arXiv:2601.11083v1 [math.GT] 16 Jan 2026

禁构　禁构型与透镜空间的定号填充

ANTONY T.H. FUNG 和 JUNGHWAN PARK

摘要。我们研究透镜空间的定号填充。我们对满足以下条件的透镜空间 $L(p,\ q)$ 进行分类：每个光滑负定填充 X 均满足

$$b_2(X) \geq b_2(X(p,q)) - 1,$$

其中 $X(p,\ q)$ 表示典范负定配管。该分类由 17 个“禁构型”给出；这些构型不能作为典范管道图的诱导子图出现。更一般地，我们引入一个组合框架，用以编码来自 $X(p,\ q)$ 的对偶铅垂的格嵌入信息，并证明该框架由有限多个极小禁构型所支配。我们还讨论了对透镜空间的辛填充以及循环商奇点的光滑化所产生的推论。

1. 引言

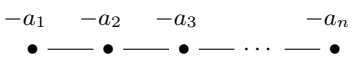
低维拓扑中的一个基本问题，是理解由给定的闭定向3维流形 Y作为边界的4维流形的拓扑。在本文中，我们关注<style id='2'>定号填充：光滑、紧致、定向的4维流形 X，其 $\partial X = Y$ 交叉形式 Q_X 是定号的。如果紧致4维流形 X 是闭3维流形 Y的填充，那么我们称交叉形式 Q_X 填充 Y，或者称 Q_X 被 Y界定。本文的核心问题是：

理解由闭定向　　3维流形界定的定号交叉形式　　3维流形 Y。

请注意，Donaldson 对角化定理 [Don87] 在 $Y = S^3$时给出了完整答案：由 S^3 界定的任意定号交叉形式都是标准对角格。关于近期进展及相关研究，例如参见 [Frø95、Lis07a、Lis07b、OS12、CP18、Sca24、GS19、Ace20、CP21、Frø23、AMP25]。

在 [AMP25], Aceto–McCoy–Park 开始系统地研究了这一问题，针对透镜空间。他们的一项主要结果是对满足以下性质的透镜空间连通和进行分类：在 S^3 的稳定化意义下，它们在负定填充中具有唯一的负定交叉形式，其中稳定化通过 $\langle -1\rangle$ 个连通和项实现。[1] 他们证明，存在10 种由线性加权图构成的“禁构型”，使得透镜空间的连通和具有这一唯一交叉形式性质，当且仅当与该连通和对应的典范管道图不包含任何一种此类构型。本文将证明，在更一般的情形下也会出现类似的“禁构型”。为准确陈述这一点，我们先引入一些术语。

回顾一下，透镜空间 $L(p,q)$ 是通过对 S^3 中的平凡结进行 $-p/q$–Dehn手术得到的，其中 p 和q 是满足 $p > q > 0$ 的互素整数。它的边界是一个典范负定配管 $X(p,q)$，即沿着线性加权图对球面上的圆盘丛进行配管所得到的光滑负定 4 维流形



其中整数 $a_i \geq 2$ 由连分数展开唯一确定

$$\frac{p}{q} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_n}}}.$$

更一般地，连通和 $\#_i L(p_i,q_i)$ 是相应典范负定配管的边界连通和 $\natural_i X(p_i,q_i)$ 的边界，而其相应的管道图是不交并，即各个被加项的管道图的不交并。我们还回顾一下，$-L(p,q)$，透镜空间 $L(p,q)$，其

日期：2026年1月19日。[1]注意，如果 Y 界定一个交叉形式为 Q_X 的负定四维流形 X，那么通过爆破 X 我们看到，Y也界定对于任意 $n > 0$的稳定化形式 $Q_X \oplus \langle -1\rangle^{\oplus n}$。

反向定向后，与 $L(p,p-q)$ 保向微分同胚。最后，紧致定向4维流形 X 的交叉形式定义了一个整数格 $(H_2(X)/\text{tors}\ Q_X)$，我们通常将其简记为 Q_X。

给定透镜空间的连通和 $L=\#_i L(p_i,q_i)$，我们可以沿其公共边界粘合 $\natural_i X(p_i,q_i)$ 和 $\natural_i X(p_i,p_i-q_i)$，从而得到一个闭光滑负定4维流形 Z。[2] 根据Donaldson定理，Z 的交叉形式同构于（$\mathbb{Z}^n$, –Id），其中 $n=b_2(\natural_i X(p_i,q_i))+b_2(\natural_i X(p_i,p_i-q_i))$。特别地，整数格 $Q_{\natural_i X(p_i,p_i-q_i)}$ 可嵌入（$\mathbb{Z}^n$, –Id）中。一般而言，$Q_{\natural_i X(p_i,p_i-q_i)}$ 可能嵌入秩更小的标准格中。

定义1.1。设 $L=\#_i L(p_i,\ q_i)$ 为透镜空间的连通和，并设 k 为一个正整数。令

$$n_k=b_2(\natural_i X(p_i,q_i))+b_2(\natural_i X(p_i,p_i-q_i))-k.$$

我们称 L 满足性质 X_k，如果整数格 $Q_{\natural_i X(p_i,\ p_i-q_i)}$ 不能嵌入标准格 $\mathbb{Z}^{n_k}$, –Id)。

下面这个初等引理启发了上述定义。其证明是 Donaldson 对角化定理的标准应用，因此我们略去证明。

引理 1.2。设 $L=\#_i L(p_i,q_i)$ 是透镜空间的一个连通和，并设 $\natural_i X(p_i,q_i)$ 表示相应典范负定配管的边界连通和。若 L 满足性质 X_k，其中正整数为 k，则 L 的每个光滑负定填充 X 都满足

$$b_2(X)\geq b_2(\natural_i X(p_i,q_i))-(k-1).$$ □

采用上述术语，[AMP25定理 1。1] 中的主定理可以概括如下。设 $L=\#_i L(p_i,\ q_i)$ 是透镜空间的一个连通和。则存在一个有限构型集 S_1 满足$|S_1|=10$，使得以下条件等价：

(a) L 满足性质 X_1。(b) 与 L 相关联的管道图不包含将 S_1 中的构型作为诱导子图。(c) L 的每个光滑负定填充 X 都满足 $b_2(X)\geq b_2(\natural_i X(p_i,\ q_i))$。

因此，满足上述任一条件的 L，等价于在通过 $\langle -1\rangle$ 直和项 稳定化后，在负定填充中具有唯一的负定交叉形式。

这一结果的一个显著特点是，禁构型的集合 S_1 可以选为仅含10 个元素，而且这一选择是最小的：任何能够刻画上述条件等价性的构型集合，都必然包含 S_1。文献 [AMP25] 中主定理证明的核心，是针对这个固定集合 S_1证明(b) 推出(a)。

我们的第一个主定理是：对每个正整数 k，都存在一个有限的禁构型集合 S_k 使得，对于每个(a) 和(b)，与之类似的陈述等价：k:

定理 A。令 k 为一个正整数。存在一个有限的极小构型集合 S_k，满足以下条件：

(1) 透镜空间的连通和 L 满足性质 X_k，当且仅当与其 L关联的管道图不包含来自 S_k 的构型作为诱导子图；(2) S_k 中任一构型的任一顶点的权重绝对值至多为 $2k+7$；(3) S_k 中任一构型的顶点数至多为 $13k$。

尽管该定理保证存在一个有限的禁构型列表，但由此得到的界远非最优。例如，当 $k=1$时，即使将范围限制为 S_1中的连通元素，估计仍表明候选构型约有8 亿个；而 [AMP25] 证明，实际列表中仅有10 个构型。

此外，由引理 1.2 可知，(a) 推出 (c)，因此要得到等价关系，还需证明(c) 推出 (b)。当 $k=1$时，这确实成立，但一般情况下并非如此。请读者检验，当 $k=8$时，(c) 的对应命题并不能推出(b)。[3]

我们的下一个主定理有三个关键点。首先，我们将 [AMP25] 推广到 $k=2$ 的情形，并明确确定 S_2，其中 $|S_2|=17$。其次，在这种情形下，Donaldson 障碍仍然与光滑拓扑相吻合，具体而言，(a)、(b)和(c) 的类似表述仍然彼此等价。最后，这使我们能够对具有此类透镜空间边界的负定填充的所有负定交叉形式进行分类：

[2]事实上，它与若干个复射影平面的连通和微分同胚；例如参见 [OS24，引理 3。1]。[3]注意，S_8 必须包含与 $L(9,\ 8)$相关的管道图，因为整数格 $Q_{X(9,1)}$ 嵌入到($\mathbb{Z}$, –Id)中，而 $L(9,\ 8)$ 不允许存在一个具有 $b_2=0$的光滑负定填充。

定理 B。 如果 $L=\#_i L(p_i,q_i)$ 是透镜空间的连通和，并且 $\natural_i X(p_i,q_i)$ 表示相应的典范负定配管的边界连通和，那么以下陈述等价：

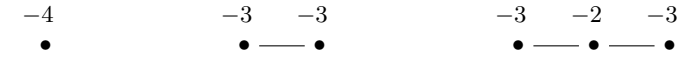
(i) 每个光滑负定填充 X 的 L 都满足

$$b_2(X)\geq b_2(\natural_i X(p_i,q_i))-1;$$

(ii) 每个光滑负定填充 X 的 L 都满足以下两者之一

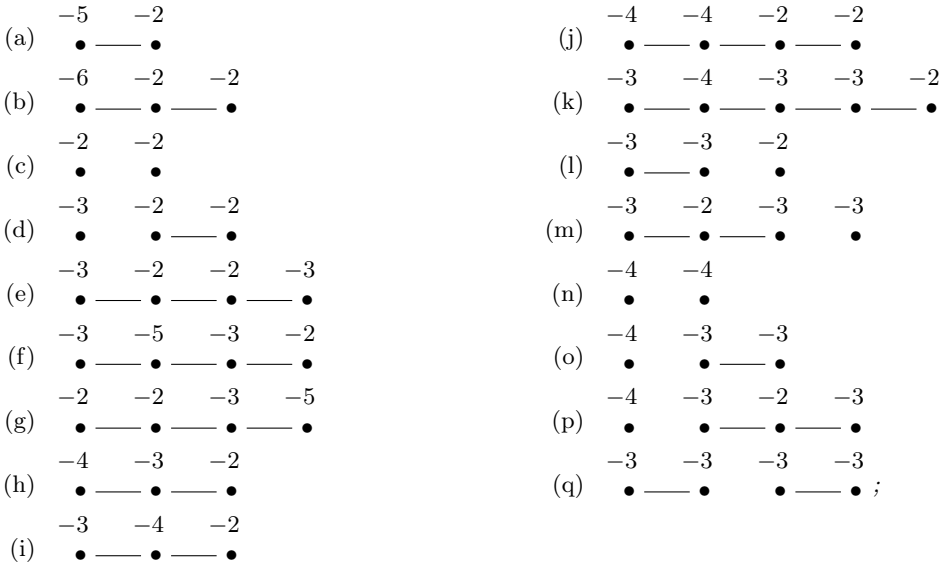
$$Q_X\cong Q_{\natural_i X(p_i,q_i)}\oplus\langle-1\rangle^m \qquad or \qquad Q_X\cong Q_{\natural_i \widetilde{X}(p_i,q_i)}\oplus\langle-1\rangle^m$$

对于某个非负整数 m。这里，$\natural_i\widetilde{X}(p_i,q_i)$ 表示如下获得的 4 维流形：与 L 相关联的典范管道图包含以下构型之一作为诱导子图：



~在此情形下，$\natural_i X(p_i,q_i)$ 是通过沿一个嵌入的 -4-球面对 $\natural_i X(p_i,q_i)$ 进行有理吹下得到的；该球面由对管道图中上述构型各顶点所对应球面之间的横截交点进行光滑化得到；[4]

(iii) 与 L 相关联的典范管道图不包含以下任何构型作为诱导子图：



(iv) 流形 $\natural_i X(p_i,q_i)$ 不包含与以下任何对象微分同胚的光滑嵌入子流形：

$X\ 9,2$ $X\ 16,3$ $X\ 16,7$ $X\ 64,23$ $X\ 2,1\sqcup X\ 2,1$ $X\ 8,3\sqcup X\ 2,1$ $X\ 12,5\sqcup$ ()、()、()、()、() ()、() ()、X X $\sqcup X$ () (3、1)、或 (4、1) (4、1)。

结合 [AMP25，定理 1。1]，我们立即得到满足以下条件的透镜空间连通和的完整组合与几何分类：b_2-极小负定填充 X 满足 $b_2(X)$ $b_2\ \natural_i X\ p_i\ q_i\ -1$ ((,))。更确切地说，有如下结论：

推论 1.3。 令 $L=\#_i L(p_i,q_i)$ 为一个透镜空间的连通和，并令 $\natural_i X(p_i,q_i)$ 表示相应的典范负定配管的边界连通和。此外，假设每个 X 的光滑负定填充 L 都满足 $b_2(X)\geq b_2(\natural_i X(p_i,q_i))-1$，则以下陈述等价：

(i) 存在一个光滑负定填充 X，其满足 L，使得

$$b_2(X)=b_2(\natural_i X(p_i,q_i))-1;$$

[4]沿不同的嵌入 -4-球面进行吹下可能会得到不同的整数格。示例见备注 1.4。

(ii) 存在一个光滑负定填充 X，其边界为 L，使得

$$Q_X \cong Q_{\natural_i \widetilde{X}(p_i,q_i)} \oplus \langle -1\rangle^m,$$

其中 $\natural_i X(p_i,q_i)$ 表示按照定理 *B(ii)* 得到的 *4* 维流形

(iii) 与 L 相关联的典范管道图包含以下构型中的至少一个，作为诱导子图：

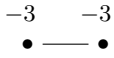


(iv) 流形 $\natural_i X(p_i,q_i)$ 包含一个与 $X(4,1)$ 微分同胚的光滑嵌入子流形。 □

备注 1.4。考虑 $L = L(55,21)$，其典范管道图为



于是，L满足定理 B(iii)。由于其管道图包含



作为诱导子图，根据推论 1.3，b_2-最小负定填充 X 属于 L 满足 $b_2(X) = b_2(X) = 55,21 - 1 = 3$

(()) 。此外，这样的一个可以通过对由任意一对相邻顶点所对应的两个球面的横截交点经平滑处理后得到的嵌入 -4-球面进行有理吹下而获得。注意，对由中间两个顶点得到的嵌入 -4-球面进行吹下，所产生流形的交叉形式不同于对由左侧两个顶点得到的嵌入 -4-球面进行吹下所产生流形的交叉形式。[5]

最后，正如 [AMP25第 1 节所述，2], 我们的结果还应用于透镜空间的辛填充以及循环商奇点的光滑化。其关联源于这样一个事实：透镜空间的每个辛填充都是负定的 [Sch07，Etn04]。回顾一下，Lisca 对透镜空间上标准（即处处紧致）接触结构的辛填充进行了分类 [Lis08], ，且极小辛填充（即不含自交数为 -1的辛嵌入球面者）[6] 与循环商奇点的光滑化之间存在一一对应 [NPP10]。结合我们的主要结果，可得以下推论：

第一个推论指出，对于满足定理 L B中任一条件的每个透镜空间b_2，其 X-极小负定填充 $L \in \{L$都可以实现为辛填充。此外，除三个例外情形、1) $L(8,\ 3)\ L(12,\ 5)\}$外，X 都是单连通的。一般而言情况并非如此；例如，尽管 $L(4,\ 3)$ 界定了一个光滑有理同调球，但它有唯一的极小辛填充W，其 $b_2(W) = 3$:

推论 1.5。设 $L = L(p,q)$ 为一个透镜空间，并设 $X(p,q)$ 表示相应的典范负定型丛。假设每个 X 的光滑负定填充都满足 $L\ b_2(X) \geq b_2(X(p,q)) - 1$。若 ξ_{st} 是 L 上的标准接触结构，则存在一个 W 的极小辛填充，使得 (L,ξ_{st})

$$b_2(W) = \min_X b_2(X),$$

其中，最小值取遍 L 的所有光滑负定填充 X 。

此外，除非 $L \in \{L(4,1)\ L(8,3)\ L(12,5)\}$，否则每个这样的 W 都是单连通的；在这种情况下，其基本群为 $\mathbb{Z}/2$。

Lisca 在 [Lis08, Corollary 1.2(b)] 中证明，若一个带有标准接触结构的透镜空间 $L = L(p,q)\xi_{\text{st}}$ 的典范管道图顶点权重为 $-a_i$，且对所有 i 都有 $a_i \geq 5$，则 (L,ξ_{st}) 在保定向微分同胚意义下恰有一个辛填充。根据 [AMP25, Corollary 1.7]（这是 [AMP25, Theorem 1.1] 与 Lisca 分类 [Lis08, Theorem 1.1] 的直接推论），对于更大一族透镜空间，即满足性质 X_1 的透镜空间，同样的唯一性结论也成立。接下来，我们将这一观点推广到满足性质 X_2 的透镜空间，并完整统计其在保定向微分同胚意义下的辛填充数量：

[5]显式计算交叉形式的结果见图 3 。所得的交叉形式之一含有一个自配对为 -3 的元素，而另一个则没有，因此二者不可能等价。[6]这样的填充未必是 b_2所有辛填充中的极小填充。

推论 1.6. 设 $L = L(p, q)$ 是一个满足定理 B 中某一条款的透镜空间，并设 ξ_{st} 表示 L上的标准接触结构。设 $n(L)$ 表示与 L 相关联的典范管道图中，与下列某一种构型同构的诱导子图的数量：

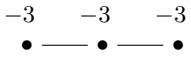


那么，(L, ξ_{st})的极小辛填充的数量（按保定向微分同胚分类）要么是 $n(L) + 1$，要么是 $n(L)$。此外，当且仅当 $q \equiv 1 \pmod{p}$ 且与 L 相关联的典范管道图包含以下某个图作为诱导子图时，该数量为 $n(L)$：



此外，对于与 L 对应的循环商奇点，其约化极小万有基空间的不可约分支所产生的米尔诺纤维数量也有类似结论。

备注 1.7。 在计算 $n(L)$ 时，诱导子图不必彼此不相交。例如，$n(L(55, 21)) = 3$。由于 $21^2 \equiv 1 \pmod{55}$ 且与 $L(55,21)$ 相关联的典范管道图包含



作为诱导子图，因此，$(L(55,21), \xi_{\text{st}})$ 存在 $n(L) = 3$ 个彼此不同的极小辛填充（等价地，米尔诺纤维），按保定向微分同胚分类。

定理 A 的证明思路。为了定义 S_k，我们从所有不满足性质 X_k 的构型中出发，然后移除所有包含集合中另一个构型作为诱导子图的构型。定理 A(2)(3 表明所得集合是有限的。

为了证明定理 A(1)，我们证明：如果一个构型满足性质 X_k，那么它的所有诱导子图也都满足性质 X_k。

为了证明定理 A(2)，我们证明：如果一个由权重极大的顶点构成的构型不满足性质 X_k，那么移除该顶点所形成的诱导子图也不满足性质 X_k。直观而言，权重较大的顶点不会导致性质 X_k 失效。

为了证明定理 A(3)，我们首先注意到，在 S_k 中不允许某些构型作为诱导子图，会对每个构型中权重为 -2、-3 和 -4 的顶点数施加上界S_k。接着我们证明，如果一个违反性质 X_k 的构型中，有许多顶点与任何权重为 -2、-3 或 -4 的顶点都不相邻，那么移除这些顶点中的一个所形成的诱导子图中，至少有一个会违反性质 X_k。

详细证明见第6节。

定理 B 的证明大纲 **定理B的证明大纲**。与 [AMP25], 定理B 类似，我们通过以下蕴含链来证明 s

$$\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)} \Rightarrow \text{(iv)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(ii)}.$$

蕴含关系(ii) $\Rightarrow$ (i) 成立，因为 Q_X 定义在第二同调群上。蕴含关系(i)$\Rightarrow$ (iv) 的证明基于以下观察：在(iv) 中列出的每个流形，其第二贝蒂数至少为 2，而其边界是一个透镜空间或若干透镜空间的连通和，并且该边界围成一个光滑有理同调球。因此，若存在这样的嵌入子流形，我们可以将其切除并用一个有理同调球替换，从而使第二贝蒂数至少减少 2。为证明(iv) $\Rightarrow$ (iii)，我们针对(iii)中列出的每种构型，证明可以利用相应的球面生成元构造一个嵌入的、同胚于(iv)中所列流形的副本。

蕴含关系(iii) $\Rightarrow$ (ii) 是困难的一步。这一步的证明贯穿第3、4和5节。根据 [AMP25，引理 2。4] 以及 Donaldson 对角化定理， Q_X 的所有可能情形都可作为一个嵌入$Q_{\natural_i X(p_i,\ p_i-q_i)}$ 对角格中的正交补出现。因此，只需在 L 满足(iii)的条件下，对所有此类嵌入进行分类，然后将相应的正交补与(ii)中列出的格进行比较。

文章结构。第 2 节中，我们证明定理 B 的 (i) $\Rightarrow$ (iv) 和 (iv) $\Rightarrow$ (iii)。第 3 节中，我们将定理 B 的 (iii) 转化为关于 $\natural_i X(p_i, p_i - q_i)$ 配管图的条件。第 4 节中，我们给出一些技术性定义，以便进行第5节中的格嵌入分析。在第5节末尾，我们计算定理 B(ii) 中所述的交叉形式 $Q_{\natural_i \bar{x}(p_i,q_i)}$，并将其与格嵌入分析的结果进行比较，从而完成定理 B 的证明。

在第 6 节中，我们证明定理 A。定理 A 的证明独立于前面各节，除了少数几个定义外；这些定义也可见于 [AMP25]。不过，我们将其安排在定理 B 的证明之后，因为读者在阅读前面各节、熟悉这些技术论证后，可能会更容易理解第 6 节中的内容。第 7 节中，我们证明推论 1.5 和推论 1.6。

致谢。作者感谢 Marco Golla、Duncan McCoy 和 Brendan Owens 对本文早期稿件提出的宝贵意见。两位作者均获得三星科学技术基金会（SSTF-BA2102-02）及韩国国家研究基金会（NRF）项目 RS-2025-00542968 的部分资助。

2. 有理同调球与有理吹下

本节首先考察定理 B(iv)中作为边界出现的透镜空间的连通和。利用每个这样的连通和都界定一个有理同调球这一事实，我们证明定理 B(i) 推出定理 B(iv)。随后，我们证明定理 B(iii) 中与管道图对应的每个典范负定配管，都包含一个与定理 B(iv)所列流形之一微分同胚的光滑嵌入子流形。这就证明了定理 B(iv) 推出定理 B(iii)。

引理 2.1。*定理 B(i) 推出定理 B(iv)。*

证明。设 $X = \natural_i X(p_i, q_i)$ 并假设 X 包含一个与定理 B(iv)中所列某个流形微分同胚的嵌入子流形。我们断言其边界

$$L = \#_i L(p_i, q_i)$$

于是它是某个负定流形 X' 的边界，且 $b_2(X') \leq b_2(X) - 2$。

这可由 [AMP25 中引理 2 的切割粘合论证得到。2]事实上，定理 B(iv) 中的每个流形都是负定的，且 $b_2 \geq 2$，其边界是一个有理同调球面，并且该球面是某个有理同调球的边界。为方便起见，我们列出 Lisca 分类中相关的情形：

- $L(9, 2)$ 是某个有理同调球 [Lis07a 族 1_-, $m = 3$, $k = 1$] 的边界。
- $L(16, 3)$ 是某个有理同调球 [Lis07a 族 1_-, $m = 4$, $k = 1$] 的边界。
- $L(16, 7)$ 是某个有理同调球 [Lis07a 族 $f(3_-)$, $m = 4$, $d = 3$] 的边界。
- $L(64, 23)$ 是某个有理同调球 [Lis07a 族 1_-, $m = 8$, $k = 3$] 的边界。
- $L(2, 1)\#L(2, 1)$ 是某个有理同调球 [Lis07b 族 2] 的边界。
- $L(3, 1)\#L(3, 2)$ 是某个有理同调球 [Lis07b 族 2] 的边界。
- $L(8,3)\#L(2,1)$ 界定一个有理同调球（[Lis07b，族 4，$m = 2$, $n = 2$, $k = 1$]的反向定向）。
- $L(12, 5)\#L(3, 1)$ 界定一个有理同调球（[Lis07b，族 4，$m = 2$, $n = 3$, $k = 1$]的反向定向）。
- $L(4, 1) \sqcup L(4, 1)$ 界定一个有理同调球，因为 $L(4, 1)$ 做到了 [Lis07a，族 1_-，$m = 2$，$k = 1$]。

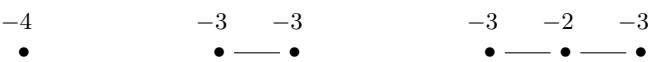
在每种情况下，通过切除给定的子流形并粘合相应的有理同调球，我们得到一个负定填充 X'，其满足 $b_2(X') \leq b_2(X) - 2$，如所述。□

引理 2.2。*定理 B(iv) 蕴含定理 B(iii)。*

证明。我们考察定理 B(iii) 中的每一种构型，并证明每当这种构型出现在 X中时，其中都包含一个与定理 B(iv)中所列流形之一微分同胚的光滑嵌入子流形。

构型 (a) 是 $X(9, 2)$。构型 (b) 是 $X(16, 3)$。构型 (c) 是 $X(2, 1)\natural X(2, 1)$。正如 [AMP25，引理 2.3], 的证明中所述，在构型 (d) 中，将 -3-球面与一个 -2-球面进行管状连接可得到一个 $X(9, 2)$。构型 (e) 是 $X(16, 7)$。构型 (f) 是 $X(64, 23)$。同样根据 [AMP25，引理 2.3], ，在构型 (g) 中，消解 -3-球面与 -5-球面之间的交点可得到一个 $X(16, 3)$。在构型 (h) 和 (i) 中，消解 -4-球面与 -3-球面之间的交点可得到一个 $X(9, 2)$。在构型 (j) 中，消解两个 -4-球面之间的交点可得到一个 $X(16, 3)$。在构型 (k) 中，消解 -4-球面与中间的 -3- 球面之间的交点可得到一个 $X(64, 23)$。构型 (l) 是 $X(8, 3)\natural X(2, 1)$，而构型 (m) 是 $X(12, 5)\natural X(3, 1)$。

如前所述 在.....的证明中提到的 [AMP25，引理 2。3],以下子图中的任意一个



包含一个 $X(4,\ 1)$。由于构型(n)、(o)、(p)和(q)各自都包含这些子图之一的两个不相交副本，因此每个构型都包含一个 $X(4,\ 1) \sqcup X(4,\ 1)$。

这验证了　　定理 B(iii) 中的每个构型都会产生一个与某个流形微分同胚的嵌入子流形——同胚于某个流形，该流形属于定理 B(iv)的列表，引理得证。□

备注 2.3。 管状连接和交点消解论证的目的是减少定理 B(iv)中出现的流形数量，从而使主定理的表述更加简洁。即使不使用这些论证，也可以通过分别证明定理 B(iii)中的每个构型，只要此类构型出现，就能通过从 Lisca 的列表 b_2 中选取合适的项，使其至少减少 2，从而达到类似效果 [Lis07a、Lis07b] 或从 Berge 透镜空间列表 [Ras07，§6。2], [Gre13，§1。2]。

3. Working Conditions for dual plumbing graphs

回顾一下，透镜空间的连通和 $L = \#_i L(p_i, q_i)$ 是管道构造 $\natural_i X(p_i, q_i)$ 和 $-\natural_i X(p_i, p_i - q_i)$ 的边界。若 $\natural_i X(p_i, q_i)$ 是沿典范管道图P（由负连分数展开得到）进行管道构造所得，而 $-\natural_i X(p_i, p_i - q_i)$ 是沿典范管道图 P^* 进行管道构造所得，则称 P^* 为 P 的对偶。遵循 [AMP25 第 3 节 1],，我们明确描述 P 与 P^* 之间的关系，在此背景下引入工作条件，并证明若 L 满足定理 B(iii)，则对偶图 P^* 满足工作条件。

我们首先回顾一些记号和一个引理，[AMP25]中提到的这些内容将会用到。

定义 3。　　1. 设 P 是若干线性铅接图的不交并。我们将一个调整权重 定义为顶点 $v \in P$ t o be

$$w'(v) := w(v) - d(v),$$

其中 $d(v)$ 是 v 的度。

记号 3.2。 绘制管道图中的顶点时，我们用实心点表示标签是权重

$$\overset{w(v)}{\bullet}$$

并用空心点表示该标签为调整权重

$$\overset{w'(v)}{\circ}$$

例如，采用这一记号约定

$$\overset{1}{\circ}\!\!-\!\!\overset{1}{\circ}\!\!-\!\!\overset{3}{\circ} \qquad \text{and} \qquad \overset{2}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{3}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{4}{\bullet}$$

两者表示的是同一个管道图。

对于下面的引理，我们用 $[a]^m$ 表示长度为 m 的链 $a, \ldots, a$，其中 $[a]^0$ 约定为空链。

引理 3.3 ([AMP25，引理 3.5])。 假设一个管道图 P 包含如下形式的线性分量

$$\overset{-c_1}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{-c_2}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{-c_3}{\bullet}\!\!-\cdots-\!\!\overset{-c_n}{\bullet},$$

其中 c_i 为满足以下条件的整数

$$(c_1, \ldots, c_n) = ([2]^{a_0}, b_1, [2]^{a_1}, \ldots, b_k, [2]^{a_k}),$$

其中 a_i 和 b_i 是满足 $a_i \geq 0$ 和 $b_i \geq 3$ 的整数。那么 P^* 对应的分支具有如下形式

$$\overset{d_1}{\circ}\!\!-\!\!\overset{d_2}{\circ}\!\!-\!\!\overset{d_3}{\circ}\!\!-\cdots-\!\!\overset{d_{n'}}{\circ},$$

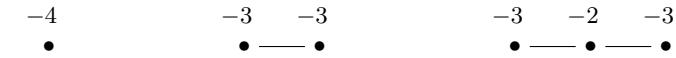
其中

$$(d_1, \ldots, d_{n'}) = (a_0 + 1, [0]^{b_1 - 3}, a_1 + 1, \ldots, [0]^{b_k - 3}, a_k + 1).$$

如 [AMP22第 3 节所述，1], 这使我们能够根据对偶的性质重新表述定理 B(iii) 的条件。更准确地说，定理 B(iii) 的条件可转化为对偶满足的以下条件列表，我们将其称为 工作条件。

定义 3.4。 如果一个顶点与不同的顶点 u 和 v 相邻，且满足 $w'(u) > 0$ 和 $w'(v) > 0$，则称该顶点为坏顶点。

备注 3.5。 对偶管道图中每个调整权重为 0、1 或 2 的坏顶点 P^*，都对应于原图中的一个副本



。原图中权重为 -4 的顶点会产生调整权重为 0 的坏顶点 P^*。原图中权重为 -3 的两个相邻顶点会产生调整权重为 1 的坏顶点 P^*。原图中一个 $[-3,-2,-3]$ 的副本会产生调整权重为 2 的坏顶点 P^*。

工作条件。 Γ（带权线性图的不交并）的工作条件如下：

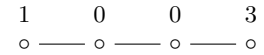
I Γ 的每个顶点都满足 $w(v) \geq 2$；II Γ 的每个顶点都满足 $w'(v) \leq 3$，且 Γ 至多包含一个满足 $w'(v) > 1$ 的顶点 v；III 若 $w'(v) > 1$，且 x 是满足 $w'(x) = 1$ 的坏顶点，则 x 和 v 必须彼此相邻；IV 若 Γ 包含一个满足 $w'(v) = 3$ 的顶点 v，则 Γ 不包含形如.....的子图

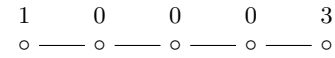


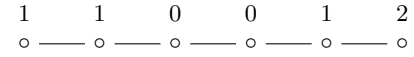
；

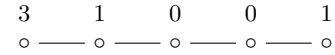
V 若 u, v 彼此相邻，$w'(u) = w'(v) = 1$，且 x 是一个坏顶点，满足 $w'(x) = 2$，则 x 必须与与 u或 v 相邻；
VI 图 Γ 不包含以下形式的任何子图：

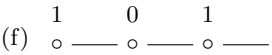
(a) 

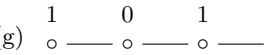
(b) 

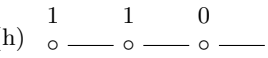
(c) 

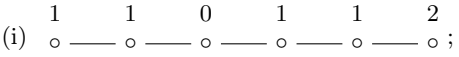
(d) 

(e) 

(f) 

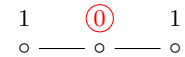
(g) 

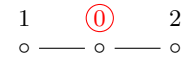
(h) 

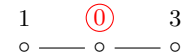
(i) 

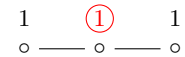
；

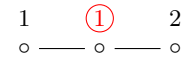
VII 如果 Γ 包含至少一个坏顶点，则所有坏顶点都必须包含在以下某个子图的一个拷贝中，并圈出所有坏顶点的调整权重：

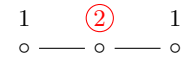
(a) 

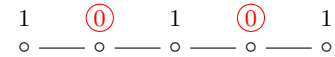
(b) 

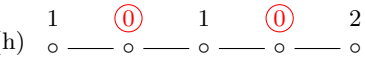
(c) 

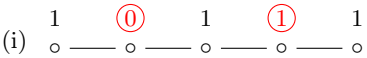
(d) 

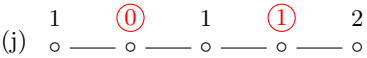
(e) 

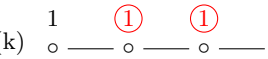
(f) 

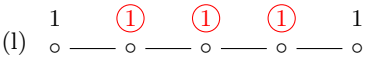
(g) 

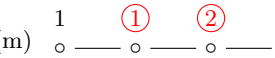
(h) 

(i) 

(j) 

(k) 

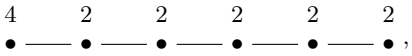
(l) 

(m) 

.

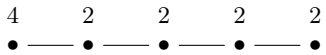
备注 3.6。 本文中，除非另有明确说明，凡是我们使用调整权重绘制 Γ 的子图，其中的标记均指在 Γ中计算得到的调整权重。

例如，如果 Γ 是

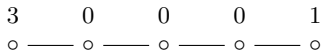


，

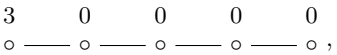
那么 Γ 满足工作条件。考虑子图 .



将其视为独立图。其调整权重为



这违反了工作条件 VI。然而，将其视为 Γ 的子图时，其调整权重为



，

这并不违反工作条件VI。

备注 3.7. 我们可以比较本文中的工作条件与 [AMP25] 中的工作条件。前两个条件相同。条件 III 在 [AMP25] 中规定不存在坏顶点。条件 IV 相同。结合条件 II，[AMP25] 中的条件 V 排除了六种构型：其中三种涉及调整权重为 0 的坏顶点，另外三种是本文中的条件 VI(a)、VI(b) 和 VI(c) 。AMP25] 中条件 VI 的两种构型，分别是本文中的条件 VI(d) 和 VI(e) 。

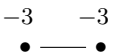
因此，若 Γ 没有坏顶点，且满足本文中的工作条件，那么它也满足 [AMP25]中的工作条件。因此，将定理 B(iii) 中的条件转化为我们的工作条件后，我们可以只关注满足工作条件且至少有一个坏顶点的线性管道图。

引理 3.8. 设 P 是不交并，由线性管道图组成，且 P 不包含定理 *B(iii)* 中的任何构型，并且 $w(v) \leq -2$ 对所有顶点 v均成立。那么，对偶图 P^* 满足工作条件。

证明。 与 [AMP25中的引理 3.6], 工作条件 I源于对偶铅垂的定义。工作条件 II 源于避免定理 B(iii)(c)的要求。工作条件 IV 源于避免定理 B(iii)(d)的要求。工作条件 VI(a)、VI(b)、VI(c)、VI(d)和VI(e) 源于避免定理 B(iii)(a)、(iii)(b)、(iii)(f)和 (iii)(g)的要求。

其余条件来自本文中出现、但未在 [AMP25]中出现的构型。我们依次考察这些条件，并运用引理 3.3 证明，若其中任一条件不成立，则 P 会包含定理 B(iii)中列出的某个子图。

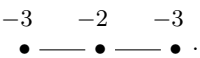
若我们在 P^*中有一个坏顶点 x ，其 $w'(x) = 1$ ，则这对应于 P 中如下形式的子图：



.

在 P^* 中的顶点 v具有 $w'(v) > 1$，由此在 P中产生一个权重为 -2的顶点。若 x与 v不相邻，则 P包含定理 B(iii)(l)中的构型。这给出了工作条件III。

If 我们在 P^*中有一个坏顶点 x ，其 $w'(x) = 2$ ，则这对应于 P 中如下形式的子图：



.

该构型



在 P^* 中产生一个权重为 -3 的顶点，位于 P 中。如果 x 且一个副本的



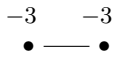
不相邻　　彼此　　，那么 P 包含定理中的构型B(iii)(m)。这给出工作条件
条件V。W
orking Co条件VI(f) 和VI(g) 对应于定理B(iii)(h)。工作条件VI(h) 对应
应于定理　　所B(iii)(i)。工作条件VI(i) 对应于定理B(iii)(k)。

若 P^* 中存在满足 $w'(x) = 3$ 的坏顶点 x，则会在 P 中产生定理 B(iii)(e) 所述的构型。因此，根据工作条件 II，对于 P^* 中的每个坏顶点 x，都必须满足 $w'(x) \leq 2$。若恰有一个坏顶点，那么为符合工作条件 II 和 IV，该坏顶点必定源自工作条件 VII(a)、VII(b)、VII(c)、VII(d)、VII(e) 或 VII(f) 之一。

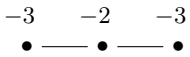
若坏顶点多于一个，首先注意，当 x 是 P^* 中的坏顶点时，情形 $w'(x) = 0$ 会产生



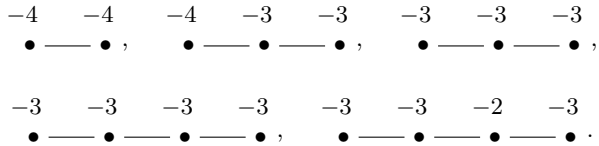
在 P 中，情形 $w'(x) = 1$ 会产生



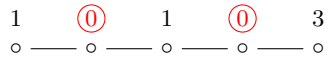
在 P 中，而情形 $w'(x) = 2$ 会产生



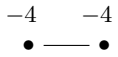
在 P中。为避免定理 B(iii)(c)(l)(n)(o)(p)(q)中的构型，图 P 不能有一个含两个连通分支的诱导子图，其中每个分支都是上面展示的三个子图之一。因此，当 P^*中有多个坏顶点时，P 中相应的构型必须由这些子图的副本彼此连接而成。此外，考虑到还需避免定理 B(iii)(c)(l)(h)中的构型，可知只有五种可能：



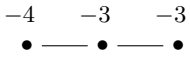
为避免定理B(iii)(j)中的构型，我们不能有



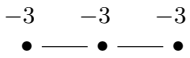
在 P^*中。因此，通过同时考虑工作条件II，构型



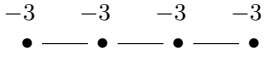
在 P 中对应　　于工作条件VII(g) 和VII(h) 中的 P^*。通过考虑工作条件II，
IV，以及VI(h)，　该构型



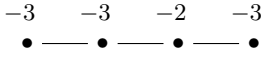
在 P 对应于工作条件VII(i) 和VII(j) 在 P^*中。通过考虑工作条件II 和III，该构型



在 P 对应于工作条件VII(k) 在 P^*中。再次通过考虑工作条件II 和III，该构型



在 P 对应于工作条件VII(l) 在 P^*中。最后，通过考虑工作条件II，该构型



在 P 中对应于工作条件 VII(m) 在 P^*。 □

4. 标准嵌入与半标准嵌入

本节将给出一些定义，以帮助进行第 5 节中的格嵌入分析。

在本节中，我们令 Γ 为线性管道图的不交并，并用 $V(\Gamma)$ 表示其顶点集。我们先介绍一些专用于将线性格映入对角格这一问题的术语。为简便起见，本节中我们将标准正定格 $(\mathbb{Z}^n,\ \langle 1\rangle^n)$ 简称为 $\mathbb{Z}^n$。

Γ 到 $\mathbb{Z}^n$ 的**定义 4.1.** 嵌入 是一个函数

$$\phi\colon V(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{Z}^n$$

使得对所有 $u,\ v \in V(\Gamma)$，都有

$$\phi(u)\cdot\phi(v) = \begin{cases} w(u) & \text{if } u = v, \\ -1 & \text{if } u \text{ and } v \text{ are adjacent}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

给定一个 $\mathbb{Z}^n$ 的正交归一基 E，我们定义向量 $v \in \mathbb{Z}^n$ 关于 E 的支撑 为

$$\operatorname{Supp}(v) := \{e \in E \mid \langle v, e\rangle \neq 0\}.$$

当我们提及向量的支撑而未提及正交归一基时，默认已选定一个正交归一基。

定义 4.2. [AMP25，定义 4.4] 一个嵌入 $\phi\colon V(\Gamma) \to \mathbb{Z}^n$ 是标准的条件是

$$|\operatorname{Supp}(\phi(u)) \cap \operatorname{Supp}(\phi(v))| = \begin{cases} w(v) & \text{if } u = v, \\ 1 & \text{if } u \text{ and } v \text{ are adjacent}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

对于所有顶点 u 和 v，其中 $V(\Gamma)$。

就我们的目的而言，需要以下新的定义。

定义 4.3. 一个嵌入 $\phi\colon V(\Gamma) \to \mathbb{Z}^n$ 在坏顶点 x 处是半标准的条件是

$$|\operatorname{Supp}(\phi(u)) \cap \operatorname{Supp}(\phi(v))| = \begin{cases} w(v) & \text{if } u = v, \\ 1 & \text{if } u \text{ and } v \text{ are adjacent}, \\ 2 & \text{if } u \text{ and } v \text{ are both adjacent to } x \text{ and } u \neq v, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

for 所有顶点 u 和 v，其中 $V(\Gamma)$。此外，如果 u 和 v 都与 x 和 $u \neq v$相邻，那么

$$|\operatorname{Supp}(\phi(u)) \cap \operatorname{Supp}(\phi(x)) \cap \operatorname{Supp}(\phi(v))| = 1.$$

定义 4.4. 如果嵌入 $\phi\colon V(\Gamma) \to \mathbb{Z}^n$ 在某个坏顶点处是半标准的，则称其为半标准。

每当我们说 Γ 的某个诱导子图被标准嵌入或半标准嵌入时，我们分别指 ϕ 限制在该子图的顶点上是标准或半标准的。

定义 4.5 . 如果 Γ 满足工作条件且至少有一个坏顶点，则 Γ 的坏部分是由子图构成 出现在工作条件 VII。

定义 4.6. 假设 Γ 满足工作条件，且至少有一个坏顶点。考虑 Γ的子图集合，其中

- 由一条相邻顶点链构成： v_0、.....、 v_k,
- 包含坏部分，并且
- 满足以下两个条件：(1) 顶点 v_0 要么是 Γ的叶节点，要么 $w'(v_1) = w'(v_2) = 0$；(2) 顶点 v_k 要么是 Γ的叶节点，要么 $w'(v_{k-1}) = w'(v_{k-2}) = 0$。

在所有这些子图中，顶点数最少的那个称为 Γ 的 扩展坏部分 。

扩展坏部分可以通过从坏部分出发，沿链向两个方向延伸得到。当到达叶节点，或刚刚经过两个连续的调整权重为零的顶点时，就停止。

之所以以这种方式定义扩展坏部分，其直观想法是：每当有两个相邻顶点的调整权重均为零时，我们就利用它们将嵌入“粘合”起来。最终我们将证明，在扩展坏部分内部以及其外部，该嵌入都具有所需的性质，然后沿着这些调整权重为零的相邻顶点将它们“粘合”起来。

定义 4.7。设 Γ 满足工作条件，并且至少有一个坏顶点。令 v_0、……、v_k 为 Γ 的扩展坏部分。令 V_c 为 Γ 中不属于扩展坏部分的顶点集合。定义

$$V_- := \begin{cases} \{v_0, v_1, v_2\} & \text{if } v_0 \text{ is not a leaf of } \Gamma, \\ \varnothing & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad V_+ := \begin{cases} \{v_k, v_{k-1}, v_{k-2}\} & \text{if } v_k \text{ is a not leaf of } \Gamma, \\ \varnothing & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Γ 的外部部分 是由顶点集合 $V_c \cup V_- \cup V_+$ 诱导的 Γ 的子图。

直观地说，外部部分就是扩展坏部分之外的所有部分，再加上上文提到的“粘合部分”。

定义 4.8。设 Γ 满足工作条件，并且至少有一个坏顶点。令 v_0、……、v_k 为 Γ 的扩展坏部分，并令 $\phi\colon V(\Gamma) \to \mathbb{Z}^n$ 为 Γ 的一个嵌入。

若 v_0 不是 Γ 的叶节点，那么根据扩展坏部分的定义，我们有 $w'(v_2) = 0$，从而 $w(v_2) = 2$。由于 $v_2 \cdot v_3 = -1$，我们有

$$\operatorname{Supp}(\phi(v_2)) \cap \operatorname{Supp}(\phi(v_3)) = \{e\}$$

对于某个基向量 e。我们称 e 为 Γ 的螺钉。此外，若对于 Γ 中的所有顶点 $v \neq v_2, v_3$，都有 $\phi(v) \cdot e = 0$，则称 e 为干净螺钉。

类似地，若 v_k 不是 Γ 的叶节点，我们称其中唯一的基向量为

$$\operatorname{Supp}(\phi(v_{k-2})) \cap \operatorname{Supp}(\phi(v_{k-3})) = \{e\}$$

一个螺钉；若对于 Γ 中的所有顶点 $v \neq v_{k-2}, v_{k-3}$，都有 $\phi(v) \cdot e = 0$，则称 e 是干净 的。

根据定义， Γ 至多有两个螺钉。直观地说，螺钉将外部部分与扩展坏部分的其余部分连接起来。若所有螺钉都是干净的，我们就可以将它们“拧开”，使外部部分脱离，然后论证外部部分必须是标准嵌入的。螺钉必须是干净的，这样我们才能在此处局部修改嵌入，而不影响其他位置顶点的交配对和权重。

引理 4.9。假设 Γ 满足工作条件，且至少有一个坏顶点。设 $\phi\colon V(\Gamma) \to \mathbb{Z}^n$ 是 Γ 的一个嵌入。若 Γ 的所有螺钉都是干净的，则 Γ 的外部部分是标准嵌入的。

有人可能会想这样论证：由于外部部分不含任何坏顶点，因此它满足 [AMP25] 的工作条件，并且必定是标准嵌入的。然而，这种论证存在一个问题：调整权重取决于邻点的数量，而不只是权重本身。对于外部部分中与 Γ 的其余部分相连的顶点，在 Γ 中计算出的调整权重，与将外部部分视为独立图时同一顶点的调整权重不同。为了解决这一问题，我们利用螺钉干净这一假设来调整权重。

引理 *4.9* 的证明。设 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的一组正交归一基。

如果没有螺钉，那么扩展坏部分就是 Γ 的一个独立连通分支。因此，外部部分中的所有顶点，无论将它们视为 Γ 中的顶点，还是视为独立图中的外部部分顶点，其邻点数都相同。因此，作为一个独立图，外部部分满足 [AMP25], 中的工作条件，因此它必须标准嵌入。

如果恰好有一个螺钉，令扩展坏部分为 $v_0, \ldots, v_k$，其中 v_0 不是叶节点，而 v_k 是叶节点。令 Γ' 为通过向 Γ 的外部部分添加一个额外顶点 v_+ 得到的图，使得 v_+ 与 v_2 相邻、与任何其他顶点都不相邻，并且 $w(v_+) = w(v_3) - 1$。

根据构造， v_+ 在 Γ' 中的调整权重与 v_3 在 Γ 中的调整权重相同。因此， Γ' 满足工作条件。由于 Γ' 没有坏顶点， Γ' 在[AMP25], 中也满足工作条件，因此 Γ' 的任何嵌入都必须是标准的。考虑嵌入

$$\phi'\colon V(\Gamma') \to \mathbb{Z}^{n+w(v_+)-1} \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^{w(v_+)-1}$$

定义如下。对于 $v \neq v_+$，我们以与 ϕ 相同的方式将 v 嵌入 $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^{n+w(v_+)-1}$ 中。令 $e_{n+1},\ldots,e_{n+w(v_+)-1}$ 为新的基元素。对 $\mathbb{Z}^n$ 中的基向量重新标记后，不妨设 e_1 是螺钉，使得 $e_1 \in \mathrm{Supp}(\phi(v_2)) \cap \mathrm{Supp}(\phi(v_3))$ 且 $\phi(v_2)\cdot e_1 = -1$。然后我们设

$$\phi'(v_+) = e_1 + e_{n+1} + \cdots + e_{n+w(v_+)-1}.$$

由于该螺钉是干净的，ϕ' 给出了 v_+ 与所有其他顶点之间正确的交配对，因此ϕ' 确实是 Γ'的一个嵌入。由于此嵌入必定是标准的，嵌入 ϕ 在外部部分上的限制也必定是标准的。

如果有两个螺钉，那么在构造 Γ'时，除了将一个新顶点 v_+ 连接到 v_2之外，我们还将一个新顶点 v_{++} 连接到 v_{k-2}，并构造一个嵌入

$$\phi' \colon V(\Gamma') \to \mathbb{Z}^{n+w(v_+)+w(v_{++})-2}$$

与上文相同。由同样的论证可知，外部部分是标准嵌入的。 □

5. Theorem B from the Working Conditions

在第 5 节中，我们始终假设 Γ 满足工作条件且至少有一个坏顶点，并固定一个嵌入 $\phi\colon V(\Gamma) \to \mathbb{Z}^n$。本节的目标是证明 Γ 是标准嵌入或半标准嵌入。关键的一步是证明，坏部分中顶点的支撑集与扩展坏部分之外顶点的支撑集互不相交。

引理 5.1。 扩展坏部分是标准嵌入或半标准嵌入。

证明。 虽然可以手动分析每种可能性，但如果这样做，本文将超过 100 页。相反，我们使用一些 GAP [GAP 21] 代码来快速分析所有可能的嵌入。详细内容见附录 A。 □

引理 5.2。 令 $v_0,\ldots,v_k$ 为扩展坏部分，并假设 v_0 不是 Γ 中的叶节点。如果连接 v_2 和 v_3 的螺钉不是干净螺钉，则存在一个顶点 v，使得 $w(v) \geq 4$，并且

$$|\mathrm{Supp}(\phi(v)) \cap \mathrm{Supp}(\phi(v_1))| = |\mathrm{Supp}(\phi(v)) \cap \mathrm{Supp}(\phi(v_2))| = |\mathrm{Supp}(\phi(v)) \cap \mathrm{Supp}(\phi(v_3))| = 2.$$

证明。 根据扩展坏部分的定义，我们有 $w(v_1) = w(v_2) = 2$。根据引理 5.1，我们可以写成

$$\phi(v_1) = e_1 - e_2 \qquad \text{and} \qquad \phi(v_2) = e_2 - e_3.$$

于是 e_3 是螺钉，因此 $e_3 \in \mathrm{Supp}(\phi(v_3))$，并且 $e_1,\ e_2 \notin \mathrm{Supp}(\phi(v_3))$。

根据干净螺钉的定义，存在顶点 $v \neq v_2, v_3$，使得 $e_3 \in \mathrm{Supp}(\phi(v))$。根据引理 5.1，$v$ 不可能位于扩展坏部分中。因此，对于 $i = 1,2,3$，有 $\phi(v)\cdot\phi(v_i) = 0$，从而 $|\mathrm{Supp}(\phi(v)) \cap \mathrm{Supp}(\phi(v_i))|$ 对每个 $i = 1,2,3$ 都必须为偶数。

由 $\phi(v)\cdot\phi(v_3) = 0$ 以及 $e_3 \in \mathrm{Supp}(\phi(v)) \cap \mathrm{Supp}(\phi(v_3))$ 这一事实，我们可推得存在某些$e_4 \neq e_1,\ e_2,\ e_3$ 使得

$$e_4 \in \mathrm{Supp}(\phi(v)) \cap \mathrm{Supp}(\phi(v_3)).$$

由 $\phi(v)\cdot\phi(v_2) = 0$ 以及 $e_3 \in \mathrm{Supp}(\phi(v)) \cap \mathrm{Supp}(\phi(v_2))$ 这一事实，我们得出 $e_2 \in \mathrm{Supp}(\phi(v))$。最后，由 $\phi(v)\cdot\phi(v_1) = 0$ 以及 $e_2 \in \mathrm{Supp}(\phi(v)) \cap \mathrm{Supp}(\phi(v_1))$，我们得出 $e_1 \in \mathrm{Supp}(\phi(v))$。

因此 $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4 \in \mathrm{Supp}(\phi(v))$，所以 $w(v) \geq 4$，并且我们有

$$|\mathrm{Supp}(\phi(v)) \cap \mathrm{Supp}(\phi(v_i))| = 2 \quad \text{for } i = 1,2,3,$$

如所声称。 □

推论 5.3。 如果存在一个坏顶点 x，使得 $w'(x) \geq 1$，那么 Γ 的外部部分是标准嵌入的。

证明。 根据工作条件 II和III，结合引理5.1，引理 v 5.2 的陈述中出现的顶点 不可能存在。因此所有螺钉都是干净的，从而根据引理 4.9，Γ 的外部部分是标准嵌入的。 □

引理 5.4。 设 x 是一个坏顶点，并假设扩展坏部分在 x 处半标准嵌入。若 $v \neq x$ 和 $|\text{支撑}(\phi(v)) \cap \text{支撑}(\phi(x))| \neq 0$，则 v 与 x 相邻。

证明。假设 $v \neq x$、$|$支撑$(\phi(v)) \cap$ 支撑$(\phi(x))| \neq 0$，且 v 不与 x 相邻。我们将导出矛盾。

设 u_1 和 u_2 是与 x相邻的顶点，并选取基向量 e_1, e_2 使得

$$e_1 \cdot \phi(x) = -1, \quad e_1 \cdot \phi(u_1) = 1, \quad e_1 \cdot \phi(u_2) = 1, \quad e_2 \cdot \phi(u_1) = 1, \quad e_2 \cdot \phi(u_2) = -1.$$

根据引理 5.1, v 不属于扩展坏路径 rt.

情况 1： $e_1 \in$ 支撑$(\phi(v))$。由于 $\phi(v) \cdot \phi(x) = 0$，存在另一个基向量 $e_0 \in$ 支撑$(\phi(x)) \cap$ 支撑$(\phi(v))$。记

$$\phi(v) = ae_0 + be_1 + ce_2 + z,$$

其中 $z \cdot e_i = 0$ 对于 $i = 0, 1, 2$。

若 $c \neq 0$，根据工作条件 II，b、$c \in \{1, -1\}$，因此 $|b+c|$ 和 $|b-c|$ 中必有一个为 2。因此，为了达到 $\phi(v) \cdot \phi(u_1) = \phi(v) \cdot \phi(u_2)$，我们还需要两个属于某个 $i = 1$的支撑$(\phi(v)) \cap$支撑$(\phi(u_i))$的基向量，2。因此，对于某个 $i = 1$，我们有 $w(v) \geq 5$和 $w(u_i) \geq 4$，2，这与工作条件 II 矛盾。

因此，c必须为 0。为了得到 $\phi(x) \cdot \phi(u_1) = \phi(x) \cdot \phi(u_2) = 0$，存在一些新的基向量 $e_3 \in$支撑$(\phi(u_1)) \cap$支撑$(\phi(v))$ 以及 $e_4 \in$支撑$(\phi(u_2)) \cap$支撑$(\phi(v))$。现在我们有 $w(v) \geq 4$，因此根据工作条件 II，$w'(u_1)$ $w'(u_2) \leq 1$。因此，支撑$(u_1) = \{e_1, e_2, e_3\}$，支撑$(u_2) = \{e_1, e_2, e_4\}$，并且 u_1、u_2不是叶子。设 u_0与 u_1相邻，u_3与 u_2相邻，并设 $x \neq u_0$、u_3。在这种情况下，$e_3 \in$支撑(u_0)，且 $e_4 \in$支撑(u_3)。

根据扩展坏部分的定义，u_0、u_3及其所有邻点都属于扩展坏部分。由于 v不在扩展坏部分中，我们有 $\phi(v) \cdot \phi(u_0) = \phi(v) \cdot \phi(u_3) = 0$。因此，存在一些基向量 $e_5 \in$ 支撑 $(\phi(u_0)) \cap$ 支撑 $(\phi(v))$ 以及 $e_6 \in$ 支撑 $(\phi(u_3)) \cap$ 支撑$(\phi(v))$，使得 $e_5 \neq e_3$和 $e_6 \neq e_4$。根据扩展坏部分在 x处半标准嵌入的假设，我们知道 e_0、.....、e_6都各不相同。因此，$w(v) \geq 6$，这与工作条件 II 矛盾。

情形 2： $e_1 \notin$ 支撑$(\phi(v))$。由于 $\phi(x) \cdot \phi(v) = 0$，因此有一些新的基向量 e_{-1}，$e_0 \in$支撑$(\phi(x)) \cap$支撑$(\phi(v))$。因此，$w(x) \geq 3$。

根据工作条件II 和 III，除了可能的 x 之外，Γ 中的所有顶点的调整权重均为 0 或 1。因此，$w'(v) \leq 1$。此外，根据推论 5.3，由 v 及其邻点诱导的子图是标准嵌入的。

由于 $w'(v) \leq 1$，要么 $w(v) = 2$ 且至少有一个邻点，要么 $w(v) = 3$ 且有两个邻点。由于由 v 及其邻点诱导的子图是标准嵌入的，$\phi(v)$ 的支撑中至多有一个基向量不在 v 的任何邻点的支撑中。因此，我们可以令 u 与 v 相邻，并令 $e_0 \in$支撑(u)。若 $e_1 \in$支撑$(\phi(u))$，则我们可以对 v 而非 u 应用情况 1，从而得到矛盾。因此，$e_1 \notin$ 支撑$(\phi(u))$。此外，由于由 v及其邻点诱导的子图是标准嵌入的，鉴于我们已有 e_0 属于 $\phi(u)$ 的支撑$\cap$支撑$(\phi(v))$，e_{-1} 不能属于 $\phi(u)$ 的支撑。

由于 v不在扩展坏部分中，u不能与 x相邻。为了实现 $\phi(u) \cdot \phi(x) = 0$，由于 e_0在 Supp$(\phi(u))$ 中但不在 e_{-1}中，e_1，我们必须有某个新的基向量 $e_{-2} \in$Supp$(\phi(u)) \cap$Supp$(\phi(x))$。根据工作条件 VII，$w(x) \leq 4$。因此，Supp$(\phi(x))$ $= \{e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1\}$。

根据工作条件 V，$w'(v)$ 和 $w'(u)$ 不可能同时为 1。因此，u、v 中至少有一个的权重为 2，且还有另一个邻点。

如果 v的权重为 2 且还有另一个邻点，设该邻点为 y。由于 Supp$(\phi(v)) = \{e_{-1}, e_0\}$，$e_{-1}$、$e_0$中恰有一个在 Supp$(\phi(y))$ 中。用 v替代 y应用情况 1 中的论证，我们可以得出 $e_1 \notin$ Supp$(\phi(y))$。因此，为了实现 $\phi(y) \cdot \phi(x) = 0$，我们必须有 $e_{-2} \in$Supp$(\phi(y))$。然而，由于 $e_{-2} \in$ Supp$(\phi(u))$，这与由 v 及其邻点诱导的子图标准嵌入相矛盾。

若 v 的权重为 2，且还有另一个邻点，我们就对 u 采用此前对 v 所用的全部论证，并以同样的方式得出矛盾。
□

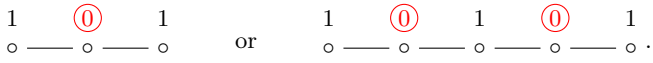
引理 5.5. 假设 x 是一个调整权重为 *0* 的坏顶点，且扩展坏部分以标准或半标准的方式嵌入在一个不是 x的坏顶点处。若 $v \neq x$ 和 $|$支撑$(\phi(v)) \cap$ 支撑$(\phi(x))| \neq 0$，则 v 与 x相邻。

证明。假设 $v \neq x$, $|$支撑$(\phi(v)) \cap$ 支撑$(\phi(x))| \neq 0$，且 v 与 x不相邻。我们希望导出矛盾。

由于扩展坏部分在一个不等于 x 的坏顶点处以标准或半标准方式嵌入，我们知道 v 不可能来自扩展坏部分。

令 u_1、u_2 与 x 相邻。令 $\phi(x) = e_1 - e_2$、$e_1 \in$ 支撑$(\phi(u_1))$，且 $e_2 \in$ 支撑$(\phi(u_2))$。由于 $\phi(v)\cdot\phi(x) = 0$，我们有 e_1、e_2 均属于支撑$(\phi(v))$。根据 $\phi(v)\cdot\phi(u_1) = \phi(v)\cdot\phi(u_2) = 0$，以及扩展坏部分的嵌入方式，我们得出存在互不相同的基向量 e_0、e_1、e_2、$e_3 \in$ 支撑$(\phi(v))$，使得 e_0、$e_1 \in$ 支撑$(\phi(u_1))$，且 e_2、$e_3 \in$ 支撑$(\phi(u_2))$。

因此，$w'(v) \geq 2$。根据工作条件 II、III和VII，坏部分必定是以下之一：



此外，由于 $w'(v) \geq 2$，工作条件II 与引理4.9 和引理5.2 蕴含外部部分是标准嵌入的。特别地，该嵌入在 v的某个邻域内是标准的。

根据工作条件 II，要么 $w(v) = 4$ 且 v至少有一个邻点，要么 $w(v) = 5$ 且 v有两个邻点。无论哪种情况，由于该嵌入在 v 附近局部标准，e_0、e_1、e_2、e_3 中至少有一个属于 v 的某个邻点的支撑。令 z_1 为 v 的一个邻点。由于 $\phi(z_1)\cdot\phi(x) = 0$，$e_1$、$e_2$ 要么都属于 Supp$(\phi(z_1))$，要么 e_1、e_2 都不属于 Supp$(\phi(z_1))$。由于该嵌入在 v 附近局部标准，e_1、e_2 都不属于 Supp$(\phi(z_1))$。不失一般性，令 $e_3 \in$Supp$(\phi(z_1))$。由于 $\phi(z_1)\cdot\phi(u_2) = 0$，存在某个新的基向量 $e_4 \in$Supp$(\phi(z_1)) \cap$Supp$(\phi(u_2))$。

现在，我们有 e_2，e_3，$e_4 \in$ 支撑$(\phi(u_2))$。根据工作条件 II，$w(u_2) = 3$ 且 u_2 不是叶节点。令 u_3 与 u_2 相邻，且 $u_3 \neq x$。

根据我们对扩展坏部分嵌入方式的假设，我们知道 e_3、e_4 中恰有一个属于支撑$(\phi(u_3))$。由于 $\phi(z_1)\cdot\phi(u_3) = 0$，且 e_3、e_4 都属于支撑 $(\phi(z_1))$，因此存在某个新的基向量 $e_5 \in$，使得支撑 $(\phi(z_1)) \cap$ 支撑 $(\phi(u_3))$。根据工作条件 II，我们有支撑$(\phi(z_1)) = \{e_3, e_4, e_5\}$，且 z_1 不是叶节点。令 z_2 为 z_1 和 $z_2 \neq v$ 的邻点。那么，e_3、e_4、e_5 中恰有一个属于支撑$(\phi(z_2))$。由于 $\phi(u_2)\cdot\phi(z_2) = 0$，且外部部分是标准嵌入的，$e_3$、$e_4$ 不可能属于支撑$(\phi(z_2))$。因此，$e_5 \in$ 支撑$(\phi(z_2))$。

由于 z_1不在扩展坏部分中，z_2和 u_3彼此不相邻。由 $\phi(z_2)\cdot\phi(u_3) = 0$，又因为 $e_5 \in$ Supp$(\phi(u_3)) \cap$ Supp$(\phi(z_2))$，我们可以得出结论：存在某个新的基向量 e_6，使得$e_6 \in$Supp$(\phi(u_3)) \cap$Supp$(\phi(z_2))$

由于 z_1 不在坏部分中，因此它不是坏的。因此，$w'(z_2) = 0$，从而 Supp$(\phi(z_2)) = \{e_5, e_6\}$.

现在，$e_4, e_5, e_6 \in$Supp$(\phi(u_3))$。根据工作条件 II，我们知道 Supp$(\phi(u_3)) = \{e_4, e_5, e_6\}$，且 u_3不是叶节点。令 u_4 为 u_3 和 $u_4 \neq u_2$ 的邻点。根据扩展坏部分嵌入方式的假设，我们知道 e_4, e_5, e_6 中恰有一个属于 Supp$(\phi(u_4))$。

由于 z_1 不属于坏部分，u_4 和 z_2 彼此不相邻。因此，e_5、e_6 不属于支撑$(\phi(u_4))$。因此，$e_4 \in$ 支撑$(\phi(u_4))$。由于 $e_4 \in\in$ 支撑$(\phi(u_2))$，根据我们对扩展坏部分嵌入方式的假设，u_3 必定是一个坏顶点，并且扩展坏部分在该处以半标准方式嵌入 u_3。然而，这违反了工作条件III。因此，我们得出了矛盾。

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
u_1	✓	✓					
x		✓	✓				
u_2			✓	✓	✓		
u_3					✓	✓	✓
v	✓	✓	✓	✓			
z_1				✓	✓	✓	
z_2						✓	✓

□

引理 5.6。假设 x 是一个调整权重为 *1* 的坏顶点，且扩展坏部分以标准或半标准方式嵌入在一个不同于 x的坏顶点处。若 $v \neq x$ 和 $|$支撑$(\phi(v)) \cap$ 支撑$(\phi(x))| \neq 0$，则 v 与 x相邻。

证明。假设 $v \neq x$、$|$支撑$(\phi(v)) \cap$ 支撑$(\phi(x))| \neq 0$，且 v 与 x不相邻。我们要导出一个矛盾。

由于扩展坏部分在一个不等于 x 的坏顶点处以标准或半标准方式嵌入，我们知道 v 不可能来自扩展坏部分。

根据工作条件 III，我们知道 $w'(v) \leq 1$。

令 u_1，u_2 与 x相邻。令 $\phi(x) = e_1 + e_2 - e_3$、$e_1 \in$ 支撑$(\phi(u_1))$，以及 $e_3 \in$ 支撑$(\phi(u_2))$。

由于 $\phi(v)\cdot\phi(x)=0$，我们知道 e_1、e_2、e_3 中恰有两个属于 $\phi(v)$ 的支撑。如果 $e_1\in$ 支撑$(\phi(v))$，那么由于 $\phi(v)\cdot\phi(u_1)=0$，在 $\phi(v)$ 的支撑中存在另一个基向量 $\cap$ 支撑$(\phi(u_1))$。同样地，如果 $e_3\in$ 支撑$(\phi(v))$，那么存在另一个基向量 $\phi(v)\cap$ 支撑$(\phi(u_2))$。如果 e_1、e_3 都属于 $\phi(v)$ 的支撑，根据我们关于扩展坏部分如何嵌入的假设，刚才提到的另外两个基向量彼此不同，因此 $w(v)\geq 4$，这违反了工作条件 III。

因此，e_2 以及 e_1、e_3 中恰有一个属于 $\mathrm{Supp}(\phi(v))$。不失一般性，设 e_2、$e_3\in\mathrm{Supp}(\phi(v))$。由于 $\phi(v)\cdot\phi(u_2)=0$，存在某个新的基向量 e_4 属于 $\mathrm{Supp}(\phi(v))\cap\mathrm{Supp}(\phi(u_2))$。因此，$w(v)\geq 3$。根据工作条件 III，我们知道 $w(v)=3$，且 v 有两个邻点。

设 z_1、z_2 是 v 的邻点。根据推论 5.3，e_2、e_3、e_4 中恰有一个属于 $\mathrm{Supp}(\phi(z_1))$，e_2、e_3、e_4 中恰有一个属于 $\mathrm{Supp}(\phi(z_2))$，并且 $|\mathrm{Supp}(\phi(z_1))\cap\mathrm{Supp}(\phi(z_2))|=0$。

首先，我们证明 e_3 不可能属于 $\mathrm{Supp}(\phi(z_1))$。若 $e_3\in\mathrm{Supp}(\phi(z_1))$，则 $e_2\notin\mathrm{Supp}(\phi(z_1))$，从而 $e_1\in\mathrm{Supp}(\phi(z_1))$。由 $\phi(z_1)\cdot\phi(u_1)=0$ 和 $\phi(z_1)\cdot\phi(u_2)=0$，可知 $\mathrm{Supp}(\phi(z_1))$ 中至少还有两个其他基向量，因此 $w(z_1)\geq 4$，这违反了工作条件 III。

因此，e_3 不能属于 $\mathrm{Supp}(\phi(z_1))$。同理，e_3 不能属于 $\mathrm{Supp}(\phi(z_2))$。经过重新标记，不妨设 $e_2\in\mathrm{Supp}(\phi(z_1))$ 且 $e_4\in\mathrm{Supp}(\phi(z_2))$。由于 $\phi(z_1)\cdot\phi(x)=0$，我们必有 $e_1\in\mathrm{Supp}(\phi(z_1))$。接着，由 $\phi(z_1)\cdot\phi(u_1)=0$，可知存在某个新的基向量 e_0，它属于 $\mathrm{Supp}(\phi(z_1))\cap\mathrm{Supp}(\phi(u_1))$。因此，$w(z_1)\geq 3$，从而 $w'(z_1)>0$。

由于 v 不在坏部分中，因此它不是坏的。因此，$w'(z_2)=0$。所以，$w(z_2)=2$，且 z_2 不是叶节点。设 z_3 与 z_2 和 $z_3\neq v$ 相邻。由于 z_2 也不在坏部分中，$w'(z_3)=0$ 同样成立，因此 $w(z_3)=2$，且 z_3 不是叶节点。设 z_4 与 z_2 和 $z_4\neq z_2$相邻。

由于 $\phi(z_2)\cdot\phi(u_2)=0$，除 e_4 外，还有另一个基向量 $e_5\in\mathrm{Supp}(\phi(z_2))\cap\mathrm{Supp}(\phi(u_2))$。由于 $w(z_2)=2$，我们有 $\mathrm{Supp}(\phi(z_2))=\{e_4,e_5\}$。由推论 5.3，$e_5$ 属于 $\mathrm{Supp}(\phi(z_3))$，而 e_3、e_4 不属于 $\mathrm{Supp}(\phi(z_3))$。

根据我们对扩展坏部分如何嵌入的假设，我们知道 z_3 与 u_2 不相邻。因此，除 e_5 外，还有另一个基向量 $e_6\in\mathrm{Supp}(\phi(z_2))\cap\mathrm{Supp}(\phi(u_2))$。

由工作条件 VII（或 IV），我们知道 $w(u_2)\leq 4$。因此，$\mathrm{Supp}(\phi(u_2))=\{e_3,e_4,e_5,e_6\}$。由推论 5.3，$e_6\in\mathrm{Supp}(\phi(z_4))$，而 e_3、e_4、$e_5\notin\mathrm{Supp}(\phi(z_4))$。因此，$\phi(u_2)\cdot\phi(z_4)\neq 0$。所以，$z_4$ 与 u_2 相邻，这与我们对扩展坏部分如何嵌入的假设矛盾。

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
u_1	✓	✓					
x		✓	✓	✓			
u_2				✓	✓	✓	✓
z_1	✓	✓	✓				
v			✓	✓	✓		
z_2					✓	✓	
z_3						✓	✓
z_4							✓

□

引理 5.7. 设 x 是一个权重为 *2* 的坏顶点，且扩展坏部分以标准或半标准的方式嵌入在一个非 x 的坏顶点处。若 $v\neq x$ 和 $|$支撑$(\phi(v))\cap$支撑$(\phi(x))|\neq 0$，则 v 与 x 相邻。

证明。设 $v\neq x$, $|$支撑$(\phi(v))\cap$支撑$(\phi(x))|\neq 0$，且 v 与 x 不相邻。我们要导出矛盾。

由于扩展坏部分以标准或半标准的方式嵌入在一个非 x 的坏顶点处，我们知道 v 不可能来自扩展坏部分。

设 u_1,u_2 与 x 相邻。设 $\phi(x)=e_1+e_2+e_3-e_4$, $e_1\in$ 支撑$(\phi(u_1))$，且 $e_4\in$ 支撑$(\phi(u_2))$。根据工作条件 III，我们知道 $w'(v)\leq 1$，从而 $w(v)\leq 3$。由于 $\phi(v)\cdot\phi(x)=0$，我们知道 e_1,e_2,e_3,e_4 中恰有两个属于支撑$(\phi(v))$。

情况 1：$e_1\in$ 支撑$(\phi(v))$ 或 $e_4\in$ 支撑$(\phi(v))$。不失一般性，设 $e_1\in$ 支撑$(\phi(v))$。由于 $\phi(v)\cdot\phi(u_1)=0$，存在某个新的基向量 e_0，属于支撑$(\phi(v))\cap$支撑$(\phi(u_1))$。若 e_4 也属于支撑$(\phi(v))$，由于 $\phi(v)\cdot\phi(u_2)=0$，支撑$(\phi(v))\cap$支撑$(\phi(u_2))$ 中还存在另一个基向量，因此 $w(v)\geq 4$，这与工作条件 II 矛盾。因此，e_4 不能属于支撑$(\phi(v))$，且 e_2、e_3 中恰有一个属于支撑$(\phi(v))$。不失一般性，设 $e_2\in$ 支撑$(\phi(v))$。

根据工作条件 III，必有支撑($\phi(v)$) $=\{e_0, e_1, e_2\}$，且 v 有两个邻点。根据推论 5.3， v的至少一个邻点的支撑恰好包含 e_1、 e_2 中的一个。设 z_1 与 v 相邻，且 e_1、 e_2 中恰有一个属于支撑 ($\phi(z_1)$)。由于 $\phi(z_1) \cdot \phi(x) = 0$， e_3、 e_4 中恰有一个属于支撑 ($\phi(z_1)$)。

根据工作条件 V，我们知道 $w'(z_1) = 0$，因此 $w(z_1) = 2$ 且不是叶节点。令 z_2 与 z_1 和 $z_2 \neq v$相邻。由于 z_1 不在坏部分中，因此它不是坏的，从而 $w'(z_2) = 0$，因此 $w(z_2) = 2$。

由于 $w(z_1) = 2$， Supp($\phi(z_1)$) 不包含 e_1、 e_2、 e_3、 e_4 以外的任何元素。由于 $\phi(z_1) \cdot \phi(u_2) = 0$，
e_4 z_1 $e_3 \in$ z_1 不能属于 Supp(ϕ( ))。因此， Supp(ϕ( ))。

根据推论 5.3， $e_3 \in$ Supp($\phi(z_2)$)，而 e_1、 $e_2 \notin$ Supp($\phi(z_2)$)。由于 $\phi(z_2) \cdot \phi(x) = 0$，我们有 $e_4 \in$ Supp(
ϕ z_2 w z_2 $= 2$ e_3 e_4 ϕ z_2 ϕ z_2 u_2 $\neq$ ( ))。然而，由于 ( )、 和 是 Supp(
0 z_2 u_2
( )) 中仅有的元素，因此 ( )$\cdot \phi$( )。所以，与 相邻，这与我们关于扩展坏部分如何嵌入的假设相矛盾。

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4
u_1	✓	✓			
x		✓	✓	✓	✓
u_2					✓
v	✓	✓	✓		
z_1			✓	✓	
z_2				✓	✓

情况 2： $e_2, e_3 \in$属于$\phi(v)$的支撑。根据工作条件 II，要么 $w(v) = 2$ 且 v 至少有一个邻点，要么$w(v) = 3$ 且 v 有两个邻点。无论哪种情况，根据推论 5.3，$\phi(v)$的支撑中至多有一个元素不在其任何邻点的支撑中。令 z 为 x 的一个邻点，使得 e_2和 e_3 中恰有一个属于$\phi(z)$的支撑。由于 $\phi(z) \cdot \phi(x) = 0$， e_1 或 e_4 也属于$\phi(z)$的支撑。因此，我们得到情况 1，其中 z 替代v。将我们对 v 所做的论证应用于 z，便会得到矛盾。□

推论 5.8。 假设 x 是一个坏顶点。如果 $v \neq x$ 和 |的支撑($\phi(v)$) $\cap$ 的支撑($\phi(x)$)| $\neq 0$，那么 v 与 x相邻。

证明。 引理 5.4、5.5、5.6和5.7涵盖了引理5.1中可能出现的所有情形。 □

引理 5.9。 假设 x 是一个非坏顶点，且与两个坏顶点相邻。如果 $v \neq x$ 和|支撑($\phi(v)$) $\cap$ 支撑($\phi(x)$)| $\neq 0$，那么 v 属于 Γ 的坏部分。

证明。 假设 $v \neq x$、 |支撑($\phi(v)$) $\cap$ 支撑($\phi(x)$)| $\neq 0$，且 v 不属于坏部分。我们要导出矛盾。

根据工作条件 VII，我们知道 $w(x)$ 必须为 3。因此， |支撑($\phi(x)$)| $= 3$。根据引理 5.1，支撑集 Supp($\phi(x)$) 中的两个元素也出现在 x 的邻点的支撑集中。由于 x 的邻点都是坏顶点，根据推论 5.8，支撑集 Supp($\phi(x)$) 中那些也出现在 x 的邻点支撑集中的元素不能属于 Supp($\phi(v)$)。因此， |支撑($\phi(v)$) $\cap$ 支撑($\phi(x)$)| $= 1$，于是 v 和 x 彼此相邻，这不可能。□

引理 5.10. 设 x 是一个坏顶点， u_1、 u_2 是它的邻点。假设扩展坏部分在 x 处半标准嵌入。设 e_0 是一个基向量，它属于支撑($\phi(u_1)$) $\cap$ 支撑($\phi(u_2)$)，但不属于 支撑($\phi(x)$)。若 v 是一个顶点，使得 $v \neq u_1$、 u_2，那么 $e_0 \notin$ 支撑($\phi(v)$)。

证明. 假设 $v \neq u_1, u_2$ 且 $e_0 \in$ 支撑($\phi(v)$)。我们要导出矛盾。
设 e_{-1} 是属于 Supp($\phi(u_1)$) $\cap$ Supp($\phi(x)$) $\cap$Supp($\phi(u_2)$) 的基向量。
根据我们关于扩展坏部分嵌入方式的假设， v 不可能属于扩展坏部分。因此， v 不与 u_1, u_2 相邻。所以，存在其他基向量 $e_1 \in$ Supp($\phi(u_1)$) $\cap$ Supp($\phi(v)$) 以及 $e_2 \in$ Supp($\phi(u_2)$) $\cap$ Supp($\phi(v)$)。

现在我们有 $w(u_1)$ $w(u_2) \geq 3$。根据工作条件 II， u_1、 u_2 中至少有一个的权重为 3，且不是叶节点。不失一般性，设 $w(u_2) = 3$, u_3 是 u_2 的邻点，且 $u_3 \neq x$。根据我们对扩展坏部分如何嵌入的假设，Supp($\phi(u_3)$) $\cap$Supp($\phi(u_2)$) $= \{e_2\}$。由于 $\phi(v) \cdot \phi(u_3) = 0$，存在某个新的 $e_3 \in$Supp($\phi(v)$) $\cap$Supp($\phi(u_3)$)。因此， $w(v) \geq 4$。再次根据工作条件 II，存在某个 u_0，使得 Supp($\phi(u_0)$) $\cap$Supp($\phi(u_1)$) $= \{e_1\}$。由于 $\phi(v) \cdot \phi(u_0) = 0$，存在某个新的 $e_4 \in$ Supp($\phi(v)$) $\cap$Supp($\phi(u_0)$)。因此， $w(v) \geq 5$。根据工作条件 II， $w'(v) = 3$ 且 $w(v) = 5$。根据工作条件 IV， $w'($ $u_0) = 0$。因此， u_0 不是叶节点。设 u_{-1} 与 u_1 和 $u_{-1} \neq u_1$ 相邻。根据我们对扩展坏部分如何嵌入的假设，我们有 Supp($\phi(u_{-1})$) $\cap$Supp($\phi(u_0)$) $= \{e_4\}$,

且 e_0，e_1，e_2，$e_3 \notin \mathrm{Supp}(\phi(u_{-1}))$。这意味着 u_{-1} 与 v 相邻，因此 v 位于扩展坏部分中，这与扩展坏部分的嵌入方式相矛盾。

	e_{-1}	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4
u_{-1}						✓
u_0			✓			✓
u_1	✓	✓	✓			
x	✓					
u_2	✓	✓		✓		
u_3				✓	✓	
v		✓	✓	✓	✓	✓

□

回顾一下，在本节中我们始终假设 Γ 满足工作条件并且至少有一个坏顶点，同时我们固定了一个嵌入 ϕ: $V(\Gamma) \to \mathbb{Z}^n$。现在我们终于可以证明，该嵌入要么是标准的，要么是半标准的。为简化起见，我们引入两个将在证明中使用的技术性定义。

定义 5.11。 Γ 的内部坏部分 是由 Γ 的所有顶点构成的集合所诱导的子图，其中这些顶点要么是坏顶点，要么有两个坏顶点作为邻点。等价地，内部坏部分 就是去掉两端后的坏部分。

定义 5.12。 Γ 的一个顶点如果不在内部坏部分中，并且与内部坏部分中的一个顶点相邻，则称为颈顶点 。等价地，颈顶点 就是坏部分的两个端点。

回顾一下， 我们假设 Γ 满足工作条件，并且包含至少一个坏顶点：

引理 5.13。 Γ被标准地或半标准地嵌入。

证明。 令 $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ 为基向量集。令 S' 为至少支撑一个内部坏部分中顶点的基向量集。令 Γ' 为从 Γ 中删除内部坏部分的顶点，并将每个颈顶点的权重减 1 后得到的图。

根据构造，作为独立图的 Γ' 中各顶点的调整权重，与作为 Γ的子图的 Γ' 中各顶点的调整权重相同。因此，作为独立图的 Γ' 满足工作条件。由于 Γ' 没有坏顶点，它也满足 [AMP25]中的工作条件。因此， Γ' 的所有嵌入都是标准的。

由引理 5.1可知，扩展坏部分是标准地或半标准地嵌入的。令 u、v为 Γ中的两个颈顶点。为避免混淆，我们用 u'、v'来表示将 u、v视为 Γ'中的顶点时的情形。因此， $w(u') = w(u) - 1$ 以及 $w(v') = w(v) - 1$。

情况 1： 只有一个坏顶点，且扩展坏部分是半标准嵌入的。于是 u和 v都与该坏顶点相邻，并且 $\mathrm{Supp}(\phi(u)) \cap \mathrm{Supp}(\phi(v)) = \{e_i, e_o\}$，其中 $e_i \in S'$和 $e_o \in S \setminus S'$满足某些条件。对基向量施加符号变换自同构后，不妨设 $u = z_u + e_i + e_o$和 $v = z_v + e_i - e_o$，其中某个z_u， z_v 满足

$$z_u \cdot e_i = z_u \cdot e_o = z_v \cdot e_i = z_v \cdot e_o = 0.$$

考虑嵌入 ϕ': $V(\Gamma') \to \mathbb{Z}^n$，如下所示。对于任意顶点 $t \neq u'$， v'，令 $\phi'(t) = \phi(t)$。此外，令 $\phi'(u') = z_u + e_o$且 $\phi'(v') = z_v + e_i$。

根据引理 5.4 和 5.10， Γ' 中除 u'、v' 以外的顶点，其支撑均不包含 e_i 或 e_o。因此，改变 u 和 v 在 $\mathbb{Z}^n$ 中的像与 e_i 和 e_o 的相互作用，不会影响它们与坏部分中顶点以外的顶点之间的配对。因此， ϕ' 确实是 Γ' 的一个嵌入。由于 Γ' 的任意嵌入都必须是标准的，所以 ϕ' 是标准的。因此，根据引理 5.4 和 5.10，通过检验半标准定义中的配对要求可知， ϕ 半标准地嵌入 Γ。

情形 2：存在至少两个坏顶点，或扩展坏部分是标准嵌入的。于是 $|\mathrm{Supp}(\phi(u)) \cap \mathrm{Supp}(\phi(v))| = 0$。在基向量上施加符号变换自同构后，不妨设 $u = z_u + e_u$ and $v = z_v + e_v$ for some $e_u \in S'$ and $e_v \in S'$。由于 u and v 是颈顶点， e_u and e_v 位于坏顶点的支撑集中。考虑嵌入 ϕ': $V(\Gamma') \to \mathbb{Z}^n$ 如下。对于任意顶点 $t \neq u'$，令 v'、 $\phi'(t) = \phi(t)$。我们还令 $\phi'(u') = z_u$ 以及 $\phi'(v') = z_v$。根据推论 5.8，改变 u and v 在 $\mathbb{Z}^n$ 中的像与 e_u and e_v 的相互作用，不会影响它们与不在坏部分中的顶点的配对。因此， ϕ' 确实是 Γ'的一个嵌入。由于 Γ' 的任何嵌入都必须是标准的， ϕ' 是标准的。

因此，利用推论5.8 和引理 5.9以及5.10，通过检查标准和半标准定义中的配对要求，我们看到 ϕ 标准嵌入 Γ 当扩展坏部分是标准嵌入时，而 ϕ 半标准嵌入 Γ 当扩展坏部分是半标准嵌入时。

□

最后，我们证明定理B：

定理 B 的证明。 引理 (i) $\Rightarrow$ (iv) 中的蕴含关系已在引理 2.1 中证明，而 (iv) $\Rightarrow$ (iii) 则在引理 2.2 中证明；另一方面， (ii) $\Rightarrow$ (i) 由定义直接得出。因此，剩下只需证明蕴含关系 (iii) $\Rightarrow$ (ii)。

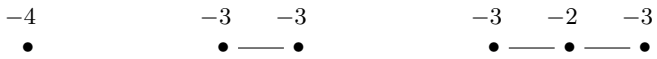
假设透镜空间的一个连通和 L 满足 (iii)。由引理 3.8，对偶管道图 Γ 满足工作条件。令

$$\phi\colon V(\Gamma)\to\mathbb{Z}^n$$

为 Γ的一个嵌入。若 Γ 没有坏顶点，则由备注 3.7 及 [AMP25，引理 3.6], 可知嵌入 ϕ 是标准的。另一方面，若 Γ 至少有一个坏顶点，则由引理 3.8可知，嵌入 ϕ 要么是标准的，要么是半标准的。

由于标准嵌入在 $\mathbb{Z}^n$ [AMP25的自同构作用下唯一，备注 4.5], 以及通过粘合 $\natural_i X(p_i,\ q_i)$ 和 $\natural_i X(p_i,\ p_i-q_i)$ 得到的嵌入是标准的（例如参见 [Lis08、SSW08、Sta15]），我们得出结论，在这种情况下，该嵌入的正交补与交叉形式 $Q_{X(p_i,q_i)}\oplus\langle-1\rangle^m$ 相同，其中 m为某个非负整数。因此，为完成证明，只需考虑 Γ 至少有一个坏顶点且嵌入 ϕ 为半标准的情形。

回想备注 3.5 ，对偶管道图中的每个坏顶点 Γ 都对应于原图中的一个



。对于每种情形，我们考察嵌入 ϕ 的正交补，并将其与在典范负定配管 $\natural_i X(p_i,q_i)$ 中吹下 -4-球面的结果进行比较。在上方图中的三种构型里，这个 -4-球面由对应于该构型各顶点的球面之并表示。此外，在证明的其余部分，我们假设ϕ 使用了所有 n 个基向量，即

$$\bigcup_{v\in V(\Gamma)}\operatorname{Supp}(\phi(v))=\{e_1,\dots,e_n\},$$

其中 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 是 $\mathbb{Z}^n$的一组正交归一基。若情况并非如此，则正交补可由下文计算所得的正交补加上一个直和项 $\langle-1\rangle^m$ 得到，其中 m是某个非负整数。回想一下，沿 -4-球面进行有理吹下的柯比图，是通过将 -4–框定的平凡结替换为一个 1–柄和一个 2–柄得到的，如图 1 所示（例如参见 [GS99]）。

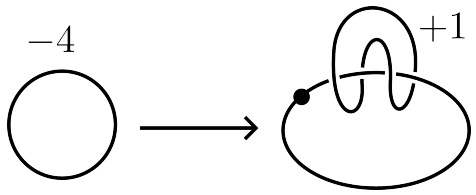
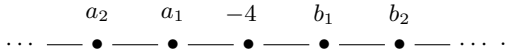


图 1. 有理吹下。

首先，我们考虑对−4球面进行有理吹下时，交叉形式会发生什么变化



根据图 2，我们看到，在交叉形式的矩阵中，就局部而言，我们将

$$\begin{pmatrix} a_2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & a_1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & b_1 \end{pmatrix}\qquad\text{with}\qquad \begin{pmatrix} a_2 & 2 & 1\\ 2 & 1+4a_1 & 2a_1\\ 1 & 2a_1 & a_1+b_1 \end{pmatrix}.$$

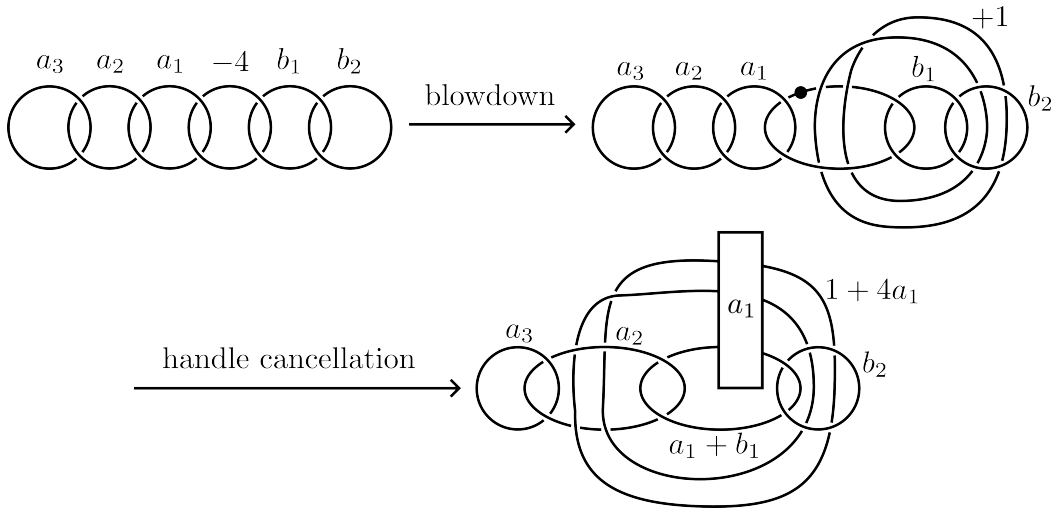
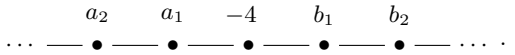
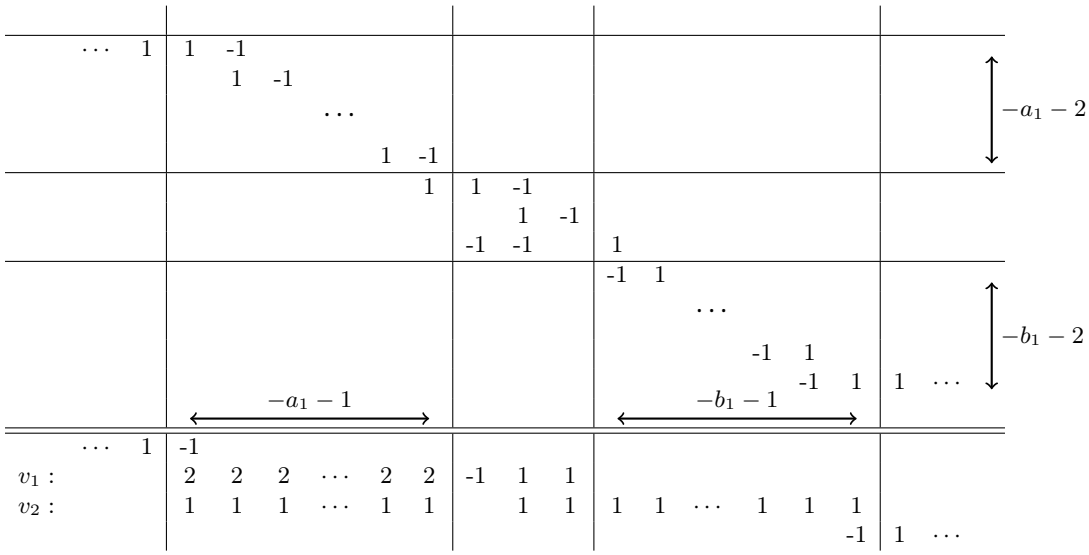


图2。 $[-4]$的爆破。

现在，考虑以下与坏顶点对应的半标准嵌入的正交补的一组基，该坏顶点对应于权重为 -4 的顶点，其中



双横线以上的嵌入是半标准嵌入。双横线以下描述的是其正交补的一组基。若为 $a_1=-2$，顶行就变为坏顶点上方的一行。 $b_1=-2$ 的情况类似。

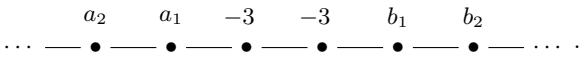


我们计算表中标记为 v_1， v_2 的元素的交叉配对：

$$\begin{aligned}\langle v_1,v_1\rangle &= -4(-a_1-1)-3 = 4a_1+1,\\ \langle v_1,v_2\rangle &= -2(-a_1-1)-2 = 2a_1,\\ \langle v_2,v_2\rangle &= -(-a_1-1)-2-(-b_1-1) = a_1+b_1.\end{aligned}$$

我们看到，交配对与通过有理吹下得到的交配对一致。

接下来, 我们考察进行有理吹下时交叉形式会发生什么变化,



跟随 如图 3所示，我们可以看到，在表示交叉形式的矩阵中，局部替换 e

$$\begin{pmatrix} a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{pmatrix} a_2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1+4a_1 & 4a_1 & -2a_1 \\ 2 & 4a_1 & -3+4a_1 & 1-2a_1 \\ -1 & -2a_1 & 1-2a_1 & a_1+b_1 \end{pmatrix}.$$

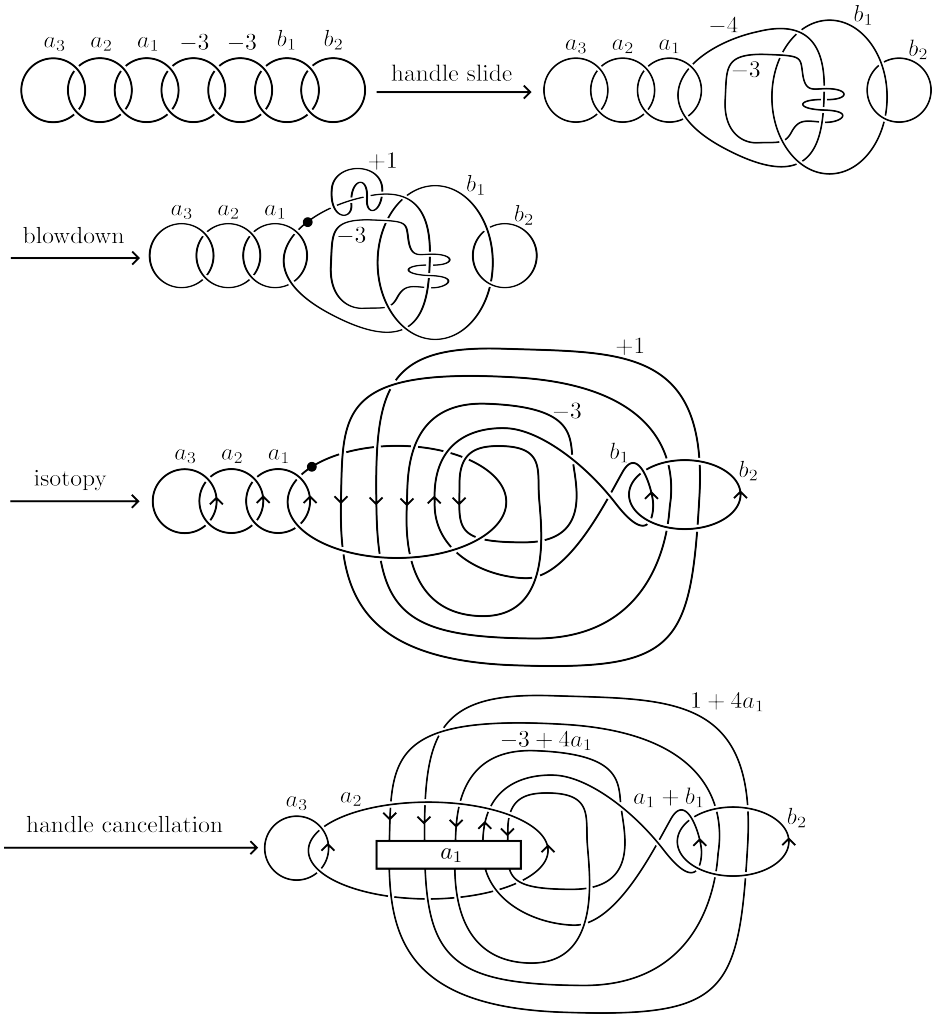


图3。 $[-3,-3]$的爆破。

然后，我们将其与半标准嵌入的正交补进行比较。

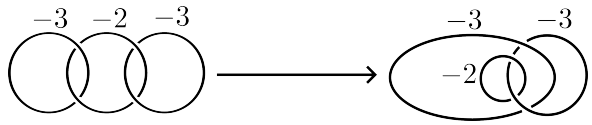


图4。 $[-3,-2,-3]$ 情形下的手柄滑动。

| | | |

		1	-1					
			1	1	1	-1		
		-1	-1					
$v_1:$		-1	1			1		
$v_2:$		-1	1	1		2		
$v_3:$			-1			-1		
$v_4:$				-1	1			

两种交叉形式再次相同。 □

6. 禁构型

在本节中，我们证明定理 A。定理 1A 的陈述（1）对应于引理 6.1。陈述（2）对应于引理 6.2。为证明陈述（3），我们将顶点标记为 浅、深和既非浅也非深，并对每一类中的顶点数给出上界。难点在于为深顶点的数量给出上界，这将在引理 6.5中完成。为非深顶点的数量给出上界则很容易。

我们先回顾定理陈述：

定理 A。 设 k 为正整数。存在一个有限的极小构型集合 S_k，满足以下条件：

(1) 透镜空间的连通和 L 满足性质 X_k，当且仅当与 L 关联的管道图不包含来自 S_k 的任何构型作为诱导子图；(2) S_k 中任意构型的任意顶点的权重绝对值不超过 $2k+7$；(3) S_k 中任意构型的顶点数不超过 $13k$。

固定一个正整数 k。令 S'_k 为所有不满足性质X_k的典范管道图组成的集合。令 S_k 为 S'_k 的子集，其中包含的图不含 S'_k 中的任何其他元素作为诱导子图。我们首先证明 S_k 满足定理1的（A）。为此，只需证明以下引理。

引理 6.1。 假设 $L' = \#_i L(p'_i, q'_i)$ 的典范管道图包含 $L = \#_i L(p_i, q_i)$ 的典范管道图作为诱导子图。若 L 不满足性质 X_k，则 L' 不满足性质 X_k。

证明。 为方便记号，定义

$$n_L := b_2(\natural_i X(p_i, q_i)) + b_2(\natural_i X(p_i, p_i - q_i))$$

and

$$n_{L'} := b_2(\natural_i X(p'_i, q'_i)) + b_2(\natural_i X(p'_i, p'_i - q'_i)).$$

根据顶点数作归纳论证，只需在以下情形下证明引理6.1： $L' = \#_i L(p'_i, q'_i)$ 的典范管道图恰比$L = \#_i L(p_i, q_i)$的典范管道图多一个顶点。在这种情况下，我们有

$$b_2(\natural_i X(p'_i, q'_i)) = b_2(\natural_i X(p_i, q_i)) + 1.$$

分别令 Γ 和 Γ' 表示 L 和 L'的对偶图。令 v 为 L' 的典范管道图中不属于 L的顶点。根据假设，存在一个嵌入 ϕ: $V(\Gamma) \to \mathbb{Z}^{n_L - k}$。根据 v的连通性，我们区分以下三种情形：

(1) v 没有邻点；(2) v 恰有一个邻点；(3) v 恰有两个邻点。

情况 1： v没有邻点。在对偶图中， v对应于一个包含 $|w(v)| - 1$ 个连通顶点且权重为 2 的分支。令 Γ 中对应的顶点为 x_1、……、 $x_{|w(v)|-1}$.

现在我们有

$$b_2(\natural_i X(p'_i, p'_i - q'_i)) = b_2(\natural_i X(p_i, q_i)) + |w(v)| - 1$$

因此，我们有

$$n_{L'} - k = n_L - k + |w(v)|$$

因此， L' 不满足性质 X_k，因为我们可以通过将标准基向量 $e'_1,\ldots,e'_{|w(v)|}$ 附加到 $\mathbb{Z}^{n_L-k}$，并针对每个 $1 \le i \le |w(v)|-1$将 x_i 映射到 $e'_i - e'_{i+1}$，来定义一个嵌入 ϕ'。

情形 2: v 有一个邻点。在对偶图中，这对应于将某个叶节点 u 的权重增加 1，然后在 u 上附加一条由 $|w(v)|-2$ 个权重为 2 的顶点组成的链（因此，除非 $w(v) = -2$，否则 u 不再是叶节点）。设对偶图中这条新的、由 $|w(v)|-2$ 个权重为 2 的顶点组成的链为 $x_1,\ldots,x_{|w(v)|-2}$。

我们有

$$b_2(\natural_i X(p'_i, p'_i - q'_i)) = b_2(\natural_i X(p_i, q_i)) + |w(v)| - 2$$

因此

$$n_{L'} - k = n_L - k + |w(v)| - 1.$$

因此， L' 不满足性质 X_k，因为我们有一个嵌入 ϕ'，它通过将基向量 $e'_1, e'_2,\ldots,e'_{|w(v)|-1}$ 添加到 $\mathbb{Z}^{n_L-k}$来定义，并针对每个 i设定 $\phi'(u) = \phi(u) - e'_1$ 以及 $\phi'(x_i) = e'_i - e'_{i+1}$。

情况 3.1： v 有两个邻点，且 $w(v) \neq -2$。在对偶图中，这对应于将一个叶节点 u_1 的权重增加 1，将另一个叶节点 u_2 的权重增加 1，创建一条由 $|w(v)|-3$ 个权重为 2 的顶点组成的链，然后将其两端分别粘接到 u_1 和 u_2 上。令 x_1，……，$x_{|w(v)|-3}$ 为对偶图中这些新添加的权重为 2 的顶点。

与前面的情形类似，我们有

$$n_{L'} - k = n_L - k + |w(v)| - 2$$

并且我们可以通过向 $\mathbb{Z}^{n_L-k}$添加基向量 e'_1，……，$e'_{|w(v)|-2}$来定义 ϕ'：$V(\Gamma') \to \mathbb{Z}^{n_{L'}-k}$，并令 $\phi'(u_1) = \phi(u_1) - e'_1$、$\phi'(u_2) = \phi(u_2) + e'_{|w(v)|-2}$，且对每个 i，令 $\phi'(x_i) = e'_i - e'_{i+1}$。

情形 3.2： v 有两个邻点，且 $w(v) = -2$。在对偶图中，此操作对应于将来自不同连通分支的两个叶子 u_1，$u_2 \in V(\Gamma)$识别为一个顶点 $u \in V(\Gamma')$，其权重定义为它们的和 $w(u) = w(u_1) + w(u_2)$。

与前面的情形类似，我们有

$$n_{L'} - k = n_L - k.$$

对于任意其他顶点 z，为了得到正确的交配对，我们需要

$$\phi'(z) \cdot \phi'(u) = \phi(z) \cdot \phi(u_1) + \phi(z) \cdot \phi(u_2)$$

这可以 通过设定 $\phi'(u) = \phi(u_1) + \phi(u_2)$ 来实现。现在，我们检查 $\phi'(u) \cdot \phi'(u)$ 确实是 $w(u$):

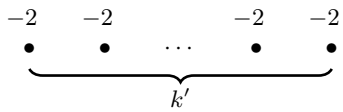
$$\begin{aligned}
\phi'(u) \cdot \phi'(u) &= (\phi(u_1) + \phi(u_2)) \cdot (\phi(u_1) + \phi(u_2)) \\
&= \phi(u_1) \cdot \phi(u_1) + \phi(u_2) \cdot \phi(u_2) + 2\phi(u_1) \cdot \phi(u_2) \\
&= w(u_1) + w(u_2) + 2\phi(u_1) \cdot \phi(u_2) \\
&= w(u) + 2\phi(u_1) \cdot \phi(u_2)
\end{aligned}$$

由于 u_1 和 u_2 来自 Γ中的两个不同连通分支，我们有 $\phi(u_1) \cdot \phi(u_2) = 0$。证明至此完成。□

接下来，我们证明 S_k 满足定理A的条件（2）和（3）。设 $G \in S_k$ 是一个透镜空间连通和的典范管道图。设 Γ 是 G的对偶图。类似于定理6.1的证明，我们令 $n_G = |V(G)| + |V(\Gamma)|$。设 $\phi\colon V(\Gamma) \to \mathbb{Z}^{n_G-k}$ 是一个嵌入。我们定义

$$k' := \begin{cases} k \text{ if } k \text{ if even;} \\ k+1 \text{ if } k \text{ is odd.} \end{cases}$$

考虑以下构型。



令此构型为 $C_{k'}$。构型 $C_{k'}$ 属于 S'_k，因为我们可以将其对偶（其中有 k' 个权重为 2 的非连通顶点）的顶点嵌入，并分别映射到 $e_1 + e_2$、$e_1 - e_2$、$e_3 + e_4$、$e_3 - e_4$ 等。因此，由于 S_k 的构造，图 G 不可能包含 $C_{k'}$ 作为诱导子图，除非 $G = C_{k'}$。

特别地， G 不能包含一条由 $2k'-1$ 个权重为 -2 的顶点组成的链，因为这样的链包含 $C_{k'}$ 作为诱导子图。这对应于如下条件： Γ 不能包含一个 v 调整权重为 $w'(v) \geq 2k'$。由于 $C_{k'}$ 满足定理 2）和（3的条件A，我们假设 $G \neq C_{k'}$。

根据 S_k 的构造，要证明 $G \in S_k$ 满足定理 2 的条件（A），只需证明以下引理：

引理 6.2. 假设 $G \in S_k$ 有一个顶点 g，满足 $|w(g)| \geq 2k'+6$，并且 G 不含以 $C_{k'}$ 为诱导子图的情形。令 G' 为 G 由 $V(G) \setminus \{g\}$诱导的子图。那么 G' 不满足性质 X_k。特别地， G 中任意顶点的权重绝对值至多为 $2k+7$。

证明。 令 Γ' 为 G'的对偶图。令 $n_{G'} = |V(G')| + |V(\Gamma')|$。

在 Γ中，顶点 g对应于一条由 $|w'(g)|-1$ 个权重为 2 的顶点组成的链，其中 $w'(g)$ 是调整权重。设这些顶点为 x_1、……、$x_{|w'(g)|-1}$。如果 x_1 不是叶节点，令 $y_0 \neq x_2$ 为与 x_1相邻的顶点。如果 $x_{|w'(g)|-1}$ 不是叶节点，令 $y_1 \neq x_{|w'(g)|-2}$ 为与 $x_{|w'(g)|-1}$相邻的顶点。根据对偶图的定义，从 G 中移除 g 对应于从 Γ 中移除 x_1、……、$x_{|w'(g)|-1}$，并将 y_0 和 y_1（若存在）的权重各减 1。因此，

$$n_{G'} = n_G - 1 - (|w'(g)| - 1) = n_G - |w'(g)|.$$

由于 $|w(g)| \geq 2k'+6$，我们有 $|w'(g)|-1 \geq 2k'+3 \geq 5$，因此它满足 [AMP25]的工作条件。于是，根据 [AMP25，引理 4.7]，，在同构意义下，我们有 $\phi(x_i) = e_i - e_{i+1}$，其中 $1 \leq i \leq |w'(g)|-1$，且 e_1、……、$e_{|w'(g)|}$ 是一些基向量。现在我们证明，对于任意顶点 $v \neq x_1$、……、$x_{|w'(g)|-1}$，必有 e_2、……、$e_{|w'(g)|-1} \notin \mathrm{Supp}(\phi(v))$。反设不然，并假设存在一个顶点 $v \neq x_1$、……、$x_{|w'(g)|-1}$，使得 $\mathrm{Supp}(\phi(v))$ 至少包含 e_2、……、$e_{|w'(g)|-1}$ 中的一个。由于对所有 $2 \leq i \leq |w'(g)|-2$， $\phi(v) \cdot \phi(x_i)$ 必为 0，因此 e_2、……、$e_{|w'(g)|-1}$ 都包含在 $\mathrm{Supp}(\phi(v))$ 中。于是 $w(v) \geq |w'(g)| - 2 \geq 2k'+2$。这意味着 $w'(v) \geq 2k'$，这不可能，因为如上所述，当 G 不含 $C_{k'}$ 作为诱导子图时，

同样，通过考察与 x_1 的交配对，我们可以看出，如果 y_0 存在，那么它是除 x_1 之外唯一一个支撑中含有 e_1 的顶点；如果 y_0 不存在，那么除 x_1 之外，没有顶点的支撑中含有 e_1。同理，我们知道，如果 y_1 存在，那么它是除 $x_{|w'(g)|-1}$之外唯一一个支撑中含有 $e_{|w'(g)|}$ 的顶点；如果 y_1 不存在，那么除 $x_{|w'(g)|-1}$ 之外，没有顶点的支撑中含有 $e_{|w'(g)|}$。

因此，我们通过从 $\mathbb{Z}^{n_G-k}$ 中移除 $e_1, \ldots, e_{|w'(g)|}$，从 G 中移除 $x_1, \ldots, x_{|w'(g)|-1}$，移除 $\phi(y_0)$ 的 e_1-分支（如果 y_0 存在），以及移除 $\phi(y_1)$ 的 $e_{|w'(g)|}$-分支（如果 y_1 存在），得到一个嵌入 $\phi'\colon V(G') \to \mathbb{Z}^{n_{G'}-k}$。□

还需证明 $G \in S_K$ 满足定理 3中的条件（A）。为此，我们首先介绍以下定义。

定义 6.3。 v 的一个顶点被称为浅顶点，如果它满足以下至少一个条件：

（1） $w(v) = -2$；（2） $w(v) = -4$；（3） $w(v) = -3$，且 v 与一个权重为 -2的顶点相邻；（4） $w(v) = -3$，且 v 与另一个权重为 -3的顶点相邻。

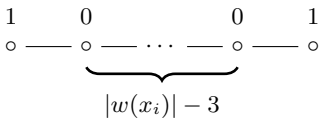
定义 6.4。 v 的一个顶点被称为深顶点，如果它满足以下条件之一：

（1） $|w(v)| \geq 5$，且 v 不与任何浅顶点相邻；（2） $w(v) = -3$，且 v 没有邻点。

我们的策略 y 是为了获得浅顶点和深顶点数量的上界，
以及数量　　既非浅也非深的顶点。
To 为了获得 G 的深顶点数量上界，我们证明以下引理：

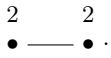
引理 6.5。 若 $G \in S_k$ 至少有 k' 个深顶点，且 G 不包含 $C_{k'}$ 作为诱导子图，则存在一个深顶点 $g \in V(G)$，使得令 G' 为 G 由 $V(G) \setminus \{g\}$诱导的子图时，图 G' 不满足性质 X_k。特别地， G 至多有 $k'-1$ 个深顶点。

证明。令 $x_1,..,x_{k'}$ 为深顶点。对每个 $1 \le i \le k'$，若 $w(x_i) \neq -3$，则由于 $|w(x_i)| \ge 5$，且 x_i 与任何权重为 -2 的顶点都不相邻，G 中的顶点 x_i 对应于如下形式的构型



在 Γ 中。注意，$|w(x_i)|-3 \ge 2$。在这种情况下，我们将 O_i 定义为上图中调整权重为 0 的顶点集合，并将 I_i 定义为上图中调整权重为 1 的顶点集合。

如果 $w(x_i) = -3$，并且 x_i 没有邻点，那么它对应于 Γ 的一个分支，其形式为



在这种情况下，我们将 O_i 定义为由这两个顶点组成的集合，并将 I_i 定义为空集。

Let

$$\mathrm{Supp}(O_i) := \bigcup_{v \in O_i} \mathrm{Supp}(\phi(v)).$$

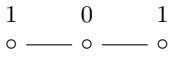
由于 $|w(x_i)| \neq 4$，它满足 [AMP25]，的工作条件，因此我们可以应用 [AMP25，引理 4.7]，从而得出 Γ 中由 $\bigcup_i O_i$ 诱导的子图在 ϕ 下标准地嵌入。注意，条件 $|w(x_i)| \neq 4$ 是必要的，因为 [AMP25，引理 4.7] 的证明需要排除这样一种情况：存在一个恰有三个顶点且每个顶点的权重均为 2 的分支。因此，每当 $w(x_i) \neq -3$ 时，我们有

$$|\mathrm{Supp}(O_i)| = |w(x_i)| - 2.$$

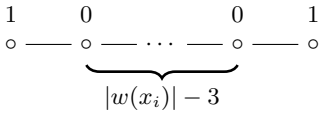
当 $w(x_i) = -3$ 时，我们有 $|\mathrm{Supp}(O_i)| = 3$。此外，只要 $i \neq j$，我们就有

$$|\mathrm{Supp}(O_i) \cap \mathrm{Supp}(O_j)| = 0.$$

现在证明其余顶点以标准方式嵌入，从而 Γ 由 $\bigcup_i (O_i \cup I_i)$ 诱导的子图在 ϕ下以标准方式嵌入。我们使用 [AMP25，引理 4。8] 及其证明。在该证明的情形 (1)–(3) 中，工作条件仅用于排除



构型。因此，当 x_i 是叶节点或 $|w(x_i)| \ge 6$ 时，[AMP25，引理 4.8] 的结论适用。x_i 不是叶节点且 $|w(x_i)| = 5$ 的情形对应于 [AMP25，引理 4.8] 证明中的情形 4。在此情形下，令 u_1、u_2 为 x_i的邻点。不妨设 $|w(u_1)| \ge |w(u_2)|$。若 $|w(u_2)| \ge 4$，则我们得到 [AMP25，引理 4.8]证明中情形 4 的构型 (1)。若 $|w(u_1)| \ge 4$且 $w(u_2) = -3$，那么由于 u_2 不是浅的，它要么是叶节点，要么与某个顶点 $u_3 \neq x_i$ 相邻，且 $|w(u_3)| \ge 4$。若 u_2 是叶节点，我们得到 [AMP25，引理 4.8]证明中的构型 (1)。若 u_2与某个顶点 $u_3 \neq x_i$ 相邻，且 $|w(u_3)| \ge 4$，我们得到 [AMP25，引理 4.8]证明中的构型 (2)。若 $w(u_1) = w(u_2) = -3$，则与上述情形类似，u_1 要么是叶节点，要么存在某个与 u_2 相邻的$u_0 \neq x_i$ 满足 $|w(u_0)| \ge 4$；同时，u_2 要么是叶节点，要么存在某个与 u_2 相邻的 $u_3 \neq x_i$ 满足 $|w(u_3)| \ge 4$。在所有情形下，我们都得到 [AMP25，引理 4.8]证明中的构型 (1)、(2) 或 (5)。根据浅的定义，这些涵盖了所有可能的情形。因此，Γ的子图



对应于 x_i 的对象必须在 ϕ 下标准地嵌入。

对于每个 $v \in V(\Gamma)$，我们称 v 阻碍 i，如果 $v \notin I_i$ 且 $\big|$支撑$(O_i) \cap$ 支撑$(\phi(v))\big| \neq 0$。令

$$\mathrm{obs}(v) := \big|\{\, i \mid v \text{ obstructs } i\}\big|.$$

通过考察 v 与 O_i中各顶点之间的交配对，我们可以看出，每当 v 阻碍 i时，必有

$$\mathrm{Supp}(O_i) \subseteq \mathrm{Supp}(\phi(v)).$$

由于当 $i \neq j$时， $\left|\text{支撑}(O_i) \cap \text{支撑}(O_j)\right| = 0$ ，我们得到

$$w(v) \geq \sum_{v \text{ obstructs } i} \left|\mathrm{Supp}(O_i)\right| \geq 3\,\mathrm{obs}(v).$$

现在我们证明，只要 $\mathrm{obs}(v) = 1$，就必有 $w'(v) \geq 2$。当 $w(v) \geq 4$ 时，这显然成立，因此只需考虑 $w(v) = 3$ 的情形。由于 $\mathrm{obs}(v) = 1$，顶点 v 对某个 i 阻碍 i 。假设 $w(v) = 3$。那么，由于对 $w(x_i)$ 的所有可能取值， $|\mathrm{Supp}(O_i)| \geq 3$ ，必有 $\mathrm{Supp}(v) = \mathrm{Supp}(O_i)$。如果 $w(x_i) \neq -3$，这就不可能：条件 $\mathrm{Supp}(v) = \mathrm{Supp}(O_i)$ 迫使 v 与 I_i 中的两个顶点都具有非零交配对，这意味着 Γ 中存在一个圈。因此， $w(x_i) = -3$，所以 x_i 没有邻点。现在我们证明 v 也没有邻点，这意味着 $w'(v) = 3$。在同构和基向量的重新标记意义下， O_i 中的两个顶点在 ϕ 下分别映射到 $e_1 - e_2$ 和 $e_2 - e_3$。考虑交配对可得 $\phi(v) = \pm(e_1 + e_2 + e_3)$。为了证明 v 没有邻点，令 $u \in V(\Gamma) \setminus O_i$。考虑与 O_i 中顶点的交配对，可得

$$\phi(u) \cdot e_1 = \phi(u) \cdot e_2 = \phi(u) \cdot e_3.$$

由此可知， $\phi(v) \cdot \phi(u)$是 3 的倍数，而这不可能是 -1。因此， u 不能是 v的邻点。因此，在所有情形下，只要 $\mathrm{obs}(v) = 1$，就必有 $w'(v) \geq 2$。

结合不等式 $w(v) \geq 3\mathrm{obs}(v)$，可得在所有情形下

$$w'(v) \geq 2\mathrm{obs}(v).$$

因此，若 $\mathrm{obs}(v) \neq 0$，则顶点 v 对应于 G中一条由至少 $2\mathrm{obs}(v) - 1$ 个权重为 -2 的顶点组成的链。这条链包含 $\mathrm{obs}(v)$ 个两两不连通且权重为 -2的顶点。由于 G 不包含 $C_{k'}$ 作为诱导子图，可得

$$k' > \sum_{v \in V(\Gamma)} \mathrm{obs}(v).$$

因此，存在某个 $1 \leq i \leq k'$ ，使得 i 不受任何 $v \in V(\Gamma)$的阻碍。固定这样一个指标i ，并令 $g := x_i$。令 Γ' 为 G'的对偶图，其中 G' 是由 $V(G) \setminus \{g\}$诱导出的 G 的子图。最后，定义

$$n_{G'} = |V(G')| + |V(\Gamma')|.$$

由于从 G 中移除一个顶点即可得到 G' ，因此我们有 $|V(G')| = |V(G)| - 1$。

备注：在 $w(x_i) \neq -3$ 的情况下，对于任意 $z \in I_i$，若 z 是叶节点，则 $w(z) = 2$。$\mathrm{Supp}(z)$ 中的两个元素之一属于 $\mathrm{Supp}(O_i)$。此外，对于任意满足 $v \neq z$ 和 $v \notin O_i$ 的 v ，考察与 z 的交配对可知，由于 v 不妨碍 i，我们必有 $|\mathrm{Supp}(v) \cap \mathrm{Supp}(z)| = 0$。

情况 1： g具有 没有邻点。在这种情况下，从 G 中移除 g 会将 O_i 和 I_i 中的所有顶点从 Γ 中移除。因此，

$$|V(\Gamma')| = |V(\Gamma)| - (|w(g)| - 1),$$

因此

$$n_{G'} - k = n_G - k - |w(g)|.$$

然而，由于没有任何 v 会妨碍 i ，且根据上述备注，嵌入不再需要使用 $O_i \cup I_i$ 中各顶点所用的 $|w(g)|$ 基向量。因此， G' 不满足性质 X_k。

情形 2： g 有一个邻点。在这种情况下，从 G 中移除 g 会移除 O_i 中的所有顶点以及 I_i 中的一个顶点，并使 I_i 中另一个顶点的权重减小 1。因此，

$$|V(\Gamma')| = |V(\Gamma)| - (|w(g)| - 2),$$

因此

$$n_{G'} - k = n_G - k - (|w(g)| - 1).$$

现在我们移除 O_i 中各顶点所使用的 $|w(g)| - 1$ 基向量，以及被移除的 I_i 中顶点所使用的基向量。由于 i 不受任何 v 阻碍，并且根据上面的备注，对偶图其余部分的唯一影响是 I_i 中剩余顶点的权重减小 1，这是因为它在 $\mathrm{Supp}(O_i)$ 中的某个基向量上有一个分支。这就得到了所需的图 Γ'。因此， G' 不满足性质 X_k。

情况 3： g 有两个邻点。在这种情况下，从 G 中移除 g 会移除 O_i中的所有顶点，并将 I_i 中顶点的权重减 1。因此，

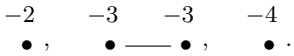
$$|V(\Gamma')| = |V(\Gamma)| - (|w(g)| - 3),$$

因此

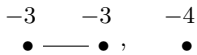
$$n_{G'} - k = n_G - k - (|w(g)| - 2).$$

现在我们移除 Supp(O_i) 中的 $|w(g)| - 2$ 基向量。由于 i 不受任何 v 阻碍，对偶图剩余部分唯一受到的影响是 I_i 中顶点的权重减小 1，这是因为它们在 Supp(O_i) 中的某个基向量上有一个分支。由此得到所需的图 Γ'。因此， G' 不满足性质 X_k。□

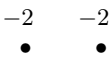
为了给浅顶点的数量求得一个上界，我们先推广 $C_{k'}$ 的构造。令 $D_{k'}$ 表示由 k' 个连通分支构成的构型集合，其中每个连通分支都是以下三者之一：



这两个构型



不满足性质 X_1，并且



不满足性质 X_2。通过组合相应的嵌入可知，$D_{k'}$ 中的任何构型都不满足性质 X_k。

由于 $D_{k'}$ 中的每个构型都满足定理 A 的条件 (3)，我们可以假设 $G \notin D_{k'}$。特别地，根据 S_k 的定义，图 G 不能将 $D_{k'}$ 中的任何构型作为诱导子图包含其中。

下面的引理给出了 G 中浅顶点数量的上界。

引理 6.6。 如果 $G \in S_k$ 和 G 不包含 $D_{k'}$ 作为诱导子图，那么 G 至多有 $6k' - 6$ 个浅顶点 s.

证明。 考虑以下过程：我们逐一将 G 中的每个浅顶点标记为“想要”“丢弃”或“剩余”。只要 G 中至少有一个权重为 -2 或 -4 且尚未被标记的顶点，我们就选取这样一个顶点，将其标记为“想要”，并将所有与之相邻的浅顶点标记为“丢弃”。在权重为 -2 或 -4 的所有顶点都被标记后，我们转而处理权重为 -3 的浅顶点。只要有一对权重为 -3 且均未被标记的相邻顶点，我们就将它们都标记为“想要”，并将与它们相邻的顶点标记为“丢弃”。我们持续这一过程，直到每一对权重为 -3 的相邻顶点中至少有一个已被标记。最后，我们将所有剩余未标记的浅顶点标记为“剩余”。

考虑由标记为“需要”的顶点所诱导的子图。由于 G 不包含 $D_{k'}$ 中的任何构型作为诱导子图，我们知道，标记为“需要”的、权重为 -2 或 -4的顶点，或权重为 -3的顶点对，至多有 $k' - 1$ 个。因此，标记为“需要”的顶点至多有 $2k' - 2$ 个。每当我们使用“需要”这一标记时，我们至多将两个顶点标记为“丢弃”。因此，标记为“丢弃”的顶点至多有 $2k' - 2$ 个。

对于一个浅顶点 v 要获得“剩余”标记，根据浅的定义以及标记过程的运作方式，我们知道 v 的权重必须为 -3 ，并且与某个权重为 -2 或-3的顶点 u 相邻，其中 u 被标记为“丢弃”。

由于标记为“丢弃”的顶点至多有 $2k' - 2$ 个，且每个标记为“丢弃”的顶点都必须与一个标记为“需要”的浅顶点相邻，我们得出结论：标记为“剩余”的顶点至多有 $2k' - 2$ 个。

总共至多有

$$(2k' - 2) + (2k' - 2) + (2k' - 2) = 6k' - 6$$

个浅顶点。 □

W现在我们可以通过计算剩余顶点来完成定理 A 的证明了 .

定理 A的证明。 根据引理 6.1、引理 6.2、引理 6.5和引理 6.6，接下来只需考察既非浅也非深的顶点数量。根据定义，顶点 v 若既非浅也非深，则必须满足以下条件之一：

(1) $|w(v)| \geq 5$ 且 v 与一个浅顶点相邻；(2) $w(v) = -3$ 且 v 与某个满足 $|w(u)| \geq 4$ 的顶点 u 相邻。

若一个顶点既非浅顶点也非深顶点，且满足（1），则称其为类型 1 顶点。若一个顶点既非浅顶点也非深顶点，且满足（2），则称其为类型 2 顶点。

考虑由浅顶点诱导的子图 $\mathrm{Shallow}_G$ G。假设我们按照引理 $G \in S_k$ 6.6，将 中的每个浅顶点标记为“想要”、“丢弃”或“剩余”。由于每个标记为“丢弃”的浅顶点必须与至少一个标记为“想要”的浅顶点相邻，而每个标记为“剩余”的浅顶点必须与至少一个标记为“丢弃”的浅顶点相邻，因此我们可以得出结论： $\mathrm{Shallow}_G$ 中的每个连通分支都至少包含一个标记为“想要”的浅顶点。因此，$\mathrm{Shallow}_G$ 至多有 $k'-1$ 个连通分支。因此，至多有 $2k'-2$ 个类型 1 顶点。

还需考虑类型 2 顶点。对于情形 (2)，由于 $|w(u)| \geq 4$，顶点 u 必须是浅顶点、深顶点或类型 1 顶点。考虑由浅顶点或类型 1 顶点诱导的 G 子图。沿用上述关于“想要”标记的类似论证，我们得出结论，该子图至多有 $k'-1$ 个连通分支。因此，在 u 是浅顶点或类型 1 顶点的情形下，至多有 $2k'-2$ 个类型 2 顶点。由于深顶点至多有 $k'-1$ 个，在 u 是深顶点的情形下，至多有 $2k'-2$ 个类型 2 顶点。因此，类型 2 顶点至多有 $4k'-4$ 个。

总的来说，至多有 $6k'-6$ 个既非深又非浅的顶点。结合引理6.5 和引理6.6，我们可以得出，总体而言至多有 $k'-1$ 个深顶点、 $6k'-6$ 个浅顶点，以及$6k'-6$ 个既非深又非浅的顶点。因此， $|V(G)| \leq 13k'-13$。定理A的证明至此完成。□

7. 辛填充与米尔诺纤维

在本节 中，我们证明推论1.5 和推论1.6。我们首先回顾第一个陈述。

推论 1.5。 设 $L = L(p,q)$ 为一个透镜空间，并令 $X(p,q)$ 表示相应的标准负定丛。假设每个光滑负定填充 X *of* L 都满足 $b_2(X) \geq b_2(X(p,q))-1$。若 ξ_{st} 是 L上的标准接触结构，则存在一个 W 的极小辛填充，使得 (L, ξ_{st}) 满足

$$b_2(W) = \min_X b_2(X),$$

其中，最小值是在所有光滑负定填充 X *of* L中取得的。

此外，除非 $L \in \{L(4,\ 1)\ L(8,\ 3)\ L(12,\ 5)\}$，否则每个这样的 W都是单连通的；在这种情况下，它的基本群为 $\mathbb{Z}/2$。

证明。令 $L\ = L(p,\ q)$为一个透镜空间。假设 L 的每个光滑负定填充 X 都满足 $b_2(X)\ \geq b_2(X(\ p,\ q))\ -1$。

如果每个光滑负定填充 X of L 都满足 $b_2(X) \geq b_2(X(p,q))$，则由以下事实可得结论：由典范解消得到的辛填充与 $X(p,q)$ [AMP25，推论 1.7] 微分同胚。因此，我们可以假设存在某个 X，使得 $b_2(X) = b_2(X(p,q)) - 1$。在这种情况下，根据我们在注 3.7 中的讨论，对偶管道图 Γ 至少有一个坏顶点。

在 [Lis08，定理 1。1], Lisca 提供了一种方法，用于构造具有标准接触结构的透镜空间的所有辛填充。我们采用 [Lis08] 的记号。给定一个透镜空间 L，考虑其连分数展开

$$\frac{p}{p-q} = [b_1, \ldots, b_k]^-,$$

其中 b_i 是满足 $b_i \geq 2$的整数。[7] 令

$$\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k)$$

为一个容许元组（精确定义见 [Lis08] ），满足

$$[n_1, \ldots, n_k]^- = 0 \qquad \text{and} \qquad b_i \geq n_i \quad \text{for } i = 1, \ldots, k. \tag{7.1}$$

注意，此条件意味着由 k 个连通分支组成的链所给出的手术图，其中第 i 个分支的框架系数为 n_i，描述的是 $S^1 \times S^2$，我们可以将其认作 $\partial(S^1 \times D^3)$。Lisca 证明，(L, ξ_{st}) 的每个辛填充都微分同胚于一个由 $S^1 \times D^3$ 沿其边界附加 -1 框架系数的 2-柄所得的 4 维流形，附加方式采用上述认同；其中，对某个满足 (7.1) 的容许元组 $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k)$，沿手术链环中第 i 个分支的子午线附加的 2-柄数量为 $b_i - n_i$。

[7] 这里我们沿用 Lisca 的记号，用 b_i 表示 Γ 的权重，用 n_i 表示容许元组的各项；注意， b_2 仍表示第二贝蒂数，而此处的 n_k 与上一节中的 n_k 无关。

设 Γ 为一个连通加权线性图，其顶点为 $v_1, \dots, v_k$，且对每个 i，v_i 的权重为 b_i。设 v_j 为坏顶点。根据坏顶点的定义，有 $1 < j < k$。如 [Lis08, §1], 中所述，典范负定配管对应于容许 k 元组 $(n_1, \dots, n_k) := (1, 2, \dots, 2, 1)$。考虑另一个按如下方式定义的容许 k 元组 $(n_1', \dots, n_k')$:

$$n_i' = \begin{cases} 1 \text{ if } i = j; \\ n_i + 1 \text{ if } |i-j| = 1; \\ n_i \text{ otherwise.} \end{cases}$$

根据坏顶点的定义，如果 $|i-j| = 1$，我们有 $w'(n_i) \geq 1$ 因此，对于所有 i，我们都有 $n_i' \leq b_i$。此外，对 n_j' 进行吹下会产生可容许的 $k-1$ 元组 $(1, 2, \dots, 2, 1)$。因此，我们有 $[n_1', \dots, n_k'] = 0$，进而可容许的 k 元组 $(n_1', \dots, n_k')$ 表示 L 的一个辛填充。令 W 为这个辛填充。

$(n_1', \dots, n_k')$ 中各项之和比 $(n_1, \dots, n_k)$ 中各项之和大一。因此，相应的辛填充所用的 2-柄比典范负定配管少一个，因此 $b_2(W) = b_2(X(p, q)) - 1$。这就证明了该推论的第一部分。

对于基本群的计算，首先注意，如果 $n_1' < b_1$ 或 $n_k' < b_k$，那么在构造 W 时，我们会沿平凡结链一端的平凡结附加至少一个 2–柄。这会消去 $\pi_1(S^1 \times S^2)$ 的生成元（例如参见 [AMP22，引理 3。1]），因此所得流形 W 是单连通的。

因此，若 W不是单连通的，则必有 $n_1' = b_1$ 且 $n_k' = b_k$。由于 b_1、$b_k \geq 2$ 和 $n_1 = n_k = 1$，可得 $b_1 = b_k = 2$ 和 $k = 3$。工作条件 VII 给出 $w'(v_2)$ 的三个可能取值，这三种可能分别对应情形 $L(4,1)$、$L(8, 3)$ 和 $L(12, 5)$。在这三种情形下，$S^1 \times S^2$ 由沿平凡结链进行手术来表示，其手术斜率依次为 2、1、2，并沿中间的平凡结附加一个 2-柄。由于第一个平凡结的框架为 2，中间平凡结的子午线表示 $S^1 \times S^2$基本群的一个生成元的两倍。因此，我们有 $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}/2$。

为完成证明，我们说明每个极小辛填充 W的(L, ξ_{st}) 满足 $b_2(W) = b_2\ X\ p\ q\ -1$ [08, 1 1 1] = ((,)) 都可由这一构造得到。如前所述，Lis定理 . ( ) 蕴含，每个极小辛填充都保向微分同胚于由满足（ k-元组$(n_1,\dots,n_k)$ （7.1）的流形构造而成。此外， [Lis08，引理 2.2] 表明，这样的 k-元组可由(0) 经过一系列爆破得到，且最左端没有进行爆破。

注意，每次在右端进行爆破，元组各项之和增加 2；而每次在非端点处进行爆破，该和增加 3。标准的 k-元组 $(1, 2, \dots, 2, 1)$ 只需在右端进行爆破即可得到。因此，任何满足 $b_2(W) = b_2(X(p, q)) - 1$ 的辛填充 W 都必对应于一个 k-元组，该元组恰好在非端点处进行一次爆破，其余爆破均在右端进行。从 (0) 出发，在右端进行一系列爆破，得到 $(1, 2, \dots, 2, 1)$。然后，在非端点处进行一次爆破，可得到以下之一

$$(2, 1, 3, 2, \dots, 2, 1), \quad (1, 2, \dots, 2, 3, 1, 3, 2, \dots, 2, 1), \quad \text{or} \quad (1, 2, \dots, 2, 3, 1, 2).$$

（此处，写作“2，……，2”的任意一条由 2 组成的链都可以为空。）随后在右端完成剩余的爆破，便得到一个形如上述定义的 k 元组（n_1'，……，n_k'）：内部爆破位置的邻点具有非零调整权重，因此与该内部爆破对应的唯一顶点必定是一个坏顶点。证明完毕。□

现在我们来证明推论 1.6，下面先回顾其陈述。

推论 1.6。设 $L = L(p, q)$ 是满足定理 B中某一项条件的透镜空间，并令 ξ_{st} 表示 L上的标准接触结构。设 $n(L)$ 为与 L 相关的典范管道图中，与下列某一种构型同构的诱导子图数量：



那么，L, ξ_{st} 的极小辛填充在保定向微分同胚意义下的数量要么是 nL，要么是 nL。此外，当且仅当 $q^2 \equiv 1$ （模 p）且与 L 相关联的典范管道图包含以下某个图作为诱导子图时，该数量为 nL:



此外，对于与 L 对应的循环商奇点的约化极小万有基空间的不可约分支所产生的米尔诺纤维数量，也有类似的结论。

证明。设 $L = L(p, q)$ 是定理 B中的透镜空间，并设 $X(p, q)$ 表示其典范负定配管。则每个光滑负定填充 X L 都满足 $b_2(X) \geq b_2(X(p, q)) - 1$。此外，由于每个坏顶点都对应于一个同构于下列某个图的诱导子图，



因此， $n(L)$ 正好是 Γ 中坏顶点的数量。

如推论1.5的证明中所述，如果每个光滑负定填充 X L 都满足 $b_2(X) \geq b_2(X(p, q))$，那么 L配备标准接触结构后，存在唯一的极小辛填充。在此情况下，我们有 $n(L) + 1 = 1$，且与 L 相关的典范管道图不包含



作为诱导子图，由 [AMP25，定理 11]。因此，我们可以假设存在一个填充 X，其满足 $b_2(X) = b_2(X(p, q)) - 1$，此时其对偶管道图 Γ 至少有一个坏顶点。

由推论 1.5 的证明可知，在保定向微分同胚意义下，极小辛填充至多有 $1 + n(L)$ 个，其中额外的 1 来自标准的 (1, 2, . . . , 2, 1) 元组。根据 Lisca [Lis08, Theorem 1.1(3)], 的分类，除非我们处于 $q = q$ and n =n 的情形，否则极小辛填充的数量等于 $1 + n(L)$，其中 q 定义为 q 模 p 的乘法逆元，而 n 定义为将 n 的元素顺序反转所得的数。

情形 $q = q$ 等价于 $q^2 \equiv 1 \pmod{p}$。由于 $L(p, q)$ 的典范管道图是通过反射 $L(p, q)$ 的典范管道图得到的（例如参见 [HNK71]），因此 $L(p, q)$ 的典范管道图是对称的，进而 Γ 也是对称的。检查引理 3.8 的证明中“若有多个坏顶点”这一情形下的五种构型中哪些是对称的，即可得到所需结论。关于米尔诺纤维的结论则由 [NPP10] 的一一对应关系得出。□

参考文献

[Ace20] Paolo Aceto。管道流形的有理同调协边。《代数与几何拓扑》，20(3):1073–1126，2020。1[AMP22] Paolo Aceto、Duncan McCoy 和 JungHwan Park。透镜空间的非单连通辛填充。《伦敦数学学会通报》，54 3 1010 1026, 2022 7, 30 ( ): – 。AMP Paolo Aceto、Duncan McCoy 和 JungHwan Park。透镜空间的定号填充。《微分几何杂志》，131(1):1–41, 2025 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 18, 19, 25, 26, 29, 31, 32 。CP Dong Heon Choe 和 Kyungbae Park。关于以有理同调 3 238 59 75, 2018 1 -球为边界的定号 4-流形的交叉形式。《拓扑学及其应用》，: – 。CP Dong Heon Choe 和 Kyungbae Park。以有理同调球为边界的球面 3-流形。《密歇根数学杂志》，70 2 227 261, 2021 1 ( ): – 。Don Simon K. Donaldson。杨–米尔斯模空间的定向与 4-流形拓扑。《微分几何杂志》，26 3 397 428, 1987 1 ( ): – 。Etn John B. Etnyre。平面开书分解与接触结构。Int. Math. Res. Not., (79 4267, 2004 4255 4): – 。[Frø95] Kim A. Frøyshov。关于 Floer 同调与具有边界的四维流形。1995。博士论文–牛津大学。1 2 4 *2307 03950*, 2023 1 Frø Kim A. Frøyshov。模瞬子同调与具有边界的 -流形。预印本 arXiv: . 。GAP GAP 组。GAP——群、算法与编程，版本 . . 。*4 11 1*, 2021 13, 32 *2* 177 2 449 511, 2013 Gre Joshua E. Greene。透镜空间实现问题。7 《数学年刊》( )，( ): – 。4 20 GS Robert E. Gompf 和 András I. Stipsicz。-流形与 Kirby 演算，数学研究生教材第 卷。美国数学会，普罗维登斯，RI，1999 19 。GS Marco Golla 和 Christopher Scaduto。关于由切片亏格至多为 2 372 11 7805 7829, 2019 1 的纽结的整数手术所界定的定号格。《美国数学会会刊》，( ): – 。HNK Friedrich Hirzebruch、Walter D. Neumann 和 Sebastian S. Koh。可微流形与二次型，纯粹与应用数学讲义第 4 卷。Marcel Dekker 公司，纽约，1971。附录 II 作者为 W. Scharlau。31 Lis a Paolo Lisca。透镜空间、有理球与带状猜想。《几何与拓扑》，11 429 472, 2007 1, 6, 7 : – 。Lis b Paolo Lisca。以有理球为边界的透镜空间的和。《代数与几何拓扑》，: – 。7 2141 2164, 2007 1, 6, 7 360 2 765 799, 2008 Lis Paolo Lisca。关于透镜空间的辛填充。《美国数学会会刊》，( ): – 。4, 19, 29, 30, 31 NPP András Némethi 和 Patrick Popescu-Pampu。关于循环商奇点的 Milnor 纤维。《伦敦数学会会刊》(*3* 101 2 554 588, 2010 4, 31)，( ): – 。OS Brendan Owens 和 Sašo Strle。 $\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}(\delta)$格及定号非幺模交形式的刻画。《美国数学杂志》，134 4 891 913, 2012 1 ( ): – 。OS Brendan Owens 和 Frank Swenton。一种求交替纽结带状圆盘的算法。《实验数学》，33(3):437–455，2024。2

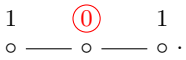
[07] 0710 2531, 2007 7 Ras Jacob Rasmussen。透镜空间手术与 L-空
[24] 3
间同调球。arXiv: . . Sca Christopher Scaduto。关于以同调 -球为边界的定号格与杨–米尔斯瞬子 Floer 理论。《几何与拓扑》，
28 4 1587 1628, 2024 1 ( ): – 。Sch Stephan Schönenberger。根据平面开书确定辛填充。*J. Symplectic Geom.*，5 41，2007 1
[07]
194( ): – 。[SSW08] András I. Stipsicz、Zoltán Szabó 和 Jonathan Wahl。有理吹降与曲面奇点的光滑化。*J. Topol.*，
1 2 477 517, 2008 19 ( ): – 。Sta Laura Starkston。Seifert 纤维化空间的辛填充。《美国数学会会刊》，367(8):5971–6016，2015。
[15]

附录 A. 计算机数据

与 [AMP25], 类似，我们使用 `OrthogonalEmbeddings`命令在 GAP 中定义函数`ListEmbeddings`，用于找出 $\mathbb{Z}^n$ [GAP21]在自同构意义下的所有可能嵌入。不过，与 [AMP25], 不同，我们需要检查的情形多得多。手动找出所有嵌入不仅要花费大量时间，即使 GAP 代码列出所有可能的嵌入后，再手动检查每个嵌入中的扩展坏部分是否为标准或半标准，也仍然十分繁琐。因此，我们修改了 `ListEmbeddings`函数（来自 [AMP25]），使其能够自动判断扩展坏部分是标准、半标准还是两者皆非。为进一步简化任务，我们定义了函数`AllConfig`：给定工作条件 VII下的一个坏部分配置、图在左侧的扩展方式描述以及图在右侧的扩展方式描述，该函数会找出扩展坏部分的所有可能构型，并一次性将它们全部输入 `ListEmbeddings` 。

定义这些函数的代码可在https://sites.google.com/view/antony-fung/ codes中找到。

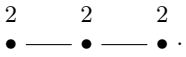
情况 1：当坏部分为



我们考察图如何向右侧延伸。我们将第一个向右延伸的顶点记为 r_1，第二个顶点记为 r_2，依此类推。在本附录中，我们将一直默认使用工作条件II。因此，阅读以下论证时，请牢记工作条件II 。

延伸图时，一旦它包含扩展坏部分的末端，我们便可以停止；但也可以继续延伸，以进一步限制嵌入的可能性。

若 r_1 不存在，则有



若 r_1 存在，根据工作条件VI(f)(g)， $w'(r_1) = 0$ 或1。

若 $w'(r_1) = 0$，由于调整权重为零的顶点不能是叶节点，因此存在 r_2 。由于 r_1 并非坏的， $w'(r_2) = 0$, 所以我们有 r_3。根据工作条件 VI(a)(b)， $w'(r_3) = 0$ 或 1。因此， $w(r_3) = 2$ 或 $w(r_3) = 3$；若 $w(r_3) = 3$, 则必须存在 w。根据工作条件 VI(e)， $w'(r_4) \leq 2$。因此，$w(r_4) = 2$，或 $w(r_4) = 3$，或 $w(r_4) = 4$ 且存在 r_5 。若 $w(r_4) = 4$ 且存在 r_5 ，那么由于 r_4 并非坏的，$w(r_5) = 2$。

回到 $w'(r_1)$。若 $w'(r_1) = 1$ 且不存在 r_2，则 $w(r_1) = 2$。若 $w'(r_1) = 1$ 且存在 r_2 ，则 $w(r_1) = 3$; 由于 r_1 并非坏的，我们必须有 $w'(r_2) = 0$。因此，与之前类似，我们有 $w(r_2) = w(r_3) = 2$ 且存在 r_4 。根据工作条件 VI(a)(b)， $w'(r_4) = 0$ 或 1。因此， $w(r_4) = 2$，或 $w(r_4) = 3$ 且存在 r_5 。若 $w(r_4) = 3$ 且存在 r_5 , 根据工作条件 IV 和 VI(d)， $w'(r_5) = 0$ 或 1。因此， $w(r_5) = 2$，或 $w(r_5) = 3$ 且存在 r_6 。若 $w(r_5) = 3$ 且存在 r_6 ，由于 r_5 并非坏的，我们必须有 $w'(r_6) = 0$。总之，这些扩展在右侧的权重为

$$222,\ 2232,\ 2233,\ 22342,\ 2,\ 3222,\ 32232,\ 322332.$$

类似地，这些扩展在左侧的权重为

$$222,\ 2322,\ 3322,\ 24322,\ 2,\ 2223,\ 23223,\ 233223.$$

我们首先运行 https://sites.google.com/view/antony-fung/codes 中的代码来定义函数 `AllConfig`。然后，运行以下命令。

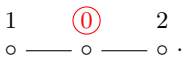
```
AllConfig([2,2,2],[2],[[2,2,2],[2,3,2,2],[3,3,2,2],[2,4,3,2,2],[2],[2,2,2,3],
[2,3,2,2,3],[2,3,3,2,2,3]],[[2,2,2],[2,2,3,2],[2,2,3,3],[2,2,3,4,2],[2],[3,2,2,
2],[3,2,2,3,2],[3,2,2,3,3,2]],false);
```

如果没有扩展，函数的第一个参数是坏部分的权重。第二个参数记录坏顶点的位置。在此例中，坏顶点位于第二个位置（注意，GAP 数组索引从 1 开始，而不是 0）。第三和第四个参数分别是左扩展和右扩展。对于第五个条目，将其改为“true”即可显式显示嵌入。

输出为
嵌入总数：386；在扩展坏部分中为标准的嵌入总数：203；在扩展坏部分中为半标准的嵌入总数：183；既不属于扩展坏部分的嵌入总数：0。

这证实了，在所有这些嵌入中，扩展坏部分均为标准地或半标准地嵌入。

情形 2： 当坏部分为



类似于我们将右扩展顶点记为 r_1，r_2，.. ..，我们将左扩展顶点记为 l_1，l_2，.....。

根据工作条件 II 和 VI(h)，如果 l_1 存在，则必有 $w'(l_1)=0$。由于 l_1 不是坏的，且调整权重为零的顶点不可能是叶节点，因此可推出 l_2 存在且 $w'(l_2)=0$，从而 l_3 存在。根据工作条件 II，$w(l_3)=2$ 或 3。如果 $w(l_3)=3$，则 $w'(l_3)=1$ 且 l_4 存在。根据工作条件 II，$w(l_4)=2$ 或 3。如果 $w(l_4)=3$，则 $w'(l_4)=1$ 且 l_5 存在。由于 l_4 不是坏的，必有 $w'(l_5)=0$，从而 $w(l_5)=2$。因此，我们输入左扩展 222、2322、23322。

根据工作条件 II，若 r_1 存在，则 $w'(r_1)=0$ 或 1。

若 $w'(r_1)=0$，那么如前所述，我们有 $w'(r_2)=0$，且 r_3 存在。根据工作条件 II 和 VI(a)，我们有 $w'(r_3)=0$。因此，r_4 存在。根据工作条件 II，$w(r_4)=2$ 或 3。因此我们得到 2222 、 2223。

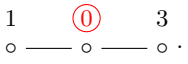
如果 $w'(r_1)=1$，则要么 $w(r_1)=2$，且 r_2 不存在；要么 $w(r_1)=3$，且 r_2 存在。在后一种情况下，由于 r_1 并不糟糕，我们有 $w'(r_2)=0$。如前所述，随后有 $w'(r_3)=0$。根据工作条件 II，$w(r_4)=2$ 或 3；如果 $w(r_4)=3$，则 r_5 存在。根据工作条件 VI(d)，$w'(r_5)=0$；由于 r_5 并不糟糕，我们必须有 $w'(r_6)=0$。因此，我们得到 2、3222、322322。

我们运行以下命令。

```
AllConfig([2,2,3],[2],[[2,2,2],[2,3,2,2],[2,3,3,2,2]],[[2,2,2,2],[2,2,2,3],
[2],[3,2,2,2],[3,2,2,3,2,2]],false);
```

输出为
嵌入总数：84 扩展坏部分中属于标准嵌入的总数：48 扩展坏部分中属于半标准嵌入的总数：36 不属于扩展坏部分的嵌入总数：0。

情况 3： 当坏部分为



根据工作条件 IV，若 l_1 存在，则必有 $w'(l_1)=0$。与之前一样，在这种情况下，$w'(l_2)=0$ 且 l_3 存在。根据工作条件 II，$w'(l_3)=0$ 或 1。因此，要么 $w(l_3)=2$，要么 $w(l_3)=3$ 且 l_4 存在。根据工作条件 IV，若 l_4 存在，则 $w'(l_4)=0$。由于 l_4 不是坏的，在这种情况下我们有 $w'(l_5)=0$。因此，我们将 222 和 22322 作为左扩展输入。

若 r_1 存在且 $w'(r_1)=0$，那么由于 r_1 并不坏，而且根据工作条件 VI(b)(c)，我们有 $w'(r_2)=w'(r_3)=w'(r_4)=0$。于是 r_5 存在，且 $w(r_5)=2$ 或 3。因此，我们有 22222、22223。

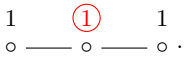
若 r_1 存在且 $w'(r_1)=1$，那么要么 $w(r_1)=2$，要么 $w(r_1)=3$ 且 r_2 存在。在后一种情况下，由于 r_1 并不坏，我们有 $w'(r_2)=0$。由于 r_2 并不坏，我们有 $w'(r_3)=0$。根据工作条件 VI(e)，我们有 $w'(r_4)=0$。同时考虑 r_5，可得 2 、 32222 、 32223。

我们运行以下命令。

```
AllConfig([2,2,4],[2],[[2,2,2],[2,2,3,2,2]],[[2,2,2,2,2],[2,2,2,2,3],[2],[3,2,2,2,2],[3,2,2,2,3]],
false);
```

输出为
嵌入总数：64
扩展坏部分中标准嵌入的总数：32 扩展坏部分中半标准嵌入的总数：32 不在扩展坏部分中的嵌入总数：0。

情形 4： 当坏部分为



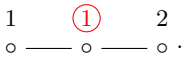
由于只有中间的“1”是坏的，如果存在 r_1，则必有 $w'(r_1) = w'(r_2) = 0$。根据工作条件 III，我们有 $w'(r_3) \leq 1$。因此，要么 $w(r_3) = 2$，要么 $w(r_3) = 3$ 且 r_4 存在。同理，如果存在 $w(r_4)$，则要么 $w(r_4) = 2$，要么 $w(r_4) = 3$ 且 r_5 存在。如果 $w(r_3) = w(r_4) = 3$，那么由于 r_4、r_5 不是坏的，我们有$w' r_5 = w' r_6 = 0$ 222, 2232, 223322 222, 2322, ( ) ( ) 。因此，我们将其作为右扩展输入。同理，我们将其作为左扩展输入。

我们运行以下命令。

```
AllConfig([2,3,2],[2],[[2,2,2],[2,3,2,2],[2,2,3,3,2,2]],[[2,2,2],[2,2,3,2],[2,2,3,3,2,2]],false);
```

输出为
嵌入总数：50 扩展坏部分中的标准嵌入总数：25 扩展坏部分中的半标准嵌入总数：25 不属于扩展坏部分的嵌入总数：0。

情形5： 当坏部分为



由于只有中间的“1”是坏的，若 r_1 存在，则必有 $w'(r_1) = w'(r_2) = 0$。根据工作条件VI(a)， $w'(r_3) = 0$。因此，考虑 r_4、r_5、r_6 以及 r_5 （若存在）不能是坏的这一事实，我们输入右扩展 2222、22232、222332。

左侧与情形 4 相同。
我们运行以下命令。

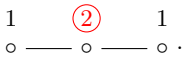
```
AllConfig([2,3,3],[2],[[2,2,2],[2,3,2,2],[2,2,3,3,2,2]],[[2,2,2,2],[2,2,2,3,2],[2,2,2,3,3,2]],
```

false);

输出为
嵌入总数：60 扩展坏部分中属于标准嵌入的总数：30 扩展坏部分中属于半标准嵌入的总数：3 既不属于扩展坏部分的嵌入总数：0。

0

情况 6： 当坏部分为



由于只有中间的“1”是不好的，如果存在 r_1，则必有 $w'(r_1) = w'(r_2) = 0$。根据工作条件 II，我们有 $w(r_3) = 2$ 或 3；如果 $w(r_3) = 3$，则 r_4 存在。在后一种情况下，根据工作条件 V，我们有 $w'(r_4) = 0$。由于 r_4 并不坏，因此有 $w'(r_5) = 0$。因此，我们将 222、22322 作为右扩展输入。左扩展同理。

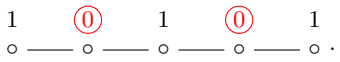
我们运行以下命令。

```
AllConfig([2,4,2],[2],[[2,2,2],[2,2,3,2,2]],[[2,2,2],[2,2,3,2,2]],false);
```

输出为
嵌入总数：32 扩展坏部分中属于标准的嵌入总数：16 扩展坏部分中属于半标准的嵌入总数：16

既不属于扩展坏部分的嵌入总数：0。

情形7： 当坏部分为

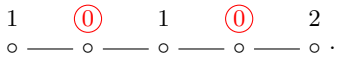


左侧和右侧与情况 1 相同。因此，我们只更改函数的前两个参数。运行以下命令。

```
AllConfig([2,2,3,2,2],[2,4],[[2,2,2],[2,3,2,2],[3,3,2,2],[2,4,3,2,2],[2],[2,
2,2,3],[2,3,2,2,3],[2,3,3,2,2,3]],[[2,2,2],[2,2,3,2],[2,2,3,3],[2,2,3,4,2],[2],
[3,2,2,2],[3,2,2,3,2],[3,2,2,3,3,2]],false);
```

输出为
嵌入总数：589
扩展坏部分中标准嵌入的总数：203
扩展坏部分中半标准嵌入的总数：386 扩展坏部分之外的嵌入总数：0。

情形 8： 当坏部分为



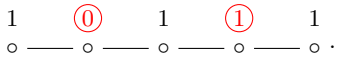
左侧与情况 1 相同，但由于工作条件，我们可以删去 24322II，并且可以将 3322 替换为 23322，因为根据工作条件 II，如果 $w(l_4) = 3$，那么它就不能是叶节点；而且由于 l_4 不是坏的，因此有 $w'(l_5) = 0$。

右侧与情况 2 相同
我们运行以下命令。

```
AllConfig([2,2,3,2,2,3],[2,4],[[2,2,2],[2,3,2,2],[2,3,3,2,2],[2],[2,2,2,3],[2,3,
2,2,3],[2,3,3,2,2,3]],[[2,2,2,2],[2,2,2,3],[2],[3,2,2,2],[3,2,2,3,2,2]],false);
```

输出为
嵌入总数：264
扩展坏部分中的标准嵌入总数：96
扩展坏部分中的半标准嵌入总数：1 68
不属于扩展坏部分的嵌入总数：0。

情形 9： 当坏部分为



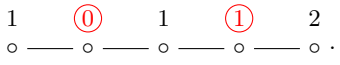
对于左侧，我们采用与情形 8 相同的论证，但使用工作条件 III，而非工作条件 II。

右侧与情形 4 相同。
我们运行以下命令。

```
AllConfig([2,2,3,3,2],[2,4],[[2,2,2],[2,3,2,2],[2,3,3,2,2],[2],[2,2,2,3],[2,3,
2,2,3],[2,3,3,2,2,3]],[[2,2,2],[2,2,3,2],[2,2,3,3,2,2]],false);
```

输出为
嵌入总数：160 扩展坏部分中属于标准的嵌入总数：50 扩展坏部分中属于半标准的嵌入总数：
110 既不在扩展坏部分中的嵌入总数：0。

情形10： 当坏部分为



对于左侧，如果 l_1 存在，根据工作条件 VI(i)，我们有 $w'(l_1) = 0$。由于 l_1 并不坏，我们有 $w'(l_2) = 0$。通过考虑 l_3、l_4、l_5 以及 l_4（如果存在）不可能是坏的这一事实，我们输入左扩展222、2322、23322。

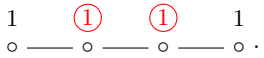
右侧与情形5相同 .
我们运行以下命令 .

AllConfig([2,2,3,3,3],[2,4],[[2,2,2],[2,3,2,2],[2,3,3,2,2]],[[2,2,2,2],[2,2, 2, 3,2],[2,2,2,3,3,2]],false);

输出为

嵌入总数：108
扩展坏部分中标准嵌入的总数：36 扩展坏部分中半标准嵌入的总数：72 不属于扩展坏部分的嵌入总数：0。

案例 11： 当坏部分为



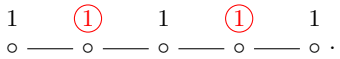
左侧和右侧都与情形 4 相同。
我们运行以下命令。

AllConfig([2,3,3,2],[2,3],[[2,2,2],[2,3,2,2],[2,2,3,3,2,2]],[[2,2,2],[2,2,3,2],[2,2,3,3,2,2]], false);

输出为

嵌入总数：75 扩展坏部分中标准嵌入总数：25 扩展坏部分中半标准嵌入总数：50 不属于扩展坏部分的嵌入总数：0。

情况 12： 当坏部分为



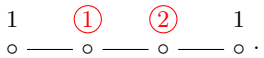
左侧和右侧都与情形 4 相同。
我们运行以下命令。

AllConfig([2,3,3,3,2],[2,3,4],[[2,2,2],[2,3,2,2],[2,2,3,3,2,2]],[[2,2,2],[2,2,3,2],[2,2,3,3,2,2]], 否);

输出为

嵌入总数：1 扩展坏部分中标准嵌00的总数：25 扩展坏部分中半标准嵌入的总数：75 既不在扩展坏部分中的嵌入总数：0。

情形 13： 当坏部分为



对于左侧，与情形 4 相同，我们得到 222、2322、223322。然而，在 2322 的情况下，根据工作条件 V，我们知道 l_4 不可能是叶节点。由于 l_4 不是坏的，我们也有 $w'(l_5) = 0$ 。此外，根据工作条件 V，我们可以排除 223322 的情况。因此，我们将 222、22322 作为左扩展输入。
右侧与情况 6 相同。
我们运行以下命令 .

AllConfig([2,3,4,2],[2,3],[[2,2,2],[2,2,3,2,2]],[[2,2,2],[2,2,3,2,2]],false);

输出为

嵌入总数：48
扩展坏部分中的标准嵌入总数：16
扩展坏部分中的半标准嵌入总数：32
既不属于扩展坏部分的嵌入总数：0。

韩国科学技术院电子邮件地址：antonyfung@kaist.ac.kr 韩国科学技术院电子邮件地址：jungpark0817@kaist.ac.kr