z^{s^4}）的作用；令 Y_i 为 $GL(3, p_i)$ 中对应置换 (123) 的置换矩阵。设 $M_i := Y_i X^{-2} i$ 对于 $i = 1, 2$，$M_i := Y_i X_i^{-2}$ 对于 $i = 3, 4$，$M_i := (Y_i X_i^{-2})^2 X_i^{-2}$ 对于 $i = 5, 6$，而 $M_i := (Y_i X^{-2} i)^4 Y_i X_i^3$ 对于 $i = 7$。于是有以下结论：

命题 3.17. 设 $1 \le i \le 7$。那么，任意可容许点 (a_i,b_i,c_i) 都是矩阵 M_i 的特征值为1 的特征向量，并且 Ω_i 中的正则地图与 $PG(2,\mathbb{F}_{p_i})$ 中的可容许点一一对应。

证明 由于七种情形的证明完全相似，我们只证明情形 $i = 1$。设 M := M (G; r,t ℓ) $\in \Omega_1$ 是一个欧拉示性数为 -5^4 的正则地图，并令 R := rt、S := rℓ。由引理 3.15 可知，M 的型为 $\{4,6\}$，$O_5(G) \cong \mathbb{Z}_5^3$，且 $G := G/O_5(G) \cong PGL(2, 5)$。这意味着 M (G; r,t ℓ) 是一个型为 $\{4,6\}$ 的非定向正则地图。由 PGL(2, 5) 的表示可知，R 和 S 满足 $(RS^{-2})^4 = 1$，即 $(RS^{-2})^4 \in O_5(G)$。若 $(RS^{-2})^4 = 1$，则由 $G = \langle R, S \rangle$ 和 $R^4 = S^6 = (RS)^2 = (RS^{-2})^4 = 1$ 可得 $5^3 \cdot 120 = |G| \le |PGL(2, 5)| = 120$，这与结论矛盾。因此 $(RS^{-2})^4 \neq 1$。根据假设，正合列 $1 \to O_5(G) \to G \to G/O_5(G) \to 1$ 是非分裂的。因此 $H^2(G, O_5(\overline{G})) \neq 0$，其中 $O_5(G)$ 被视为由 G 在 $O_5(G)$ 上的共轭作用所诱导的 G-模。考虑由 $O_5(G)$ 赋予的三维表示，记为 $\rho : G \to GL(3, 5)$。那么 $\rho(S^2)$ 与由置换 (123) 给出的置换矩阵相似，其变换矩阵为 X。由此可知，只有三个元素 z、z^{S^2}、$z^{S^4} \in O_5(G)$（相差一个幂次）满足 $O_5(G) = \langle z, z^{S^2}, z^{S^4} \rangle$，而 R 在 $O_5(G)$ 上的共轭作用由矩阵 $X^{-1}\rho(R)X$ 给出。矩阵 $X^{-1}\rho(R)X$ 不变，当且仅当 z 在相差一个幂次的意义下不变。现在固定 z，使得 $X^{-1}\rho(R)X$ 对应于 w 在表示 $G_1(a_1, b_1, c_1)$ 中对 z、z^{s^2} 和 z^{s^4} 的作用。由于 $(RS^{-2})^4 \in O_5(G)$,

存在非负整数 a、b 和 c，使得 $(RS^{-2})^4 = z^a(z^{S^2})^b(z^{S^4})^c$。显然，$(a, b,c) \neq (0,0, 0)$，因为 $(RS^{-2})^4 \neq 1$。因此，以 R、S 和 z 表示的 G 的表示，与以 r、s 和 z 表示的 $G_1(a, b, c)$ 的表示相同。这意味着对于某个可容许点 (a, b,c)，M 同构于 $M_1(a, b, c)$。根据定义，M_1 是相对于基 z、z^{s^2} 和 z^{s^4}，由 RS^{-2} 在 $O_5(G)$ 上的作用给出的矩阵；又由于 RS^{-2} 中心化其任意幂次，因此 (a, b,c) 是矩阵 M_1对应于特征值 1 的特征向量。

为完成证明，只需证明对于 $PG(2,\mathbb{F}_5)$ 中任意两个不同的可容许点 (a_1,b_1,c_1) 和 (a'_1, b'_1, c'_1)，$M_1(a_1, b_1,c_1)$ 与 $M_1(a'_1, b'_1, c'_1)$ 不同构。反设对于两个不同的可容许点 (a_1,b_1,c_1) 和 (a'_1, b'_1, c'_1)，$M_1(a_1,b_1,c_1)$ 与 $M_1(a'_1, b'_1, c'_1)$ 同构。令 $G_1 := G_1(a_1,b_1,c_1)$，$G'_1 := G_1(a'_1, b'_1, c'_1)$，并令 $M(G_1; r_1,t1,\ell_1)$ 和 $M(G'_1; r'_1,t'_1, \ell'_1)$ 分别表示正则地图 $M_1(a_1,b_1,c_1)$ 和 $M_1(a'_1, b'_1, c'_1)$。于是根据假设，存在一个同构 $\varphi: G_1 \to G'_1$，满足 $\varphi(r) = r'$，$\varphi(t) = t'$，且 $\varphi(\ell) = \ell'$。令 $R_1 := r_1t_1, S_1 := r_1\ell_1$，$R'_1 := r'_1t'_1$，$S'_1 := r'_1\ell'_1$，并分别以 z_1 和 z'_1 表示 $O_5(G_1)$ 和 $O_5(G'_1)$ 中由前一段的规则给出的唯一（相差一个幂次）元素。则 R_1,S_1 和 z_1（分别为 R'_1、S'_1 和 z'_1）满足 $G_1(a_1,b_1,c_1)$（分别为 $G_1(a'_1, b'_1, c'_1)$）表示中的 r、s 和 z 所满足的相同关系。由于 z_1（分别为 z'_1）由 S_1 和 R_1（分别由 S'_1 和 R'_1）唯一确定（相差一个幂次），其规则为 $O_5(G_1) = \langle z_1, z_1^{S_1^2}、z_1^{S_1^4}\rangle$（分别为 $O_5(G'_1) = \langle z'_1、z_1'^{S_1'^2}、z_1'^{S_1'^4}\rangle$），且 R_1（分别为 R'_1）对 $O_5(G_1)$（分别对 $O_5(G'_1)$）的共轭作用相对于此基由一个固定矩阵给出，因此对某个整数 $1 \leq m \leq 4$，有 $\varphi(z_1) = (z'_1)^m$。由 $\varphi((S_1R_1^{-2})^3) = (\varphi(S_1)\varphi(R_1)^{-2})^3 = (S'_1R_1'^{-2})^3$，可知，$m(a_1,b_1,c_1) = (a'_1, b'_1, c'_1)$。这与假设 (a_1,b_1,c_1) 和 (a'_1, b'_1, c'_1) 在 $PG(2,\mathbb{F}_5)$ 中表示不同的点矛盾。

□

By 由命题 3.17 及使用 MAGMA 进行直接计算，我们得到以下结论 l:

定理 3.18。 正则地图 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G;\ r,t\ \ell)$ 的欧拉示性数为 $-p^4$，其中 $p \in \{5,7,13\}$，当且仅当以下条件之一成立：

(1) $p = 5$，$\mathcal{M}$与 $\mathcal{M}_1(1,3,4)$ 同构，或与其对偶同构；(2) $p = 7$，
$\mathcal{M}$与 $\mathcal{M}_4(1,1,4)$ 同构，或与 $\mathcal{M}_6(1,1,3)$ 同构，或与它们的对偶同构；
(3) $p = 13$，$\mathcal{M}$与 $\mathcal{M}_7(1,7,6)$ 同构，或与其对偶同构。

致谢： 第一作者得到国家自然科学基金（资助项目编号：12350710787、12571016）的部分资助，第二作者得到国家自然科学基金（资助项目编号：12471332）的部分资助。

数据可用性声明 由于本研究未创建或分析任何新数据，因此本文不适用数据共享。

利益披露声明 所有作者均不存在任何相关的财务或非财务利益冲突。

参考文献

[1] W. Bosma、J. Cannon 和 C. Playoust。（1997）MAGMA 代数系统 I：用户语言。J. Symbolic Comput., 24, 235-265.[2] R.P. Bryant 和 D. Singerman，带边界曲面上的地图理论基础，*Quart. J. Math. Oxford Ser.*, **36** (1985), no. 141, 17-41.[3] M. Short，度小于 *256* 的本原可解置换群，数学讲义 1519，Springer- Verlag，1992。

[4] D. A. Catalano、M. Conder、S. F. Du、Y. S. Kwon、R. Nedela 和 S. E. Wilson，n维立方体的正则嵌入分类，《代数组合论杂志》，33(2011)(2), 215-238.[5] M. Conder，正则地图、超映射和多胞体、三价对称图以及曲面作用列表，https://www.math.auckland.ac.nz/ conder/.[6] M. Conder、S.F. Du、R. Nedela 和 M. ˇSkoviera，具有幂零自同构群的正则地图，《代数组合论杂志》，44 (2016), 863-874.[7] M. Conder 和 P. Dobcsˇanyi，小亏格正则地图的全部确定，《组合理论杂志B辑》，81 (2001) 224-242.[8] M. Conder、N. GIll 和 J. ˇSir´aˇn，具有负素数幂欧拉示性数的非定向正则地图，arXiv: 2507.03667v1.[9] M. Conder、R. Nedela 和 J. ˇSir´aˇn，欧拉示性数为 $-3p$ 的正则地图分类，《组合理论杂志B辑》，102 (4) (2012) 967-981.[10] M. Conder、P. Potoˇcnik 和 J. ˇSir´aˇn，具有几乎西洛循环自同构群的正则地图，以及欧拉示性数为 $-p$ 的正则地图分类[2]，《代数杂志》，324 (2010), 2620-2635.[11] M. Conder、J. ˇSir´aˇn 和 T.W. Tucker，正则地图的亏格、可反射性和单性，《欧洲数学会杂志》，12 (2010), no. 2, 343-364.[12] A. D'azevedo、R. Nedela 和 J. ˇSir´aˇn，负素数欧拉示性数正则地图的分类，《美国数学会汇刊》，357 (2004), 4175-4190.[13] W. Feit 和 J. Thompson，奇数阶群的可解性，《太平洋数学杂志》，13 (1963), 775-1029.[14] A. Gardiner、R. Nedela、J. ˇSir´aˇn 和 M. ˇSkoviera，刻画闭曲面上正则地图所依托的图，《伦敦数学会杂志》，59 (1999), no. 1, 100-108.[15] D. Gorenstein 和 J. H. Walter，具有二面体 Sylow 2-子群的有限群的刻画 I，《代数杂志》，2 (1965), 85-151.[16] B. Huppert，《有限群 I》，Springer，柏林，1979.[17] M. Isaacs，有限群论，美国数学会，卷 92，2008.[18] M. Isaacs，《有限群的特征标理论》，学术出版社，纽约-伦敦，1976.[19] L.D. James 和 G.A. Jones，完全图的正则可定向嵌入，《组合理论杂志B辑》，39 (1985), 353-367.[20] G.A. Jones 和 D. Singerman，可定向曲面上的地图理论，《伦敦数学会会刊》，37 (1978), 273-307.[21] C.H. Li 和 J. ˇSir´aˇn，其群在顶点、边或面的集合上不忠实作用的正则地图，《欧洲组合论杂志》，26 (2005) 521-541.[22] J.C. Ma，欧拉示性数为 $-2p$ 的可定向正则映射[2]，《欧洲组合论杂志》，96 (2021) 论文编号 103366, 16 页.[23] R. Nedela 和 M. ˇSkoviera，可定向映射的指数，《伦敦数学会会刊》75 (1997) 1-31.[24] M. Suzuki，《群论 II》，施普林格出版社，纽约等地，1985.[25] Y. Tian 和 X.G. Li，欧拉示性数为负素数立方的正则地图分类，《代数组合论杂志》60 (2024) 1071-1088。