arXiv:2601.11121v1 [physics.flu-dyn] 16 Jan 2026

滚动摩擦对含颗粒流中孔隙堵塞影响的数值研究

Sagar G. Nayak[a, b, c]、Zhenjiang You[d]、Yuchen Dai[b]、Geoff Wang[b]、Prapanch Nair[c, *]

[a]昆士兰大学—德里印度理工学院（*UQ-IITD*）研究院，豪兹卡斯，新德里，*110016*，印度[b]昆士兰大学化学工程学院，圣卢西亚，*QLD*，*4072*，澳大利亚[c]德里印度理工学院应用力学系，豪兹卡斯，新德里，*110016*，印度[d]中国石油大学（北京）克拉玛依校区石油学院，新疆克拉玛依，*834000*，中国

摘要

注入多孔储层的流体中所含的颗粒物会因孔隙堵塞而在时空上降低储层的渗透率。随着孔喉附近的颗粒体积分数增加，颗粒间接触力学决定了颗粒的堵塞及后续孔隙堵塞行为。流体中的颗粒发生接触时，除了滑动摩擦外，多种微观力学和流体动力学因素还会产生滚动阻力。滚动摩擦系数常被用作综合参数，用以表征颗粒刚度、颗粒形状、润滑作用及流体介导阻力，但其对堵塞行为的直接影响尚未得到充分研究。我们采用直接数值模拟（DNS），研究孔隙尺度上滚动阻力对浓悬浮液堵塞行为的影响。我们开发了一个离散元法（DEM）库，并将其与基于开源浸入边界法（IBM）的求解器耦合，以开展孔隙和颗粒分辨模拟。文中给出了针对离散元法库的多项三维验证，并

*通讯作者：pnair@am.iitd.ac.in；电话：+91 11 2659 1226

研究了离散元法-浸入边界法耦合以及滚动阻力对孔隙入口处堵塞的影响。

关键词：颗粒流、浸入边界法、离散元法、滚动摩擦、多孔介质

---

1. 引言

含颗粒流在狭窄通道中流动的现象常见于自然过程和工业过程中。这些系统面临的一个主要问题是颗粒滞留并在不利位置累积，这通常称为堵塞。堵塞会导致渗透率不可逆地下降（也称为地层伤害 [1]），在地热储层 [2], 、石油和天然气开采田 [3] 及碳封存场地等地下应用中尤为如此，并显著影响流体输运。地层伤害会增加输送流体所需的泵送功率 [4], ，导致运营成本上升，并可能造成储层弃置。要高效、可靠地设计控制机制，深入理解堵塞机制至关重要。

颗粒在孔道中迁移时，遇到以下三种情况之一或多种情况便会停下：（i）单个颗粒大于通道宽度，因而被“卡住” [5],；（ii）多个小颗粒同时到达，在通道上形成“桥接” [6], ；（iii）颗粒因静电吸引而附着于孔壁，导致通道宽度逐渐减小 [7]。其中，第二种机制，即架桥，会造成突发性流动阻塞，其发生受流量、颗粒体积分数以及颗粒与收缩段尺寸比的非线性影响 [8, 9], ，因此难以预测。

大多数实验　实验研究仅限于测量入口至出口的颗粒　e

浓度变化，因为系统的三维性和不透明性使得堵塞现象难以可视化。虽然这些测量可以估算系统内部的狭窄部 [10], 但无法揭示实际的堵塞机制。近期，研究人员使用二维透明微流控池来考察瓶颈 [11],喷嘴 [12] 以及类似多孔结构中的颗粒堵塞现象 [8], 。然而，由于缺少第三维，其结论可能并不完整。数学模型也广泛应用于各种不同场景 [13, 14, 15]。不过，这些模型缺乏对堵塞机制的颗粒尺度描述。

在颗粒和孔隙尺度上，研究人员采用了多种数值方法来研究颗粒输运，例如完全欧拉方法 [16], 完全拉格朗日方法 [17], 以及混合方法 [18]。在混合方法中，将离散元法（DEM）[19]与传统计算流体力学（CFD）求解器进行双向耦合是一种常见选择 [20]。在这种 CFD-DEM 方法中，流体动力决定颗粒轨迹，而颗粒会扰动局部流场。在 CFD-DEM 中，颗粒形状既可以通过 CFD 网格充分解析，也可以建模为亚网格尺度点颗粒。未解析求解器通过动量交换项实现颗粒与流体之间的信息传递，而解析求解器则对颗粒表面上的流体力进行积分，以计算流体动力。即使在未解析的 CFD-DEM 模拟中，Shahzad 等人 [21] 也得出结论：与二维相比，较大的颗粒聚集体会导致三维中的堵塞。未解析方法也被用于捕捉岩石中的堵塞和颗粒滞留 [22], 、填充床中的堵塞和颗粒滞留 [23], 、收缩通道中的堵塞和颗粒滞留 [9] 以及膜污染过程中的堵塞和颗粒滞留 [24]。尽管未解析方法比解析方法成本低，但会导致流场预测出现偏差 [25]。

颗粒解析CFD-DEM也得到了广泛应用。Kermani 等人 [26] 研究了颗粒

运移在二维收缩通道中的情况，采用的是颗粒分辨模拟。尽管模拟揭示了导致堵塞的事件，但在预测堵塞后的流场方面仍有不足，因为二维堵塞会完全阻断流动，而三维堵塞情形仍允许间隙流通过。近期已有研究采用颗粒分辨模拟，探讨收缩通道 [9], 代表性孔隙结构 [25] 和多孔介质中的堵塞 [27]。这些研究考虑了流量、颗粒浓度、颗粒与孔喉尺寸比、离子强度等参数。

在较小的长度尺度（$< 100\,\mu$m）下，范德华力和静电力等非接触力变得显著 [28] ，并会引发颗粒架桥，最终导致堵塞[29, 26, 25]。然而，在较大的长度尺度（$> 100\,\mu$m）下，这些力微不足道，而导致架桥和堵塞的机制仍未得到充分研究。

对颗粒流经料斗类系统的干颗粒流研究表明，颗粒之间以及颗粒与壁面之间的滚动阻力在孔喉附近发生堵塞的过程中起主导作用 [30, 31]。在浓悬浮液中，尽管已有一些研究考察了滑动摩擦的影响 [16], ，滚动对堵塞的影响仍未得到研究。本文通过研究滚动阻力在孔隙堵塞中的作用，填补这一空白。

我们首先在第2节讨论浸入边界法（IBM）-离散元法方法的发展。浸入边界法有助于处理颗粒几何形状周围及孔隙中的完全解析流动，而离散元法则有助于模拟颗粒-颗粒和颗粒-壁面相互作用。浸入边界法方法通过开源的浸入边界自适应网格细化库（IBAMR） [32]实现。为此，我们集成了自行开发的离散元法库，以实现所提出的浸入边界法-离散元法方法。该库也以开源形式提供，供读者使用。随后，我们在第3节进行了若干典型测试

以展示该公式的可靠性。在第4节中，我们设计了测试案例，以研究滚动摩擦对孔隙堵塞的影响，并讨论了相关结果。在第5节中，我们总结了本研究所得的见解，以此结束本文。

2. 方法论

本节将介绍所提出的浸入边界法-离散元法技术的数学表述。首先给出流固耦合的控制方程，并介绍使用浸入边界法对其进行数值求解。随后解释颗粒流中涉及的不同类型接触力及其计算方法。最后讨论离散元法解与流体流动控制方程的耦合。对于矢量量，我们使用粗体字母和符号；对于标量，则使用常规字母和符号。

2.1. 浸入边界法

对于在欧拉参考系中与刚性固体相互作用的等温不可压缩流体，其流固耦合控制方程为

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + (\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \right) = -\nabla p(\mathbf{x},t) + \mu_f \nabla\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{f}_b(\mathbf{x},t), \tag{1}$$

and

$$\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \tag{2}$$

在流体域 $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}\in\mathbb{R}^3$) 中，其边界处具有适当的流动边界条件$\partial\mathcal{U}$。 $\mathcal{U}$ 被划分为时变子域，即流体子域 $\mathcal{U}_f$ 和固体子域 $\mathcal{U}_b$ ，使得 $\mathcal{U}=\mathcal{U}_f\cup\mathcal{U}_b$。此外，浸入结构的拉格朗日描述通过

材料坐标系 Ω_b ($\Omega_b \in \mathbb{R}^3$) 得以实现。在方程 1 和 2 中，$\mathbf{u}(\mathbf{x}\ t)$ 和$p(\mathbf{x}\ t)$ 分别表示位置 $\mathbf{x}$ 处时间 t 的速度向量和压力。 ρ_f 是均匀流体密度， μ_f 是均匀流体黏度。由浸入结构引起的单位体积体力（力密度）$\mathbf{f}_b(\mathbf{x}\ t)$ 可计算为

$$\mathbf{f}_b(\mathbf{x},t) \equiv \sum_l \mathbf{F}_b(\mathbf{s}_l,t)W(\mathbf{x}-\mathbf{X}(\mathbf{s}_l,t))d\mathbf{s}_l \approx \int_{\Omega_b} \mathbf{F}_b(\mathbf{s},t)W(\mathbf{x}-\mathbf{X}(\mathbf{s},t))d\mathbf{s}. \tag{3}$$

这里将结构离散为一组标记点 $\{\mathbf{s}_l\}_{l=1}^n$，其中 l 表示 Ω_b 中标记点的索引。$\mathbf{F}_b(\mathbf{s}_l,t)$ 是在结构参考系中位于$\mathbf{s}_l$ 处的离散标记点上指定的力密度。

此外， W 是一个用于逼近狄拉克δ函数的平滑归一化核函数。在本研究中，我们将方程 3 中的体力$\mathbf{F}_b(\mathbf{s}_l,t)$ 表述为两个不同力之和，与 [33] 类似。即，

$$\mathbf{F}_b(\mathbf{s}_l,t) = \mathbf{F}_c(\mathbf{s}_l,t) + \mathbf{F}_{\text{col}}(\mathbf{s}_l,t), \tag{4}$$

其中，$\mathbf{F}_c(\mathbf{s}_l,t)$ 是方程 6 中为施加刚性约束所需的力。该力通过拉格朗日乘子法 [34, 35] 计算。我们引入$\mathbf{F}_{\text{col}}$，以计入颗粒间碰撞以及粒子与壁面碰撞所产生的力。

流体的欧拉参考系中的速度可用于求得拉格朗日标记点的速度，如下所示：

$$\mathbf{U}(\mathbf{s},t) = \int_{\mathcal{U}_\text{b}} \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(\mathbf{s},t))\text{d}\mathbf{x}. \tag{5}$$

这里，体积 假设 $\text{me}\,\mathcal{U}_b$ 中充满了遵循约束条件的虚拟流体 t

刚体运动 [34]。也就是说，

$$\frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^{T}\right]=\frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{u}_{\mathrm{k}}+\nabla\mathbf{u}_{\mathrm{k}}^{T}\right]\qquad\text{in }\mathcal{U}_{\mathrm{b}},\tag{6}$$

其中，$\mathbf{u}_{\mathrm{k}}=\mathbf{u}_{\mathrm{k}}(\mathbf{s}\ t)$ 是物体的给定速度。对于运动不受约束的中性浮力物体，$\mathbf{u}_{\mathrm{k}}$ 是由流体阻力产生的速度。除非另有说明，我们假设采用无滑移边界条件。

如前所述，本节介绍的浸入边界法通过 IBAMR 库 [32] 实现。有关离散化和软件实现等更多信息，请参阅 [36]。此外，我们使用离散元法（DEM） [37] 计算方程 4 中的 $\mathbf{F}_{\mathrm{col}}$。以下各节将介绍使用 DEM 进行力计算及其与浸入边界法（IBM）的耦合细节。

2.2. 离散元法

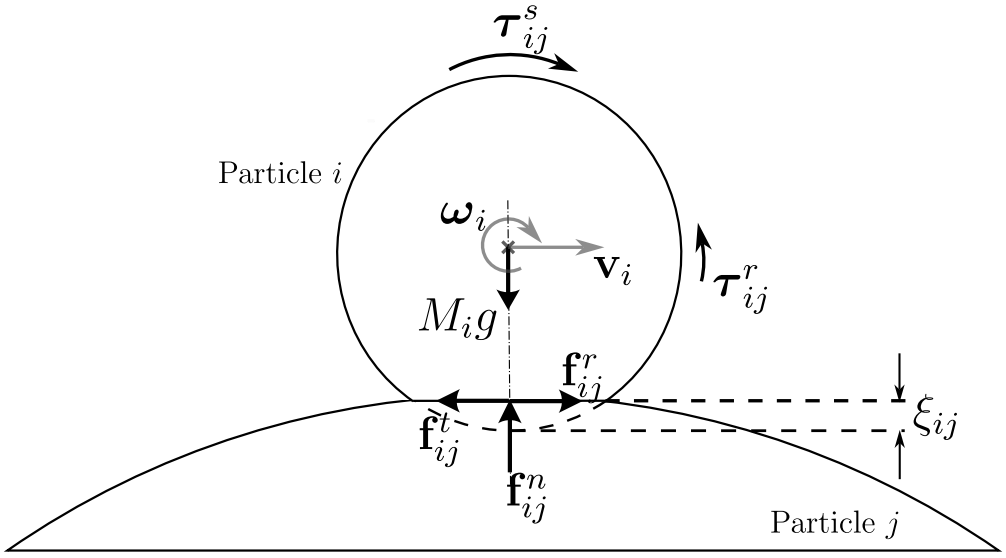


图 1：颗粒在碰撞过程中所受的力和力矩。

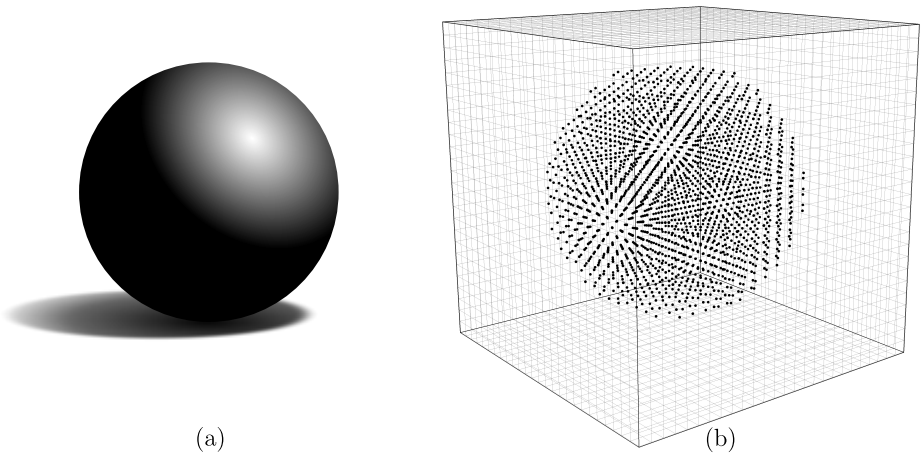


图 2：通过 (a)离散元法和 (b)浸入边界法对颗粒的解释

我们假设所有颗粒均为球形，且所有颗粒-颗粒和颗粒-壁面相互作用均为赫兹型。发生碰撞时，接触力可分解为法向分量（$\mathbf{f}^n$）和切向分量（$\mathbf{f}^t$）。颗粒 i 和 j 在碰撞过程中产生的微小变形近似表示为赫兹重叠量（ξ_{ij}）（见图1）。随后，我们根据 ξ_{ij} 和颗粒的材料属性计算法向力 $\mathbf{f}_{ij}^n$，其表达式为

$$f_{ij}^n = \max\left\{0, \left[\frac{2}{3}\frac{Y\sqrt{R_{ij}^{\text{eff}}}}{(1-\nu^2)}\left(\xi_{ij}^{3/2} + A\sqrt{\xi_{ij}}\dot{\xi}_{ij}\right)\right]\right\}, \tag{7}$$

其中，Y 为杨氏模量，ν 为泊松比，A 为耗散常数，$R_{ij}^{\text{eff}} = \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j}\right)^{-1}$为相互作用颗粒的有效半径，$R_i$ 和 R_j 分别为颗粒 i 和 j的半径。重叠量 ξ_{ij} 的计算公式为:

$$\xi_{ij} = R_i + R_j - ||\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j||, \tag{8}$$

算法1 IBM-DEM流动指令

$t \leftarrow 0$
初始化**r**、**u(x)**和 p**(x)**。
用拉格朗日标记点填充颗粒和结构。
当 $t \leq t_{end}$，**执行**
  将**u** 插值到标记点上，得到**U(s** t**)**（式5）。
  计算颗粒速度（**v** 和 $\boldsymbol{\omega}$）。
  当 $\theta \leq \mathrm{ceil}\left(\frac{\Delta t_{\mathrm{CFD}}}{\Delta t_{\mathrm{DEM}}}\right)$ **时**
    初始化 $\mathbf{f}_i \leftarrow 0$, $\boldsymbol{\tau}_i \leftarrow 0$
    预测 $\mathbf{r}^*$, $\mathbf{v}^*$, 并且 $\boldsymbol{\omega}^*$
    对每个颗粒 i，**执行**
      对于每个相邻颗粒 j **执行**
        if $\xi_{ij} > 0$ **然后**
          根据公式 7-20 计算 $\mathbf{f}_i$ 和 $\boldsymbol{\tau}_i$。
        结束 if
      结束 for
    结束 for 循环
    校正 $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, 以及 $\boldsymbol{\omega}$
    $c \leftarrow c + 1$
  结束 while 循环
  更新标记点的位置 **(s)**
  根据公式 23–26 将力分配到标记点上。
  根据式 3，将力从标记点分配到欧拉网格。
  更新 **u(x** t**)** 和 p**(x** t**)**
  $t \leftarrow t + \Delta t_{\mathrm{CFD}}$
结束循环

离散元法循环

其中，$\mathbf{r}_i$ 和$\mathbf{r}_j$ 分别为颗粒 i^{th} 和 j^{th} 质心的位置向量。方程 7 中的重叠量变化率 ξ_{ij}为:

$$\dot{\xi}_{ij} = -\mathbf{v}_{\mathrm{rel},ij} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{ij}^{n}, \tag{9}$$

其中$\mathbf{v}_{\mathrm{rel,ij}} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ 是接触颗粒的相对速度，$\hat{\mathbf{e}}^n$ 是单位法向量 .

在方程 7 中，如果相互作用颗粒的材料属性（Y 和 ν）不同，则必须考虑有效属性（Y_{eff}、ν^{eff}）。在本研究中，我们假设所有颗粒和壁面都具有相同的材料属性。请注意，方程 7 给出了法向力的大小。法向力矢量$\mathbf{f}_{ij}^{n}$ 可计算为:

$$\mathbf{f}_{ij}^{n} = f_{ij}^{n} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{ij}^{n}. \tag{10}$$

在斜碰撞过程中，由于表面纹理 [37]，相互作用颗粒还会受到切向力（$\mathbf{f}_{ij}^{t}$）。我们采用 Haff 和 Werner 模型 [38] ，将切向力建模为接触点处切向相对速度（$\mathbf{v}_{\text{rel, }ij}^{t}$）的函数。

$$\mathbf{f}_{ij}^{t} = -\left(\frac{\mathbf{v}_{\text{rel},ij}^{t}}{|\mathbf{v}_{\text{rel},ij}^{t}|}\right) \min(\gamma^{t}|\mathbf{v}_{\text{rel},ij}^{t}|, \mu|\mathbf{f}_{ij}^{n}|), \tag{11}$$

其中，γ^{t} 和 μ分别为常数黏性阻尼系数和滑动摩擦系数。相对速度的切向分量$\mathbf{v}_{\text{rel, }ij}^{t}$计算如下:

$$\mathbf{v}_{\text{rel},ij}^{t} = \mathbf{v}_{\text{rel},ij} - (\mathbf{v}_{\text{rel},ij} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{ij}^{n})\hat{\mathbf{e}}_{ij}^{n} + (R_i\boldsymbol{\omega}_i + R_j\boldsymbol{\omega}_j) \times \hat{\mathbf{e}}_{ij}^{n}. \tag{12}$$

请注意，方程11中的切向力受库仑摩擦定律限制。由于颗粒 i 与颗粒 j 之间的成对相互作用，作用于颗粒 i 上的合力是法向力和切向力之和，

$$\mathbf{f}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{f}_{ij}^{n} + \mathbf{f}_{ij}^{t}, & \text{if } \xi_{ij} > 0 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{13}$$

切向力 $\mathbf{f}_{ij}^{t}$ 产生滑动摩擦力矩 $\boldsymbol{\tau}_{ij}^{s}$（见图1），其计算方式为，

$$\boldsymbol{\tau}_{ij}^{s} = \mathbf{f}_{ij}^{t} \times (-R_{ij}^{\text{eff}} \hat{\mathbf{e}}_{ij}^{n}). \tag{14}$$

方程 14 中出现负号，是因为半径矢量沿径向向外计算，而 $\hat{\mathbf{e}}_{ij}^{n}$ 的方向朝内。

颗粒在表面上滚动时，除了受到滑动摩擦外，还会因微滑动、黏附、形状变形等产生滞后效应。这会产生额外的力矩，阻碍颗粒的滚动运动。此阻力矩在下文中称为滚动阻力 $\boldsymbol{\tau}_{ij}^{r}$，并使用 Luding 模型 [39] 计算。我们首先计算滚动伪力：

$$\mathbf{f}_{ij}^{r} = k^{r} \boldsymbol{\xi}_{ij}^{r} - \gamma^{r} \mathbf{v}_{ij}^{r}, \tag{15}$$

其中，k^{r} 为滚动刚度，γ^{r} 为滚动的黏性阻尼常数，$\mathbf{v}_{ij}^{r} = -R_{i}(\boldsymbol{\omega}_{i} - \boldsymbol{\omega}_{j}) \times \hat{\mathbf{e}}_{ij}^{n}$ 为相对滚动速度，而 $\boldsymbol{\xi}_{ij}^{r}$ 为两个时刻 t_1 和 t_2 之间的滚动位移，定义为

$$\boldsymbol{\xi}_{ij}^{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}_{ij}^{r} dt, \tag{16}$$

在时间段 Δt_{DEM} 内，其数值近似为 $\boldsymbol{\xi}_{ij}^{r} \approx \mathbf{v}_{ij}^{r} \Delta t_{\text{DEM}}$。方程 15 中的“滚动伪力”之所以如此命名，是因为它不会对任一颗粒所受的总力产生贡献 [40]。此外，$\mathbf{f}_{ij}^{r}$ 受库仑摩擦准则限制。

即,

$$\mathbf{f}_{ij}^{r} = \min(\mu^{r} f_{ij}^{n}, ||\mathbf{f}_{ij}^{r}||)\mathbf{k}, \tag{17}$$

其中，$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{v}_{ij}^{r}}{||\mathbf{v}_{ij}^{r}||}$ 是$\mathbf{f}_{ij}^{r}$的方向。

因此，滚动摩擦产生的力矩可表示为:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij}^{r} = \mathbf{f}_{ij}^{r} \times (-R_{ij}^{\mathrm{eff}} \hat{\mathbf{e}}_{ij}^{n}). \tag{18}$$

总　　由于颗粒 i 与颗粒 j 之间的相互作用而作用于其上的力矩为:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \boldsymbol{\tau}_{ij}^{s} + \boldsymbol{\tau}_{ij}^{r}. \tag{19}$$

请注意，方程 13 和 19 分别表示由于颗粒i 与颗粒 j之间的相互作用而作用于颗粒上的力和力矩。因此，对于由 N_p 个颗粒组成的系统，作用于颗粒 i 上的总力和力矩为:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i} &= \sum_{j=1, j\neq i}^{N_p} \mathbf{f}_{ij}, \\ \boldsymbol{\tau}_{i} &= \sum_{j=1, j\neq i}^{N_p} \boldsymbol{\tau}_{ij}. \end{aligned} \tag{20}$$

颗粒-壁面相互作用可以使用与 7-19 类似的方程进行建模。壁面可视为具有无限半径的颗粒。本研究中考虑的壁面是静止的、平坦的，并且具有与颗粒相同的材料属性。 i^{th} 颗粒因与壁面碰撞而受到的总力和力矩也会被加到 20 中相应方程的右端。最后，颗粒的位置和平动速度可以

根据下式计算：

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= \frac{\mathbf{f}_i}{M_i}, \\ \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= \mathbf{v}_i, \end{aligned} \tag{21}$$

此外，（假设颗粒为球形）角位置和角速度可由下式计算：

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} &= \frac{\boldsymbol{\tau}_i}{I_i}, \\ \frac{d\boldsymbol{\theta}_i}{dt} &= \boldsymbol{\omega}_i, \end{aligned} \tag{22}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}_i$、$\boldsymbol{\theta}_i$、M_i 和 I_i 分别为颗粒 i 的角速度、角位置、质量和转动惯量。

我们采用 Gear 积分格式求解方程 21 和 22。Gear 积分格式采用预测-校正方法，首先利用截断的泰勒级数展开预测颗粒的位置、速度、加速度等。随后利用方程 7–20 计算力和力矩。根据新的力和力矩，计算修正后的线加速度和角加速度。最后，利用修正后的加速度与预测加速度之间的误差来修正位置和速度，并不断重复这一过程。该算法见 1。

2.3. 浸入边界法与离散元法的耦合

离散元法将颗粒视为离散物体（见图 2 (a)），而浸入边界法则将其视为拉格朗日标记点的集合（见图 2(b)）。第 §2.2 节讨论的所有力$\mathbf{f}_i$ 和力矩 $\boldsymbol{\tau}_i$ 均针对每个颗粒 i 进行计算，而方程 4 中讨论的碰撞力则指作用于颗粒内每个拉格朗日标记点上的力。力和

由离散元法计算得到的力矩（$\mathbf{f}_i$ 和 $\boldsymbol{\tau}_i$）分配给每个拉格朗日标记点 l，表示为$\mathbf{F}_{col}$（$\mathbf{s}_l$， t）。

根据方程20计算得到的作用于该离散元颗粒上的力，分配到其各个组成拉格朗日标记点上，如下所示：

$$\bar{\mathbf{F}}_i^l = \frac{\mathbf{f}_i}{n_i}, \tag{23}$$

其中， n_i 是该离散元颗粒中的拉格朗日标记点数量。

作用于每个颗粒的力矩会转换为作用于各标记点上的等效力系。如果 $\boldsymbol{\tau}_i$ 是作用于该 i^{th} 颗粒的力矩，那么该颗粒中 l^{th} 标记点所受的等效力为：

$$\tilde{\mathbf{F}}_i^l = \frac{|\boldsymbol{\tau}_i|}{\sum_{l=1}^{n_i} ||\mathbf{X}_i^l - \mathbf{r}_i||} \hat{\boldsymbol{\eta}}_i^l, \tag{24}$$

其中，$\mathbf{X}_i^l$ 是 l^{th} 标记点的位置矢量，$\mathbf{r}_i$ 是该 i^{th} 颗粒的位置矢量，$\hat{}\boldsymbol{\eta}$ 是力的方向，可按下式计算：

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_i^l = \frac{\mathbf{X}_i^l \times \hat{\mathbf{a}}_i}{|\mathbf{X}_i^l \times \hat{\mathbf{a}}_i|}, \tag{25}$$

其中，$\hat{}\mathbf{a}_i$ 是颗粒的旋转轴，可根据其角速度按下式计算：

$$\hat{\mathbf{a}}_i = \frac{\boldsymbol{\omega}_i}{|\boldsymbol{\omega}_i|}.$$

方程 24 和 25 的推导可参见§附录 A。

最后，碰撞力 $\mathbf{F}_{col}$ 计算如下：

$$\mathbf{F}_{col}(\mathbf{s},t) = \bar{\mathbf{F}}_i^l + \tilde{\mathbf{F}}_i^l. \tag{26}$$

接触力的演化发生在较短的时间尺度上。为解析这些力并满足“小”变形假设，离散元法所需的时间步长远小于浸入边界法。这样会缩小整个算法的时间步长，进而增加计算成本。为避免这一问题，计算流体力学-离散元法中通常采用两个不同的时间步长，分别用于流体求解器和离散元求解器。除非另有说明（见算法1），本研究将离散元法时间步长（Δt_{DEM}）设为浸入边界法时间步长（Δt_{CFD}）的百分之一。

为进一步降低计算成本，离散元求解器通常每隔几个流体时间步长与流体求解器耦合一次，通常为 $\sim 50-100$ 个流体时间步长 [9]。然而，我们没有采用这一策略，因为它会牺牲精度。我们在每个流体时间步长都将离散元法循环与流体求解器耦合（见算法1）。

§2.1 中介绍的浸入边界法方法已集成于经过充分验证的开源框架 IBAMR [36]。§2.2 中介绍的离散元法及其与 IBAMR 框架的耦合（如 §2.3 所述）已在一款开源代码中实现 [41]。该代码的后续开发可在公开的 GitHub 仓库 https://github.com/nayaksagar/PRELIMPFlow 中追踪。

3. 验证

本节通过考察在孔隙堵塞现象中发挥重要作用的各项物理效应，验证所开发的颗粒分辨浸入边界法–离散元法（见第 2.2 和 2.3 节）

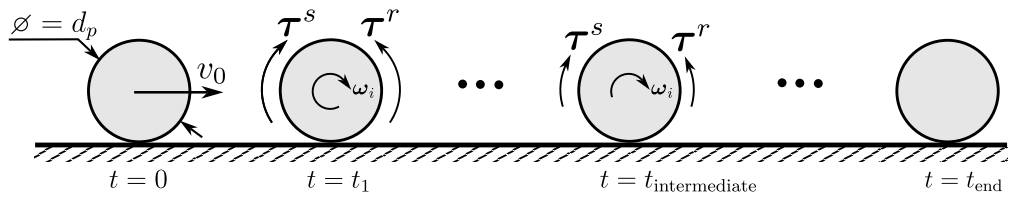
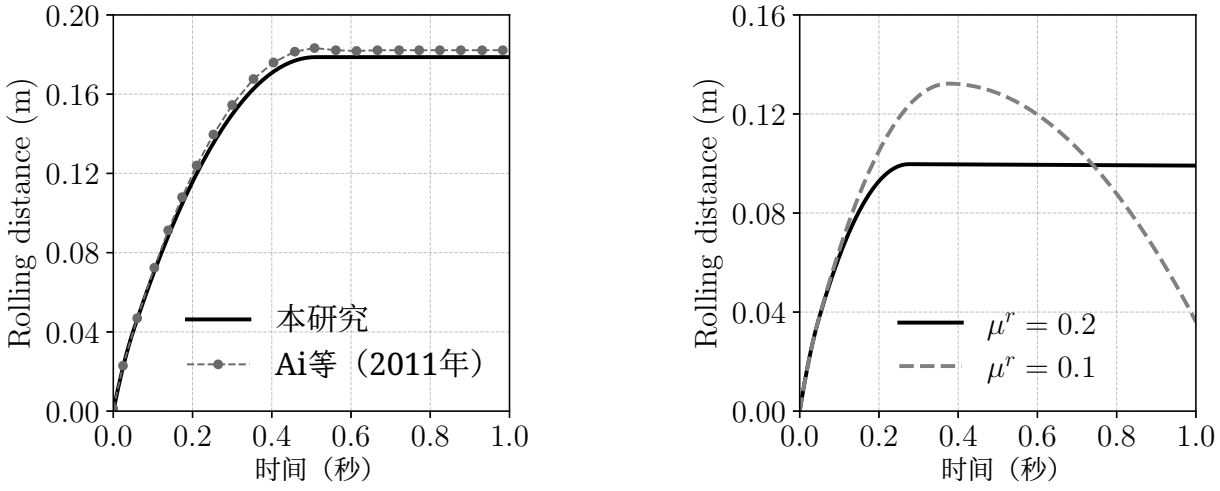


图3：圆盘在平坦表面上滚动的示意图



(a)

(b)

图4：圆盘在（a）平面上滚动——圆盘的行进距离与[42]的对比；以及（b）倾斜平面上滚动——不同滚动摩擦系数下圆盘的行进距离

。为验证滚动阻力，我们在第 3.1 和 3.2 节中模拟圆盘和球体在平面基底上的干滚动，且不考虑环境流体。随后，我们研究流体浸没条件下的颗粒动力学场景：第 3.3 节中的颗粒静态堆积内流动、第 3.4 节中的颗粒沉降，以及第 3.5 节中一对球形颗粒的拖曳-接触-翻滚和孔隙附近颗粒的堵塞。

3.1. 圆盘的干滚动

我们模拟圆盘在平坦表面和倾斜表面上的滚动。 [42] 中使用了这些测试案例来研究不同的滚动摩擦模型。

3.1.1. 在平坦表面上

将直径为 $d_p = 10mm$ 、厚度为 $t_d = 6.67mm$ 的圆盘（材料属性：密度 $\rho_s = 1056\ kg/m^3$、杨氏模量 $Y = 40$兆帕、泊松比 $\nu = 0.49$、滑动摩擦系数 $\mu = 0.8$、滚动摩擦系数 $\mu^r = 0.2$）从较低高度处（在恒定重力加速度 $g = 9.81\text{m/s}^2$ 作用下）释放，使其落到平坦表面上，并达到平衡。达到平衡后，开始测量时间（即 $t = 0$），并赋予圆盘质心初始平动速度 $v_0 = 1\text{m/s}$，方向为 x。模拟采用时间步长 $\Delta t_{\text{DEM}} = 10^{-5}$ s。由于圆盘与平坦表面接触处的水平滑动摩擦（等效表示为力矩 $\boldsymbol{\tau}^s$），圆盘开始在 $x - y$ 平面内滚动。由于圆盘与基底之间并非点接触，会产生偏心法向反作用力，等效地提供一个与 $\boldsymbol{\tau}^s$ 相反的力矩 $\boldsymbol{\tau}^r$ （如图 3 所示）。因此，圆盘逐渐减速并最终停止滚动。

对于此情况，我们仅运行算法1的离散元法循环，并在公式22中使用圆盘的转动惯量，即 $I = (1/2)MR^2$。圆盘的厚度使其体积等于相同半径球体的体积。图4a展示了圆盘行进距离的时间演化，并与 Ai 等人 [42] 的结果进行了验证。

3.1.2. 在倾斜平面上

与滑动摩擦系数（μ）类似，滚动摩擦系数（μ^r）定义为平面倾角（α）的正切值；当重力矩克服滚动阻力矩并使圆盘（或球体）沿斜坡滚下时，该倾角即为此倾角。换言之，对于任意倾角 α，如果满足以下条件，圆盘（或球体）将沿斜坡滚下：

$$\mu^r \leq \tan(\alpha).$$

为对此进行测试，将一个圆盘（除 μ^r外，其属性与§3.1中的相同）从倾斜平面上的一小段高度处释放（$\alpha = 10^\circ$，带有 x轴），使其达到平衡（重力加速度恒定为 $g = 9.8$ $\mathrm{m/s^2}$）。在下落和平衡过程中，限制其沿 x方向的任何运动。达到平衡后，赋予圆盘一个 $v_0 = 1\mathrm{m/s}$的初始平动速度，方向平行于平面。

图4b显示了不同滚动摩擦系数（μ^r）下圆盘行进距离的时间演化。当 $\mu^r = 0.2$ （即 $>$ tan(α)）时，圆盘沿斜坡向上滚动，停止后不会滚回。然而，当 $\mu^r = 0.1$ （即 $<$tan(α)）时，圆盘沿斜坡向上滚动，并如预期般滚回。

3.2. 球体在平坦表面上的干滚动

这里，我们模拟干燥球体在平坦表面上的滚动，并将结果与圆盘进行比较。球体的尺寸和材料属性与第 §3.1 节中圆盘的相同，其转动惯量取为 $(2/5)MR^2$。由于球体和圆盘的半径与质量相同，二者受到的力矩也相同，如图5b所示。然而，由于球体的转动惯量相对较小，预计它会行进

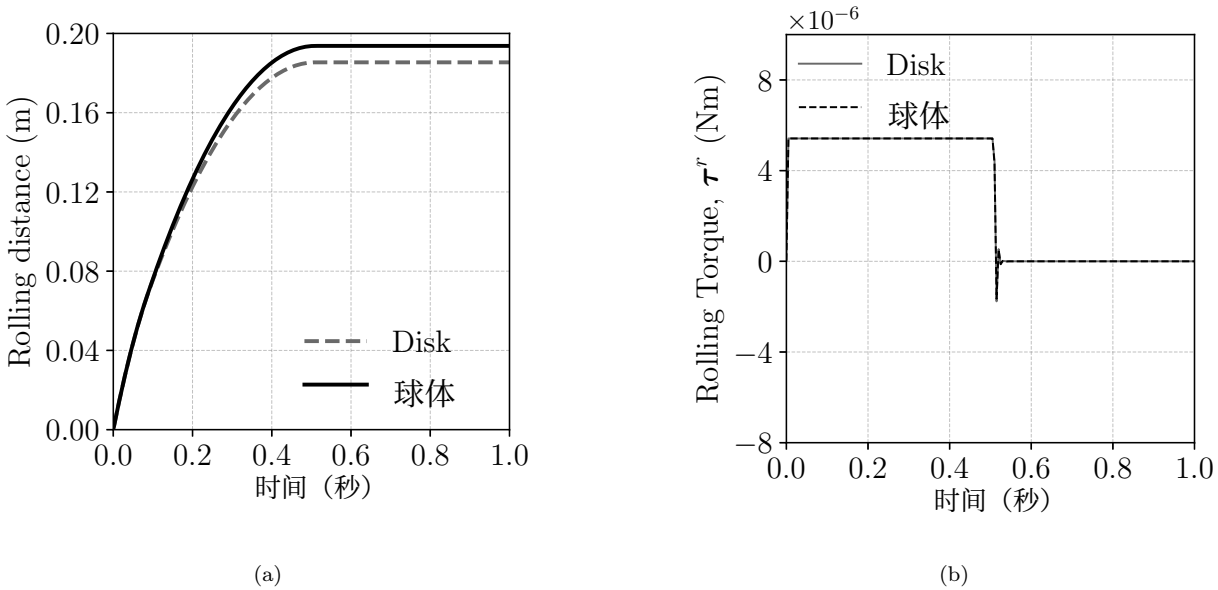


图 5：滚动摩擦作用下球体在平坦表面上的滚动。(a) 行进距离和 (b) 球体所受滚动摩擦力矩的时间演化，并与等半径、等体积圆盘所受的滚动摩擦力矩进行比较。

更长的距离，这一点在图5a中有所体现。

3.3. 颗粒堆积中的压降

当流体流经堵塞系统中颗粒堆积这类多孔介质时，介质所产生的阻力会使其两端出现压降。Ergun [43] 提出了一个模型，用于描述堆积的单位长度压降（L）与孔隙率（ϵ）、组成颗粒的有效颗粒直径（d_p）、流体性质（ρ_f,μ_f）以及表观速度（v_s）之间的关系：

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{150\mu_f v_s}{d_p^2}\frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3} + \frac{1.75\rho_f v_s^2}{d_p}\frac{(1-\epsilon)}{\epsilon^3}. \tag{27}$$

我们模拟了 t 流体流经由静止颗粒堆积而成的区域。颗粒尺寸为 $d_p =$

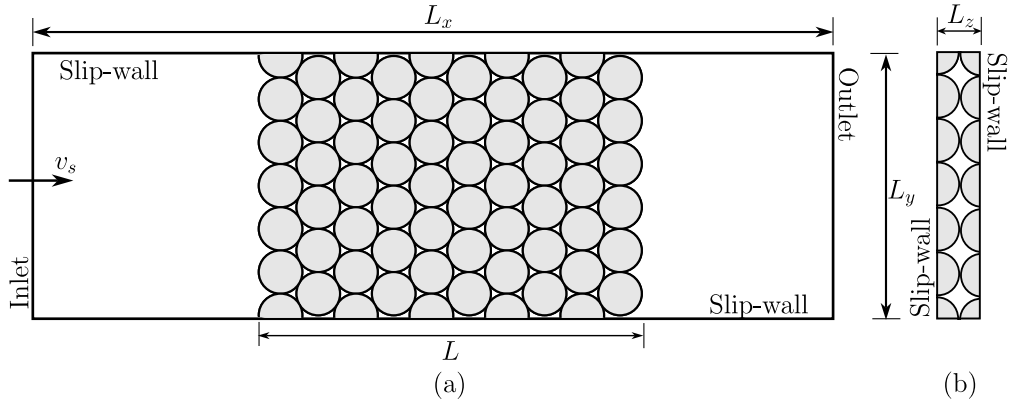
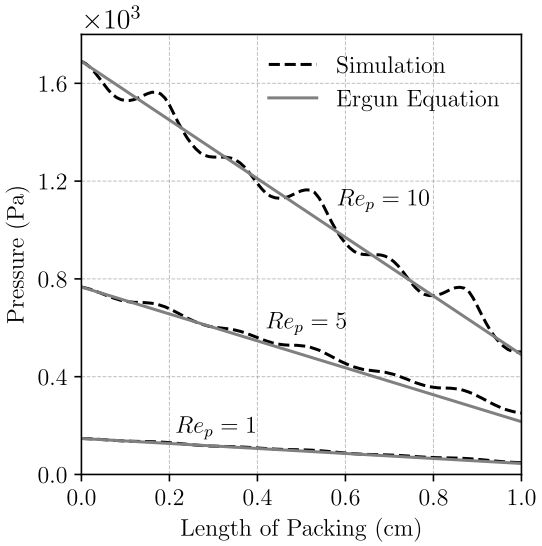


图6：颗粒堆积压降测试的计算设置。(a) 前视图，(b) 侧视图。



填充床沿程模拟压力与Ergun方程的对比 [43]，针对不同的颗粒雷诺数$Re_p = \frac{\rho_f v_s d_p}{\mu_f}$。

0.2 cm，堆积在一个 $3.6 \times 1.2 \times 0.2\,\mathrm{cm}^3$ 的计算域中，如图 6 所示。流体（$\rho_f = 1000\mathrm{kg/m}^3$，$\mu_f = 0.01\mathrm{Pa\,s}$）以速度 v_s 从左边界进入，流经填充床后从右边界流出。为尽量减小壁面效应，我们对所有其他边界均施加滑移边界条件，并以如下方式排列颗粒

表1：颗粒沉降测试的参数。

Re_p	ρ_f (kg/m^3)	μ_f (10^{-3}Pa。s)	u_∞ (m/s)
4.1	965	212	0.06
11.6	962	113	0.091
31.9	960	58	0.128

孔隙在第三维中靠近中心对齐（见图6（b））。

堆积的孔隙率为 $\epsilon = 40.76\%$，尺寸为 $L = 1.758$cm。计算域被离散为 $144 \times 48 \times 8$ 个网格单元。针对不同的颗粒雷诺数（Re_p），沿堆积长度方向的水平线上测量压力，并与根据方程27预测的结果进行比较。通过改变入口速度 v_s 以获得不同的 Re_p。所得曲线如图7所示，验证了浸入边界法（IBM）在IBAMR中的实现可有效模拟多孔介质中的流动。

3.4. 单颗粒沉降

在验证了离散元法的实现后，我们现在测试浸入边界法-离散元法耦合算法的可靠性。首先进行的测试是在封闭容器中，牛顿流体内一个球形颗粒在重力作用下的沉降。

直径为 $d_p = 15mm$、密度为 $\rho_s = 1125kg/m^3$ 的球体被放置在大小为 $10 \times 16 \times 10$ cm^3 的计算域中的 (5,12, 5) 处，并在重力 (g =9.81m/s^2) 作用下沉降。采用 $100 \times 160 \times 100$ 的均匀网格，流体时间步长设为 $\Delta t_{\mathrm{CFD}} = 10^{-4}$。由于本测试中不会发生颗粒-颗粒或颗粒-壁面相互作用，因此无需选择 Δt_{DEM}。按照 Apte 等 [44] 的方法，我们针对三种不同的颗粒雷诺数 ($Re_p = \rho_f u_\infty d_p/\mu_f$) 重复此测试：4.1、11.6 和 31.9。这些雷诺数

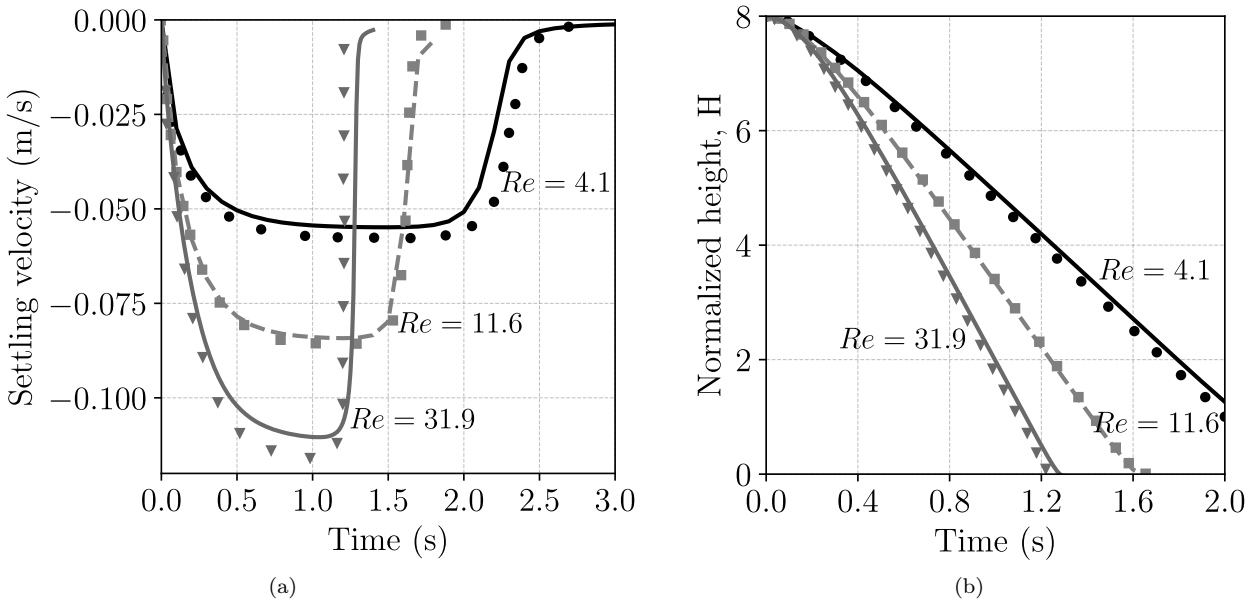


图8：不同雷诺数下颗粒在黏性流体中的沉降。(a) 沉降速度和 (b) 归一化高度的时间演化 $\left(H = \frac{h-0.5d_p}{D_p}\right)$。（线条：当前模拟；符号：Apte 等 [44]）

通过改变流体密度和黏度获得，如表1所示。

跟踪颗粒的沉降速度（即 y 方向的速度）和归一化垂直位置（$H = \frac{h-d_p}{d_p}$），并绘制其随时间的变化。图8a和图8b展示了不同雷诺数下的这些曲线（线条）。IBM-DEM 的预测结果与 [44] （符号）吻合良好。

3.5. 拖曳-接触-翻滚

为进一步验证该方法，我们进行了广为人知的“拖曳-接触-翻滚”测试。两个尺寸（$d_p = 1/6$厘米）和材料相同、初始时在垂直方向上相隔一定距离的球形颗粒，在充满牛顿流体（$\rho_f = 1000$千克/米^3，$\mu_f = 0.001$兆帕。秒）的封闭容器中沉降。在初始阶段，颗粒仅在重力作用下沉降（9。8米/秒^2），因此具有相同的垂直速度（见图9b）。在第二阶段

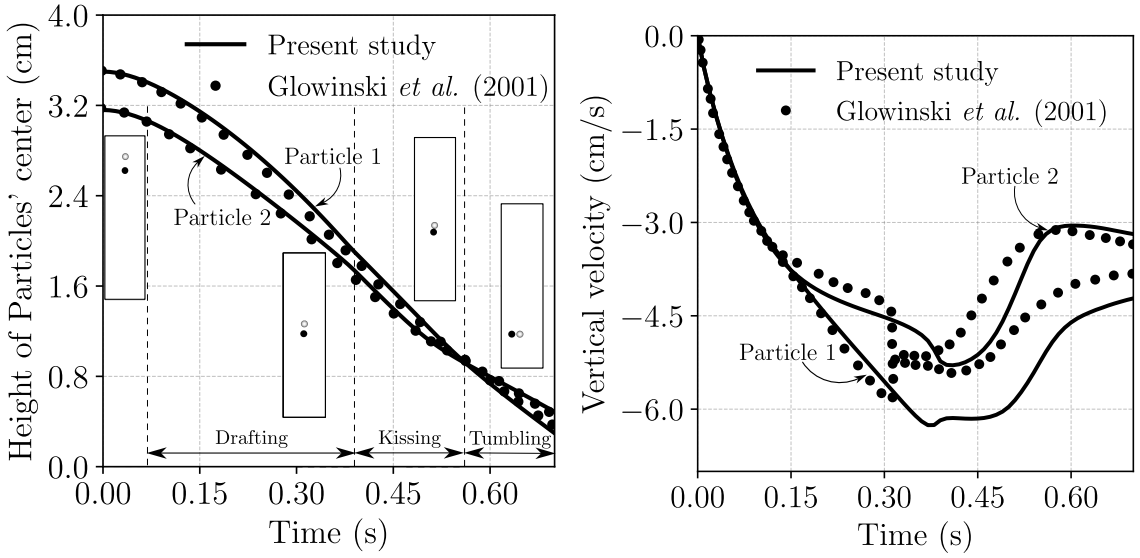


图9：两个球形颗粒在黏性流体中沉降时呈现的尾流-接触-翻滚现象。颗粒的时间演化：(a) 颗粒中心；(b) 垂直速度，与 Glowinski等人[45]的结果进行比较

这一阶段称为“尾流效应”：上方的颗粒受到下方颗粒产生的尾流影响。由于尾流中的压力较低，上方颗粒开始以相对更快的速度下落。这一过程持续到两个颗粒接触，此阶段称为“接触”。由于接触阶段不稳定，颗粒最终相互翻滚，并继续沉降。

在本研究中，我们采用一个 $1 \times 4 \times 1$厘米^3 计算域，并将其划分为 $60 \times 240 \times$60个均匀网格。我们分别将顶部和底部的颗粒称为“颗粒1”和“颗粒2”。在 $t = 0$处，颗粒1位于(0.51，3.5，0.5)，颗粒2位于(0.5，3.16，0.5)。颗粒x坐标的差异用于诱发翻滚不稳定性。颗粒的材料属性取为：密度 $\rho_s = 1140$千克/米^3, 杨氏模量 $Y = 1 \times 10^8$兆帕，泊松比 $\nu = 0.3$，滑动摩擦系数 $\mu = 0.5$，滚动摩擦系数 $\mu^r = 0.0$。此外，选取 $\Delta t_{\mathrm{CFD}} = 10^{-4}s$ 和 $\Delta t_{\mathrm{DEM}} = 10^{-7}s$ 。测试运行的模拟时长为 $t = 0.8s$。

图9a显示了颗粒距区域底部的高度随时间的演化，并与Glowinski等人[45]的结果进行了比较。两者结果吻合良好。图9a还显示了不同阶段的范围。从图和插图中均可看出，在“翻滚”阶段，颗粒的垂直位置发生了翻转。图9b显示了颗粒垂直速度的时间演化，并与 [45]进行了比较。颗粒经历的四个不同阶段在图中清晰可见。自由落体的初始阶段表现为颗粒具有相同的速度($t = 0s - 0.16s$)。随后可以看到，颗粒1由于进入颗粒2试图达到恒定沉降速度时形成的低阻力区域而获得加速度($t = 0.16s - 0.36s$)。在 $t \sim 0.36s$处，颗粒发生接触，结果颗粒1失去动量，而颗粒2获得动量。这在相应曲线中表现为一个小尖峰和一个明显的谷值。接触阶段的速度变化，即 $t = 0.36s - 0.57s$ ，很大程度上取决于所采用的颗粒间相互作用模型。这解释了我们的结果与Glowinski等人[45]结果之间的差异。Glowinski等人采用了一个在$R_1 + R_2 \leq ||\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|| \leq R_1 + R_2 + \epsilon$范围内起作用的势力模型，其中 ϵ 是一个很小的距离。由于该模型在颗粒彼此接触之前便开始起作用，因此可以解释为什么与本研究相比，Glowinski等人的结果中尖锐的速度梯度更早出现（如图9b所示）。在二维研究 [46]中，也可以观察到离散元法与势力模型之间类似的差异。

4. 结果与讨论

本节考察滚动摩擦对收缩通道中的架桥行为的影响。

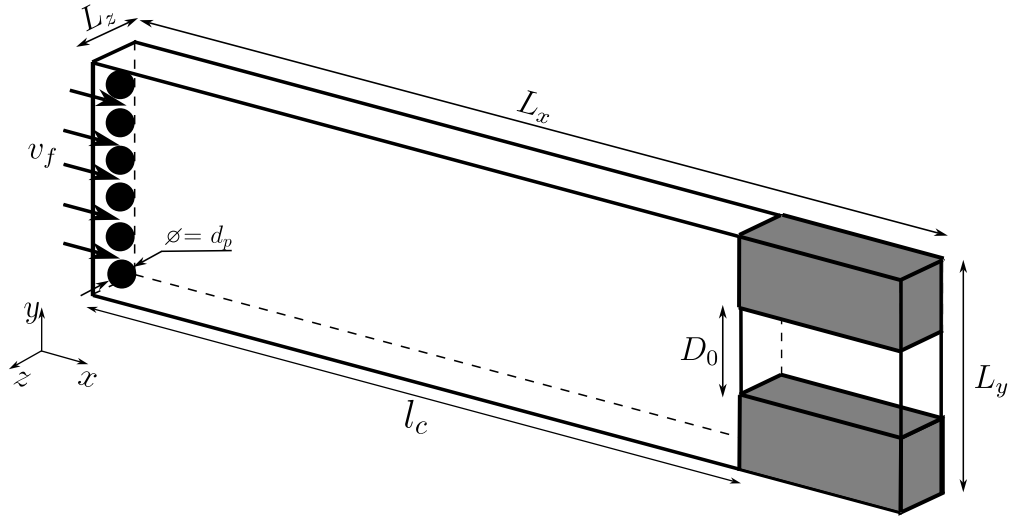


图 10：悬浮液流经收缩通道试验所用计算设置示意图。

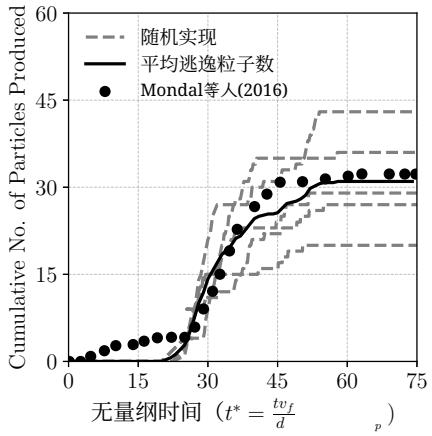


图 11：粒子累积数量随无量纲时间的变化。

4.1. 悬浮液流经收缩通道

当悬浮液流经狭窄通道时，多个悬浮颗粒会同时到达通道入口，并在入口处形成一个“桥接”，从而阻碍流动。架桥现象呈现出随机

表2：收缩通道试验中悬浮液流动的参数。

参数	**Unit**	**数值**
流体性质		
密度(ρ_f)	kg/m^3	1000
黏度(μ_f)	Pa.s	0.01
材料属性		
密度(ρ_s)	kg/m^3	1000
杨氏模量(Y)	MPa	10
泊松比(ν)		0.23
滑动摩擦系数 (μ)		0.5
滚动摩擦系数 (μ^r)		0.5
耗散常数 (A)	s	0.001
滚动刚度 (k^r)	N/m	5×10^5
滚动黏性阻尼 (γ^r)	N.s/m^2	2.5

其性质取决于悬浮液浓度、流速以及颗粒直径与通道尺寸之比等参数 [47]。

Mondal 等人 [9] 对各种参数对架桥现象的影响进行了数值研究。为检验我们的模型捕捉架桥现象的可靠性，我们进行了类似研究以作比较。研究采用的计算域尺寸为 $7.2 \times 1.5 \times 0.3$厘米^3，孔口尺寸为 D_o，且如图10所示，孔口距入口 $l_c = 6$厘米。计算域被划分为分辨率为 $192 \times 40 \times 8$ 的均匀网格，流体和离散元法的时间步长分别为 $10^{-6}s$ 和 $10^{-8}s$。此分辨率高于 [9] 所采用的分辨率（每个离散元颗粒直径方向上有~ 5.33个网格单元~ 4 个网格单元

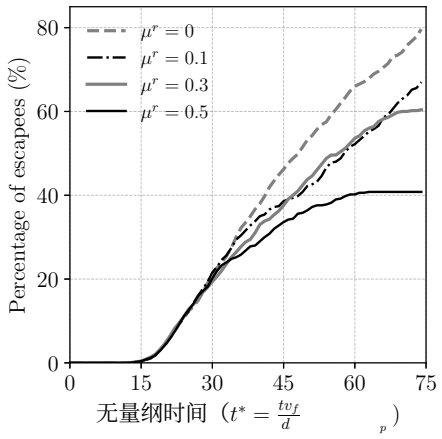


图12：滚动摩擦对颗粒桥接的影响。

沿每个离散元颗粒的直径方向）。在计算域左侧边界采用均匀入口速度 $v_f = 10$厘米/秒，右侧采用压力出口边界条件。包括孔口壁面在内的所有其他边界均为无滑移壁面。

从入口随流体引入尺寸相近的颗粒 $d_p = 0.2$cm。根据 [9], ，我们使用无量纲量 $R_o = D_o/d_p$，以颗粒尺寸（d_p）为基准定义孔口尺寸（D_o），并在本研究中取值 $R_o = 2.5$ 。通常会在入口附近（实际区域之外）设置一个缓冲区，用于插入颗粒。然而，本研究将所有颗粒置于计算域内，距入口一个颗粒半径的位置。每个颗粒的 y 和 z 坐标均随机选取。在 $t = 0$ 时，所有颗粒均未激活；随着时间推进，颗粒分批激活。颗粒激活频率取决于悬浮液浓度ϕ 和流量，如下所示：

$$f = \frac{\phi}{100} \frac{L_y L_z v_f}{V_p}, \tag{28}$$

其中， V_p 为 v 每个颗粒的体积， $L_y \times L_z$ 是入口处的表面积， ϕ is

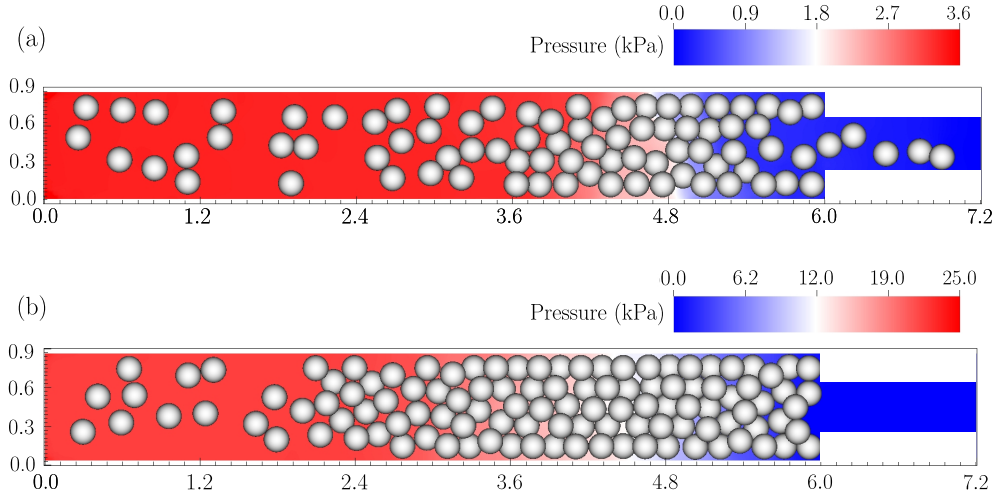


图13：在截面 $z = 0.15$厘米处， $t^* = 75$ 时的瞬时绝对压力场和颗粒位置：(a) $\mu^r = 0$ 和(b) $\mu^r = 0.5$。(b)中的压降较大，这是由颗粒堵塞造成的。

以百分比表示的悬浮液浓度，本研究中取值为20%。表2列出了本研究所用的流体和材料属性。

颗粒随流体一起流动，并试图同时进入孔口。因此，它们会在孔口处形成桥接，堵塞其他颗粒的通道。这些桥通常不稳定，会断裂并导致颗粒突发。不过，在适当情况下会形成稳定桥。若颗粒在实际所需行进时间的1.5倍内仍未到达出口，我们就认为该颗粒发生了稳定桥接。我们统计未形成桥接或未被阻挡而到达出口的颗粒数量。随后绘制颗粒产出数量随无量纲时间（$t^* = tv_f/d_p$）的变化曲线。由于颗粒桥接现象具有随机性，我们在入口处采用随机化的初始颗粒位置重复实验5次 [8] 。然后计算颗粒平均产出数量，并与 Mondal 等人[9]的结果进行比较，如图11所示。我们发现两者结果吻合良好。最初的偏差

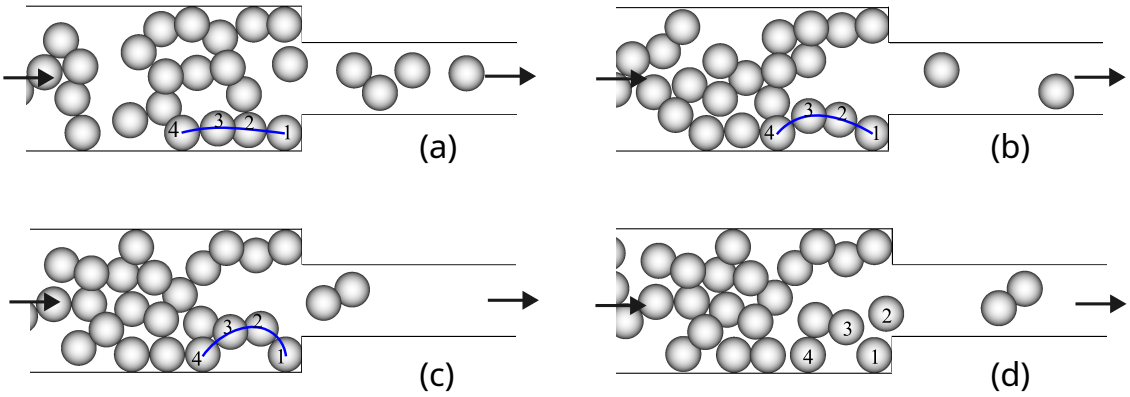


图 14: $\mu^r = 0.5$ 条件下，流体流经收缩通道时颗粒链的形成与坍塌。箭头表示流动方向。

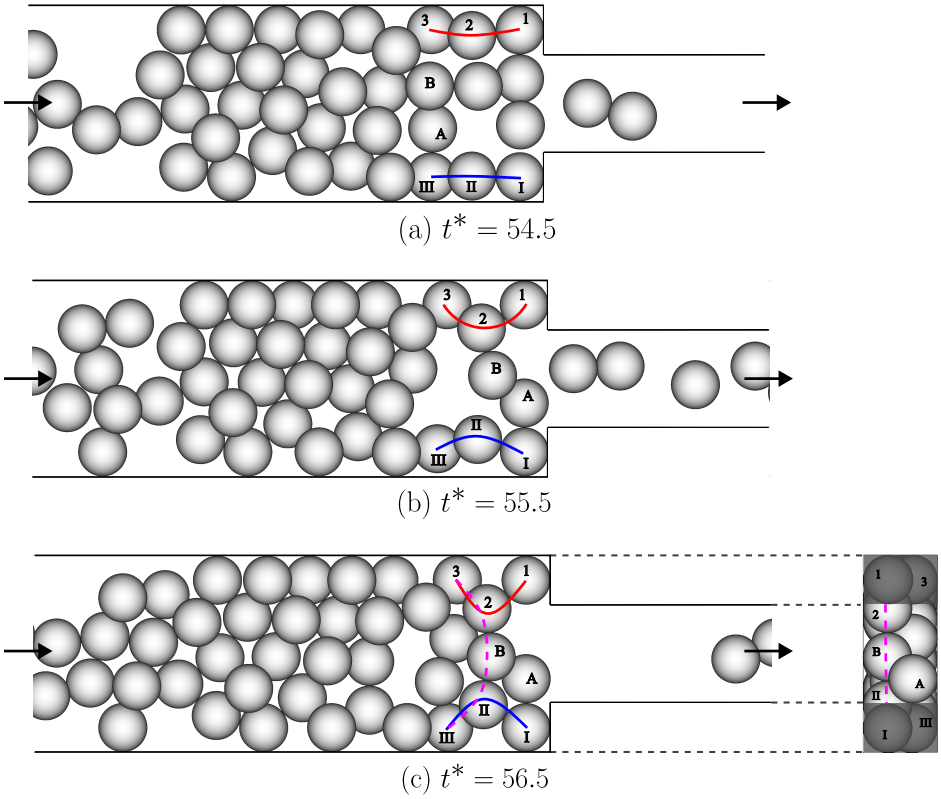


图 15: $\mu^r = 0.5$ 条件下，自由流颗粒（A 和 B）与凸形颗粒链中的颗粒（2 和 II）相互作用并形成稳定桥。箭头表示流动方向。

这是因为在 [9] 处，区域内分散的颗粒较少，它们往往会提前逸出。然而，本研究将所有颗粒都初始化在入口处。

4.2. 滚动摩擦的影响

为了解滚动摩擦对堵塞的影响，我们对颗粒流通过收缩通道的情况进行了模拟，通道与第4.1节中的通道相似，并改变了 μ^r。测试在高度为 $L_y = 0.8$ cm、无量纲孔口尺寸为 $R_o = 2$ 的通道中进行（其他尺寸，包括颗粒尺寸，均与第4.1节相同）。本研究采用了四种不同的滚动摩擦系数（$\mu^r = 0$，0。1，0。3，以及 0。5）。其余参数均与表2中的设置相同。每种情况下均重复测试5次，并记录到达出口的颗粒数量，以量化架桥程度。

图12展示了不同滚动摩擦系数下，出口收集到的颗粒平均数量随时间的演化，并以其占入口注入颗粒总数的百分比表示。在较低的滚动摩擦系数下，我们观察到架桥事件即使并非完全没有，也十分罕见。在这些情况下形成的桥并不稳定，因此只是暂时存在。然而，随着滚动摩擦增大，桥更频繁地形成，且更加稳定。图13（a）展示了滚动阻力为零的情况。压力梯度是由收缩段以及收缩段附近颗粒的拥挤造成的。然而，在图13中，堵塞导致压力显著升高，这表明堵塞使渗透率降低。

从定性角度看，观察颗粒动力学可以解释导致堵塞的桥接形成过程。通常，颗粒会被推向底部或顶部壁面，并沿通道长度方向形成凸链，如图14(a)-14(c)所示。这些颗粒链并不稳定，最终会塌陷或屈曲进入流动中（见图14(d)）。

在较高的 μ^r下，颗粒链同时在顶部和底部壁面形成的可能性会逐渐增大，如 $\mu^r = 0.5$ 的情形所示（见图15）。同时出现在收缩段上方和下方的这些凸链会使收缩段有效变窄，从而降低流速并减缓动力学过程。这也使得进一步架桥（跨越颗粒链）成为可能，如图15(b)所示。随后，两条颗粒链之间形成桥接，最终导致完全堵塞，如图15(c)所示。本文的补充材料提供了滚动阻力系数不同的模拟视频，展示了上述导致堵塞的事件。

5. 结论

孔隙堵塞会导致多孔介质应用中的时空渗透率劣化。由于难以通过实验观察这一现象，孔隙堵塞的力学原因仍未得到充分理解。我们开发了一种浸入边界法-离散元法技术，结合自主开发的离散元求解器，实现颗粒与孔隙分辨流动模拟。我们选择滚动阻力作为研究参数，以涵盖从非堵塞到堵塞状态的变化，并基于模拟阐述了堵塞机制。

我们通过六个复杂程度逐步提高的不同测试案例，仔细验证了滚动阻力计算以及颗粒堆积体中的流动。随后，我们复现了 [9] 的模拟结果。我们使用相同的系统对滚动阻力进行参数变化，以定性解释孔隙堵塞过程。本文的创新之处在于描述了滚动阻力计算，并研究了滚动阻力对复杂流动现象的影响。由于本文公开了离散元法代码 [41], ，因此

这些结果很容易复现。利用所开发的求解器开展完整的三维研究，并绘制堵塞起始的整个参数空间图谱，是未来研究的课题。

致谢

本研究使用了印度理工学院德里分校高性能计算设施以及昆士兰大学研究计算中心的 Bunya 超级计算机（ https://dx.doi.org/10.48610/wf6c-qy55 ）提供的资源，并获得澳大利亚布里斯班昆士兰大学的资金支持。我们感谢这两所机构提供必要的计算资源，使本研究得以开展。我们还感谢国家研究基金会通过核心研究基金（CRG）项目（编号：CRG/2022/008634）和启动研究基金（SRG）项目（编号：SRG/2022/000436）为计算设施提供支持。此外，我们感谢印度航运与内陆水道部提供的资助，使我们得以购买印度理工学院德里分校高性能计算设施的计算时长。

附录 A. 将力矩推导为作用于拉格朗日标记点上的力分布

考虑一个由 m 个拉格朗日标记点构成的球形颗粒，如图 A.16 所示。颗粒与邻近颗粒接触所产生的总力系可分解为一个关于质心的力矩，以及一个沿质心方向作用的力。设 $\boldsymbol{\tau}$ 为颗粒与其他颗粒或壁面相互作用所产生的力矩。该力矩可以等效地表示为作用于拉格朗日标记点上的非均匀力分布。

设“P”为颗粒中的任意拉格朗日标记点，$\mathbf{r}_P$ 为其相对于颗粒中心 O的距离向量。我们构造一个大小均匀的力分布 f_t，使得

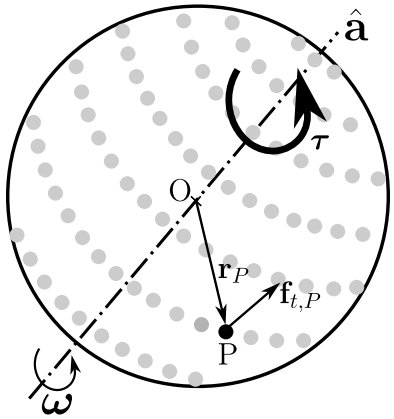


图 A.16：使用等效力系将力矩分布为作用于构成拉格朗日标记点的力。

该力系统等效于关于质心 O 的力矩。此力沿颗粒旋转轴（$\hat{\mathbf{a}}$）的切向方向作用。沿此方向的单位向量为，

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_P = \frac{\mathbf{r}_P \times \hat{\mathbf{a}}}{||\mathbf{r}_P \times \hat{\mathbf{a}}||}$$

因此，

$$\mathbf{f}_{t,P} = f_t \hat{\boldsymbol{\eta}}_P. \tag{A.1}$$

该力关于 $\hat{\mathbf{a}}$产生的力矩为，

$$\boldsymbol{\tau}_P = \mathbf{r}_P \times \mathbf{f}_{t,P}.$$

作用于 m 拉格朗日标记点的所有此类力矩之和等于作用于该颗粒的总扭矩，即：

$$||\boldsymbol{\tau}||\hat{\mathbf{a}} = \sum_m \mathbf{r}_P \times \mathbf{f}_{t,P}. \tag{A.2}$$

将方程 A.1 代入 A.2，可得：

$$||\boldsymbol{\tau}||\hat{\mathbf{a}} = f_t \sum_m \mathbf{r}_P \times \hat{\boldsymbol{\eta}}_P,$$

其可进一步分解为，

$$||\boldsymbol{\tau}||\hat{\mathbf{a}} = f_t \sum_m ||\mathbf{r}_P||(\hat{\mathbf{r}}_P \times \hat{\boldsymbol{\eta}}_P),$$

但 $\hat{}\mathbf{r}_P \times \hat{}\boldsymbol{\eta}_P = \hat{}\mathbf{a}$。因此，

$$||\boldsymbol{\tau}||\hat{\mathbf{a}} = f_t \sum_m ||\mathbf{r}_P||\hat{\mathbf{a}},$$

因此，

$$f_t = \frac{||\boldsymbol{\tau}||}{\sum_m ||\mathbf{r}_P||}. \tag{A.3}$$

参考文献

[1] F. Civan，《储层伤害：基础、建模、评估与治理》，海湾专业出版社，2023。

[2] Z. You、A. Badalyan、Y. Yang、P. Bedrikovetsky、M. Hand，《地热储层中的微粒运移：实验室与数学建模》，《地热学》77（2019）344–367。

[3] R. F. Krueger，《油田作业中地层伤害与油井生产能力概述》，《石油技术杂志》38 (1986) 131–152。

[4] B. Yuan、D. A. Wood，《提高采收率过程中地层伤害的全面综述》，《石油科学与工程杂志》167 (2018) 287–299。

[5]J. P. Herzig、D. M. Leclerc、P. L. Goff，悬浮液在多孔介质中的流动——深层过滤的应用，《工业与工程化学》62 (1970) 8–35。

[6] V. Ramachandran、H. S. Fogler，稳定胶体颗粒在圆柱形孔隙中流动时的流体动力架桥堵塞，《流体力学杂志》385 (1999) 129–156。

[7] A. J. Katz、A. H. Thompson，根据压汞测量预测岩石电导率，《地球物理研究杂志：固体地球》92 (1987) 599–607。

[8] H. He、X. Xiong、T. Wu、R. Hu、Y.-F. Chen、Z. Yang，多孔微模型中颗粒运移与堵塞机制的孔隙尺度研究，《分离与纯化技术》362 (2025年) 131929。

[9] S. Mondal, C.-H. Wu, M. M. Sharma，收缩段流体动力架桥的耦合CFD-DEM模拟，《国际多相流杂志》84 (2016) 245–263。

[10] P. Chalk, N. Gooding, S. Hutten, Z. You, P. Bedrikovetsky，通过胶体流动挑战性岩心驱替测试获得的孔径分布，《化学工程研究与设计》90 (2012) 63–77。

[11] Z. B. Sendekie, P. Bacchin，微通道瓶颈中的胶体堵塞动力学，《Langmuir》32 (2016) 1478–1488。

[12] N. Vani, S. Escudier, D.-H. Jeong, A. Sauret，颗粒悬浮液架桥堵塞中的收缩段角度作用，《物理学评论研究》6（2024）L032060。

[13] Y. Yang, W. Yuan, J. Hou, Z. You, J. Li, Y. Liu，低盐度注水引起的多孔介质微粒运移的随机上尺度解析建模，应用数学与力学 41（2020）491–506。

[14] Z. You、Y. Yang、A. Badalyan、P. Bedrikovetsky、M. Hand，地热储层中微粒运移的数学模型，《地热学》59（2016年）123–133。

[15] V. Jegatheesan、S. Vigneswaran，深床过滤：数学模型与观察结果，《环境科学与技术评论》35（2005年）515–569。

[16] J. Li、Z. Qiu、H. Zhong、X. Zhao、W. Huang，井漏过程中裂缝内架桥参数的计算流体力学-离散元法耦合分析，《石油科学与工程杂志》184（2020年）106501。

[17] K. E. Nelson、T. R. Ginn，适用于自然和工程流动条件下胶体过滤的新型收集效率方程，《水资源研究》47（2011年）。

[18] Y. Tsuji、T. Kawaguchi、T. Tanaka，二维流化床的离散颗粒模拟，《粉体技术》77 (1993) 79–87。

[19] P. A. Cundall、O. D. L. Strack，颗粒集合体的离散数值模型，岩土工程学 29 (1979) 47–65。

[20] C. Goniva、C. Kloss、N. G. Deen、J. A. M. Kuipers、S. Pirker，滚动摩擦对单喷口流化床模拟的影响，《颗粒学》10 (2012) 582–591。

[21] K. Shahzad、W. V. Aeken、M. Mottaghi、V. K. Kamyab、S. Kuhn，《微流控中刚性微粒的聚集与堵塞现象：离散

元法（DEM）与 CFD–DEM耦合法的比较》，《微流体与纳米流体》22 (2018) 104。

[22] M. Mirabolghasemi, M. Prodanović, D. DiCarlo, H. Ji，基于多孔介质三维显微断层图像的筛滤直接孔隙尺度模拟预测经验性质，《水文学杂志》529 (2015) 768–778。

[23] P. Wang, Q. Li, T. Ma, X. Ou, Y. Shen, Y. Yang, X. Tian，一种用于研究细颗粒在填充床中迁移与堵塞的未解析CFD-DEM方法，《炼铁与炼钢》50 (2023) 1618–1630。

[24] J. Lohaus, Y. M. Perez, M. Wessling，胶体膜污染过程中发生了哪些微观事件?《膜科学杂志》553 (2018) 90–98。

[25] S. Liu, I. Shikhov, C. Arns，基于高分辨率CFD-DEM胶体输运模型的孔隙堵塞机制，《多孔介质输运》151 (2024) 831–851。

[26] M. Samari Kermani, S. Jafari, M. Rahnama, A. Raoof，胶体输运与滞留的直接孔隙尺度数值模拟。第一部分：流体流速、胶体粒径和孔隙结构的影响，《水资源进展》144 (2020) 103694。

[27] A. Elrahmani, R. I. Al-Raoush, T. D. Seers，多孔介质中的堵塞与渗透率降低动力学：一项数值模拟研究，《粉体技术》427 (2023) 118736。

[28] Q. J. Zheng, R. Y. Yang, Q. H. Zeng, H. P. Zhu, K. J. Dong, A. B. Yu，《颗粒技术》436（2024）119445，颗粒间作用力及其在颗粒体系中的影响。

[29] N. J. Di Vaira, Ł. Łaniewski-Wołłk, R. L.Johnson, S. M. Aminossadati, C. R. Leonardi，静电力作用下平面通道中微粒的流体动力学堵塞，《流体力学杂志》960（2023）A34。

[30] H. Sakaguchi、E. Ozaki、T. Igarashi，《颗粒材料从筒仓排出过程中的流动堵塞》，《现代物理学国际期刊B》7（1993）1949–1963。

[31] R. Balevičius、I. Sielamowicz、Z. Mróz、R. Kačianauskas，《滚动摩擦对平底料仓壁面压力、排出速度及颗粒材料流出的影响》，《颗粒学》10（2012）672–682。

[32] B. Griffith，《浸入边界（IB）方法的一种自适应分布式内存并行实现》，2018。

[33] G. Sharma、N. Nangia、A. P. S. Bhalla、B. Ray，《一种耦合分布式拉格朗日乘子（DLM）与离散元法（DEM）的颗粒流碰撞模拟方法》，《粉体技术》398（2022）117091。

[34] A. A. Shirgaonkar, M. A. MacIver, N. A. Patankar，《自推进完全分辨模拟的新数学表述与快速算法》，《计算物理学杂志》228（2009年）2366–2390。

[35] R. Glowinski，《一种用于颗粒流的分布式拉格朗日乘子/虚拟区域方法》，《国际多相流杂志》（1999年）。

[36] A. P. S. Bhalla、R. Bale、B. E. Griffith、N. A. Patankar，《刚性、变形及弹性物体流固耦合的统一数学框架与自适应数值方法》，《计算物理学杂志》250（2013年），446–476。

[37] T. Pöschel、T. Schwager，《计算颗粒动力学：模型与算法》，施普林格出版社，柏林；纽约，2005年。

[38] P. K. Haff, B. T. Werner，颗粒机械分选的计算机模拟，《粉体技术》48 (1986) 239–245。

[39] S. Luding，黏聚性摩擦粉体：拉伸接触模型，《颗粒物质》10 (2008年) 235–246。

[40] S. J. Plimpton, A. Kohlmeyer, A. P. Thompson, S. G. Moore, R. Berger, LAMMPS：大规模原子/分子大规模并行模拟器，2023。

[41] S. Nayak，nayaksagar/PRELIMPFlow：首次公开发行，2025年。

[42] J. Ai, J.-F. Chen, J. M. Rotter, J. Y. Ooi，离散元模拟中滚动阻力模型的评估，《粉体技术》206 (2011年) 269–282。

[43] S. Ergun，填充柱中的流体流动，《化学工程进展》48（1952年）89。

[44] S. V. Apte、M. Martin、N. A. Patankar，一种用于复杂流动中刚性颗粒–流体相互作用全分辨模拟（FRS）的数值方法，《计算物理学杂志》228（2009年）2712–2738。

[45] R. Glowinski, T. W. Pan, T. I. Hesla, D. D. Joseph, J. Périaux，《采用虚拟区域方法对运动刚体周围的不可压缩黏性流动进行直接数值模拟：在颗粒流中的应用》，《计算物理学杂志》169（2001年）363–426。

[46] C. Kloss, C. Goniva, A. Hager, S. Amberger, S. Pirker, 《开源离散元法和计算流体力学-离散元法的模型、算法与验证》, 《计算流体动力学进展》国际期刊 12（2012年）140。

[47] V. Ramachandran、R. Venkatesan、G. Tryggvason、H. Scott Fogler，低雷诺数下胶体颗粒在圆柱形孔隙入口附近的相互作用，《胶体与界面科学杂志》229（2000）311–322。