arXiv:2601.11009v1 [math.GN] 16 Jan 2026

关于可数框架的注记

XIAODONG JIA，XIAOYONG XI

Abstract. Matthew de Brecht提出了一个问题：可数框架是否都是连续格。我们证明，可数框架的连续性意味着其对应谱在对偶特化序下具有拟连续性。我们进一步证明，若框架的谱是一个 T_1 空间或Scott空间，则这一问题的答案是肯定的。一般而言，我们确认非连续可数框架确实存在。本文还部分解答了Jimmie Lawson和Michael Mislove于1990年提出的一个未解决问题，该问题旨在刻画空间框架的谱何时为Scott空间。

1. Introduction

在天元数学研究中心（TYMC）举办的域理论及其应用研讨会（2025年12月14日至20日）上，Matthew de Brecht提出，可数框架是否确实都是连续格。由于每个可数框架都是空间化的 [2, 引理1，1], 根据Stone对偶，可数框架的谱恰好是仅有可数个开集的朴素拓扑空间。根据Hofmann-Mislove定理 [4, 定理II-1，20], 具有连续开集格的Sob 空间恰好是局部紧 Sob 空间 [5, 定理8.3。10]因此，de Brecht的问题等价于询问：每个仅有可数个开集的Sob 拓扑空间是否确实都是局部紧的。本文证明，当这样的空间是 T_1时，它确实是局部紧的（甚至是有限的）；而当它是赋予Scott拓扑的有向完备偏序集（dcpo）时，即当它是*Scott*空间时，它是Dana Scott域理论意义下的拟代数领域。在后一种情况下，我们证明所讨论的可数框架必定是连续的。这部分解答了Jimmie Lawson和Michael Mislove在 [9, 问题 528], 中提出的未解决问题，即刻画空间框架的谱何时为Scott空间。

然而，一般而言，我们给出了一些例子，说明存在并非连续的可数框架。因此，de Brecht 的问题通常有一个否定的答案。

2. Preliminaries

2.1. 序与拓扑。 我们将使用有向完备偏序集的概念，简称$dcpo$。它们是所有有向子集都有上确界的偏序集。设 P 为一个偏序集，且 $x \in P$，我们用 $\uparrow x$ 表示 $\{y \in P \mid x \leq y\}$。对于 $A \subseteq P$，设 $\uparrow A = \bigcup_{x \in A} \uparrow x$。如果子集 A 满足 $A = \uparrow A$，则称其为P 的一个上集。对偶地，我们可以定义 $\downarrow x$、$\downarrow A$ 和下集。在偏序集 P中，若上子集 O 满足：对于 P的任意有向子集 D ，只要其上确界 $\sup D$ 存在，且 $\sup D \in O$，便有 $D \cap O \neq \emptyset$，则称 O 为*Scott*开集。 P的所有 Scott 开集构成其上的*Scott*拓扑 σP 。赋有 Scott 拓扑的 dcpo 称为*Scott*空间。我们

Key words and phrases. 框架、Stone对偶、领域、代数领域。本研究是在 TYMC 举办的域理论及其应用研讨会（2025年12月14日至20日）期间开展的。

还将在 P上使用上拓扑，它以有限子集 F 的集合 $\downarrow F$ 为子基闭集生成。

在拓扑空间 X 上， X 上的特化预序 $\leq$ 定义为：当且仅当 x 属于 $\{y\}$ 的闭包时， $x \leq y$ ，其中 $x,\ y \in X$。空间 X 是 T_0 的，当且仅当预序 $\leq$ 是 X 上的偏序。本注中只考虑 T_0 空间；除非另有说明，空间上使用的序均为特化序。 X 的一个 不可约子集 A 是指满足以下条件的集合：对于任意闭子集 B 和 C， $A \subseteq B \cup C$ 蕴含 $A \subseteq B$ 或 $A \subseteq C$ 。*Sober*空间是指每个不可约闭子集都是某个唯一单点集的闭包的空间。每个 Sober 空间都是 T_0 空间，甚至是一个单调收敛空间 [4,（习题 O-5）：特化序使 X 成为一个有向完备偏序集，而 X 上原有的开集都是 Scott 开集。取 Sober 空间 X 中的一个闭子集 C 。于是 C 是 X 中的 Scott 闭集，因此 C 中的每个元素都小于或等于集合 $\max C$ （即 C 的所有极大元组成的集合）中的某个元素。

2.2. 域理论。Dana Scott 的域理论 [4, 1] 为函数式编程语言的指称语义 P提供了一个通用的数学框架。在偏序集 P中，若对于每个有向子集 $D \subseteq P$ ，只要其上确界 $\sup D$ 存在，且 $y \leq \sup D$ ，就有 $x \leq d$ 对某个 $d \in D$成立，则称元素x y远低于 $x \ll y$ ，记作 y。我们用 $\mathop{\downarrow} y$ 表示集合 $\{x \in P \mid x \ll y\}$。若对每个 $y \in P$，集合 $\mathop{\downarrow} y$ 都是有向的，且 $y = \sup \mathop{\downarrow} y$，则称偏序集 P为连续偏序集。连续的有向完备偏序集通常称为连续域，或简称领域。若对每个 $y \in P$，集合 $\{x \in P \mid x \ll x \leq y\}$ 都是有向的，且其上确界为 y ，则称偏序集 P 为代数的。代数的有向完备偏序集称为代数域。显然，代数域都是连续域。偏序集上的远低于关系可以推广为偏序集子集之间的关系。在偏序集 P中，若对于每个有向子集 $D \subseteq P$，只要其上确界 $\sup D$存在，且 $\sup D \in \uparrow G$，就有 $d \in \uparrow F$ 对某个 $d \in D$成立，则称子集 F 远低于子集 G，记作 $F \ll G$。若对每个 $x \in P$，由 P 中所有远低于 x 的有限子集构成的集合 $\mathrm{fin}(x) = \{F \ll x \mid F \subseteq_{\mathrm{fin}} P\}$ 在 Smyth预序 $\sqsubseteq$下是有向的，且 $\uparrow x = \bigcap_{F \in \mathrm{fin}(x)} \uparrow F$，其中 $F \sqsubseteq G$ 当且仅当 $G \subseteq \uparrow F$，则称偏序集 P 为拟连续偏序集。拟连续的有向完备偏序集称为拟连续域。此外，若对每个 $x \in P$，集合 $\mathrm{fin}_c(x) = \{F \subseteq_{\mathrm{fin}} P \mid F \ll F \ll x\}$ 在 Smyth预序下是有向的，且 $\uparrow x = \bigcap_{F \in \mathrm{fin}_c(x)} \uparrow F$，则称 P 为拟代数的。类似地，拟代数的有向完备偏序集称为拟代数域。容易看出，代数域是拟代数的，而连续域是拟连续的。拟连续域（因而拟代数域和连续域）在 Scott拓扑下是素性的。有向完备偏序集之间的态射总是指 Scott连续的态射，也就是保持有向子集上确界的单调映射。

2.3. **Stone对偶**。 著名的Stone对偶在 T_0 拓扑空间范畴与框架范畴之间建立了一个伴随。当限制在素性空间和空间化框架上时，这个伴随便成为范畴等价。一般而言，框架是一个完备格，其中有限下确界对任意上确界分配；相应地，框架之间的态射是保持有限下确界和任意上确界的映射。空间化框架是指这样的框架：其中每个元素 x都可以写成所有高于 x的<styled id='7'>素元的下确界。在Stone对偶中，每个 T_0 拓扑空间 X 都映射到其开集格 $\mathcal{O}(X)$，这是一个空间化框架；反过来，每个框架 L 都映射到由其所有素元构成、配备<styled id='15'>闭包-核拓扑的集合。由此得到的空间称为 L 的<styled id='17'>谱，并且总是素性空间。 L的谱记作 $\mathrm{pt}(L)$。关于Stone对偶的精彩介绍，读者可参阅 [5, 第 8]章。由于每个可数框架都是空间化的 [2, 引理1.1], ，可数框架的谱恰好是具有可数个开集的朴素拓扑空间；反过来，这类空间的斯通对偶显然是可数框架。

2.4. **Lawson 和 Mislove 的开放问题**。 Stone对偶可以限制到许多素性空间的子类及其对应的空间化框架类。举例来说，我们有

- 域范畴（赋予 Scott 拓扑）与完全分配格范畴对偶 [10];
- 拟连续域范畴（赋予 Scott 拓扑）与分配超连续格范畴对偶 [4,命题VII-3.8];
- 局部紧素空间范畴与分配连续格范畴对偶 [4, 命题 V-5.20]。

在前两条中，我们注意到谱上的包核拓扑与 Scott 拓扑一致。然而，在第三条中，谱是局部紧 Sob 空间，其上的（包核）拓扑未必是由特化序导出的 Scott 拓扑。换言之，与前两种情况不同，谱未必是 Scott 空间。Jimmie Lawson 和 Michael Mislove 在 [9, 问题 528] 中提出了这样的问题：刻画哪些分配连续格的谱是 Scott 空间。我们将看到，若一个框架 L 是可数的（不假设连续性），那么在若干等价性质中，pt(L) 是 Scott 空间等价于 L是连续的。参见定理 4.3。

3. The general case

引理 3.1. 设 X 是一个朴素拓扑空间。若 C 是 X 的闭子集，且 极大元C 是无限集，则 X 的开集格 $\mathcal{O}(X)$ 不可数。

证明。 由于 Sob 空间是单调收敛空间，对于每个非空闭子集 C，其极大元集合 $\max C$ 都非空。我们首先断言，对于 X的每个闭子集 C，如果 $\max C$是无限集，那么存在某个 $c \in \max C$，使得 c 有一个开邻域 U_c，满足 $\max C \setminus U_c$ 是无限集。假设该断言不成立，那么存在 X 的一个闭子集 C，且 $\max C$是无限集，使得对于每个 $c \in \max C$以及 c的每个开邻域 U_c，集合 $\max C \setminus U_c$都是有限的。任取满足 $U \cap \max C \neq \emptyset$且 $V \cap \max C \neq \emptyset$的开子集 U，V。于是我们知道，$\max C \setminus U$ 和 $\max C \setminus V$都是有限集。因此，它们的并集 $\max C \setminus (U \cap V)$是有限集，而 $U \cap V \cap \max C$是无限集，所以 $U \cap V \cap \max C \neq \emptyset$。这表明 C 是一个不可约闭集。由于 X是一个朴素拓扑空间，$C = \downarrow \max C$必定是某个单点集的闭包。但 $\max C$是无限集。这是不可能的。因此，该断言成立。

现在根据该断言，我们知道存在一个 $x_1 \in A$ 和一个包含 x_1 的开集 U_1，使得 $\max C \setminus U_1$ 是无限的。注意， $C \setminus U_1$ 是闭集，且 $\max(C \setminus U_1) = \max C \setminus U_1$ 是无限的。再次对 $C \setminus U_1$ 应用该断言，我们找到一个 $x_2 \in \max C \setminus U_1$ 和一个包含 x_2 但不包含 x_1 的开集 U_2（如果 U_2 包含 x_1，则将 U_2 更新为 $U_2 \setminus \downarrow x_1$），使得 $\max C \setminus (U_1 \cup U_2)$ 是无限的。无限次重复这一过程，我们得到一个点列 $x_1, x_2, \cdots x_i, \cdots, i \in \mathbb{N}$ 和一个开子集列 $U_1, U_2, \cdots, U_i, \cdots, i \in \mathbb{N}$，满足对每个 $i \in \mathbb{N}$， $x_i \in U_i$ 都不包含 x_j，其中 $j < i$。注意，对于 $j > i$， x_j 是在 $\max C \setminus \bigcup_{k \leq j-1} U_i$ 中选取的。因此，对于 $j > i$， U_i 也不包含 x_j。也就是说，对于 i， $x_i \in U_j$ 当且仅当 $i = j$， $j \in \mathbb{N}$。

现在取 $I, J \subseteq \mathbb{N}$，并假设 $k \in I \setminus J$ 对于某个 $k \in \mathbb{N}$成立。那么 x_k 是$\bigcup_{i \in I} U_i$ 中的一个元素，但不属于$\bigcup_{j \in J} U_j$。因此，$\bigcup_{i \in I} U_i, I \subseteq \mathbb{N}$ 构成 X 的一个开子集族，而且这个族是不可数的。□

引理 3.2。 设 X 是朴素拓扑空间。若 X 的开集格 $\mathcal{O}(X)$ 是可数的，则 X 上的拓扑是关于特化序的 X 上的上拓扑。特别地，所有闭集都具有 $\downarrow F$ 的形式，其中 X的某个有限子集为 F。

证明。 显然，上拓扑比 X上的拓扑更粗。这是因为 X 是素性的，因此 T_0，而上拓扑是能够恢复 X上的特化序的最粗 T_0 拓扑。

反之，设 C 是 X 的闭子集。由于 X 是素性的，根据单调收敛 [4, 练习 O-5。15]，因而 C 在特化序下是 Scott 闭的。于是我们知道 $C = {\downarrow}\max C$。由于 $\mathcal{O}(X)$ 是可数的，根据引理 3.1 的逆否命题，max C 是有限的。显然，$C = {\downarrow}\max C$ 在 X 上的上拓扑中是闭集。□

下面两个推论是引理 3.2 的直接结果。

推论 3.3。 设 X 是素性的 T_1 拓扑空间。若 X 的开集格 $\mathcal{O}(X)$ 是可数的，则 X，从而 $\mathcal{O}(X)$ 必须是有限的。

证明。 注意到 X 是闭集，并且由于 X 是 T_1，有 $X = \max X$。因此，根据引理 3.2， X 是有限的。 □

推论 3.4。 设 L 是一个可数框架。若 $\mathrm{pt}(L)$， L 的谱是 T_1，则 L 是有限的。

证明。 由于 L是可数框架，根据引理 1.1]，它是空间化的 [2, 。因此，谱空间 pt(L) 是一个素性 T_1 空间，其开集格与 L同构，所以 pt(L) 的开集族是可数的。于是，该结论是推论 3.3 的推论。□

定理 3.5。 设 X 是具有可数开集格 $\mathcal{O}(X)$ 的素性拓扑空间。考虑以下命题：

(1) $\mathcal{O}(X)$ 是连续域；*(2)* $\mathcal{O}(X)$ 是代数域；*(3)* $(X, \geq)$，其中 $\geq$ 是 X上的特化序的对偶，是拟连续偏序集；*(4)* $(X, \geq)$，其中 $\geq$ 是 X上的特化序的对偶，是拟代数偏序集。

那么，(1) 等价于(2)，且(1) 或(2) 均蕴含(3) 和(4)。如果$(X, \geq)$ 是有向完备偏序集，那么这四个命题彼此等价。

证明。 由于 $\mathcal{O}(X)$是可数的，（1）与（2）之间的等价性已在 [8], 中证明，作者在其中证明了可数连续域实际上是代数域。

对于从（2）到（4）的推导，我们注意到 $\mathcal{O}(X)$与 X 的闭子集集合（$\mathcal{C}(X)$ $\supseteq$）在反包含序下序同构。根据引理 3.2， X 的所有闭子集都具有 $\downarrow F$的形式，其中 F是 X的有限子集。假设 $\mathcal{O}(X)$是代数的。因此（$\mathcal{C}(X)$ $\supseteq$）是代数的。可以看出，在 $\mathcal{C}(X)$中， $\downarrow F \ll \downarrow F \ll \downarrow x$ 蕴含 $F \ll F \ll x$ 属于（X， $\geq$）。因此， $\mathcal{O}(X)$的代数性蕴含（X， $\geq$）的拟代数性。

（4）蕴含（3）显然，因为拟代数域总是拟连续的。

现在考虑 $(X, \geq)$ 是一个有向完备偏序集。我们通过证明 (1) 与 (3) 等价来完成证明。根据 [6, 命题 4.5], ，一个有向完备偏序集 P 是拟连续的，当且仅当所有$\uparrow F$（其中 F是 P 的有限子集）按反包含序构成一个连续域[1]。将此结果应用于 $(X, \geq)$，可得 $(X, \geq)$ 是拟连续的，当且仅当所有 $\downarrow F$（其中 F是 X 的有限子集）按反包含序构成一个连续域。引理 3.2 告诉我们，所有这类 $\downarrow F$ 恰好就是 X 的所有闭子集。因此，$(X, \geq)$ 是拟连续的，当且仅当 $\mathcal{O}(X)$ 是连续的。□

鉴于定理 3.5，我们现在给出一个不是连续格的可数框架。

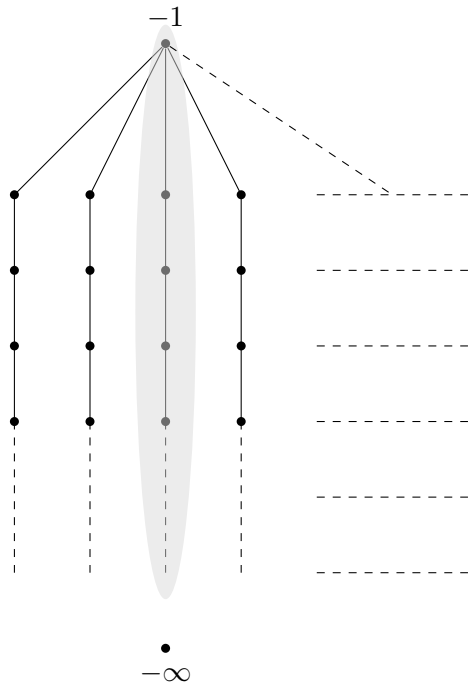


FIGURE 1. P

例 3.6。 考虑通过取无穷多个互不相交的扩展负数副本 P，其中 $-\infty$ （具有通常的序），并在 $-\infty$ 和 -1处将它们粘合起来而得到的完备格。偏序集 P 如图 1 所示。对于负数的副本（不含 $-\infty$），我们称其为 P的列。例如，在图 1 中，灰色区域内的元素构成 P的一列。我们赋予 P 上拓扑 νP。可以验证， P 的闭子集具有 $\downarrow F$的形式，其中每个 F 都是 P的有限子集。于是，对于形如 $\downarrow F$的真闭子集， F 只在有限多个列上取值。因此， P 上的所有开集构成一个可数框架。此外，由于 P 是一个完备格， P 在上拓扑 [12,下是素性的7]。然而， P 的对偶序是一个典型的、非拟连续的完备格。根据定理 3.5，开集格 νP 不可能是连续格。

注 3.7。 从例 3.6 的完备格 P 中去掉最小元 $-\infty$后，所得偏序集 Q 是一个完备上半格。再次根据命题 1.7]， Q 在上拓扑 νQ 下是素性的，并且它只有可数多个开集。我们验证一下，(Q, νQ)也不是局部紧的。假设 K 是 Q的一个紧饱和集，并且 K包含一个非空开子集 $O = Q \setminus \downarrow G$, 其中 G 是有限的。那么， Q 中存在一整列I ，使得 I 包含于 K （任取一列 I ，使其不与有限集 G相交）。注意到 K 是紧的，该列 I 必定位于 K的某个极小元之上。然而， Q中没有任何元素小于 I中的所有元素。因此，矛盾成立。这意味着 Q 的每个紧饱和子集的内部都为空。因此， P 不是局部紧的。注意， Q 的对偶偏序集是连续偏序集。这表明，一般而言，不能期待定理 3.5 中陈述 (1) 与 (3) 等价。

[1] P 是有向完备偏序集是一个不可或缺的条件。

4. A partial answer to Lawson and Mislove's question

现在我们考察由有向完备偏序集的Scott开集格产生的可数框架，并将看到，这类框架实际上是连续的，因而也是代数的，甚至还是超连续格。我们用 ΣL 表示通过在有向完备偏序集 L 上赋予Scott拓扑 σL 而得到的Scott空间。我们将需要以下结果，该结果可见于 [7,定理2.5。7]

引理4.1。 设 L 是一个有向完备偏序集。则以下陈述等价：

(1) L 是核紧的，即 σL 关于包含序是一个连续格；*(2)* 对每个有向完备偏序集 S，都有 $\Sigma(S \times L) = \Sigma S \times \Sigma L$ [2]；*(3)* 对每个完备格 S，都有 $\Sigma(S \times L) = \Sigma S \times \Sigma L$；*(4)* $\Sigma(\sigma L \times L) = \Sigma\sigma L \times \Sigma L$。

命题4.2. 设 P 是一个只有可数多个*Scott*开集的*sober Scott*空间。那么σP 是一个代数格。

证明. 由于 P和 σP是可数有向完备偏序集，根据 [11, 引理3.1], ，我们知道 $\sigma P \times \sigma\sigma P$上的Scott拓扑与 $\Sigma\sigma P \times \Sigma\sigma\sigma P$上的积拓扑相同。引理4.1中(1)与(4)的等价性表明， σP 是核紧的。也就是说，按照包含序， $\sigma\sigma P$ 是一个连续格。根据引理4.1中(1)与(2)的等价性，我们知道此时 $P \times \sigma P$上的Scott拓扑等于 $\Sigma P \times \Sigma\sigma P$上的积拓扑。再次应用引理4.1中(1)与(4)的等价性，我们知道 P 是核紧的。因此，σP 是一个可数连续格，故根据 [8]中的结果，它是一个代数格。□

如所承诺，下面的定理为回答 Lawson和Mislove的问题提供了部分答案，该问题旨在刻画谱为 Scott空间的那些框架。一般性问题仍然悬而未决。

定理 4.3。 设 L 为可数框架，且$\mathrm{pt}(L)$ 为其谱。则以下各项等价。

(1) $\mathrm{pt}(L)$是 *Scott*空间；*(2)* $\mathrm{pt}(L)$是局部紧 *sober Scott*空间；*(3)* $\mathrm{pt}(L)$是拟连续的；*(4)* $\mathrm{pt}(L)$是拟代数的；*(5)* L是拟连续的；*(6)* L是拟代数的；*(7)* L是连续的；*(8)* L是代数的；*(9)* L是超连续的。

证明。 我们证明以下蕴含关系链：

$$(1) \Rightarrow (8) \Leftrightarrow (7) \Leftrightarrow (6) \Leftrightarrow (5) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (9) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1).$$

(1) ⇒ (8)。 由于 σ(pt(L)) 与 L 同构，因此它是可数的，所以 pt(L) 是一个仅有可数个Scott开集的 Scott空间。由命题4.2可直接得出 (1) ⇒(8)。(5) ⇒ (8)。 容易看出，(8) ⇒ (7) ⇒ (5) 且 (8) ⇒ (6) ⇒ (5)。我们证明 (5) ⇒ (8)。为此，我们注意到框架 L 是交连续格（二元下确界对有向上确界满足分配律），而拟连续且交连续的有向完备偏序集是

[2]注意，这两个乘积分别取自有向完备偏序集范畴和拓扑空间范畴。

连续域 [4, 命题 III-3.10]。因此 L 是连续的。由于 L 也是可数的，根据 [8] 中的结果，它是代数的。(8) ⇒ (4)。 如果 L 是代数的，那么 pt(L) 的 Scott开集格 σ(pt(L)) 也是代数的。根据 [3, 命题 7(3)]，中的结果，我们知道 σ(pt(L)) 中的每个紧元都必定具有 $\uparrow F$ 的形式，其中 F 是 pt(L) 的某个有限子集；这些元素构成了 Σpt(L) 的一个基。这证明了 pt(L) 是拟代数的。

(4) ⇒(3) ⇒ (2) ⇒ (1) 显然。最后，(3) 与 (9) 等价是一个众所周知的结果，它涉及将 Stone 对偶限制在拟连续域类和超连续格类上 [4, 命题 VII-3.8]。□

Acknowledgments

作者感谢 Matthew de Brecht 提出了相关问题。他们还感谢天元数学研究中心于 2025年 12月 主办域论及其应用研讨会；作者认为这是一次相当鼓舞人心且富有成效的活动。第一作者感谢吕振超博士指出了 [3, 命题 7]。作者受到中国国家自然科学基金资助（项目编号：12371457、12571507）。

References

[1] Samson Abramsky 和 Achim Jung。域理论。载于 Samson Abramsky、Dov M. Gabbay 和 Thomas Stephen Edward Maibaum 编，*Semantic Structures*，*Handbook of Logic in Computer Science*第 3 卷，1–168 页。克拉伦登出版社，牛津，1994 年。[2] Marcel Ern

´ *Logical Methods* e。网空间与万维

in Computer Science 15 2019
网空间：域理论的拓扑学方面。，，。[3] Marcel Ern

´ *Topology and* e。无限分配律与

its Applications 156 12 2054 2069, 2009 2007,
局部连通性及紧致性之间的关系。，（）：–。安特卫普“当代拓扑学的若干方面III”研讨会论文集。[4] Gerhard Gierz、Karl H. Hofmann、Klaus Keimel、Jimmie D. Lawson、Michael Mislove 和 Dana S. Scott。*Continuous Lattices and Domains*，*Encyclopedia of Mathematics and its Applications*第 93 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2003 年。[5] Jean Goubault-Larrecq。 *Non-Hausdorff Topology and Domain Theory* 22 *New Mathematical Mono-* ，第 卷，。剑桥 *graphs* 2013
大学出版社，英国剑桥，。[6] Reinhold Heckmann 和 Klaus Keimel。拟连续域与 Smyth 幂域。载于 D. Kozen 和 Michael Mislove 编，*Proceedings of the 29th Conference on the Mathematical Foundations of Pro-* *gramming Semantics* 298 *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 215 232 ，
第 卷，– 页。爱思唯尔科学出版社，2013 年。[7] Xiaodong Jia。 *Meet-continuity and locally compact sober dcpos*。博士论文，伯明翰大学，2018 年。[8] Xiaodong Jia、李清国和栾伟。区分连续域与代数域。 *Bulletin of the London Mathematical Society* 2025 ，n/a(n/a)，。

[9] Jimmie Lawson 和 Michael Mislove。域理论与拓扑学中的问题。载于 Jan van Mill 和 George M. Reed 编，*Open problems in Topology*，351–372 页。北荷兰出版社，1990年。[10] Jimmie D. Lawson。连续偏序集的对偶。*Houston Journal of Mathematics*，5：357–394，1979 年。[11] 苗华林、Xiaoyong Xi、Xiaodong Jia、李清国和赵东升。两个素性有向完备偏序集的乘积未必素性（v4），*Preprints, https://arxiv.org/abs/2408.08587*，2024 年。[12] Andrea Schalk。*Algebras for Generalized Power Constructions*。博士论文，达姆施塔特工业大学，1993 年。共 166 页。

X. Jia, School of Mathematics, Hunan University, Changsha, Hunan, 410082, China. Email: jiaxiaodong@hnu.edu.cn

X. Xi, School of Mathematics and Statistics, Yancheng Teachers University, Yancheng 224002, China. Email: xixy@yctu.edu.cn