余诺特空间

Li Xiangrui、Li Qingguo*

中国湖南省长沙市湖南大学数学学院，邮编 *410082*

arXiv:2601.11112v1 [math.GN] 16 Jan 2026

摘要

在非豪斯多夫拓扑中，许多空间具有重要的分离性质，例如饱和空间、良滤空间和 d-空间。这些性质从根本上用于对拓扑空间进行分类。本文引入并研究一类称为余诺特空间的新型拓扑空间，它们能够细化对 T_0 空间的分类。我们讨论余诺特空间的一些基本性质，并在强拓扑下得到紧性的一个等价刻画。此外，我们探讨 KC-空间、强 R-空间与余诺特空间之间的联系。我们还建立了具有连续映射的 T_0 余诺特空间范畴与偏序集范畴的一个子范畴之间的等价关系。最后，我们给出反例，说明 T_0 空间的 Hoare 幂空间可能不是余诺特空间，而余诺特空间的 Smyth 幂空间也未必是余诺特空间。

关键词：诺特空间、KC-空间、强 R-空间、强拓扑、补丁拓扑。*2000* 年 *MSC*：54D10, 54B20, 06B35, 06F30。

1. 引言

在一般拓扑学中，人们广泛研究了众多分离公理，尤其关注豪斯多夫空间的性质。近年来，域理论和非豪斯多夫拓扑空间日益受到研究者关注，研究重点包括朴素性、良滤性、d-空间（也称为单调收敛空间），以及介于 T_0 和 T_2之间的若干其他分离公理。

朴素性是非豪斯多夫拓扑空间最重要且最有用的性质之一。它已被用于刻画交换环的谱空间，以及由其开集格所决定的空间，参见 [10]。随着域理论的发展，通过对朴素性的研究，出现了若干重要的空间类，例如良滤空间和 d-空间（参见 [1, 4, 5]）。为了更好地刻画介于 T_2和 T_0 之间的空间，[32]，中引入了强 d-空间的概念，[28]，中引入了 R 空间的概念，[29]，中引入了强良滤空间的概念，以及 [31] 中引入了强 R-空间的概念。人们已对这些空间开展了广泛研究。关于 T_0 空间的 d-完备化、良滤化和饱和化的研究见于 [12, 14, 19, 33]。关于 d-空间、良滤

*通讯作者。电子邮箱：17731912783@163.com (Li Xiangrui), liqingguoli@aliyun.com (Li Qingguo)

空间和饱和空间的某些超空间等方面的讨论，可见于 [7, 8, 9, 20, 31]。 [15, 16, 18, 23, 29] 中研究了 d-空间、良滤空间和饱和空间等之间的关系。

在研究上述空间时，人们对紧致饱和集给予了相当多的关注，其相关研究至今仍在拓扑学中活跃开展。例如，紧致饱和集是补丁拓扑和 Smyth 幂空间定义中的关键组成部分（见 [4, 5, 13]）。此外，诺特空间是另一类重要的拓扑空间，与紧致饱和集密切相关。诺特性这一概念源自诺特环，在诺特环中，每个理想都是有限生成的（见 [21]）。这一升链条件在代数、拓扑和格论中均有应用（见 [3, 6, 21]）。在拓扑学中，由此引出了诺特空间的定义：其开集格满足升链条件的空间（见 [6]）。

事实上，对于诺特空间，每个开集都可以视为开集格中的一个紧元。然而，基于对偶性，关于闭集格中紧元的研究仍相当有限。因此，本文引入一类称为余诺特空间的新型拓扑空间，其中所有闭集都是闭集格中的紧元。引入这类空间有助于对 T_0 空间进行更精细的分类。我们讨论余诺特空间的一些基本性质，并得到强拓扑下紧性的一个等价刻画。此外，我们研究 KC-空间、强 R- 空间与余诺特空间之间的联系。我们还证明，具有连续映射的 T_0 余诺特空间范畴与偏序集范畴的一个子范畴等价。最后，我们给出反例，说明一个T_0 空间的 Hoare 幂空间可能不是余诺特的，而余诺特空间的 Smyth 幂空间也未必是余诺特的。

2. 预备知识

本节简要回顾本文将要用到的一些基本概念和记号。

设 P 是一个偏序集。若非空子集 D 满足其中任意两点在 D 中都有一个上界，则称 D 为有向的。我们用 $D \subseteq^{\uparrow} P$ 表示 D 是 P 的一个 $directed\ subset$ 。类似地，我们用 $F \subseteq_{fin} P$ 表示 F 是 P 的一个有限子集。对于任意子集 $A \subseteq P$，令 $\uparrow A = \{x \in P: x \geq a\ for\ some\ a \in A\}$ 和 $\downarrow A = \{x \in P: x \leq a\ for\ some\ a \in A\}$。具体而言，我们写作 $\uparrow x = \uparrow \{x\}$ 和 $\downarrow x = \{x\}$。若 $A = \uparrow A$ （分别地，$A = \downarrow A$），则称 $A \subseteq P$ 为上集（分别地，下集）。若对于某个 $x \in P$，有 $I = \downarrow x$，则称下集 I 为 $principal\ ideal$。

若对任意 $D \subseteq^{\uparrow} P$， $\bigvee D$ 存在，则称偏序集 P为有向完备偏序集（简称有向完备偏序集）。若对于每一对 $x, y \in P$，下确界 $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ 存在（相应地，上确界 $\sup\{x, y\} = x \vee y$ 存在），则称偏序集 P为半格（相应地，上确界半格）。若对于 P的每个（相应地，每个非空）子集 A，上确界 $\sup A = \bigvee A$ 存在，则称偏序集为完备格（相应地，上确界完备偏序集）。

设 P为偏序集，且 $x, y \in P$。如果对于所有满足 $\bigvee D$ 存在的有向子集 $D \subseteq L$，关系 $y \leqslant \bigvee D$ 总是蕴含存在某个 $d \in D$ 使得 $x \leqslant d$，则称 x 远小于 y，记作 $x \ll y$。特别地，如果 $x \ll x$，则称 x 为紧元。

对于每个 $x \in P$，我们用 $\dot{\downarrow} x$ 表示所有远低于 x的元素组成的集合。有向完备偏序集 P 称为连续有向完备偏序集 （简称域），如果它满足 $axiom\ \ approximation$:

$$(\forall x \in P) x = \bigvee^{\uparrow} \downarrow x,$$

也就是说，对于所有 $x \in L$，集合 $\downarrow x = \{u \in L \mid u \ll x\}$ 是有向的，并且 $x = \bigvee\{u \in L \mid u \ll x\}$。

如果一个偏序集满足升链条件：每条升链都有最大元，则称其为诺特偏序集。对于诺特偏序集，我们有如下结论。这意味着所有诺特偏序集都是有向完备偏序集。

注 2.1. 对于偏序集 P，以下条件等价：

(1) P 是诺特的。

(2) P 是有向完备偏序集，且 P 的所有元素都是紧致的。

参见 [4], ，偏序集 P上存在一些拓扑。偏序集 P 上的上拓扑由 $\{\downarrow x$的补集生成：$x \in P\}$，记作 $\upsilon(P)$。如果 U是 P的子集，且 $U = \uparrow U$，对于满足 $\bigvee D$ 存在的任意有向集 D，$\bigvee D \in U$蕴含 $D \cap U \neq \emptyset$，则称 U为斯科特开集。P 的所有斯科特开集构成 P上的Scott拓扑，记作 $\sigma(P)$。P 的所有上集构成 P 上的亚历山德罗夫拓扑，记作 $\alpha(P)$。

对于一个拓扑空间（X，τ），若子集 $A$of P满足 $A = \bigcap\{U \in \tau: A \subseteq U\}$，则称其为饱和集。若非空子集 $C$of X 满足：对于任意闭集 C_1，C_2，$C \subseteq C_1 \cup C_2$ impliesC $\subseteq C_1$ or $C \subseteq C_2$，则称其为 $irreducible$。对于子集 $A \subseteq X$，我们用 $cl(A)$ 表示 A的闭包。具体而言，对于任意 $x \in X$，$cl(x) = cl(\{x\})$。注意，当且仅当 $cl(A)$ 不可约时，A 不可约。

对于一个 T_0空间（X，τ），偏序 $\leq_\tau$定义为：当且仅当 $x \in cl(y)$ 时，$x \leq_\tau y$。以下若无另行说明，对于一个 T_0空间（X，τ），序均指特化序。以下我们用 $\leq$ 表示特化序 $\leq_\tau$。

本文中，对于拓扑空间（X，τ），记号如下：
（1）$\mathcal{S}$（X，τ），所有饱和集的集合；（2）$\mathcal{Q}$（X，τ），所有紧致饱和集的集合；（3）$\mathcal{D}$（X，τ），（X，$\leq_\tau$）的所有有向集的集合；（4）Γ（X，τ），所有闭集的集合；（5）Irr_c（X，τ），所有不可约闭集的集合。

当拓扑 τ 明确时，我们将其省略以简化记号。这意味着，对于 $\mathcal{S}$（X，τ），我们记作 $\mathcal{S}$（X）；对于 $\mathcal{Q}$（X，τ），记作 $\mathcal{Q}$（X）。

若一个 T_0空间（X，τ）满足（X，$\leq$）是有向完备偏序集且 $\tau \subseteq \sigma$（X，$\leq$），则称其为 *d*-空间 。

以下结果是众所周知的。

命题2.2。 设 X 是一个 *d*-空间，C 是一个非空闭集。则关于特化序，$A = \downarrow max$（A）。

命题2.3。 [18] 对于一个 T_0空间 (X, τ)，以下条件等价：

(1) X 是一个 d-空间。(2) 对任意 $D \in \mathcal{D}$和 $U \in \tau$, $\bigcap\{\uparrow d$： $d \in D\} \subseteq U$蕴含 $\uparrow d \subseteq U$。(3) 对任意滤过族 $\{\uparrow F_i$： $F_i \subseteq_{fin} X$，$i \in I\}$ 以及任意 $U \in \tau$, $\bigcap\{\uparrow F_i$： $i \in I\} \subseteq U$蕴含 $\uparrow F_i \subseteq U$ 存在某个 $i \in I$。

定义 2.4。 [26] 设 $(X,\ \tau)$ 是一个 T_0 空间。

(1) 对于任意 $U,\ V \in \tau$，我们定义： $U \ll V$当且仅当 V的每个开覆盖都有一个覆盖 U的有限子族。

(2) $(X,\ \tau)$ 称为 核紧 ，如果对于每个 $U \in \tau$，都有

$$U = \bigcup\{V \in \tau : V \ll U\}.$$

(3) 子族 $\mathcal{F} \subseteq \tau$称为 $\ll$-滤过族 ，如果对于任意 $U_1,\ U_2 \in \mathcal{F}$，都存在 $U_3 \in \mathcal{F}$，使得 $U_3 \ll U_1$ 且 $U_3 \ll U_2$。

(4) $(X,\ \tau)$ 称为 开良滤 ，如果对于每个 $\ll$-滤过族 $\mathcal{F} \subseteq \tau$和 $U \in \tau$，

$$\bigcap \mathcal{F} \subseteq U \ \Rightarrow\ V \subseteq U \ for\ some\ V \in \mathcal{F}.$$

定义 2.5。 ([2, 5, 29, 31, 32]) 设 $(X,\ \tau)$ 是一个 T_0 空间，则

(1) (X,τ) 是一个 c-空间，如果对于每个 $x \in X$ 和 $U \in N^o(x)$，存在一个 $y \in U$，使得 $x \in int(\uparrow y)$。 (2) (X,τ) 是饱和的，如果 X 的每个不可约闭子集都是某个唯一点的闭包。 (3) (X,τ) 是良滤的，如果对于每个滤过族 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Q}(X)$， $U \in \tau$, $\bigcap \mathcal{C} \subseteq U$ 蕴含对于某个 $K \in \mathcal{C}$ 有 $K \subseteq U$ 。 (4) (X,τ) 是强良滤的，如果对于每个滤过族 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{Q}(X)$， $K_0 \in \mathcal{Q}(X)$ 且 $U \in \tau$,$K_0 \cap \bigcap \mathcal{K} \subseteq U$ 蕴含对于某个 $K_0 \cap K \subseteq U$ 有 $K \in \mathcal{K}$。 (5) (X,τ) 是强 d-空间，如果对于每个 $x \in X$， $U \in \tau$ 和 $D \in \mathcal{D}(X)$， $\uparrow x \cap \bigcap\{\uparrow d\colon\ d \in D\} \subseteq U$ 蕴含对于某个 $d \in D$ 有 $\uparrow x \cap \uparrow d \subseteq U$ 。 (6) (X,τ) 是 R 空间，如果对于每个族 $\mathcal{F} = \{\uparrow F_i\colon\ F \subseteq_{fin} X, i \in I\}$ 且 $U \in \tau$, $\bigcap \mathcal{F} \subseteq U$ 蕴含 $i \in A\} \subseteq U$: 对于某个 $A \subseteq_{fin} I$ 有 $\bigcap\{\uparrow F_i$ 。 (7) (X,τ) 是强 R-空间，如果对于每个族 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{Q}(X)$ 且 $U \in \tau$, $\bigcap \mathcal{K} \subseteq U$ 蕴含: 对于某个有限子族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$ 有 $\bigcap \mathcal{F} \subseteq U$ 。

注 2.6. 设 (X,τ) 是一个强 R-空间。那么 (X,τ) 是一个 R 空间，也是一个强良过滤空间。

命题 2.7. [34] 对于上确界完备偏序集 P，$(P,\upsilon(P))$ 是饱和的。

命题 2.8. [31] 对于上确界完备偏序集 P，$(P,\upsilon(P))$ 是相干的。

定义 2.9. [4, 14] 设 (X,τ) 是一个拓扑空间。

(1) τ^s称为 τ的强拓扑，如果 τ^s有一个满足 $\tau \cup \Gamma(X)$ 的子基。

(2) τ^p称为 τ的补丁拓扑，若 τ^p有一个满足以下条件的子基： $\tau \cup \{X - K\colon\ K \in \mathcal{Q}(X)\}$。

如果一个拓扑（X,τ）中的所有紧集都是闭集，则称其为 KC空间。强拓扑也称为 Skula拓扑，而 KC-空间称为 T_B 空间。本文采用强拓扑和 KC-空间的概念（见 [24, 25]）。对于 KC-空间，有以下性质。关于 KC-空间有一些命题。

命题 2.10. 设(X,τ) 是一个拓扑空间。考虑以下条件 :

(1) (X,τ) 是一个KC空间。

(2) $\mathcal{Q}(X) \subseteq \Gamma(X)$。(

3) $\tau = \tau^p$。

则 (1) $\Rightarrow$(2) $\Leftrightarrow$(3)，并且如果 (X,τ) 是一个 T_0 空间，则所有条件等价。

证明。 根据定义，显然 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)。

对于 (2) $\Rightarrow$(1)，我们只需证明 (X,τ) 是一个 T_1 空间；因此，所有紧集都是饱和的。

给定 $x \in X$。则 $\uparrow x \in \mathcal{Q}(X)$。假设 $y \in \uparrow x$。则 $\uparrow y \in \mathcal{Q}(X) \subseteq \Gamma(X)$，且 $x \leq y(x \in cl(y))$ 蕴含 $x \in \uparrow y$，因为 $\uparrow y$ 是闭集。由于 $(X,\ \tau)$ 是 T_0，我们知道 $y \in \uparrow x$，而 $x \in \uparrow y$ 蕴含 $x = y$。因此 $(X,\ \tau)$ 是一个 T_1 空间。 □

回顾一下，若 $A,\ B \in \mathcal{Q}(X)$ 总是蕴含 $A \cap B \in \mathcal{Q}(X)$，则称该拓扑空间为相干 。

注 2.11. 所有 T_2 空间都是 KC空间。而所有 KC-空间都是相干的 T_1 空间。

设 (X,τ) 是一个 T_0 空间， $\Gamma^*(X)$ 是 X 的所有非空闭集所成的集合。对于 $U \in \tau$，我们用 $U = \{C \in \Gamma^*(X) :\ C \cap U \neq \emptyset\}$ 表示。(X,τ) 的 Hoare幂空间是 $\Gamma^*(X)$，其拓扑由 $\{\Diamond U:\ U \in \tau\}$ 生成，记为 $P_H(X)$。类似地，设 $\mathcal{Q}^*(X)$ 是 X 的所有非空紧致饱和集所成的集合。对于 $U \in \tau$，令 $\Box U = \{K \in \mathcal{Q}^*(X) :\ K \subseteq U\}$。$(X,\tau)$ 的 Smyth幂空间是 $\mathcal{Q}^*(X)$，其拓扑由 $\{\Box U:\ U \in \tau\}$ 生成，记为 $P_S(X)$。在本文中，对于每个非空紧致饱和集族 $\mathcal{F}$，我们定义 $\downarrow_{P_S(X)} \mathcal{F} = \{Q \in \mathcal{Q}^*(X) :\ K \subseteq Q \ for\ some\ K \in \mathcal{F}\}$，以及 $\uparrow_{P_S(X)} \mathcal{F} = \{Q \in \mathcal{Q}^*(X) : Q \subseteq K \ for\ some\ K \in \mathcal{F}\}$。

以下关于 Smyth 幂空间的结果是众所周知的。

定理 2.12。 [20] 设 X 是一个拓扑空间。以下陈述等价:

(1) X 是局部紧的。(2) $P_S(X)$ 是一个 c-空间。(3) $P_S(X)$ 是局部紧的。(4) $P_S(X)$ 是核紧的。

定理 2.13。 [30] 对于一个 T_0 空间 X，以下条件等价:

(1) X 是良滤的。(2) $P_S(X)$ 是 d-空间。(3) $P_S(X)$ 是良滤的。

3. KC-空间与强 R-空间

本节讨论 KC-空间与强 R-空间之间的关系，并研究强 R-空间的一些性质，以及与补丁拓扑相关的一些紧性性质。KC-空间与强 R-空间之间的关系如下所述。

命题 3.1. 若(X,τ)是 *KC*空间，则(X,τ)是强 *R*-空间。

证明。 假设 $U\in\tau$和 $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{Q}(X)$，使得对每个 $\mathcal{F}\subseteq_{fin}\mathcal{K}$都有 $\bigcap\mathcal{F}\not\subseteq U$。

固定 $K_0\in\mathcal{K}$。那么 $C=(X-U)\cap K_0$ 是紧致的。根据假设， C 是一个非空闭集。对于每个 $K\in\mathcal{K}$， $C\cap K$ 也紧致，因此是闭集。此外，$\mathcal{A}=\{\bigcap\mathcal{F}\cap C\colon\ \mathcal{F}\subseteq_{fin}\mathcal{K}\}$是 $(C,\tau|_C)$的非空闭集构成的滤过族。由此可得$\bigcap\mathcal{A}\neq\emptyset$。也就是说 $\bigcap\mathcal{K}\not\subseteq U$。因此 (X,τ) 是强 R- 空间。□

虽然所有 KC-空间都是强 R-空间，但下面的例子表明，KC空间未必是饱和的。反过来，Sierpiński 空间是饱和的，但不是 KC空间。

例 3.2. 设 $\mathbb{R}$ 是带有余可数拓扑 τ 的实数集合。那么 $(\mathbb{R},\ \tau)$ 是 KC空间，但不是饱和的。

显然， $\mathcal{Q}(\mathbb{R})=\mathcal{Q}_f(\mathbb{R})=\{F\colon\ F\subseteq_{fin}\mathbb{R}\}$。由此可知，$(\mathbb{R},\ \tau)$ 是 KC空间。

给定一个 $\mathbb{R}$ 的无限子集 A。取一个可数子集 $A_0=\{a_n\colon\ n\subseteq\mathbb{N}\}$，它是 A 的子集。 n

$$A\subseteq\mathbb{R}=\bigcup\{(X-A_0)\cup\{a_n\}:n\in\mathbb{N}\}.$$

由于 $(X-A_0)\cup\{a_n\}$ 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都是开集， A 不是紧致的。因此该等式成立 s.

对于任意非空集合 U_1、$U_2\in\tau$，我们有 $U_1\cap U_2\neq\emptyset$。因此 $\mathbb{R}$ 是不可约的。但对于任意 $x\in\mathbb{R}$，$cl(\mathbb{R})=\mathbb{R}\neq cl(\{x\})$。因此 $(\mathbb{R}$、$\tau)$ 不是饱和的。

命题 3.3。 设(X,τ)是一个 T_1 相干良滤空间。若(X,τ)是局部紧的，则(X,τ)是一个 *KC*空间。

证明。 给定 $K\in\mathcal{Q}(X)$ 和 $y\notin K$。我们只需证明 $y\notin cl(K)$。反设不然，则对于每个 $U\in N^o(y)$，都有$U\cap K\neq\emptyset$。事实上， $U\cap K$是一个无限集合（否则， $U-(U\cap K)\in N^o(y)$，矛盾）。由局部紧性可知，存在 $Q_U\in\mathcal{Q}(X)$，使得对每个 $U\in N^o(y)$ 都有$y\in\int(Q_U)\subseteq Q\subseteq U$。这意味着 $K\cap Q_U$ 是无限且紧致的，因为 X 具有相干性。此外，

$$\bigcap(K\cap Q_U)\subseteq K\cap\{y\}=\emptyset.$$

Sin由于 X 是良滤的，我们有 $K\cap Q_U=\emptyset$，其中某个 $U\in N^o(y)$，矛盾 . □

现在我们着手建立强 R-空间、强良滤空间与 R-空间之间的联系。显然，所有强 R-空间都是强良滤 R 空间。反过来，我们有以下命题。

在继续之前，回顾一下，若一个 T_0 空间 (X,τ) 满足：对每个$x\in X$和 $U\in N^o(x)$，都存在一个有限集 $F\subseteq X$，使得 $x\in int(\uparrow F)$ 且 $F\subseteq U$，则称其为局部超紧。

命题 3.4。设 $(X,\ \tau)$ 是一个 T_0 空间。

(i) 若 $(X,\ \tau)$ 是相干良滤空间，则 $(X,\ \tau)$ 是强 R 空间。

(ii) 若 (X,τ) 是局部超紧 R 空间，则 (X,τ) 是强 R-空间。

证明。 假设 $U\in\tau$和 $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{Q}(X)$，其中 $\bigcap\mathcal{K}\subseteq U$。只需证明，对于某个 $\mathcal{F}\subseteq_{fin}\mathcal{K}$，有 $\bigcap\mathcal{F}\subseteq U$。

(i) 由 (X,τ) 的相干性，$\{\bigcap\mathcal{F}\colon\ \mathcal{F}\subseteq_{fin}\mathcal{K}\}$是由紧致饱和集构成的滤子。由于 (X,τ) 是良滤的，存在一个 $\mathcal{F}\subseteq_{fin}\mathcal{K}$，使得 $\bigcap\mathcal{F}\subseteq\mathcal{U}$。

(ii) 给定一个紧致饱和集 $K\in\mathcal{Q}(X)$。则 $K=\bigcap\{V\in\tau\colon\ K\subseteq U\}$。设 U 是一个开集，且 $K\subseteq V$。对每个 $x\in K$，都存在一个有限集 F_x，使得 $x\in int(\uparrow F_x)$ 且$F_x\subseteq V$，因为 (X,τ) 是局部超紧的。由于 K是紧致的，存在一个有限集 $F_{K,V}$，满足 $K\subseteq int(\uparrow F_{K,V})$ 且 $F_{K,V}\subseteq U$。于是有

$$\bigcap\mathcal{K}=\bigcap_{K\in\mathcal{K}}\bigcap_{K\subseteq V,V\in\tau}\uparrow F_{K,V}\subseteq U.$$

存在一个有限族 $\{F_{K_i,V_i}\colon\ i=1,\ 2,\ .....,\ n\}$ 满足$\bigcap_{i=1}^{n}\uparrow F_{K_i,\ V_i}\subseteq U$，其中 $K_i\in\mathcal{K},\ K_i\subseteq V_i\in\tau$，因为 $(X,\ \tau)$ 是一个 R 空间。因此$\bigcap_{i=1}^{n}K_i\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}\uparrow F_{K_i,\ V_i}\subseteq U.$ □

根据注 2.6，每个强 R-空间都是强良滤 R 空间。然而，赋予余有限拓扑的无限集合是 T_1（因此是一个 R 空间），但不是良滤的；因此，它不是强良滤的。下面我们给出一个例子，说明并非所有强良滤空间都是 R 空间。

例 3.5。 令 $P=\{n_1\colon\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{n_2\colon\ n\in\mathbb{N}\}$。在 P 上定义如下的序（见图 1）：(i) $n_1\leq m_2$ 当 $n\leq m$ 时；(ii) 对所有 $x\in P,\ \ x\leq x$ 。

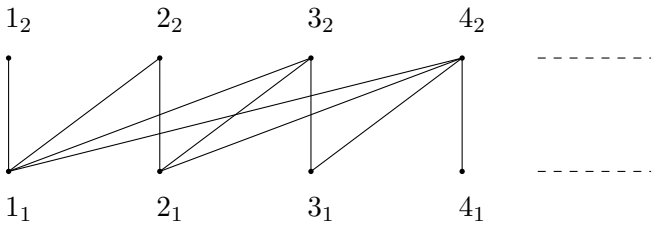


图 1：$(P,\ \leq)$

设 P 赋予 Scott拓扑。若 $\mathcal{F}$ 是由非空紧致饱和集组成的滤子基，则 $|\mathcal{F}|$ 是有限的。这意味着 $(P,\ \sigma(P))$ 是强良滤的。然而，对于每个 $F\subseteq_{fin}\mathbb{N}$，$\bigcap\{\uparrow n_1\colon n\in\mathbb{N}\}=\emptyset$ 且 $\bigcap\{\uparrow n_1\colon\ n\in F\}\neq\emptyset$。因此 $(P,\ \sigma(P))$ 不是 R 空间。

接下来, 我们讨论 Smyth 幂空间关于强 R-空间的一些性质 .

定理 3.6。 设 (X,τ) 是一个 T_0 空间，考虑以下条件：

(1) $P_S(X)$ 是强 R-空间。

(2) $P_S(X)$ 是 R 空间。

(3) X 是一个强 R-空间。

那么 (1) $\Rightarrow$(2) $\Rightarrow$(3)。若 (X,τ) 是局部紧的，则 (1) $\Leftrightarrow$(2)。若 (X,τ) 是相干的，则 (2) $\Leftrightarrow$ (3)。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：由注 2.6 可知显然。

(2) $\Rightarrow$ (3)：给定一个紧致饱和集族 $\mathcal{K}$ 和一个满足 $\bigcap\mathcal{K}\subseteq U$ 的开集 $U\in\tau$。那么 $\bigcap\{\uparrow_{P_S(X)}K:K\in\mathcal{K}\}\subseteq\Box U$。这意味着，对某个有限子族 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{K}$，$\bigcap\{\uparrow_{P_S(X)}K:\ K\in\mathcal{F}\}\subseteq\Box U$。也就是说 $\bigcap\mathcal{F}\subseteq U$。

设 (X,τ) 是一个局部紧空间。

(2) $\Rightarrow$ (1)：由定理 2.12，$P_S(X)$ 是一个 c-空间。因此，$P_S(X)$ 是一个局部超紧空间。根据命题 3.4，我们得出 $P_S(X)$ 是一个强 R-空间。

设 $(X,\ \tau)$ 是一个相干空间。

(3) $\Rightarrow$ (2)：设 $\mathcal{K}$ 是紧致饱和集的一个族，$\mathcal{U}$ 是 $P_S(X)$ 的一个开集，且$\bigcap\{\uparrow_{P_S(X)}K:\ K\in\mathcal{K}\}\subseteq\mathcal{U}$。由 $(X,\ \tau)$ 的相干性，$\bigcap\{\uparrow_{P_S(X)}K:\ K\in\mathcal{F}\}=\uparrow_{P_S(X)}\bigcap\mathcal{F}$，对每个 $\mathcal{F}\subseteq_{fin}\mathcal{K}$ 都成立。于是

$$\bigcap\{\uparrow_{P_S(X)}\mathcal{F}:\mathcal{F}_{fin}\mathcal{K}\}=\bigcap\{\uparrow_{P_S(X)}K:K\in\mathcal{K}\}\subseteq\mathcal{U}.$$

由定理 2.13，存在 $\mathcal{F}_0\subseteq_{fin}\mathcal{K}$ 使得 $\uparrow_{P_S(X)}\bigcap\mathcal{F}\subseteq\mathcal{U}$。也就是说，$\bigcap\{\uparrow_{P_S(X)}K:\ K\in\mathcal{F}_0\}\subseteq\mathcal{U}$。

□

对于 [29, 问题 7.4，], 我们证明，局部紧相干良滤空间的 Smyth 幂空间是一个强 R-空间；因此，它是强良滤的，这部分解决了该问题。

最后，我们讨论补丁拓扑的一些紧性性质。

命题3.7。 [5, 27] 设 (X,τ) 是一个 T_0空间，且 τ^p是 (X,τ) 的补丁拓扑。那么，(X,τ^p) 是紧致的，当且仅当 (X,τ) 是紧致、相干且良滤的。

由命题 3.4 和 3.1，我们得到以下推论。

推论 3.8。 设 (X,τ)是一个 T_0空间，且 τ^p是(X,τ)的补丁拓扑。那么，(X,τ^p)是紧致的，当且仅当(X,τ)是一个紧致相干强 R 空间。此外，对于每个紧致 KC 空间(Y,ν)，(Y,ν^p)都是紧致的。

4. 余诺特空间

本节中，我们介绍一类新的拓扑空间，它通过在定义中用开集替代紧致饱和集，对良滤性进行修改来定义。现在给出以下定义。

定义 4.1。 设 (X,τ) 是一个拓扑空间。如果对于每个开集 V以及每个满足 $\bigcap\mathcal{U}\subseteq V$ 的开集滤基 $\mathcal{U}$，都存在一个 $U\in\mathcal{U}$ 满足 $U\subseteq V$，则称 (X,τ) 为余诺特空间。

命题 4.2。 设 (X,τ) 是一个拓扑空间。则以下条件等价：

(1) X 是余诺特空间。

(2) 对于每个开集 V 以及每个满足 $\bigcap\mathcal{U} \subseteq V$ 的开集族 $\mathcal{U}$，存在一个 $\mathcal{U}_0 \subseteq_{fin} \mathcal{U}$ 满足 $\bigcap\mathcal{U}_0 \subseteq V$。

(3) 对于每个开集 V 以及每个满足 $\bigcap\mathcal{S} \subseteq V$ 的饱和集滤基 $\mathcal{S}$，存在一个 $S \in \mathcal{S}$ 满足 $S \subseteq V$。

(4) 对于每个开集 V 以及每个满足 $\bigcap\mathcal{S} \subseteq V$ 的饱和集族 $\mathcal{S}$，存在一个 $\mathcal{S}_0 \subseteq_{fin} \mathcal{S}$ 满足 $\bigcap\mathcal{S}_0 \subseteq V$。

(5) $\Gamma(X) = \{cl(F) : F \subseteq_{fin} X\}$。

证明。显然，(4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$(1)，且 (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1)。

现在我们只需证明 (1) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (4)。

(1) $\Rightarrow$ (5)：给定一个闭集 C。则

$$X - \bigcup\{cl(F) : F \subseteq_{fin} C\} = \bigcap\{X - cl(F) : F \subseteq_{fin} C\} = X - C.$$

显然，$X - C \in \tau$ 和 $\{X_c l(F) : F \subseteq_{fin} C\}$ 是一个开集基。存在一个有限集 $F \subseteq_{fin} C$，使得 $X - cl(F) \subseteq X - C$（即 $C \subseteq cl(F)$）。因此 $C = cl(F)$。

(5) $\Rightarrow$ (4)：假设 $U \in \tau$ 和 $\{S_i : i \in I\} \subseteq S(X)$，使得 $\bigcap_{i\in I} S_i \subseteq U$。

也就是说，$X - U \subseteq \bigcup_{i\in I}(X - S_i)$。则存在一个有限集 $F \subseteq_{fin} X - U$，使得 $X - U = cl(F)$.

固定 $a \in F$。则 $a \in cl(F) \subseteq \bigcup_{i\in I} X - S_i$。这意味着存在一个 $i_a \in I$，使得 $a \notin S_{i_a}$。由此可得 $cl(\{a\}) \cap S_{i_a} = \emptyset$。这意味着 $\bigcup\{cl(\{a\}) : a \in F\} \cap \bigcap\{S_{i_a} : a \in F\} = \emptyset$。也就是说，$cl(F) \subseteq \bigcup\{X - S_{i_a} : a \in F\}$。因此 $\bigcap\{S_{i_a} : a \in F\} \subseteq U$。 □

注 4.3. 回顾一下，若空间 (X, τ) 的所有开集都是紧致的，则称该空间为诺特空间。也就是说，对于每个 $\mathcal{U} \subseteq \tau$ 和 $V \in \tau$，$V \subseteq \bigcup\mathcal{U}$ 总是意味着对于某个 $\mathcal{U}_0 \subseteq_{fin} \mathcal{U}$，$V \subseteq \bigcup\mathcal{U}_0$。

该空间之所以称为余诺特空间，是因为它满足以下性质：对于每个 $\mathcal{E} \subseteq \Gamma(X)$ 和 $C \in \Gamma(X)$，$C \subseteq \bigcup\mathcal{E}$ 总是意味着对于某个 $\mathcal{E}_0 \subseteq_{fin} \mathcal{E}$，$C \subseteq \bigcup\mathcal{E}_0$。

命题 4.4. 设 (X, τ) 是一个余诺特 T_0 空间。那么 (X, τ) 是一个强 R 空间 $e.$

证明。由 $\mathcal{Q}(X) \subseteq \mathcal{S}(X)$ 和命题 4.2 可直接得出。 □

推论4.5. 所有 T_0 余诺特空间都是饱和的。

证明。设 (X, τ) 是一个余诺特空间。给定 (X, τ) 的一个不可约闭集 C。那么 $C = cl(F)$，其中 $F \subseteq_{fin} C$。由于 $C = cl(F) = \bigcup\{cl(\{x\}) : x \in F\}$，我们有 $C = cl(\{x\})$，其中 $x \in F$。因此 (X, τ) 是饱和的。

□

参见 [4, 练习 III-3。21], 任何没有无限反链的有向完备偏序集都是拟连续的。还有一个类似的性质。

推论 4.6。任何不含无限反链的有向完备偏序集，赋予 *Scott*拓扑后，都是余诺特空间。

证明。 设 L 是一个有向完备偏序集， C 是 L的一个 Scott闭集。则 $C = {\downarrow}\max(C) = cl(\max(C))$。根据假设，$\max(C)$是有限的。因此， L 赋予 Scott拓扑后是一个余诺特空间。 □

因此，我们得到强拓扑紧性的若干等价刻画如下。

定理 4.7. 设 (X, τ) 是一个拓扑空间。那么，赋予强拓扑 τ^s 的 X 在(X, τ) 中是紧致的，当且仅当(X, τ) 是诺特空间和余诺特空间。

证明. 假设赋予强拓扑 τ^s 的 X 是紧致的。

那么，(X, τ^s) 中的所有闭集在 (X, τ^s) 中都是紧致的。因此，开集 (X, τ) 在 (X, τ^s) 中都是紧致的。由此可得，(X, τ) 是诺特空间。

设 C 是 (X, τ) 中的一个闭集。那么，它是 (X, τ^s) 中的紧致闭集。显然， $\{cl(\{x\}) : x \in C\}$ 是 (X, τ^s) 中 C 的一个开覆盖。存在一个有限集 $F \subseteq C$，使得 $C = \bigcap\{cl(\{x\}) : x \in F\} = cl(F)$。因此，根据命题 4.2， X 是余诺特的。

反过来，设 (X, τ) 是一个诺特空间和余诺特空间。令 $\{U_i \in \tau : i \in I\} \cup \{C_j \in \Gamma(X, \tau) : j \in J\}$ 是 (X, τ^s) 中 X 的一个开覆盖。由于 (X, τ) 是诺特空间，存在一个有限集 $F_1 \subseteq I$，使得 $\bigcup\{U_i : i \in I\} = \bigcup\{U_i : i \in F_1\}$。因此

$$X - \bigcup\{C_j : j \in J\} = \bigcap\{X - C_j : j \in J\} \subseteq \bigcup\{U_i : i \in F_1\}.$$

由于 (X, τ) 是余诺特空间，存在一个有限集 $F_2 \subseteq J$，使得 $\bigcap\{X - C_j : j \in F_2\} \subseteq \bigcup\{U_i : i \in F_1\}$。因此 $X = \bigcup\{U_i : i \in F_1\} \cup \bigcup\{C_j : j \in F_2\}$。根据亚历山大子基定理，带有强拓扑的 (X, τ) 是紧致的。 □

命题 4.8. 对于一个 T_0 诺特空间(X, τ)，它是余诺特空间，当且仅当它是开良滤过的。

证明. 一般拓扑学中众所周知，所有饱和空间都是良滤空间，所有良滤空间都是开良滤过的。根据推论4.5，所有 T_0 余诺特空间都是开良滤过的。

反过来，由于 (X, τ) 是诺特空间，我们有 $\tau \subseteq \mathcal{Q}(X)$（即 $U \ll U$属于 $(\tau, \subseteq)$，对每个$U \in \tau$）。(X, τ) 的开良滤过性意味着 (X, τ) 是余诺特空间。 □

由定理 4.7 和命题 4.8，我们得到以下推论。

推论 4.9. 设(X, τ) 是一个 T_0 空间。则以下条件等价。

(1) (X, τ^s) 是紧致的。(2) (X, τ) 既是诺特空间，也是余诺特空间。
(4) (X, τ) 既是诺特空间，也是良滤空间。(4) (X, τ) 既是诺特空间，
也是开良滤空间

.

以下引理摘自 [5, 引理 9.7.9]。

引理 4.10。 空间 X 是诺特的，当且仅当其饱和化是诺特的。

根据推论 4.9，我们可以直接得到以下推论。

推论 4.11。 空间 X 是诺特的，当且仅当其良滤化是诺特的。

证明。 如果 X 的良滤化是诺特的，那么根据推论 4.9，它是饱和的。这意味着其饱和化与良滤化同胚。因此，根据引理 4.10， X 是诺特空间。

反过来，假设 X 是诺特空间，且 X^w 是 X 的良滤化空间。那么， X 和 X^w 的饱和化同胚。根据引理 4.10， X 的饱和化是诺特的。因此， X^w 的饱和化也是诺特的。这意味着根据引理 4.10，X^w 是诺特的。

□

接下来，我们证明不存在无限的 T_1 余诺特空间。

命题 4.12。 不存在无限的 T_1 余诺特空间。

证明。 设 X 是一个无限集合，且 (X,τ) 是一个 T_1 空间。那么，对每个 $F \subseteq_{fin} X$，都有 $X \neq cl(F)$。因此，(X,τ) 不是余诺特空间。 □

然而，对于 T_1 空间和余诺特空间，还有两个类似的性质。

命题 4.13. 设 X、Y 是两个 T_0 空间。若 Y 是一个 T_1 空间，且存在从 X 到 Y的连续单射，那么 X 也是一个 T_1 空间。

证明。 给定 $x \in X$。由于 f是单射，我们有 $\{x\} = f^{-1}(f(x))$。因此 $\{x\}$是闭集，因为 Y是 T_1，且 f 是连续的。 □

命题 4.14. 设 X、Y 是两个 T_0 空间。若 X 是一个余诺特空间，且存在从 X 到 Y的连续满射，那么 Y 也是一个余诺特空间。

证明。 固定 $C \in \Gamma(Y)$。于是 $f^{-1}(C) \in \Gamma(X)$。由此可知，对于某个 $F \subseteq_{fin} X$，有 $f^{-1}(C) = cl(F)$。假设 $U \in \mathcal{O}(Y)$，其中 $U \cap C \neq \emptyset$。那么，由于 f是满射，存在 $x \in f^{-1}(U \cap C) \subseteq f^{-1}(U) \cap f^{-1}(C)$。因此 $f^{-1}(U) \cap F \neq \emptyset$。也就是说， $U \cap f(F) \neq \emptyset$(即 $C = cl(f(F))$)。这意味着 Y 是一个余诺特空间。

□

接下来，我们研究余诺特空间的收缩及其一些子空间。

推论 4.15. 设 (Y,ν)、(X,τ) 是两个 T_0空间，且 (X,τ) 是 (Y,ν)的一个收缩。若(Y,ν) 是余诺特空间，则(X,τ)也是余诺特空间。

命题 4.16. 设(X,τ) 是一个余诺特空间， A 是一个饱和集， C 是一个闭集。那么，赋予遗传拓扑后，A 和 C 都是余诺特空间。

证明。 设 B是 $(A,\tau|_A)$ 的一个闭子集。于是，对某个 $B_0 \in \Gamma(X,\tau)$，有 $B = B_0 \cap A$。由此可得，对某个 $F \subseteq_{fin} X$，有 $B_0 = cl_X(F)$。因此 $B = cl_A(A \cap F)$。

闭子空间的证明类似。 □

余诺特空间的积未必是余诺特的。

例4.17. 设 $L=\{a_i:\ i\in\mathbb{N}\}\cup\{\infty\}$ 和 $M=\{b_j:\ j\in\mathbb{N}\}\cup\{b_0\}$ 是两个偏序集，其中$\leq_L=\{(a_i,a_j):\ i\leq j\ in\ \mathbb{N}\}\cup\{(a_i,\infty):\ i\in\mathbb{N}\}$ 且 $\leq_M=\{(b_i,b_j):\ j\leq i\ in\ \mathbb{N}\cup\{0\}\}$。那么$\Gamma(L,\sigma(L))=\{\downarrow a_i:\ i\in\mathbb{N}\}\cup\{\downarrow\infty\}$ 且 $\Gamma(M,\sigma(M))=\{\downarrow b_j:\ j\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$。因此，$(L,\sigma(L))$ 和 $(M,\sigma(M))$ 都是余诺特空间。

令 $C=\{(a_i,\ b_j):\ i,\ j\in\mathbb{N},\ \ i\leq j\ in\ \mathbb{N}\}$。现在我们证明 C 是 $(L\times M,\ \sigma(L)\times\sigma(M))$ 的闭子集。

显然，C 是一个下集。取 $(a_i,\ b_j)\notin C$，其中 $i\in\mathbb{N}$ 且 $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。那么 $j<i$ 属于 $\mathbb{N}$，并且$\uparrow(a_i,\ b_j)=\uparrow a_i\times\uparrow b_j\in\sigma(L)\times\sigma(M)$，这意味着 $\uparrow(a_i,\ b_j)\cap C=\emptyset$。类似地，取 $(\infty,\ b_j)\notin C$，其中 $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。那么$(a_{j+1},\ b_j)\notin C$ 且 $(\infty,\ b_j)\in\uparrow(a_{j+1},\ b_j)$。

最后，我们断言不存在满足 $C=cl(F)$ 的有限集 F。

令 $\{(a_{i_k},\ b_{j_k}):\ k\in F\}$ 为 C 的有限子集。取 $H=\max\{i_k:\ k\in F\}$。那么 $(a_{H+1},\ b_{H+1})\in C$，但 $(a_{H+1},\ b_{H+1})\notin cl(F)$。因此 $(L\times M,\ \sigma(L)\times\sigma(M))$ 不是余诺特空间。

对于上确界完备偏序集 P，$(P,\ \upsilon(P))$ 是一个强 R-空间；然而，它不一定是余诺特的。此外，对于一个 T_0 空间 X，Hare 幂空间 $P_H(X)$ 不一定是余诺特的。

例4.18。 设 P 是所有至多可数个二进制串构成的集合，并赋予前缀序； A 是所有无限串构成的集合， B 是所有有限串构成的集合。那么 $A=\bigcap\{\downarrow F:\ F\subseteq_{fin}B\}$ 是闭集。但 A 不具有有限极大元。因此，$(P,\ \upsilon(P))$ 不是余诺特空间。

此外， $P_H(P,\ \upsilon(P))$ 不是余诺特空间，因为所有无限二进制串构成的集合是闭集，且不具有有限极大元。

最后，我们证明余诺特空间范畴及其连续映射等价于 **DCPO** 的某个子范畴，并讨论余诺特空间的 Smyth 幂空间的一些性质。

定义 4.19。 设 L 为一个**有向完备偏序集**， C 为 L的一个反链。有限反链 $F\subseteq L$ 称为 C的一个 $cover$，如果 $C\subseteq\downarrow F$ 且 $C\subseteq\downarrow G$ 蕴含对每个 $G\subseteq_{fin}L$都有 $F\subseteq\downarrow G$。

定义 4.20。 若**有向完备偏序集** L 对每个反链C都有一个覆盖，则称其为 $controllable$ **有向完备偏序集**。

定义 4.21。 设 $L,\ M$ 为两个**有向完备偏序集**。若映射 f 从 L 到 M 是单调的，且对每个 $y\in M$，$f^{-1}(\downarrow y)$都有有限个极大点，则称 f 为一个 $upper\text{-}continuous$映射。

现在我们考虑以下范畴:

- **Co-NOE**：所有带有连续映射的 T_0 余诺特空间构成的范畴。
- **C-DCPO**：所有带有上连续映射的可控**有向完备偏序集**构成的范畴。

定理4.22。 范畴$Co\text{-}NOE$ 与$C\text{-}DCPO$等价。

证明。 设 L 是一个可控有向完备偏序集。我们断言 $(L,\upsilon(L))$ 是余诺特的。事实上，我们只需证明，对于每个反链 C， C 的闭包有有限个极大点。对于 $(L,\upsilon(L))$ 的每个闭集 E， $E=\bigcap\{\downarrow F:\ E\subseteq\downarrow F,\ F\subseteq_{fin}L\}$。因此，

$$cl(C)=\bigcap\{\downarrow F:C\subseteq\downarrow F,\ F\subseteq_{fin}L\}.$$

设 F_E 是 E的覆盖。根据覆盖的定义， $\downarrow F_E = \bigcap\{\downarrow F : C \subseteq\downarrow F,\ F \subseteq_{fin} L\}$ 。因此 $(L, \upsilon(L))$ 是余诺特的。

设 L, M 是两个可控有向完备偏序集，且 $f : L \to M$ 是上连续映射。由于 f 是上连续映射，对于每个 $C \in \Gamma(M, \upsilon(M))$， $f^{-1}(C) = \downarrow F$，其中某个 $F \subseteq_{fin} L$。因此， f 是 **Co-NOE** 中的一个态射。

反过来，设 (X, τ) 是一个余诺特空间。由 (X, τ) 的朴素性可知，$(X, \leq_\tau)$ 是一个有向完备偏序集。给定一个反链 C。则 $cl(C) = cl(F) = \downarrow_{\leq_\tau} F$，其中某个反链 $F \subseteq_{fin} X$。对于每个$G \subseteq_{fin} L$，$C \subseteq\downarrow_{\leq_\tau} G$ 总是意味着 $cl(C) \subseteq\downarrow_{\leq_\tau} G$。因此， $F \subseteq\downarrow_{\leq_\tau} G$。由此可得， F 是 C 的覆盖。

设 $(X, \tau), (Y, \nu)$ 是两个余诺特空间，且 $f : X \to Y$ 是连续映射。显然， f 是从 $(X, \leq_\tau)$ 到 $(Y, \leq_\nu)$ 的单调映射。对于每个 $y \in Y$， $f^{-1}(\downarrow_{\leq_\nu} y) \in \Gamma(X)$，且 $f^{-1}(\downarrow_{\leq_\nu} y) = \downarrow_{\leq_\tau} F$，其中某个 $F \subseteq_{fin} X$。因此，$\max(F)$ 是 $f^{-1}(\downarrow_{\leq_\nu} y)$ 的极大点集合。

根据上述证明，我们可以定义如下两个函子 F： G

$$F : \mathbf{C\text{-}DCPO} \to \mathbf{Co\text{-}NOE} \begin{cases} F(L) = (L, \upsilon(L)), & for\ each\ object\ L\ of\ \mathbf{C\text{-}DCPO} \\ F(f) = f, & for\ each\ morphisim\ f\ of\ \mathbf{C\text{-}DCPO} \end{cases}$$

$$G : \mathbf{Co\text{-}NOE} \to \mathbf{C\text{-}DCPO} \begin{cases} F(X) = (X, \leq_\tau), & for\ each\ object\ (X, \tau)\ of\ \mathbf{Co\text{-}NOE} \\ G(f) = f, & for\ each\ morphisim\ f\ of\ \mathbf{Co\text{-}NOE} \end{cases}$$

因此，**C-DCPO** 和**Co-NOE** 通过 $F \circ G = id_{\mathbf{C\text{-}DCPO}}$ 和 $G \circ F = id_{\mathbf{Co\text{-}NOE}}$是等价的。

□

注4.23。 对于每个余诺特空间（X， τ）， P_S（X， τ）的拓扑恰好与（$\mathcal{Q}^*$（X） $\supseteq$）上的上拓扑一致。这是因为集合 $\{\Diamond C :\ C \in C\}$ 本身是 P_S（X）的闭集的一个基，并且

$$\Diamond C = \{K \in \mathcal{Q}^*(X) : F \cap K \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in F} \{K \in \mathcal{Q}^*(X) :\uparrow x \subseteq Q\} = \downarrow_{P_S(X)} \{\uparrow x : x \in F\}$$

对于每个 $C = cl$（F） $= \in \Gamma^*$（X）。

值得注意的是，余诺特空间的 Smyth 幂空间可能不是余诺特空间。应用定理4.22即可给出一个反例。在下文中， $\mathbb{N}$ 是所有正整数的集合。

例4.24。 设 $P = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 为一个偏序集，其中 $x \leq y$ 当且仅当 $y = \infty$。于是我们得到以下条件:

(i) $(P, \upsilon(P))$ 是一个余诺特空间，因为 $\Gamma(P, \upsilon(P)) = \{\downarrow \infty\} \cup \{\downarrow F :\ F \subseteq_{fin} \mathbb{N}\}$。

(ii) 所有饱和集都是紧致的。这显而易见，因为 $\upsilon(P) \subseteq \tau_{cof}(P)$，其中 $\tau_{cof}(P)$ 是 P 的余有限拓扑。

(iii) $P_S(X)$ 是偏序集 $(\mathcal{Q}^*(X) \supseteq)$，赋予了上拓扑。

(iv) $\mathcal{A} = \{X - \{n\} :\ n \in \mathbb{N}\}$ 是带有特化序的 $P_S(P,\ \upsilon(P))$的反链，但它没有覆盖。反设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{A}$的覆盖。令 $X = (P,\ \upsilon(P))$。

那么存在一个 $K \in \mathcal{F}$，使得$\mathcal{A} \cap \downarrow_{P_S(X)} K$ 是无限的。已知 $x,\ y \notin K$ 并令集合$\mathcal{G} = (\mathcal{F} - \{K\})$ $\cup \{K \cup \uparrow x\} \cup \{K \cup \uparrow y\}$。于是$\mathcal{C} \subseteq \downarrow_{P_S(X)} \mathcal{G}$，但$\mathcal{F} \nsubseteq \downarrow_{P_S(X)} \mathcal{G}$，矛盾。由定理4.22，$P_S(X)$不是余诺特的。

5. 若干非豪斯多夫拓扑之间的关系

在本节中，我们只考虑 T_0 空间。根据前几节的讨论，我们得到一个图示，展示了某些 T_0 空间之间的分类关系。这里的蕴含关系不可逆。

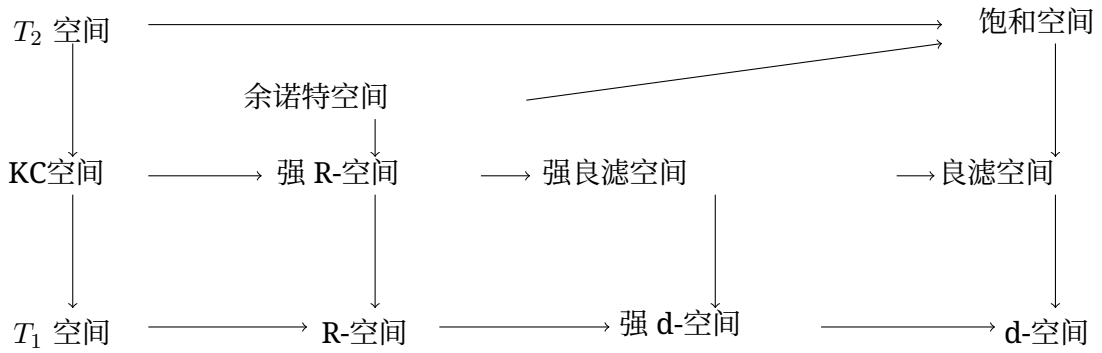


图 2：T_0 空间的分类图

我们已将 KC-空间和余诺特空间添加到 [31, 图 1.] 中，以便对 T_0 空间进行更精细的分类。

仍有若干问题有待解决。

问题 5.1. 是否存在一个相干良滤空间，但它不是 KC空间?

问题 5.2. 是否存在一个有向完备偏序集 L 满足 $\upsilon(L) = \sigma(L)$，但不具备可控性?

问题 5.3. 设 X 是一个 T_0 空间，Y 是一个余诺特空间。赋予 Isbell拓扑的函数空间$[X \to Y]$ 是否是余诺特的?

参考

参考文献

[1] S. Abramsky 和 A. Jung，《域理论》，载于：S. Abramsky、D. M. Gabbay 和 T. S. E. Maibaum（编），《计算机科学逻辑手册》，牛津大学出版社，牛津，1995 年，第 1–168 页。

[2] O. T. Alas，R. G. Wilson，《紧致子集为闭集且集合上的T_1-拓扑格的空间》，《卡罗来纳大学数学评论》，2002，43(4)：641-652。

[3] B. A. Davey，H. A. Priestley，《格与序导论》。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。

[4] G. Gierz，K.H. Hofmann，K. Keimel，J.D. Lawson，M. Mislove，D.S. Scott，《连续格与域》，《数学及其应用百科全书》第93卷，剑桥大学出版社，2003年。[5]J. Goubault-Larrecq，《非豪斯多夫拓扑与域理论》，《新数学专著》第22卷，剑桥大学出版社，2013年。[6] R. Hartshorne，《代数几何》，施普林格出版社，纽约，1977年。[7] R. Heckmann，《幂域构造》，博士论文。Universit¨at des Saarlandes，1990年。[8] R. Heckmann，《以强紧集为基础的上幂域构造》，计算机科学讲义，598：272–293，1991年。[9] R. Heckmann，K. Keimel，《拟连续域与 Smyth 幂域》，《电子理论计算机科学札记》298（2013）215–232。[10] M. Hochster，《交换环中的素理想结构》。《美国数学会汇刊》，1969年，142，43–60页。[11] R. Hoffmann，《关于饱和化余项》 ${}^{s}X - X$，《太平洋数学杂志》83（1979）145–156。[12] R. Hoffmann，《偏序集的饱和化》，《半群论坛》17（1979）123–138。[13] P. T. Johnstone，《Stone 空间》，《剑桥高等数学研究丛书》，剑桥大学出版社，剑桥，1982年。[14] K. Keimel，J. Lawson，《D-完备化与 d-拓扑》，《纯粹与应用逻辑年刊》159（3），2009年，292–306。[15] J. Lawson，X. Xu，《由可数多个局部紧子空间确定的空间》，《Topology and its Applications》，2024年，354：108973。[16] J. Lawson，X. Xu，T_0-空间与下拓扑，《数学结构与计算机科学》，2024年：34（6），467–490。[17] J. Lawson，G. Wu，X. Xi，《良滤空间、紧性与下拓扑》，《休斯敦数学杂志》46（1）（2020）283–294。[18] Q. Li，Z. Yuan 和 D. Zhao，《关于若干非豪斯多夫拓扑性质的统一方法》，《数学结构与计算机科学》30（2020），9：997–1010。[19] B. Liu，Q. Li，G. Wu，《拓扑空间的良滤化》，《Topology and its Applications》279（2020）107245。[20] Z. Lyu，Y. Chen，X. Jia，《核紧性、协调性与 Smyth 幂空间》，《Topology and its Applications》312（2022）：108066。[21] H. Matsumura，《交换环论》，剑桥大学出版社，剑桥，1989年。[22] M. E. Rudin，《收敛的有向集》，《河滨拓扑与现代分析研讨会论文集》，1980年，305–307。

[23] C. Shen, X. Xi, X. Xu, D. Zhao，关于 T_0 空间的良滤反射，Topology and its Applications 267（2019年）106869。[24] L. Skula，关于所有拓扑空间范畴的一个反射子范畴，美国数学会汇刊，1969年，142：37-41。[25] A. Wilansky，介于 T_1 与 T_2 之间，《美国数学月刊》74（1967年），261–266。[26] C. Shen, X. Xi, X. Xu, D. Zhao，关于开良滤空间。逻辑方法与计算机科学 16（2020年）[27] X. Xi, J. Lawson，关于良滤空间与有序集，Topology and its Applications 228（2017年）：139-144。[28] X. Xu，《序与拓扑》，北京，科学出版社，2016年[29] X. Xu，强良滤空间与强 d-空间，Topology and its Applications，2025年：109654。[30] X. Xu, C. Shen, X. Xi, D. Zhao，关于由良滤空间决定的 T_0 空间，Topology and its Applications，282（2020年）：107323。[31] X. Xu, Y. Yang, L. Chen，上确界完备偏序集上拓扑的强良滤性，arXiv预印本，arXiv:2512.10599，2025年。[32] X. Xu, D. Zhao，关于拓扑 Rudin 引理、良滤空间与饱和空间，Topology and its Applications，272（2020年）：107080。[33] Z. Zhang, Q. Li，单调收敛空间完备化的直接刻画，Topology and its Applications 230（2017年）99–104。[34] D. Zhao, W. Ho，关于由不可约集定义的拓扑，逻辑与代数方法及程序学报 84(1)（2015年）185-195。