arXiv:2601.11059v1 [math.RA] 16 Jan 2026

全正性半群自同构

PROJESH NATH CHOUDHURY、SHAUN FALLAT 和 CHI-KWONG LI

Abstract. 全正（TP）矩阵和全非负（TN）矩阵与分析、力学以及约化群中的对偶典范基相关，这得益于 Schoenberg、Gantmacher–Krein、Lusztig 等人的著名研究。全正矩阵在乘法下构成一个封闭的半群，该半群包含于更大的可逆全非负（ITN）矩阵幺半群中。Whitney 和 Berenstein–Fomin–Zelevinsky 找到了所有 $n \times n$ ITN 矩阵和全正矩阵的双对角分解，将它们分解为乘法生成元；现在一个自然的问题是对这些半群的乘法自同构进行分类。本文对 ITN 矩阵和全正矩阵半群的所有自同构进行了分类。具体而言，我们证明这些自同构相同，并且保持乘法生成元不变。

1. Introduction and main results

若实矩阵 A 的所有子式均为正，则称其为全正（TP）；若 A 的所有子式均为非负，则称其为全非负（TN）。全正性是数学中一个历久弥新的领域，历史悠久。Gantmacher–Krein [14] 和 Schoenberg [26], 的开创性著作、早期专著 [15, 18], 以及较近期的研究成果 [13, 10, 16, 23] ，都为全正性引人入胜的历史提供了详尽的参考资料，也讲述了它在数学多个分支中许多意想不到的应用。这些分支包括分析、逼近论、簇代数、组合学、微分方程、Gabor分析、可积系统、矩阵论、概率与统计以及表示论 [4, 5, 10, 13, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 27]。

全正性的概念最早由 Fekete–P´olya [11] 于 1912年从单侧 P´olya 频率序列及其变差递减性质的角度进行研究——这一性质可追溯至 Laguerre [20]于 1883年发表的著名回忆录。同一篇论文中，Fekete 证明，全正矩阵可由相邻子式均为正这一条件刻画；Schoenberg [26]于 1955年将这一结果推广到 k 阶全正性。随后，Gantmacher–Krein[14] 于 1937年通过所有子矩阵的谱为正（或非负），刻画了全正（或全非负）矩阵。1941年，Gantmacher–Krein [15] 从变差递减的角度给出了全正性的一个基本刻画；最近，Choudhury [7] 通过建立单向量检验进一步完善了这些结果。

给定一个整数 $n \geq 1$，由柯西–比内公式可知，全非负可逆（ITN）矩阵的集合和全正矩阵的子集在乘法下封闭。分别记它们为 $ITN(n) \supsetneq TP(n)$，于是可见 $TP(n)$ 是一个由 $GL_n(\mathbb{R})$ 构成的半群，而 $ITN(n)$ 是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的一个子幺半群。Cryer 的以下经典结果 [8, 9] 表明，对 $ITN(n)$ 的研究可以归结为考察其由对角线上元素均为 1 的上三角 ITN 矩阵构成的子半群，以及由对角 ITN 矩阵构成的子群：

引理 1.1. 矩阵 $A \in GL_n(\mathbb{R})$ 是全非负矩阵，当且仅当 A 有高斯分解 $A = LDU$，其中 L和U分别是主对角线元素为 *1* 的下三角和上三角可逆全非负矩阵，而 D 是对角可逆全非负矩阵。

Date: 2026年1月19日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 15B48、20M15（主要分类）、15A23、15A15、47D03（次要分类）。*Key words and phrases.*半群自同构、全正性、全非负矩阵、双对角分解。

1952年，Whitney [29]（Schoenberg 的学生）将 $ITN(n)$ 和 $TP(n)$ 的无穷小生成元确定为相应李代数的切瓦利生成元。Whitney 证明，每个可逆全非负矩阵和全正矩阵都可以用初等双对角矩阵分解。若一个 $n\times n$ 矩阵具有形式 $I+wE_{ij}$，其中 $w\geq 0$、I 是单位矩阵，而 E_{ij} 是初等矩阵，则称其为初等双对角矩阵，当且仅当 $|i-j|=1$。初等双对角矩阵是可逆全非负矩阵。我们将可逆全非负矩阵的以下分解归功于 Whitney。

定理1.2 (Whitney [29])。 每个 $n\times n$ 可逆全非负矩阵 A 都具有以下形式

$$A:=A(\mathbf{w},\mathbf{w}^{'},\mathbf{d})=\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{k=n-1}^{j}\left(I+w_{j,k}E_{k+1,k}\right)\,D\,\prod_{j=n-1}^{1}\prod_{k=n-1}^{j}\left(I+w'_{j,k+1}E_{k,k+1}\right),\tag{1.1}$$

其中 $\mathbf{w}=(w_{j,k})_{1\leq j\leq k\leq n-1}\in[0,\infty)^{\binom{n}{2}}$, $\mathbf{w}'=(w'_{j,k+1})_{1\leq j\leq k\leq n-1}\in[0,\infty)^{\binom{n}{2}}$; $\mathbf{d}\in(0,\infty)^n$ 且D =对角矩阵$(\mathbf{d})$，并且 D 可以出现在分解的任一端，或任意两个初等双对角因子之间；各因子按给定的 j 和 k顺序相乘。等价地，可以安排该分解，使上双对角因子的乘积位于左侧，而下双对角因子的乘积位于右侧。

基于这一分解，Lusztig [21]于1994年将全正性的概念推广到其他半单李群 G，其方法是将 G 中全非负元素的集合 $G_{\geq 0}$ 定义为由（指数化的）切瓦利生成元生成的半群。几年后，Berenstein–Fomin–Zelevinsky [4] 利用分解式（1.1）证明，通过映射，$(0,\infty)^{n^2}$ 与全正矩阵 $n\times n$的空间微分同胚

$$(\mathbf{w},\mathbf{w}^{'},\mathbf{d})\xrightarrow{\psi}A(\mathbf{w},\mathbf{w}^{'},\mathbf{d}).$$

本文的主要目标是研究全正性半群的自同构。文献中已有对各种矩阵群和半群的自同构的研究[1, 6]。在本文中，我们证明半群 $ITN(n)$ 和 $TP(n)$ 的自同构相同，且其形式仅涉及行列式的函数以及对角／反对角共轭。下面给出我们的第一个主要结果：

定理 A. 设 $n\geq 1$ 是一个整数，且 $G(n)=TP(n)$ 或 $ITN(n)$。那么，对于任意映射 $T:\ G(n)\to G(n)$，以下条件等价。

(i) T 是半群同构。*(ii)* T 具有

如下形式

$$A\mapsto\mu(\det A)(\det A)^{-\frac{1}{n}}RAR^{-1},$$

其中 $\mu:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 是一个双射乘法映射，并且

$$R=\begin{pmatrix}r_1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&r_n\end{pmatrix}\quad or\quad\begin{pmatrix}0&\cdots&r_1\\ \vdots&\iddots&\vdots\\ r_n&\cdots&0\end{pmatrix}$$

其中 r_1、.....、r_n为正实数。

注 1.3. 以下是两个直接推论：

(i) $ITN(n)$ 的每个半群自同构都会将每个初等双对角生成元映射为另一个此类生成元。(ii) 特别地，每个自同构不仅保留 TP/ITN 矩阵半群的乘法结构，还会将这些“乘法生成元”映射到自身集合中，因此，每个自同构都会将每个双对角分解映射为另一个此类分解。

我们的第二个主要结果表明，半群 $ITN(n)$ 和 $TP(n)$ 的自同构相同；事实上，所有满足某些附加假设、介于这两个半群之间的乘法半群，其自同构也都相同。

定理 B. 设 $n \geq 1$ 为整数，且 $G(n)$ 是一个半群，其中 $TP(n) \subseteq G(n) \subseteq ITN(n)$满足： $G(n)$ 在取正标量倍数以及被对角元为正的（反）对角矩阵共轭下封闭。设 $T\colon G(n) \to G(n)$ 是任意映射。则下列条件等价：

(i) T是半群同构，且 $T(TP(n)) = TP(n)$。*(ii)* 对所有 $A \in G(n)$，其中 μ 和 R 按定理 *A (ii)* 中的定义。

$$T(A) = \mu(\det A)(\det A)^{-\frac{1}{n}} RAR^{-1},$$

例 1.4. 注意，对于 $n \geq 2$，半群 $G(n) := TP(n) \sqcup \{$对角矩阵$(d_1, \ldots, d_n) : d_1, \ldots, d_n > 0\}$ 严格包含 $TP(n)$，且严格包含于 $ITN(n)$。根据推论 3.3， $G(n)$ 的任何半群自同构都保持 $TP(n)$ 不变。因此，定理 B 完整地刻画了 $G(n)$ 的自同构。

注 1.5. 乘法映射 $\mu : (0,\infty) \to (0,\infty)$ 可按如下方式构造。将$\mathbb{R}$ 视为有理数域上的无限维向量空间。设 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-线性同构。则 $\mu(x) = \exp(\phi(\log(x))$ 是 $(0,\infty)$ 上的双射乘法映射，除此之外别无其他。这里或许值得一提的是，Banach [2], Sierpi´nsky [28],等人的经典研究表明， μ 连续当且仅当它可测，也当且仅当 ϕ 可测；但存在不可测的 $\mathbb{Q}$-线性映射 ϕ。

我们以如下评注结束对主要结果的讨论：Belton–Guillot–Khare–Putinar [3] 最近对逐项保持 TP 矩阵集和 TN 矩阵集的映射进行了分类。然而，这项工作只揭示了集合意义上的（逐项）保持映射。相比之下，本文刻画了保持（方阵）TP 矩阵或 ITN 矩阵的矩阵函数；这些矩阵在乘法下构成半群。因此，我们分类的映射不仅保持 TP/ITN 矩阵，也保持它们各自的乘法结构。

本文的组织结构。 本文其余各节均用于证明我们的主要结果。在第 2 节中，我们证明全正性的半群自同构可以扩展为可逆全非负性的幺半群自同构。在第 3 节中，我们根据其中心化子，建立 $ITN(n)$ 中某些特殊矩阵子群和子半群的性质。在第 4 节中，我们证明 2×2 情形下的定理 A，并在第 5 节中证明一般情形。最后，我们用一个简短的证明结束本文，以证明定理 B。

2. Reduction of the Main Problem

本文除用于证明定理 B 的几行文字外，全部内容都致力于证明定理 A。由于证明相当技术性且较为复杂，我们将其分为三节。我们首先在本节中，将 $n \times n$ 全正矩阵半群的一个自同构扩展为 $n \times n$ 可逆全非负矩阵的幺半群自同构。这需要三个预备结果。第一个是 Whitney 提出的经典稠密性结果。

定理 2.1 (Whitney, [29])。给定一个整数 $n \geq 1$， $n \times n$ TP矩阵的集合在 $n \times n$ TN矩阵的集合中稠密。

现在我们回顾 Karlin 关于可逆全非负矩阵及其主子式正性的一个结果。

Theo注 2.2 (Karlin, [18])。 若 $A \in ITN(n)$，则 A的所有主子式均为正 .

下一个预备结果是著名的柯西–比内行列式恒等式。为陈述这一恒等式，我们引入两种记号。

定义 2.3. 设 $m, n \geq 1$ 为整数，且 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。

(i) 定义 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$。**(ii)** 给定子集 $\alpha \subseteq [m]$ 和 $\beta \subseteq [n]$，定义 $A[\alpha|\beta]$ 为 A 的子矩阵，其行由 α 索引，列由 β 索引。

定理 2。 4（柯西–比内公式）。给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$，有

$$\det(AB) = \sum_{\gamma\subseteq[n],\ |\gamma|=m} \det A\,[[m]|\gamma]\det B\,[\gamma|[m]]\,.$$

现在，我们用以下集合来刻画 $ITN(n)$：给定一个整数$n \geq 1$，定义

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^L(n) &:= \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : XA \in TP(n)\ \forall A \in TP(n)\}, \\ \mathcal{S}^R(n) &:= \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : AX \in TP(n)\ \forall A \in TP(n)\}, \\ \mathcal{S}(n) &:= \mathcal{S}^L(n) \cap \mathcal{S}^R(n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

很容易验证，这些都是 $GL_n(\mathbb{R})$的子幺半群。

命题 2.5。 幺半群 $\mathcal{S}^L(n)$ $\mathcal{S}^R(n)$ $\mathcal{S}(n)$ 全部相等，且都等于 $ITN(n)$，即所有可逆 $n \times n$ 全非负矩阵组成的幺半群。

证明。我们首先断言，$ITN(n) = \mathcal{S}^R(n)$。为证明 $ITN(n) \subseteq \mathcal{S}^R(n)$，设 X是 $ITN(n)$。那么对于所有 $A \in TP(n)$，由柯西–比内公式和定理 2.2 可直接推出，AX是 TP。事实上，对于任意两个具有相同基数的非空子集 $\alpha, \beta \subseteq [n]$，我们有

$$\det(AX)[\alpha|\beta] = \sum_{\gamma\subseteq[n],\ |\gamma|=|\alpha|} \det A[\alpha|\gamma]\det X[\gamma|\beta] \geq \det A[\alpha|\beta]\det X[\beta|\beta] > 0.$$

对于反向包含，设 $X \in \mathcal{S}^R(n)$，因此 X 是可逆的。根据惠特尼稠密性定理 2.1，存在序列 $A_k \in TP(n)$ 收敛于 I_n。现在，对于任意 $\alpha, \beta \subset [n]$，其中$|\alpha| = |\beta| > 0$，我们有

$$\det(A_kX)[\alpha|\beta] \to \det X[\alpha|\beta].$$

由于左侧的行列式序列为正，因此对于所有 α, β with$|\alpha| = |\beta| > 0$，我们得到 $\det X[\alpha|\beta] \geq 0$ 。于是 $X \in ITN(n)$，从而 $ITN(n) = \mathcal{S}^R(n)$。

类似地，可以证明 $ITN(n)$ 等于 $\mathcal{S}^L(n)$，因而等于它们的交集 $\mathcal{S}(n)$。 □

在接下来的讨论中，我们将用 $\mathcal{S}(n)$ 表示幺半群 $ITN(n)$。如果上下文清楚，我们可以省略对参数 n 的依赖。利用命题 2.5，我们现在证明，$TP(n)$ 的任意半群自同构都可以扩展为 $\mathcal{S}(n)$ 的幺半群自同构。

命题 2.6。 设 T 是 $TP(n)$ 的半群自同构。那么 T 可以扩展为 $\mathcal{S}(n)$ 的ˆ幺半群自同构。

ˆ证明。设 $A \in TP(n)$ 并定义 $T\colon \mathcal{S}(n) \to \mathcal{S}(n)$ 如下

$$\hat{T}(X) := T(A)^{-1}T(AX) = T(XA)T(A)^{-1} \quad \text{for all } X \in \mathcal{S}(n).$$

ˆˆ因为 T 是 $TP(n)$ 上的自同构，所以 $T(I_n) = I_n$ and $T \equiv T$on $TP(n)$。现在我们证明ˆ T 定义良好，且与 A 的选取无关。设 $X \in \mathcal{S}(n)$。对任意 $B \in TP(n)$，由命题 2.5，AX，BX，XA，XB，$AXB \in TP(n)$。因此 $T(A)T(XB) = T(AXB) = T(AX)T(B)$。由此可得

$$T(A)^{-1}T(AX) = T(XB)T(B)^{-1} \text{ for any } B \in TP(n). \tag{2.2}$$

若 $A = B$，则 $T(A)^{-1}T(AX) = T(XA)T(A)^{-1} = \hat{T}(X)$。由 (2.2) 可知，$\hat{T}$ 的定义与 $A \in TP(n)$ 的选取无关。现在要证明对所有 $X \in \mathcal{S}(n)$，$T(X) \in \mathcal{S}(n)$，只需证明对所有 $C \in TP(n)$，$\hat{T}(X)C \in TP(n)$。设 $C \in TP(n)$。由于 T 是双射的，存在 $\hat{B} \in TP(n)$，使得 $C = T(B)$。根据 T 的定义，$T(X)C = T(XB) \in TP(n)$，因为 T 是 $TP(n)$ 的自同构。因此，T 是一个从 $\mathcal{S}(n)$ 到 $\mathcal{S}(n)$ 的定义良好的函数。

接下来我们 证明 $\hat{T}$在 $\mathcal{S}(n)$上是乘法性的。对于任意 X_1，$X_2 \in \mathcal{S}(n)$和 $A \in TP(n)$ ，

$$\begin{aligned}\hat{T}(X_1X_2) &= T(A)^{-1}T(AX_1X_2)\\ &= T(A)^{-1}T(AX_1X_2A)T(A)^{-1}\\ &= T(A)^{-1}T(AX_1)T(X_2A)T(A)^{-1}\\ &= \hat{T}(X_1)\hat{T}(X_2).\end{aligned}$$

因此，T 是乘法性的。为证明 T 是双射的，设 $A \in TP(n)$，并记 $T(A)$为 $= B$。定义映射 $U\colon \mathcal{S}(n) \to \mathcal{S}(n)$，使得

$$U(X) := (T^{-1}(B))^{-1}T^{-1}(BX) \text{ for all } X \in \mathcal{S}(n).$$

那么对于任意 $X \in \mathcal{S}(n)$,

$$\begin{aligned}U \circ \hat{T}(X) &= U(B^{-1}T(AX))\\ &= (T^{-1}(B))^{-1}T^{-1}(BB^{-1}T(AX))\\ &= A^{-1}(AX) = X\end{aligned}$$

相似 容易证明，对于所有 $X \in \mathcal{S}(n)$，$T \circ U(X) = X$。因此，U 是 T的逆映射 . □

由命题 2.6，要证明定理 A 中的 $(i) \implies (ii)$，只需考虑 $G(n) = \mathcal{S}(n)$，并将T 视为从 $\mathcal{S}(n)$ 到 $\mathcal{S}(n)$ 的映射。

3. Special ITN Matrices and their centralizer

为了研究 $\mathcal{S}(n)$ 的自同构 T，研究 $\mathcal{S}(n)$ 中一些在 T 作用下保持不变的特殊子幺半群会很有帮助。首先，我们需要一些基本定义和记号。这里集中列出这些内容，后文将直接使用，不再另行说明。

定义 3.1. 设 $m, n \geq 1$ 为整数。

(i) 我们用 P_n 表示反对角元全为 1 的 $n \times n$ 反对角矩阵:

$$P_n := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \{0,1\}^{n\times n}.$$

(ii) 令 $\mathcal{D}(n)$ 表示所有对角元为正的 $n \times n$ 对角矩阵构成的集合。(iii) 我们用 $Z^+(n) := Z(GL_n(\mathbb{R})) \cap ((0,\infty))^n$ 表示对角元为正的数量矩阵构成的子群。(iv) 定义 $\mathcal{L}(n) := \{aI + bE_{i,i-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}\colon a, b > 0$ 和 $2 \leq i \leq n\}$，以及 $\mathcal{U}(n) := \{aI + bE_{i,i+1} \in \mathbb{R}^{n\times n}\colon a, b > 0$ 和 $1 \leq i \leq n-1\}$。(v) 对正整数 $n_1, \ldots, n_k$，定义 $\mathcal{S}(n_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}(n_k) := \{A_1 \oplus \cdots \oplus A_k\colon A_i \in \mathcal{S}(n_i)$，对所有 $i \in [k-1]\}$ 均成立。(vi) 令 $\mathcal{S}_0(n) := SL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}(n)$。类似地，我们定义子集 $\mathcal{D}_0(n)$ $\mathcal{L}_0(n)$ 和 $\mathcal{U}_0(n)$。

我们首先确定包含在 $\mathcal{S}(n)$中的极大子群。

引理 3.2. 设 $n \geq 2$。集合 $\mathcal{D}(n)$ 是 $\mathcal{S}(n)$ 中唯一的极大子群 .

证明。 注意， $\mathcal{D}(n)$ 是 $\mathcal{S}(n)$ 中的一个群。现在，假设 H 在 $\mathcal{S}(n)$ 中关于乘法构成一个群。设 $A \in H$ 是一个非对角矩阵。由于 A 是全非奇异的，根据定理 2.2，A 的所有对角元均为正。因此， $A^{-1} \in H$ 有一个负元，这就产生了矛盾。因此 $H \subseteq \mathcal{D}(n)$。□

上述引理的一个直接推论如下：

推论 3.3. 若 $G(n) = TP(n) \sqcup \mathcal{D}(n)$，且 $T\colon G(n) \to G(n)$ 是乘法性的半群自同构，则 T将 $TP(n)$ 映到其自身。

证明。由于 $T(I) = I, T(\mathcal{D}(n))$ 是 $G(n)$ 中的一个子群。根据引理 3.2， $T(\mathcal{D}(n)) \subseteq \mathcal{D}(n)$。由于 T是双射的，同理可证明 $\tilde{T}^{-1}(\mathcal{D}(n)) \subseteq \mathcal{D}(n)$，因此 $\tilde{T}(\mathcal{D}(n)) = \mathcal{D}(n)$。这意味着 $T(TP(n)) = T(G(n) \setminus \mathcal{D}(n)) = G(n) \setminus T(\mathcal{D}(n)) = TP(n)$。□

为了确定 $\mathcal{S}(n)$ 中一些能使 T 诱导自同构的特殊子幺半群，我们现在研究矩阵 $D \in \mathcal{D}(n)$ 及其中心化子。

定义 3.4. 对于 $A \in \mathcal{S}(n)$， A 相对于 $\mathcal{S}(n)$ 的中心化子记作并定义为

$$C(A) := \{X \in \mathcal{S}(n) : AX = XA\}.$$

注意，如果 T 是 $\mathcal{S}(n)$ 的半群自同构，那么 T 会将 $C(A)$ 映到 $C(T(A))$ 上。这引出了以下性质：

注 3.5. 设 $n \geq 1$ 为整数，且 T 是 $\mathcal{S}(n)$ 上的自同构。我们有以下推论：

(i) 通过直接计算可验证， $A \in \mathcal{S}(n)$ 满足 $C(A) = \mathcal{S}(n)$，当且仅当对于某个 $a > 0$, $A = aI_n$ 成立。因此， T 在 $\mathcal{S}(n)$ 的子群$Z^+(n) = \{aI : a > 0\}$ 上诱导一个自同构。(ii) $T(aI_n) = \gamma(a)I_n$，其中 $\gamma\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ 是一个双射乘法映射。(iii) 由于 $T(I) = I$，根据引理 3.2， $T(\mathcal{D}(n)) = \mathcal{D}(n)$。因此， T在 $\mathcal{D}(n)$ 上诱导一个自同构。

引理 3.6。 设 n、n_1、...、n_k 为正整数。假设 $D = d_1 I_{n_1} \oplus \cdots \oplus d_k I_{n_k} \in \mathcal{D}(n)$，其中 $d_j \neq d_{j+1}$ 对于 $j \in [k-1]$ 成立。则 $C(D) = \mathcal{S}(n_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}(n_k)$。

证明。 显然， $\mathcal{S}(n_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}(n_k) \subseteq C(D)$。对于逆命题，设 $X \in C(D)$。则 $DX = XD$，且 X 是全非奇异。注意到，当且仅当 $X = (X_{ij})$ 且 $X_{jj} \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}$ 对于 $j \in [k]$ 成立，并且在 $d_i \neq d_j$ 时 $X_{ij} = 0$，才有 $DX = XD$。此外，由于 X 是全非奇异，当 $d_i = d_j$ 时 $X_{ij} = 0$，但 $|i - j| > 1$。因此，$C(D) = \mathcal{S}(n_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}(n_k)$。□

现在，我们概述第一个主要结果的证明策略。

定理 A 的证明概要。 根据柯西–比内公式， $TP(n)$ 和 $ITN(n)$ 在正数倍乘以及被对角元为正的（反）对角矩阵共轭下均封闭。因此，蕴含关系 $(ii) \implies (i)$ 显然成立。为证明 $(i) \implies (ii)$，命题 2.6 允许我们将考察范围限制为 $\mathcal{S}(n)$，随后我们对 n 进行归纳。我们将在下一节证明基础情形 $n = 2$，并以此在第 5 节完成证明。□

4. Proof of Theorem A for $n = 2$

本节中，我们证明定理 A 关于 2×2 矩阵的 $(i) \implies (ii)$。首先介绍几个在建立主要结果时起关键作用的引理。第一步，我们刻画半群 $\mathcal{U}(2)$ 和 $\mathcal{L}(2)$ 的元素。

引理 4.1. 设 $A \in \mathcal{S}(2)$ 是一个非对角矩阵。当且仅当对于某些 $a, b > 0$，有 $A = aI_2 + bE_{12}$ 或 $A = aI_2 + bE_{21}$ 时，对所有 $D \in \mathcal{D}(2)$ 均有 $DAD^{-1} \in C(A)$ 。

证明。对于充分性，注意到当 $A = aI_2 + bE_{12}$ 时， $C(A) = \{xI_2 + yE_{12} : x > 0,\ y \geq 0\}$；当 $A = aI_2 + bE_{21}$ 时， $C(A) = \{xI_2 + yE_{21} : x > 0,\ y \geq 0\}$。因此，对于所有 $D \in \mathcal{D}(2)$，均有 $DAD^{-1} \in C(A)$。为证明必要性，假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(2)$ 是一个非对角矩阵，且对于所有 $D \in \mathcal{D}(2)$，均有 $DAD^{-1} \in C(A)$。我们现在断言， $a_{11} = a_{22}$，且 $a_{12} = 0$ 或 $a_{21} = 0$。令 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2) \in \mathcal{D}(2)$，其中 $d_1 \neq d_2$。由于 $ADAD^{-1} = DAD^{-1}A$，我们有

$$\begin{pmatrix} a_{11}^2 + \frac{d_2}{d_1}a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} + \frac{d_1}{d_2}a_{11}a_{12} \\ a_{11}a_{21} + \frac{d_2}{d_1}a_{21}a_{22} & a_{22}^2 + \frac{d_1}{d_2}a_{12}a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + \frac{d_1}{d_2}a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + \frac{d_1}{d_2}a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{22} + \frac{d_2}{d_1}a_{11}a_{21} & a_{22}^2 + \frac{d_2}{d_1}a_{12}a_{21} \end{pmatrix}.$$

比较上述矩阵的 (1,1) 项，可得 $a_{12} = 0$ 或 $a_{21} = 0$。若 $a_{12} \neq 0$，比较上述矩阵的 (1,2) 项，可得 $a_{11} = a_{22}$。否则，比较 (2,1) 项，可得 $a_{11} = a_{22}$。因此，对于某个 $a, b > 0$，有 $A = aI_2 + bE_{12}$ 或 $A = aI_2 + bE_{21}$。□

利用上述结果，我们现在证明：若 T 是实数集(2)上的自同构，则 T，或者映射 $X \mapsto P_2T(X)P_2$，会在半群 $\mathcal{U}(2)$ 和 $\mathcal{L}(2)$ 上诱导一个自同构。

引理 4.2. 设 T: 实数集(2) 实数集(2) 是一个半群同构。那么 T(实数集(2)) 实数集(2) 且T(实数集(2)) 实数集(2) 或者 T(实数集(2)) 实数集(2) 且 T(实数集(2)) 实数集(2)。

证明。令 $A \in \mathcal{U}(2)$。我们首先利用引理 4.1 证明 $T(A) \in \mathcal{U}(2)$ 或 $\mathcal{L}(2)$。令 $D \in \mathcal{D}(2)$。^^由于 $T(\mathcal{D}(2)) = \mathcal{D}(2)$，对于某个 $D \in \mathcal{D}(2)$，有 $D = T(D)$，且 $T(A)$ 是一个非对角矩阵。因此，根据引理 4.1，$DT(A)D^{-1} = T(^DA^D^{-1}) \in T(C(A))$。由于 $T(C(A)) = C(T(A))$， $T(A) \in \mathcal{U}(2)$ 或 $\mathcal{L}(2)$。类似地，我们可以证明，若 $A \in \mathcal{L}(2)$，则 $T(A) \in \mathcal{U}(2)$ 或 $\mathcal{L}(2)$。由于 T 是 $S(2)$ 上的一个自同构，若 $A \in \mathcal{U}(2)$ 或 $\mathcal{L}(2)$，则 $T^{-1}(A) \in \mathcal{U}(2)$ 或 $\mathcal{L}(2)$。

令 $A \in \mathcal{U}(2)$，不失一般性，假设 $T(A) \in \mathcal{U}(2)$。接下来我们断言，$T(\mathcal{U}(2)) = \mathcal{U}(2)$，且 $T(\mathcal{L}(2)) = \mathcal{L}(2)$。若 $T(\mathcal{U}(2)) \nsubseteq \mathcal{U}(2)$，则存在 $B \in \mathcal{U}(2)$，使得 $T(B) \in \mathcal{L}(2)$。这意味着 $AB \in \mathcal{U}(2)$，但 $T(AB) = T(A)T(B)$ 不是三角矩阵，这就产生了矛盾。因此， $T(\mathcal{U}(2)) \subseteq \mathcal{U}(2)$。类似地，若 $B \in \mathcal{L}(2)$ 且 $T(B) \in \mathcal{U}(2)$，则 $T(AB) \in \mathcal{U}(2)$，但 AB 不是三角矩阵，这就产生了矛盾。因此， $T(\mathcal{L}(2)) \subseteq \mathcal{L}(2)$。同样，通过类似的论证可以得出， $T^{-1}(\mathcal{U}(2)) \subseteq \mathcal{U}(2)$，且 $T^{-1}(\mathcal{L}(2)) \subseteq \mathcal{L}(2)$。因此， $T(\mathcal{U}(2)) = \mathcal{U}(2)$，且 $T(\mathcal{L}(2)) = \mathcal{L}(2)$。证明完毕。□

设 $T: \mathcal{S}(2) \to \mathcal{S}(2)$ 是一个半群同构。根据上述引理，如有需要，我们可以将 T 替换为映射 $X \mapsto P_2T(X)P_2$，并从现在起**假设**

$$T(\mathcal{U}(2)) = \mathcal{U}(2) \quad \text{and} \quad T(\mathcal{L}(2)) = \mathcal{L}(2). \tag{4.1}$$

接下来证明， T 在半群 $\mathcal{U}_0(2)$ 和 $\mathcal{L}_0(2)$ 上诱导一个自同构。

引理 4.3。 设 $T: \mathcal{S}(2) \to \mathcal{S}(2)$ 是满足(4.1)的半群同构。则 $T(\mathcal{U}_0(2)) = \mathcal{U}_0(2)$ 且 $T(\mathcal{L}_0(2)) = \mathcal{L}_0(2)$。

证明。由 (4.1)， $T(\mathcal{U}(2)) = \mathcal{U}(2)$，且 $T(\mathcal{L}(2)) = \mathcal{L}(2)$。为证明 $T(\mathcal{U}_0(2)) = \mathcal{U}_0(2)$，令 $x > 0$。于是 $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_0(2)$，并且对某个 $a, a_{12} > 0$，有 $T(A) = \begin{pmatrix} a & a_{12} \\ 0 & a \end{pmatrix}$，因为 $\mathcal{U}_0(2) \subset \mathcal{U}(2)$。我们断言 $a = 1$。注意

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

由于 T 在群 $\mathcal{D}(n)$ 上诱导了一个自同构，因此对某个 $d_1, d_2 > 0$，有 $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$。

在等式 (4.2) 两边应用 T，得到

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2aa_{12} \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{d_2}{d_1}a_{12} \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

因此，$a = 1$ 和 $T(\mathcal{U}_0(2)) \subseteq \mathcal{U}_0(2)$。由于 T 是双射的，通过类似的论证可得，$T^{-1}(\mathcal{U}_0(2)) \subseteq \mathcal{U}_0(2)$。因此，$T(\mathcal{U}_0(2)) = \mathcal{U}_0(2)$。

类似地，可以证明 $T(\mathcal{L}_0(2)) = \mathcal{L}_0(2)$。证明完毕。 □

利用上述引理，我们现在可以证明定理 A 在 2×2 情形下的蕴含关系（i） $\implies$ (ii)。

定理 A（i） $\implies$ (ii) 在 2×2 情形下的证明。必要时将 T 替换为映射 $X \mapsto P_2 T(X) P_2$，不妨设 T 满足（4.1）。根据引理 4.3，有 $T(\mathcal{U}_0(2)) = \mathcal{U}_0(2)$ 以及 $T(\mathcal{L}_0(2)) = \mathcal{L}_0(2)$。于是，对于所有 $x > 0$，有 $T(I + xE_{12}) = I + f(x)E_{12}$，其中 f 是 $(0, \infty)$ 上的双射。我们可以假设 $f(1) = 1$；否则，将 T 替换为映射 $A \mapsto \begin{pmatrix} f^{-1}(1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T(A) \begin{pmatrix} f(1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。现在证明 f 在 $(0, \infty)$ 上是加法性的。令 $a_1, a_2 > 0$。利用恒等式 $\begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，我们有

$$\begin{aligned} T(I + (a_1 + a_2)E_{12}) &= (I + f(a_1)E_{12})(I + f(a_2)E_{12}) \\ &= I + (f(a_1) + f(a_2))E_{12}. \end{aligned}$$

因此，对于所有 $a_1, a_2 > 0$，有 $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$。接下来我们证明，$f$ 在 $(0, \infty)$ 上是乘法性的。由于 $T(\mathcal{D}(2)) = \mathcal{D}(2)$,

$$T\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} h_1(x) & 0 \\ 0 & h_2(x) \end{pmatrix},$$

对于所有 $x > 0$。于是，h_1 和 h_2 在 $(0, \infty)$ 上是乘法性的。注意

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

在等式 (4.3) 两边应用 T，可得

$$\begin{pmatrix} 1 & h_1(x)/h_2(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f(x^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Thus

$$f(x) = \sqrt{\frac{h_1(x)}{h_2(x)}} \text{ for all } x > 0. \tag{4.4}$$

由于 h_1 和 h_2 在 $(0, \infty)$ 上是乘法性的，因此 f 在 $(0, \infty)$ 上也是乘法性的。因此，f 在 $(0, \infty)$ 上是双射的、加法性的且乘法性的，因而可以扩展为 $\mathbb{R}$上的一个保持正数的域自同构。因此，对所有 $x > 0$，都有 $f(x) = x$。

接下来我们证明，对所有 $x > 0$，$h_1(x) = x$ 且 $h_2(x) = \frac{1}{x}$。令 $x > 1$。再次注意，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x^2 - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x^2 - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

由于 $T(\mathcal{L}(2)) = \mathcal{L}(2)$，对于所有 $a > 0$，$T(I + aE_{21}) = I + g(a)E_{21}$，其中 g 是定义在 $(0, \infty)$ 上的双射。将 T 应用于 (4.5) 的两边，得到

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ g(1) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x^2-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1(x) & 0\\ 0 & h_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{h_1(x)} & 0\\ 0 & \frac{1}{h_2(x)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x^2-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ g(1) & 1\end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Thus

$$\begin{pmatrix}h_1(x) & (x^2-1)h_2(x)\\ h_1(x)g(1) & (x^2-1)h_2(x)g(1)+h_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{h_1(x)}+\frac{(x^2-1)g(1)}{h_1(x)} & \frac{(x^2-1)}{h_1(x)}\\ \frac{g(1)}{h_2(x)} & \frac{1}{h_2(x)}\end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

由于 $g(1)>0$，比较上述矩阵的 (2,1) 项，得到对于所有$x>1$，$h_1(x)h_2(x)=1$。若 $x<1$，我们可以对 $y=1/x$ 进行上述分析，并得出 $h_1(y)h_2(y)=1$。由于h_1 和 h_2 是乘法性的，$h_1\left(\frac{1}{x}\right)h_2(x)=1$。因此，对于所有 $x>0$，$h_1(x)h_2(x)=1$。由~~(4.4)~~得，$h_1(x)=f(x)=x$，且对于所有 $x>0$，$h_2(x)=\frac{1}{x}$。

接下来，我们证明对于所有 $x>0$，$g(x)=x$。取 $x=2$，并观察 (4.7) 两边的首项，可得 $g(1)=1$。因此，$T(I+E_{21})=I+E_{21}$。现在，利用与 f 类似的论证，我们可以证明 g 在 $(0,\infty)$ 上是加法性的、乘法性的且为双射。因此，对于所有 $x>0$，$g(x)=x$。这意味着，对于所有 $x>0$，

$$T\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad T\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix},\quad T\left(\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & \frac{1}{x}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & \frac{1}{x}\end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

根据 Whitney 双对角分解，每个 $A\in\mathcal{S}_0(2)$ 都可以写成 $A=LDU$，其中$L\in\mathcal{L}_0(2)$、$U\in\mathcal{U}_0(2)$ 和 $D\in\mathcal{D}_0(2)$。因此，利用 (4.8)，可得

$$T(A)=A \text{ for all } A\in\mathcal{S}_0(2).$$

请注意，我们利用映射 $X\mapsto P_2T(X)P_2$ 和 $X\mapsto DT(A)D^{-1}$ 得出结论：对于所有 $A\in\mathcal{S}_0(2)$，$T(A)=A$，其中 D 是一个对角元为正的对角矩阵。此外，所有这些映射都保持行列式不变。

现在，任取 $A\in\mathcal{S}(2)$。那么 A 可写成 $A=((\det A)^{\frac{1}{2}}I_2)A_0$，其中 $\det A_0=1$。因此

$$\begin{aligned}T(A) &= T((\det A)^{\frac{1}{2}}A_0)\\ &= =\gamma((\det A)^{\frac{1}{2}})T(A_0)\\ &= =\gamma((\det A)^{\frac{1}{2}})A_0\\ &= \mu(\det A)(\det A)^{-\frac{1}{2}}A,\end{aligned}$$

其中 $\mu(x):=\sqrt{\gamma(x)}$ 是 $(0,\infty)$ 上的双射乘法映射。因此，对所有 $A\in\mathcal{S}(2)$，

$$T(A)=\mu(\det A)(\det A)^{-\frac{1}{2}}RAR^{-1}$$

对于某个双射乘法映射 $\mu:(0,\infty)\to(0,\infty)$，且 $R=\begin{pmatrix}r_1 & 0\\ 0 & r_2\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0 & r_1\\ r_2 & 0\end{pmatrix}$ 满足$r_1,\ r_2>0$。

这就完成了 2×2 情形的证明。□

5. Proof of Theorem A for $n\geq 3$

本节中，我们将完成定理 A 的证明，并证明定理 B。除非另有说明，本节始终假设 $n\geq 3$。为应用归纳假设，我们首先证明：若 $T:\mathcal{S}(n)\to\mathcal{S}(n)$ 是一个同构，则要么 T，要么映射 $X\mapsto P_nT(X)P_n$ 在 $\mathcal{S}(n)$ 的若干子幺半群和子半群上诱导出自同构。为了继续讨论，我们先引入一些基本记号。

记号5.1。给定整数 $1\leq k\leq n-1$，定义对角矩阵 D_k，使其 (j,j) 元为 j（若 $j\neq k+1$），且 $(k+1,k+1)$ 元为 k。

注记5.2。更一般地，在本节余下部分中，可以使用任意对角矩阵$D_1, \dots, D_{n-1}$，其中每个 D_k的对角元为 $d_{k,j} > 0$，满足 $d_{k,k} = d_{k,k+1}$，但 D_k 中其他所有相邻对角元对都不相等。

由引理 3.6，关于 $\mathcal{S}(n)$ 的 D_k 的中心化子为 $C(D_k) = \{F_1 \oplus X \oplus F_2 \in \mathcal{S}(n) : F_1 \in \mathcal{D}(k-1)\ F_2 \in \mathcal{D}(n-k-1)\ X \in \mathcal{S}(2)\}$，其中 $k \in [n-1]$。接下来，我们给出对所有 $k \in [n-1]$ 的子幺半群 $C(D_k)$ 的刻画。

引理 *5.3*。设 $D \in \mathcal{D}_n$，使得 $C(D) \neq \mathcal{D}(n)$。那么，对于某个 $k \in [n-1]$，$C(D) = C(D_k)$ 当且仅当不存在满足 $\mathcal{D}(n) \subsetneq C(D) \subsetneq C(D)$ 的 $D \in \mathcal{D}(n)$。此外，若 $T : \mathcal{S}(n) \to \mathcal{S}(n)$ 是一个同构且 $i \in [n-1]$，则对某个 $j \in [n-1]$，有 $T(C(D_i)) = C(D_j)$。

证明。假设 $D \in \mathcal{D}_n$ 使得 $C(D) = C(D_k) = \{F_1 \oplus X \oplus F_2 : F_1 \in \mathcal{D}(k-1)\ F_2 \in \mathcal{D}(n-k-1)\ X \in \mathcal{S}(2)\}$ 对某个 $k \in [n-1]$成立。令 $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{D}(n)$。若 $C(D)$ 是 $C(D)$ 的真子集，则 $d_i \neq d_{i+1}$ 对所有 $i \in [n-1]$ 成立，因此 $C(D) = \mathcal{D}(n)$。于是不存在 $D \in \mathcal{D}(n)$ 使得 $\mathcal{D}(n) \subsetneq C(D) \subsetneq C(D)$。

对于逆命题，假设 $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{D}(n)$，并假设不存在 $D \in \mathcal{D}(n)$，存在 $k \in [n-1]$ 使得 $d_k = d_{k+1}$。此外，不存在满足 $\mathcal{D}(n) \subsetneq C(D) \subsetneq C(D)$ 的 $D \in \mathcal{D}(n)$ 这一事实，保证了没有其他$i \in [n-1]$ 满足 $d_i = d_{i+1}$。因此 $C(D) = C(D_k)$。

对于第二部分，固定 $1 \leq i \leq n-1$，并断言对于某个 $j \in [n-1]$，$T(C(D_i)) = C(D_j)$。若不然，则存在 $D \in \mathcal{D}(n)$，使得 $\mathcal{D}(n) \subsetneq C(D) \subsetneq T(C(D_i))$；这是因为根据注 3.5，$T(C(D_i)) \neq \mathcal{D}(n)$。由于 T 是 $\mathcal{S}(n)$ 上的自同构，$C\left(T^{-1}(D)\right) = T^{-1}(C(D))$，且根据注 3.5，$T(\mathcal{D}(n)) = \mathcal{D}(n)$。这意味着 $\mathcal{D}(n) \subsetneq C\left(T^{-1}(D)\right) \subsetneq C(D_i)$，这与第一部分矛盾。因此，对于某个 $j \in [n-1]$，$T(C(D_i)) = C(D_j)$。□

根据前面的引理，T of $\mathcal{S}(n)$ 的任意自同构都将 $C(D_i)$ 映到某个 $C(D_j)$ 上。我们现在证明，这种对应受到严格限制。具体而言，我们证明，对于所有 $i \in [n-1]$，$T(C(D_i))$ 要么是 $C(D_i)$，要么是 $C(D_{n-i})$。为此，我们引入一个由 $C(D_i)$ 构成的半群，它是后续论证的基础。对于 $k \in [n-1]$，定义集合

$$C_k := \{aI_{k-1} \oplus X \oplus bI_{n-k-1} \in \mathcal{S}(n) : a, b > 0, X \in \mathcal{S}(2) \setminus \mathcal{D}(2)\}. \tag{5.1}$$

容易验证，对于所有 $k \in [n-1]$，C_k 是 $\mathcal{S}(n)$ 中的一个半群。现在我们列出 C_i 中元素对于所有 $i \in [n-1]$ 都满足的一条基本性质。证明从略，因为验证过程很直接。

引理 5.4。设 $n \geq 4$。那么，C_i 和 C_j 中的所有矩阵两两可交换，当且仅当 $|i-j| > 1$。若 $|i-j| = 1$，则 C_i 和 C_j 中的矩阵并非全部两两可交换。

现在我们给出 C_k 中矩阵的一个刻画，这将有助于对 $T(C_k)$ 进行分类。

引理 5.5. 设 $X \in C(D_k)$ 是一个非对角矩阵。那么，当且仅当存在某个非对角 $Y \in C(D_k)$，使得 $C(X)$ 是 $C(Y)$ 的真子集时，X 不能写成 $aI_{k-1} \oplus Z \oplus bI_{n-k-1}$ 的形式。

证明。如果 $X = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$ 不是上述形式，那么 A_1 或 A_3 不是数量矩阵。考虑某个 $a, b > 0$ 对应的 $Y = aI_{k-1} \oplus A_2 \oplus bI_{n-k-1}$。那么 $Y \in C(D_k)$，且 $C(X)$ 是 $C(Y)$ 的真子集。

反过来，假设 $X = aI_{k-1} \oplus Z \oplus bI_{n-k-1}$。那么 $C(X) = \mathcal{S}(k-1) \oplus C(Z) \oplus \mathcal{S}(n-k-1)$。令 $Y = B_1 \oplus W \oplus B_3 \in C(D_k)$ 为非对角矩阵，且 $C(X) \subseteq C(Y)$。那么 $B_1 = cI_{k-1}, B_3 = dI_{n-k-1}$，其中某些 $c, d > 0$ 满足 $C(Z) \subseteq C(W)$。由于 Z 和 W 是非数量矩阵，且 $Z \in C(W)$，因此 $Z = \alpha I_2 + \beta W$，其中某个 $\beta > 0$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$。这意味着 $C(Z) = C(W)$。因此，$C(X)$ 不是 $C(Y)$ 的真子集。□

利用上述引理，我们接下来证明 $T(C_j) = C_j$ 或 C_{n-j}。

引理 5.6。设 $n \geq 3$ 和 $T: \mathcal{S}(n) \to \mathcal{S}(n)$ 是半群同构。则

$$T(C_j) = C_j \text{ for all } 1 \leq j < n, \text{ or } T(C_j) = C_{n-j} \text{ for all } 1 \leq j < n.$$

证明。我们首先断言，对每个 $j \in [n-1]$，都存在 $k \in [n-1]$ 使得 $T(C_j) = C_k$。固定 $1 \leq j \leq n-1$。根据引理 5.3，对于某个 $k \in [n-1]$，有 $T(C(D_j)) = C(D_k)$。由于 $C_j \subsetneq C(D_j)$，$T(C_j) \subseteq C(D_k)$。令 $X = aI_{j-1} \oplus Z \oplus bI_{n-j-1} \in C_j$，并断言 $T(X) \in C_k$。否则，就存在非对角的 $Y \in C(D_k)$，使得 $C(T(X))$ 是 $C(Y)$ 的真子集。由于 T 可逆，且 $T(\mathcal{D}(n)) = \mathcal{D}(n)$，所以 $T^{-1}(Y) \in C(D_j)$ 是非对角的，并且 $C(X) \subsetneq C(T^{-1}(Y))$；由引理 5.5，这就产生了矛盾。因此 $T(C_j) \subseteq C_k$。由于 T 是双射，运用类似的推理可得$T^{-1}(C_k) \subseteq C_j$。因此 $T(C_j) = C_k$，其中 $k \in [n-1]$。

由此可知，当 $n = 3$时，结论显然成立。以下假设 $n \geq 4$。由于 T 是双射的，因此（$T(C_1) \ldots, T(C_{n-1})$）是（$C_1, \ldots, C_{n-1}$）的一个排列。现在我们断言，$T(C_1) = C_1$或 $T(C_1) = C_{n-1}$。根据引理 5.4，$T(C_1)$中的矩阵与 $n-3$集合 $T(C_3) \ldots, T(C_{n-1})$中的所有矩阵都可交换，而 $T(C_{n-1})$中的矩阵与$n-3$集合 $T(C_1) \ldots, T(C_{n-3})$中的所有矩阵都可交换。注意，$C_1$和 C_{n-1}是仅有的两个集合，其中的所有元素都与恰好来自 $C_1, \ldots, C_{n-1}$这些集合中的 $n-3$ 个集合的所有矩阵可交换。因此，$T(C_1) = C_1$或 C_{n-1}，且 $T(C_{n-1}) = C_{n-1}$ 或 C_1。

假设 $T(C_1) = C_1$。那么 $T(C_{n-1}) = C_{n-1}$。为了完成证明，还需证明对于 $2 \leq j \leq n-2$，$T(C_j) = C_j$。根据引理 5.4，C_2 是 C_1、.....、C_{n-1} 中唯一一个其元素不与 C_1 的所有元素对易的集合，同样，C_{n-2} 也是唯一一个其元素不与 C_{n-1} 的所有元素对易的集合。这意味着 C_1 中的所有矩阵与 $T(C_2)$ 中的所有矩阵并不都对易，C_{n-1} 中的所有矩阵与 $T(C_{n-2})$ 中的所有矩阵也并不都对易。因此 $T(C_2) = C_2$，且 $T(C_{n-2}) = C_{n-2}$。采用类似的方法，我们可以证明，对于 $3 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，$T(C_j) = C_j$ 且 $T(C_{n-j}) = C_{n-j}$。因此，对于 $j \in [n-1]$，$T(C_j) = C_j$。

若 $T(C_1) = C_{n-1}$，则 $T(C_{n-1}) = C_1$，通过类似于上述的论证，我们可以得出结论：对于所有 $j \in [n-1]$，$T(C_j) = C_{n-j}$。证明至此完成。□

固定 $i \in [n-1]$。由引理 5.3 可知，对于某个 $j \in [n-1]$，有 $T(C(D_i)) = C(D_j)$。由于$C_i \subset C(D_i)$，由引理 5.6 可知，$T(C(D_i)) = C(D_i)$ 或 $C(D_{n-i})$。利用这一观察和引理 5.6，可以得出以下结论。

引理 5.7. 设 $n \geq 3$ 和 $T: \mathcal{S}(n) \to \mathcal{S}(n)$ 是一个半群同构。那么，要么 r

$$T(C(D_j)) = C(D_j) \text{ for all } 1 \leq j < n, \text{ or } T(C(D_j)) = C(D_{n-j}) \text{ for all } 1 \leq j < n.$$

备注 5.8。设 $n \geq 3$ 和 $T: \mathcal{S}(n) \to \mathcal{S}(n)$ 是一个半群同构。必要时，用映射 $X \mapsto P_n T(X) P_n$ 替换 T 后，我们今后不妨假设

$$T(C_j) = C_j \quad \text{for all } 1 \leq j < n. \tag{5.2}$$

现在我们关注 $\mathcal{D}(n)$的子群。作为上述结果的推论，我们证明 T在 $\mathcal{S}(n)$的以下子群上诱导出一个自同构：

- $\{aI_{k-1} \oplus D \oplus cI_{n-k-1} : a, c > 0 \text{ 以及 } D \in \mathcal{D}(2)\}$，其中 $k \in [n-1]$。
- $\{aI_{k-1} \oplus bI_2 \oplus cI_{n-k-1} : a, b, c > 0\}$，其中 $k \in [n-1]$。

引理 5.9. 设 $n \geq 3$ 是一个整数，且 $T: \mathcal{S}(n) \to \mathcal{S}(n)$ 是满足(5.2)的一个同构。ˆ定义 $F_k :=$ $\{aI_{k-1} \oplus D \oplus cI_{n-k-1} : a, c > 0 \text{ 和 } D \in \mathcal{D}(2)\}$，以及 $F_k = \{aI_{k-1} \oplus bI_2 \oplus cI_{n-k-1} :$ ˆ ˆ$a, b, c > 0\}$，其中 $k \in [n-1]$。那么，对所有 $k \in [n-1]$，都有 $T(F_k) = F_k$和 $T(F_k) = F_k$。

ˆ ˆ ˆ证明。固定 $k \in [n-1]$。我们首先证明 $T(F_k) = F_k$。令 $X = aI_{k-1} \oplus D \oplus cI_{n-k-1} \in F_k$，其中$D \in \mathcal{D}(2)$ 且 $a, b > 0$。由于 $T(\mathcal{D}(n)) = \mathcal{D}(n)$，$T(X) = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n)$，其中 $d_j > 0$对所有 $j \in [n]$均成立。˜对于非对角矩阵 $Y \in \mathcal{S}(2)$，定义 $Y_i := I_{i-1} \oplus Y \oplus I_{n-i-1}$，其中 $i \in [n-1]$。由 (5.2),

~ ~$T(C_j) = C_j$对所有 $1 \le j < n$均成立。因此 $Y_iT(X) = T(X)Y_i$对所有 $i \in [n-1] \setminus \{k-1, k, k+1\}$以及所有非对角 $Y \in \mathcal{S}(2)$均成立。这意味着 $d_1 = \cdots = d_{k-1}$且 $d_{k+2} = \cdots = d_n$。因此ˆ ˆ ˆ$T(X) \in F_k$，从而 $T(F_k) \subseteq F_k$。由于 T是一个自同构，类似的论证表明T^{-1}(ˆ F_k) $\subseteq$ˆF_k。因此，对于 $k \in [n-1]$， T(ˆF_k) =ˆF_k。

为证明 $T(F_k) = F_k$，令 $A = aI_{k-1} \oplus bI_2 \oplus cI_{n-k-1} \in F_k$。注意，对于所有 $i \in [n-1] \setminus \{k-1, k+1\}$ 以及所有非对角 $Y \in \mathcal{S}(2)$， $T(A)$ =对角矩阵$(d_1, \ldots, d_n) \in$~ ~$\mathcal{D}(n)$且 $Y_iT(A) = T(A)Y_i$，其中矩阵 Y_i如上所定义。由此可得 $d_1 = \cdots = d_{k-1}$、 $d_k = d_{k+1}$和$d_{k+2} = \cdots = d_n$。因此，对于所有 $A \in F_k$， $T(A)$ $\in F_k$。类似地，可以证明，对于所有$A \in F_k$， $T^{-1}(A) \in F_k$。因此，当 $k \in [n-1]$时， $T(F_k) = F_k$。□

上述引理得出以下定理，这对归纳步骤至关重要。

定理 5.10. 设 $n \ge 3$ 为一个整数，且 $T : \mathcal{S}(n) \to \mathcal{S}(n)$ 是满足(5.2)的半群同构。那么， T 在以下幺半群上诱导出一个自同构：

(i) $\{\alpha I_{k-1} \oplus X \oplus \beta I_{n-k-1} : X \in \mathcal{S}(2), \alpha, \beta > 0\}$ *for all* $k \in [n-1]$.
(ii) $\mathcal{S}(n-1) \oplus S(1) = \{X \oplus \alpha : X \in \mathcal{S}(n-1), \alpha > 0\}$.

证明。固定 $k \in [n-1]$，并断言 $T(\{\alpha I_{k-1} \oplus X \oplus \beta I_{n-k-1}$: $X \in \mathcal{S}(2)$ $\alpha, \beta > 0\})$ $= \{\alpha I_{k-1} \oplus$ˆ ˆ ˆ $X \oplus \beta I_{n-k-1}$: $X \in \mathcal{S}(2)$ $\alpha, \beta > 0\}$。由 (5.2)， $T(C_k) = C_k$；由引理 5.9， $T(F_k) = F_k$，ˆ其中 $F_k = \{aI_{k-1} \oplus D \oplus bI_{n-k-1}$: $a, b > 0$ 且 $D \in \mathcal{D}(2)\}$。注意，每个 $X \in \mathcal{S}(2)$ 都可以分解为 $X = LDU$，其中 $L \in \mathcal{L}_0(2)$ $D \in \mathcal{D}(2)$，且 $U \in \mathcal{U}_0(2)$。利用 T 是乘法性的且为双射这一事实，我们得出 T($\{\alpha I_{k-1} \oplus X \oplus \beta I_{n-k-1}$: $X \in \mathcal{S}(2)$ $\alpha, \beta > 0\})$ $=\{\alpha I_{k-1} \oplus X \oplus \beta I_{n-k-1}$: $X \in \mathcal{S}(2)$ $\alpha, \beta > 0\}$。

接下来我们断言， T在 $\mathcal{S}(n-1) \oplus S(1)$ 上诱导一个自同构。令 $Z = X \oplus a$，其中$X \in \mathcal{S}(n-1)$ $a > 0$。令ˆ$X = \frac{1}{a}X$。那么，根据注 3.5，有 $Z = a($ ˆ$X \oplus 1)$ 和 $T(Z) = \gamma(a)T($ ˆ$X \oplus 1)$。ˆ由于 $X \in \mathcal{S}(n-1)$，根据 Whitney 双对角分解，

$$\hat{X} = \prod_{j=1}^{n-2} \prod_{k=n-2}^{j} \left(I_{n-1} + w_{j,k}E_{k+1,k}\right) D \prod_{j=n-2}^{1} \prod_{k=n-2}^{j} \left(I_{n-1} + w'_{j,k+1}E_{k,k+1}\right), \tag{5.3}$$

其中 $w_{j,k} \ge 0$ 分别对应 $1 \le j \le k \le n-2$,$w'_{j,k+1} \ge 0$ 对应 $1 \le j \le k \le n-2$， 且 $D \in \mathcal{D}(n-1)$。根据注 3.5， $T(\mathcal{D}(n)) = \mathcal{D}(n)$；根据第一部分， T 对所有 $k \in [n-1]$ 都将 $\{\alpha I_{k-1} \oplus X \oplus \beta I_{n-k-1}$: $X \in \mathcal{S}(2)$ $\alpha, \beta > 0\}$ 映射到其自身。因此，利用 (5.3) 和 T 的乘法性，我们ˆ有 $T(X \oplus 1) \in \mathcal{S}(n-1)$ $\oplus \mathcal{S}(1)$。因此 $T(Z) \in \mathcal{S}(n-1) \oplus \mathcal{S}(1)$，从而 $T(\mathcal{S}(n-1) \oplus \mathcal{S}(1)) \subseteq \mathcal{S}(n-1) \oplus \mathcal{S}(1)$。类似地，可以证明 $T^{-1}(\mathcal{S}(n-1) \oplus \mathcal{S}(1)) \subseteq \mathcal{S}(n-1) \oplus \mathcal{S}(1)$。因此$T(\mathcal{S}(n-1) \oplus \mathcal{S}(1)) = \mathcal{S}(n-1) \oplus \mathcal{S}(1)$。□

结合以上这些要素，我们现在利用归纳假设完成定理 A 在 $n \ge 3$ 情形下的证明。请回顾，基础情形 $n = 2$ 已在上一节中证明。

定理 *A* 的证明 $(i) \implies (ii)$ 一般情形。 在归纳步骤中，设 T： $\mathcal{S}(n) \to \mathcal{S}(n)$ 是一个同构，其中 $n \ge 3$ 。如有必要，将 T 替换为映射 $X \mapsto P_nT(X)P_n$ ，于是我们可以假设 T 满足 (5.2)。根据定理 5.10， T 在幺半群$\mathcal{S}(n-1) \oplus \mathcal{S}(1)$ 上诱导出一个自同构。定义 T_1： $\mathcal{S}(n-1) \to \mathcal{S}(n-1)$ 为

$$T_1(X) := \frac{1}{f(X)}Z, \quad \text{where } T(X \oplus [1]) := Z \oplus [f(X)]. \tag{5.4}$$

注意， f： $\mathcal{S}(n-1) \to (0, \infty)$ 是一个乘法映射。现在我们证明 T_1 是 $\mathcal{S}(n-1)$ 上的半群自同构：

- **乘法性的：** 令 $X_1, X_2 \in \mathcal{S}(n-1)$，并令 $T(X_1 \oplus [1]) = Z_1 \oplus [f(X_1)], T(X_2 \oplus [1])$ $= Z_2 \oplus [f$ $(X_2)]$。那么 $T_1(X_1) =$ $f^{-1}(X_1)Z_1$ 且 $T_1(X_2) =$ $f^{-1}(X_2)Z_2$。由于 T 在.....上是乘法性的

$\mathcal{S}(n)$,

$$T_1(X_1X_2) = \frac{1}{f(X_1)f(X_2)} Z_1Z_2 = T_1(X_1)T_1(X_2).$$

• **单射：** 设 $X_1,\ X_2 \in \mathcal{S}(n-1)$ 使得 $T_1(X_1) = T_1(X_2)$。若 $T(X_1 \oplus [1]) = Z_1 \oplus [f(X_1)]$且 $T(X_2 \oplus [1]) = Z_2 \oplus [f(X_2)]$,, 则 $f^{-1}(X_1)Z_1 = f^{-1}(X_2)Z_2$。因此

$$\begin{aligned} T(X_2 \oplus [1]) &= \frac{f(X_2)}{f(X_1)} Z_1 \oplus [f(X_2)] \\ &= \frac{f(X_2)}{f(X_1)} T(X_1 \oplus [1]) \\ &= T\left(\gamma^{-1}\left(\frac{f(X_2)}{f(X_1)}\right)(X_1 \oplus [1])\right), \end{aligned}$$

由注 3.5 (ii) 可知。由于 T 是双射的，$\gamma^{-1}\left(\frac{f(X_2)}{f(X_1)}\right) = 1$，因此 $X_1 = X_2$。

• **满射：** 设 $Y \in \mathcal{S}(n-1)$。根据定理 5.10，存在 $X_1 \in \mathcal{S}(n-1)$ 以及一个正实数 α，使得 $T(X_1 \oplus [\alpha]) = Y \oplus [1]$。令 $X := \frac{1}{\alpha} X_1$ 和 $Z := \gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) Y$。根据注 3.5 (ii),

$$T(X \oplus [1]) = T(\frac{1}{\alpha}(X_1 \oplus [\alpha])) = \gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)(Y \oplus [1]) = Z \oplus \left[\gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right],$$

且 $f(X) = \gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$。因此，存在 $X \in \mathcal{S}(n-1)$，使得 $T_1(X) = f^{-1}(X)Z = Y$。这表明 $T_1 : \mathcal{S}(n-1) \to \mathcal{S}(n-1)$ 是一个同构。根据归纳假设,

$$T_1(X) = \gamma_{n-1}(\det X)(\det X)^{-\frac{1}{n-1}} RXR^{-1} \quad \text{for all } X \in \mathcal{S}(n-1),$$

其中 $\gamma_{n-1} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ 是一个双射乘法映射，且 $R = \sum_{j=1}^{n-1} r_j E_{jj}$ 或 $\sum_{j=1}^{n-1} r_j E_{j,n-j} \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$ 满足 $r_1, \ldots, r_{n-1} > 0$。因此，由 (5.4) 可得

$$T(X \oplus [1]) = f(X)\,(T_1(X) \oplus [1]) = f(X)\left(\gamma_{n-1}(\det X)(\det X)^{-\frac{1}{n-1}} RXR^{-1} \oplus [1]\right). \tag{5.5}$$

现在证明情形 $R = \sum_{j=1}^{n-1} r_j E_{j,n-j}$ 不可能。设 $D_\alpha = \alpha I_{n-2} \oplus I_2$，且 $\alpha \neq 1$。假设 $R = \sum_{j=1}^{n-1} r_j E_{j,n-j}$。那么，由 (5.5)，

$$T(D_\alpha) = f(\alpha I_{n-2} \oplus [1])\left(\gamma_{n-1}(\alpha^{n-2})\ \alpha^{-\frac{n-2}{n-1}} \operatorname{diag}(1,\alpha,\ldots,\alpha) \oplus [1]\right),$$

这就产生了矛盾，因为引理 5.9 表明，对某个 $a, b > 0$，$T(D_\alpha) = aI_{n-2} \oplus bI_2$。因此 $R = \sum_{j=1}^{n-1} r_j E_{jj}$。令 $\tilde{R} = R \oplus [1]$，并将 T 替换为共轭映射 $A \mapsto \tilde{R}^{-1}T(A)\,\tilde{R}$。因此，我们可以假设 $j=1$

$$T(X \oplus [1]) = f(X)\left(\gamma_{n-1}(\det X)(\det X)^{-\frac{1}{n-1}} X \oplus [1]\right). \tag{5.6}$$

接下来我们证明，对所有 $A \in \mathcal{S}_0(n-1)$，$T(A \oplus [1]) = A \oplus [1]$。令 $A \in \mathcal{S}_0(n-1)$。由于 $\gamma_{n-1}(1) = 1$，由 (5.6) 可知，对所有 $A \in \mathcal{S}_0(n-1)$，$T(A \oplus [1]) = f(A)\,(A \oplus [1])$。我们断言，对所有$A \in \mathcal{S}_0(n-1)$，$f(A) = 1$。根据 Whitney 双对角分解，只需考虑形如以下形式的 A

$$I_{k-1} \oplus X \oplus I_{n-k-1}, \tag{5.7}$$

其中 X 属于单参数切瓦莱子群

$$\{\exp(aE_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a > 0\} \qquad \text{or} \qquad \{\exp(aE_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} : a > 0\}$$

或 X 一个环面元素 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ 对于 $a > 0$ – 且满足 $k \in [n-2]$。接下来我们证明，对于上述所有 X， $f(A) = 1$。对于所有这些 X， f 仅是 a 的函数。因此我们将其改写为：当 $X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$时为 $f_u(a)$，当 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$时为 $f_l(a)$，当 $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \\ & a \end{pmatrix}$时为 $f_d(a)$。容易验证， $f_d : (0, \infty) \to (0, \infty)$ 是乘法的，即对于所有 a_1和 $a_2 > 0$， $f_d(a_1^{-}a_2) = f_d(a_1)f_d(a_2)$。接下来我们证明，对于所有 a_1和 $a_2 > 0$， $f_u(a_1 + a_2) = f_u(a_1)f_u(a_2)$。令 a_1， $a_2 > 0$ 并取 $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$和$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。那么 $X_1X_2 = X_3$ 并

$$T(I_{k-1} \oplus X_3 \oplus I_{n-k-1}) = T\left((I_{k-1} \oplus X_1 \oplus I_{n-k-1})(I_{k-1} \oplus X_2 \oplus I_{n-k-1})\right),$$

其中 $k \in [n-2]$。由于对所有 $A \in \mathcal{S}_0(n-1)$， $T(A \oplus [1]) = f(A)\,(A \oplus [1])$，我们有

$$f_u(a_1 + a_2) = f_u(a_1)f_u(a_2). \tag{5.8}$$

类似地，我们可以证明，对所有 a_1， $a_2 > 0$， $f_l(a_1+a_2) = f_l(a_1)f_l(a_2)$。现在我们证明，对所有 $a > 0$， $f_u(a) = 1$。令 $a > 0$。注意，对所有 $p > 0$，

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{1}{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p^2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

将上述所有 矩阵嵌入到形如 (5.7) 的 $n \times n$ 矩阵中，并应用 T，我们得到 e

$$f_d(p)f_u(a)f_d\left(\frac{1}{p}\right) = f_u(p^2a). \tag{5.9}$$

由于 f_d 是乘法性的，对所有 $p > 0$， $f_u(a) = f_u(p^2a)$。特别地，当 $p = 2$ 时， $f_u(a) = f_u(4a)$。利用恒等式 (5.8)，我们有

$$\begin{aligned} f_u(a) &= f_u(4a) \\ &= f_u(2a)f_u(2a) \\ &= (f_u(a))^4. \end{aligned}$$

因此，对所有 $a > 0$， $f_u(a) = 1$。类似地，可以证明，对所有 $a > 0$， $f_l(a) = 1$。最后，我们证明，对所有 $p > 0$， $f_d(p) = 1$。令 $a > 0$ 和 $X := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。那么 $XX^T = Y^TZY$，其中$Y = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{a^2+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $Z = \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2+1} \end{pmatrix}$。定义

$$\hat{X} := \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}, \ \hat{Y} := \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}, \ \hat{Z} := \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix},$$

其中 $k \in [n-2]$。由于对所有 $p > 0$， $f_u(p) = f_l(p) = 1$，我们有 $T(\hat{X}) = \hat{X}$, $T(\hat{X}^T) = \hat{X}^T$,$T(\hat{Y}) = \hat{Y}$，以及 $T(\hat{Y}^T) = \hat{Y}^T$。这意味着

$$(\hat{X}\hat{X}^{T} = T\hat{X}\hat{X}^T) = T(\hat{Y}^T\hat{Z}\hat{Y}) = T(\hat{Y}^T)T(\hat{Z})T(\hat{Y}) = \hat{Y}^T f_d(a^2+1)\hat{Z}\hat{Y} = f_d(a^2+1)\hat{X}\hat{X}^T.$$

因此，对所有 $a>0$， $f_d(a^2+1)=1$。由于 f_d 是乘法性的，对所有 $a>0$， $f_d(a)=1$。因此，对所有 $A\in S_0(n-1)$， $f(A)=1$，并且

$$T(A\oplus[1])=A\oplus[1]\quad\text{for all}\quad A\in S_0(n-1). \tag{5.10}$$

接下来，我们将注意力转向形如 $I_{n-2}\oplus A\in\mathcal{S}(n)$ 的矩阵。注意，根据定理 5.10， T 在 $\{aI_{n-2}\oplus X$ 上诱导出一个半群自同构： $a>0$， $X\in\mathcal{S}(2)\}$。定义 $T_2\colon\mathcal{S}(2)\to\mathcal{S}(2)$ 为

$$T_2(X):=\frac{1}{g(X)}Z,\quad\text{where } T(I_{n-2}\oplus X):=g(X)I_{n-2}\oplus Z,$$

其中 $g\colon\mathcal{S}(2)\to(0,\infty)$ 是一个乘法映射。现在我们证明 T_2 是 $\mathcal{S}(2)$ 上的半群自同构。利用与上文类似的论证，可知 T_2 是乘法性的。剩下要证明 T_2 是双射的。

- **单射：** 设 X_1， $X_2\in\mathcal{S}(2)$，满足 $T_2(X_1)=T_2(X_2)$。若 $T(I_{n-2}\oplus X_1)=g(X_1)I_{n-2}\oplus Z_1$且 $T(I_{n-2}\oplus X_2)=g(X_2)I_{n-2}\oplus Z_2$，则 $g(X_1)Z_1=g(X_2)Z_2$。因此

$$\begin{aligned}T(I_{n-2}\oplus X_2)&=g(X_2)I_{n-2}\oplus\left(\frac{g(X_2)}{g(X_1)}\right)Z_1\\&=\frac{g(X_2)}{g(X_1)}T(I_{n-2}\oplus X_1)\\&=T\left(\gamma^{-1}\left(\frac{g(X_2)}{g(X_1)}\right)(I_{n-2}\oplus X_1)\right),\end{aligned}$$

由注 3.5 (ii) 可知。这意味着 $\gamma^{-1}\left(\frac{g(X_2)}{g(X_1)}\right)=1$ 以及 $X_1=X_2$。

- **满射：** 取 $Y\in\mathcal{S}(2)$。由于 T 在 $\{aI_{n-2}\oplus X$ 上是双射的： $a>0, X\in\mathcal{S}(2)\}$，存在 $X_1\in\mathcal{S}(2)$ 和一个正实数 α，使得 $T(\alpha I_{n-2}\oplus X_1)=I_{n-2}\oplus Y$。由于$T(\frac{1}{\alpha}I_n)=\beta I_n$对某个 $\beta>0$成立，定义 $X:=\frac{1}{\alpha}X_1$和 $Z:=\beta Y$。于是

$$T(I_{n-2}\oplus X)=T\left(\frac{1}{\alpha}(\alpha I_{n-2}\oplus X_1)\right)=\beta I_{n-2}\oplus Z.$$

因此存在 $X\in\mathcal{S}(2)$，使得 $T_2(X)=\frac{1}{\beta}Z=Y$。

这意味着 T_2 是 $\mathcal{S}(2)$ 上的自同构。根据归纳假设， T_2 具有$X\mapsto\gamma_2(\det X)(\det X)^{-\frac{1}{2}}SXS^{-1}$的形式，其中 $\gamma_2\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ 是一个双射乘法映射，且$S=\begin{pmatrix}s_1&0\\0&s_2\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0&s_1\\s_2&0\end{pmatrix}$，其中 s_1， $s_2>0$。因此，对所有 $X\in\mathcal{S}(2)$，

$$T(I_{n-2}\oplus X)=g(X)\left(I_{n-2}\oplus\gamma_2(\det X)(\det X)^{-\frac{1}{2}}SXS^{-1}\right). \tag{5.11}$$

接下来我们证明 $S=\begin{pmatrix}0&s_1\\s_2&0\end{pmatrix}$ 不可行。设

$$A=I_{n-3}\oplus\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad B=I_{n-3}\oplus\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\alpha\\0&0&1\end{pmatrix},$$

其中有 $\alpha\neq0$。于是 $AB=BA$，根据 (5.10)， $T(A)=A$。如果 $S=\begin{pmatrix}0&s_1\\s_2&0\end{pmatrix}$，那么利用 (5.11) 可得$T(B)=g\left(\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix}\right)\left(I_{n-3}\oplus\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{s_2}{s_1}\alpha&1\end{pmatrix}\right)$，因此 $T(A)T(B)\neq T(B)T(A)$，产生矛盾。因此，对于某个 s_1，有 $S=\begin{pmatrix}s_1&0\\0&s_2\end{pmatrix}, s_2>0$。令 $S':=$对角矩阵$(1,\frac{s_2}{s_1})$。那么对所有

$X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$。定义 $\tilde{S} := \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(n)$。将 T替换为映射 $A \mapsto \tilde{S}^{-1}T(A)\,\tilde{S}$后，不妨设

$$T(I_{n-2} \oplus X) = g(X)\left(I_{n-2} \oplus \gamma_2(\det X)(\det X)^{-\frac{1}{2}}X\right) \quad \text{for all } X \in \mathcal{S}(2). \tag{5.12}$$

现在我们证明，对于所有 $X \in \mathcal{S}_0(2)$，$T(I_{n-2}\oplus X) = I_{n-2}\oplus X$。通过与上述类似的论证，可以证明，对于 $X = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$，有 $g(X) = 1$；并且对于所有 $\alpha > 0$，有 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$。同样，根据 Whitney双对角分解，对于所有 $X \in \mathcal{S}_0(2)$，$g(X) = 1$。由于 $\gamma_2(1) = 1$，由 (5.12) 可得

$$T(I_{n-2} \oplus X) = I_{n-2} \oplus X \quad \text{for all} \quad X \in \mathcal{S}_0(2). \tag{5.13}$$

至此，我们已经证明，T 保持每个上、下初等双对角矩阵不变。我们n现在证明，对于所有 $D \in \mathcal{D}_0(n)$，$T(D) = D$。令 $D = \operatorname{diag}(a_1, \ldots\ldots, a_n) \in \mathcal{D}_0(n)$。那么 $\prod a_i = 1_{i=1}$ 并且 $D = D_1D_2$带有 $D_1 =$对角矩阵 $\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_{n-2}, \underbrace{\prod_{i=1}^{\frac{1}{n-2}} a_i}, 1 \end{pmatrix}$ 以及 $D_2 = I_{n-2} \oplus$对角矩 (5.10)

阵$(\frac{1}{a_n}, a_n)$。由及 (5.13)，我们有 $T(D) = T(D_1)T(D_2) = D_1D_2 = D$。因此

$$T(D) = D \quad \text{for all} \quad D \in \mathcal{D}_0(n). \tag{5.14}$$

现在注意，可逆全非负矩阵的所有双对角因子（其行列式为 1）要么具有 $I_{k-1}\oplus X \oplus I_{n-k-1}$ 的形式，且 $\det(X) = 1$；要么是行列式为 1 的对角矩阵。因此，对于所有 $A \in \mathcal{S}_0(A)$，都有 $T(A) = A$。

总结上述分析，我们使用映射 $X \mapsto P_nT(A)P_n$ (见备注 5.8)、$X \mapsto \tilde{R}^{-1}T(X)\,\tilde{R}$和 $X \mapsto \tilde{S}^{-1}T(X)\,\tilde{S}$，得出对于所有 $A \in \mathcal{S}_0(A)$，都有 $T(A) = A$，其中

$$P_n := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \text{ with } R \in \mathcal{D}(n-1) \text{ and } s > 0.$$

为完成证明，将一般的 $A \in \mathcal{S}(n)$ 写作 $A = ((\det A)^{\frac{1}{n}} I_n)A_0$，其中 $\det A_0 = 1$。因此

$$\begin{aligned} T(A) &= T((\det A)^{\frac{1}{n}} A_0) \\ &= \gamma((\det A)^{\frac{1}{n}})T(A_0) \\ &= \gamma((\det A)^{\frac{1}{n}})A_0 \\ &= \mu(\det A)(\det A)^{-\frac{1}{n}}A, \end{aligned}$$

其中 $\mu(x) := \sqrt[n]{\gamma(x)}$是定义在 $(0, \infty)$ 上的双射乘法映射。因此

$$T(A) = \mu(\det A)(\det A)^{-\frac{1}{n}}A \text{ for all } A \in \mathcal{S}(n).$$

证明至此完成。 □

利用定理 A，我们现在证明第二个主要结果。

定理 B 的证明。 根据假设，$(ii) \implies (i)$ 是显然的。对于 $(i) \implies (ii)$，利用命题 ^ ^ 2.6，T可扩张为 $ITN(n)$ 的幺半群自同构 T，使得 $T \equiv T$ 在 $G(n)$ 上成立。由 ^ 定理 A，我们得到 T 的所需结构，进而得到 T 的所需结构。□

我们以下述备注作结。

备注 5.11。 设 G 和 H 是两个群。如果 ϕ 是 G 的自同构，且 ψ 是 H 的自同构，那么由下式定义的乘积函数 $\phi \times \psi$： $G \times H \to G \times H$

$$(\phi \times \psi)(g, h) := (\phi(g), \psi(h)) \quad \text{for all } g \in G \text{ and } h \in H,$$

是 $G \times H$ 的自同构。但一般而言，并非 $G \times H$ 的每个自同构都具有上述形式。

现在我们看到，群 $Z^+(n) = \{aI_n : a > 0\}$ 与子幺半群 $\mathcal{S}_0(n)$ 的直积的每个自同构都具有上述分解。注意， $\mathcal{S}(n) = Z^+(n) \times \mathcal{S}_0(n)$。根据定理 A，若 T 是 $\mathcal{S}(n)$ 的自同构，则 $T_1 = T|_{Z^+(n)}$ 和 $T_2 = T|_{\mathcal{S}_0(n)}$ 分别是 $Z^+(n)$ 和 $\mathcal{S}_0(n)$ 上的自同构。因此 $T = T_1 \times T_2$。

Acknowledgements

我们感谢 Apoorva Khare 细读早期稿件并提供宝贵意见。本项目始于作者参加研讨会“全正性理论与应用”期间。该研讨会于2023年7月24日至28日在美国数学研究所（AIM）举行。作者感谢 AIM 和美国国家科学基金会为 AIM 及参加本次研讨会的人员提供经费支持。P.N. Choudhury 获得了 ANRF 总理青年研究人员资助 ANRF/ECRG/2024/002674/PMS（ANRF，印度政府）、INSPIRE 教职研究员奖学金研究资助 DST/INSPIRE/04/2021/002620（DST，印度政府）以及甘地讷格尔印度理工学院内部项目 IP/IP/50025 的部分支持。S.M. Fallat 获得了 NSERC 探索研究资助 2025-05272（申请编号：RGPIN-2019-03934）的部分支持。

References

[1] M. Alwill、C.K. Li、C. Maher 和 N.S. Sze。某些矩阵群和半群的自同构。 *Linear Algebra Appl.* 412 490 525, 2006 , : –。

[2] S. Banach。关于函数方程´（ *f*）$x + y$（ $= f$）$x + f$（y）。 *Fund. Math.*，1(1):123–124，1920年。[3] A. Belton、D. Guillot、A. Khare 和 M. Putinar。全正核、P´olya频率函数及其变换。 *J. d'Analyse Math.*，150:83–158，2023年。[4] A. Berenstein、S. Fomin 和 A. Zelevinsky。典范基和全正矩阵的参数化。*Adv. Math.*，122:49–149，1996年。[5] F. Brenti。组合学与全正性。 *J. Combin. Theory Ser. A*，71(2):175–218，1995年。[6] W.S. Cheung、S. Fallat 和 C.K. Li。矩阵半群上的乘法保持映射。 *Linear Algebra Appl.*，355 173 186，2002年：–。[7] P.N. Choudhury。刻画全正性：通过线性互补、符号不反转和变差递减进行单向量检验。 *Bull. London Math. Soc.*，54(2):791–811，2022年。[8] C.W. Cryer，全正矩阵的 *LU*分解， *Linear Algebra Appl.*，7:83-92（1973年）。[9] C.W. Cryer，全正矩阵的一些性质， *Linear Algebra Appl.*，15:1-25（1976年）。[10] S.M. Fallat 和 C.R. Johnson。 *Totally nonnegative matrices*。普林斯顿应用数学丛书，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2011年。[11] M. Fekete 和 G. P´olya。 ¨关于 Laguerre 的一个问题。 *Rend. Circ. Mat. Palermo*，34:89–120，1912年。[12] S. Fomin 和 A. Zelevinsky。全正性：检验与参数化。 *Math. Intelligencer*，22(1):23–33，2000年。[13] S. Fomin 和 A. Zelevinsky。簇代数 I：基础。 *J. Amer. Math. Soc.*，15(2):497–529，2002年。[14] F.R. Gantmacher 和 M.G. Krein。关于完全非负矩阵和振荡矩阵。 ，： –。[15] F.R. Gantmacher 和 M.G. Krein。 *Oscillyacionye matricy i yadra i malye kolebaniya mehaničeskih sistem*。Gosudarstv. Isdat. Tehn.-Teor. Lit.，莫斯科—列宁格勒，1941年。[16] M. Gasca 和 C.A. Micchelli。 *Total positivity and its applications*。数学及其应用，第359卷，Springer Science+Business Media，多德雷赫特，1996年。[17] K. Gr¨ochenig、J.L. Romero 和 J. St¨ockler。平移不变空间、Gabor框架和全正函数的采样定理。 *Invent. Math.*，211:1119–1148，2018年。[18] S. Karlin。 *Total positivity. Vol. I*。斯坦福大学出版社，美国加利福尼亚州斯坦福，1968年。[19] Y. Kodama 和 L. Williams。格拉斯曼流形上的KP孤子与全正性。 *Invent. Math.*，198(3):637–699，2014年。[20] E. Laguerre。关于数值方程理论的回忆录。 *J. Math. Pures Appl.*，9:9–146，1883年。

[21] G. Lusztig。约化群中的全正性。载于 *Lie theory and geometry*，第123卷 *Progr. Math.*，第531–568页。Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，1994年。[22] T.S. Motzkin。 *Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen*。博士论文，巴塞尔，1933年；耶路撒冷，1936年。[23] A. Pinkus。 *Totally positive matrices*。剑桥数学论丛，第181卷，剑桥大学出版社，剑桥，2010年。[24] K.C. Rietsch。全正托普利茨矩阵与部分旗簇的量子上同调。

J. Amer.，（）：–。[25]

Math. Soc. 16 2 363 392, 2003

I.J. Schoenberg。 ¨关于变差递减线性变换。 *Math. Z.*，32:321–328，1930年。[26] I.J. Schoenberg。关于多重正序列和函数的生成函数的零点。 *Ann. of*，

Math. (2) 62 3 447 471, 1955

（）：–。[27] L.L. Schumaker。 *Spline functions: basic theory*。剑桥数学图书馆。剑桥大学出版社，剑桥，第三版，2007年。[28] W. Sierpi´nsky。关于函数方程´（ f）$x+y$（$=f$）x（$+f$）y。 *Fund. Math.*，1(1):116–122，1920年。[29] A.M. Whitney。全正矩阵的约化定理。 *J. d'Analyse Math.*，2(1):88–92，1952年。

(P.N. Choudhury) Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Gandhinagar, Palaj,Gandhinagar Gujarat 382355, India*Email address*: projeshnc@iitgn.ac.in

（S. Fallat） University of Regina, Regina, SK, Canada
Email address: shaun.fallat@uregina.ca

(C.K. Li) Department of Mathematics, College of William and Mary, Williamsburg, VA 23187-8793,USA
Email address: cklixx@wm.edu