非一致稳定公共独立集

Naoyuki Kamiyama*

日本福冈 九州大学产业数学研究所
kamiyama@imi.kyushu-u.ac.jp

arXiv:2601.11153v1 [cs.GT] 16 Jan 2026

摘要

本文研究稳定匹配问题的一种拟阵推广。具体而言，我们考虑偏好中可能存在并列偏好的情形。对于这种推广，我们提出了一种多项式时间算法，用于判断是否存在满足非一致稳定性的公共独立集；非一致稳定性是超稳定性和强稳定性的共同推广。

1 引言

稳定匹配问题由 Gale 和 Shapley [6], 提出，是偏好下的匹配 [19]研究中最核心的问题之一。在这一问题中，我们给定两个不相交的代理人群体。每个代理人都对另一群体中的一个代理人子集具有偏好。若不存在有动机偏离当前匹配的未匹配对，则称两个群体之间的匹配是稳定的。换言之，不存在偏好新伴侣胜过当前伴侣的未匹配对。Gale 和 Shapley [6] 证明了，当偏好是严格的（即不包含并列偏好）时，稳定匹配总是存在的，并且可以在多项式时间内找到一个稳定匹配。

本文考虑稳定匹-配问题的以下两个推广方向。第一个方向是在偏好中引入并列偏好。换言之，代理人可能对潜在伴侣无差别。第二个方向是推广到拟阵。在稳定匹配问题中，一个实例通常由二分图表示。在这一方向中，二分图中的匹配被推广为两个拟阵的公共独立集。

在含有并列偏好的稳定匹配问题中，Irving [8] 提出了匹配的以下三种性质（有关含有并列偏好的稳定匹配问题的综述，参见 [11] 和 [19, 第 3] 章）。第一种性质是弱稳定性。该性质保证不存在这样一对未匹配的代理人：双方都认为对方比当前匹配对象更优。对于这一性质，Irving [8] 证明弱稳定匹配总是存在，并且可以使用带并列打破的 Gale 和 Shapley 算法 [6]在多项式时间内找到弱稳定匹配。第二种性质是超稳定性。该性质保证不存在这样一对未匹配的代理人：双方都认为对方不比当前匹配对象差（即，对这对代理人中的任何一方而言，对方都不逊于当前匹配对象）。第三种性质是强稳定性。这种稳定性保证

*本研究得到了日本 JST ERATO Grant Number JPMJER2301 的支持。

不存在这样一对未匹配的代理人：双方都认为对方不比当前匹配对象差，并且这对代理人中至少有一方认为对方比当前匹配对象更优。已知超稳定匹配和强稳定匹配可能不存在 [8]。对于一对一情形中超稳定匹配和强稳定匹配的存在性判定问题，Irving [8] 提出了多项式时间算法（另见 [18]）。在多对一情形中，Irving、Manlove 和 Scott [9] 针对超稳定匹配问题提出了多项式时间算法，而论文 [10, 15] 则为强稳定匹配问题提出了多项式时间算法。Scott [24] 研究了多对多情形中的超稳定匹配问题。此外，论文 [2, 16, 17]研究了多对多情形中的强稳定匹配问题。Olaosebikan 和 Manlove [21] 研究了学生-项目分配问题中的超稳定性；该问题是带有层级容量约束的稳定匹配问题的一种变体。Olaosebikan 和 Manlove [22]研究了学生-项目分配问题中的强稳定性。

对于具有并列偏好的稳定匹配问题，Kamiyama [14] 引入了非一致稳定性，这是超稳定性和强稳定性的共同推广。更具体地说，代理人对被分为两组。在非一致稳定性的定义中，一组中的代理人对必须满足超稳定性的条件，另一组中的代理人对则必须满足强稳定性的条件。Kamiyama [14]证明了可以在多项式时间内检验非一致稳定匹配是否存在。

Fleiner [5] 引入了具有严格偏好的稳定匹配问题的拟阵推广。此外，Fleiner [5] 证明了该推广中始终存在稳定解；如果给定针对这些拟阵的多项式时间独立性预言机，我们还可以在多项式时间内找到一个稳定解。对于超稳定匹配问题的拟阵推广，Kamiyama [12] 提出了一种用于检验超稳定解是否存在的多项式时间算法。此外，Kamiyama [13] 还提出了一种在拟阵约束下求解多对一强稳定匹配问题的多项式时间算法。

本文研究两个拟阵的非一致稳定公共独立集，即同时考虑上述两个方向。我们提出了一种多项式时间算法，用于判定两个拟阵是否存在非一致稳定公共独立集。本文的结果是对 [12]（超稳定匹配问题的拟阵推广）、 [13]（拟阵约束下的多对一强稳定匹配问题）以及 [14] （一对一情形下的非一致稳定匹配）的共同推广。因此，我们的证明基于这些论文中的技术。然而，将多对一情形推广到多对多情形通常并非易事（例如，参见 [2]）。事实上，在证明的某些部分（例如引理24的证明）中，我们需要进行仔细讨论。

2 预备知识

对于每个非负整数 z，我们将 $[z]$ 定义为满足 $1 \leq i \leq z$的整数 i 的集合。对于每个有限集 X 及其每个元素 x，我们定义 $X + x \coloneqq X \cup \{x\}$ 和 $X - x \coloneqq X \setminus \{x\}$。

在有限简单有向图中， uv 表示一条从顶点 u 到顶点 v的弧。如果简单有向图中的有向圈 C 经过每个顶点至多一次，则称其为简单的 。对于有限简单有向图中的每个简单有向环 C ，不经过该环的弧 a C 称为 C 的捷径弧 ，如果 $C + a$ 包含一个不同于 C的简单有向环；这里，我们不区分简单有向环 C 与其经过的弧的集合 C 。不难看出，如果有限简单有向图中存在有向圈，那么就存在一个没有捷径弧的简单有向环。

有限集 U 与其子集的非空族 $\mathcal{I}$ 构成的有序对 $\mathcal{M}=(U,\ \mathcal{I})$，如果对每一对子集 $I,\ J\subseteq U$ 都满足以下条件，则称为拟阵 。

(I1) 如果 $I\subseteq J$ 和 $J\in\mathcal{I}$，则 $I\in\mathcal{I}$。

(I2) 如果 $I,\ J\in\mathcal{I}$ 和 $|I|<|J|$，则存在一个元素 $u\in J\setminus I$ 使得 $I+u\in\mathcal{I}$。

$\mathcal{I}$ 中的元素称为 $\mathcal{M}$的独立集。

当我们考虑拟阵 $\mathcal{M}=(U,\ \mathcal{I})$ 的算法时，我们假设可以判断对于 $|U|$中的每个子集 $I\subseteq U$，$I\in\mathcal{I}$ 所需的时间由 $|U|$的多项式所界定。

设 $\mathcal{M}_1=(U,\ \mathcal{I}_1)$ 和 $\mathcal{M}_2=(U,\ \mathcal{I}_2)$ 是拟阵。若 $I\in\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2$，则子集 $I\subseteq U$ 称为 $\mathcal{M}_1,\ \mathcal{M}_2$ 的公共独立集。

在本文中，给定两个拟阵 $\mathcal{M}_D=(E,\ \mathcal{I}_D)$ 和 $\mathcal{M}_H=(E,\ \mathcal{I}_H)$，以及定义在 E上的传递的完全二元关系 $\succsim_D$ 和 $\succsim_H$。（术语“完全”意味着，对于每个元素 $S\in\{D,H\}$ 以及每一对元素 $e,\ f\in E,\ e\succsim_S f$和 $f\succsim_S e$中至少有一个成立。）对于每个元素 $S\in\{D,H\}$ 以及每一对元素 $e,\ f\in E$，如果 $e\succsim_S f$和 $f\not\succsim_S e$（分别为$e\succsim_S f$ 和 $f\succsim_S e$），则记作 $e\succ_S f$（分别记作 $e\sim_S f$）。此外，给定不相交子集 $E_1,\ E_2\subseteq E$，使得 $E_1\cup E_2=E$。我们假设，对于每个元素 $e\in E$和每个元素 $S\in\{D,H\}$，都有 $\{e\}\in\mathcal{I}_S$。

定义1。令 I为 $\mathcal{M}_D$、$\mathcal{M}_H$的公共独立集，并令 e为$E\setminus I$中的一个元素。令 S 为 $\{D,H\}$中的一个元素。若满足以下条件之一，则称 e 弱阻挡 I 在 $\mathcal{M}_S$ 上。

(W1) $I+e\in\mathcal{I}_S$。

(W2) $I+e\notin\mathcal{I}_S$，并且存在一个元素 $f\in I$，使得 $e\succsim_S f$ 且 $I+e-f\in\mathcal{I}_S$。

W我们称 e 强阻挡 I 在 $\mathcal{M}_S$ 上，若满足以下条件之一 $d.$

(S1) $I+e\in\mathcal{I}_S$。

(S2) $I+e\notin\mathcal{I}_S$，并且存在一个元素 $f\in I$，使得 $e\succ_S f$ 且 $I+e-f\in\ \mathcal{I}_S.$

定义 2. 设 I 是 $\mathcal{M}_D$、$\mathcal{M}_H$ 的一个公共独立集，且 e 是 $E\setminus I$ 中的一个元素。如果满足以下条件，则称 e 阻挡 I。

- 如果 $e\in E_1$，则对于每个元素 $S\in\{D,H\}$，e 在 $\mathcal{M}_S$ 上弱阻挡 I。
- 如果 $e\in E_2$，则对于每个元素 $S\in\{D,H\}$，e 在 $\mathcal{M}_S$ 上弱阻挡 I；并且存在一个元素 $S\in\{D,H\}$，使得 e 在 $\mathcal{M}_S$上强阻挡 I。

定义 3. 如果 $E\setminus I$ 中没有任何元素阻挡 I，则称 $\mathcal{M}_D$、$\mathcal{M}_H$ 的公共独立集 I 是非一致稳定的。

2.1 拟阵基础

在本小节中，设 $\mathcal{M}=(U,\ \mathcal{I})$ 是一个拟阵。

$\mathcal{M}$ 的按包含关系极大的独立集称为 $\mathcal{M}$的基。因此，条件 (I2) 意味着 $\mathcal{M}$的所有基都具有相同的大小。此外，(I2) 意味着，对于 $\mathcal{M}$的每个独立集 I，都存在一个 $\mathcal{M}$ 的基 B，使得 $I\subseteq B$。

满足 $C\notin\mathcal{I}$ 的子集 $C\subseteq U$ 称为 $\mathcal{M}$ 的相关集。$\mathcal{M}$ 的包含意义下极小相关集称为回路。

引理 1（例如参见 [23, 第 15 页，习题 14]）。设 C_1、C_2 是 $\mathcal{M}$ 的不同回路，且满足 $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$。那么，对于 $e \in C_1 \cap C_2$ 中的每个元素以及 $f \in C_1 \setminus C_2$ 中的每个元素，都存在 $\mathcal{M}$ 的一个回路 C，使得 $f \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$。

设 X 是 U 的一个子集。然后我们将 $\mathcal{I}|X$ 定义为满足 $I \in \mathcal{I}$ 的子集 $I \subseteq X$ 组成的族。此外，我们定义 $\mathcal{M}|X := (X, \mathcal{I}|X)$。众所周知，$\mathcal{M}|X$ 是一个拟阵（例如，参见 [23, 第 20] 页）。将 $\mathbf{rk}_{\mathcal{M}}(X)$ 定义为 $\mathcal{M}|X$ 的一个基的大小。

对于每个子集 $X \subseteq U$，我们将 $\mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(X)$ 定义为满足 $\mathbf{rk}_{\mathcal{M}}(X + u) = \mathbf{rk}_{\mathcal{M}}(X)$ 的元素 $u \in U$ 所组成的集合。显然，对于每个子集 $X \subseteq U$，都有 $X \subseteq \mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(X)$。

引理 2 (例如参见 [23, 命题 1.4。11])。设 X 是 U 的一个子集。那么对于每个元素 $u \in U \setminus X$，$u \in \mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(X)$ 成立，当且仅当存在 $\mathcal{M}$ 的一个回路 C，使得 $u \in C \subseteq X + u$。

引理 2 意味着，对于满足 $X \subseteq Y$ 的任意一对子集 $X, Y \subseteq U$，都有 $\mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(X) \subseteq \mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(Y)$。因此，对于任意一对子集 $X, Y \subseteq U$，若 $X \subseteq Y$ 且 $Y \setminus X \subseteq \mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(X)$，则有 $\mathbf{rk}_{\mathcal{M}}(X) = \mathbf{rk}_{\mathcal{M}}(Y)$。特别地，当 $Y = \mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(X)$ 时，有 $\mathbf{rk}_{\mathcal{M}}(X) = \mathbf{rk}_{\mathcal{M}}(\mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(X))$（例如参见 [23, 引理 1.4.2]）。

设 X 是 U 的一个子集。定义 $\mathcal{I}/X$ 为满足以下条件的子集 $I \subseteq U \setminus X$ 组成的族：$|I| = \mathbf{rk}_{\mathcal{M}}(I \cup X) - \mathbf{rk}_{\mathcal{M}}(X)$。定义 $\mathcal{M}/X := (U \setminus X, \mathcal{I}/X)$。众所周知，$\mathcal{M}/X$ 是一个拟阵（例如参见 [23, 命题 3.1.6]）。

Lemm一个 3（例如，参见 [23, 命题 3.1。25]）。对于每一对不相交子集 X、$Y \subseteq U$ ，

$$(\mathcal{M}/X)/Y = \mathcal{M}/(X \cup Y), \quad (\mathcal{M}/X)|Y = (\mathcal{M}|(X \cup Y))/X.$$

引理 4（例如，参见 [23, 命题 3.1。7]）。设 X 是 U 的子集。设 B 是 $\mathcal{M}|X$ 的基。则对于每个子集 $I \subseteq U \setminus X$，$I$ 是 $\mathcal{M}/X$ 的独立集（分别地，是基），当且仅当 $I \cup B$ 是 $\mathcal{M}$ 的独立集（分别地，是基）。

引理 2 表明，对于 $\mathcal{M}$ 的每个独立集 I 以及每个元素 $u \in \mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(I) \setminus I$，存在 $\mathcal{M}$ 的一个回路 C，使得 $u \in C \subseteq I + u$。此外，引理 1 表明，这样的回路 C 是唯一确定的。我们称该回路为 $\mathcal{M}$ 中 I 和 u 的基本回路，并将该回路记为 $\mathbb{C}_{\mathcal{M}}(u, I)$。众所周知，对于 $\mathcal{M}$ 的每个独立集 I 以及每个元素 $u \in \mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(I) \setminus I$，$\mathbb{C}_{\mathcal{M}}(u, I)$ 等于满足 $I + u - v \in \mathcal{I}$ 的元素 $v \in I + u$ 的集合（例如，参见 [23, 第 20 页，习题 5]）。对于 $\mathcal{M}$ 的每个独立集 I 以及每个元素 $u \in \mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(I) \setminus I$，我们定义 $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}(u, I) := \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(u, I) - u$。我们可以将 (W2)（分别地，(S2)）改写如下。

$e \in \mathbf{cl}^{\mathcal{M}_S}(I)$，并且存在一个元素 $f \in \mathbb{D}_{\mathcal{M}_S}(e, I)$，使得 $e \gtrsim_S f$（分别为 $e \succ_S f$）。

F此外，引理 2 表明，(W1) 和 (S1) 可以改写为 $e \notin \mathbf{cl}^{\mathcal{M}_S}(I)$。

引理 5 (Iri 和 Tomizawa [7, 引理 2])。设 I 是 $\mathcal{M}$ 的独立集。此外，假设给定了互不相同的元素 u_1、u_2、……、$u_\ell \in \mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(I) \setminus I$ 以及 v_1、v_2、……、$v_\ell \in I$，它们满足以下条件。

- $v_i \in \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(u_i, I)$ 对每个整数 $i \in [\ell]$ 都成立。
- $v_i \notin \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(u_j, I)$ 对满足 $i < j$ 的每一对整数 i、$j \in [\ell]$ 都成立。

定义 $J := (I \cup \{u_1, u_2, \ldots, u_\ell\}) \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_\ell\}$。于是 $J \in \mathcal{I}$ 且 $\mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(I) = \mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(J)$。

引理 5 意味着，对于 $\mathcal{M}$ 的每个独立集 I、每个元素 $u \in \mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(I) \setminus I$、每个元素 $v \in \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(u, I)$，以及每个元素 $x \in (\mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(I) \setminus I) - u$，都有 $x \in \mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(I + u - v)$。

引理 6 （例如参见 [7, 引理 3]）。设 I 是 $\mathcal{M}$ 的一个独立集。此外，设 u 和 v 分别是$\mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(I) \setminus I$ 中的一个元素和 $\mathbb{C}_{\mathcal{M}}(u, I)$ 中的一个元素。定义 $J := I + u - v$。设 x 是$(\mathbf{cl}_{\mathcal{M}}(I) \setminus I) - u$ 中的一个元素，且设 y 是 $I - v$ 中的一个元素。那么以下陈述成立。

(i) 若 $v \in \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(x, I)$，则 $u \in \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(x, J)$。*(ii)* 若 $v \notin \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(x, I)$，则 $u \notin \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(x, J)$。*(iii)* 假设 $y \in \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(x, I)$，且至少有一个条件成立：$y \notin \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(u, I)$、$v \notin \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(x, I)$。则 $y \in \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(x, J)$。*(iv)* 假设 $y \notin \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(x, I)$，且至少有一个条件成立：$y \notin \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(u, I)$、$v \notin \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(x, I)$。则 $y \notin \mathbb{C}_{\mathcal{M}}(x, J)$。

以下引理在本文中起着重要作用。

引理 7 (例如，参见 [12, 引理 2。4])。设 $C, C_1, C_2, \ldots, C_\ell$ 是 $\mathcal{M}$ 的回路。此外，我们假设互不相同的元素 $u_1, u_2, \ldots, u_\ell, v \in U$ 满足以下条件。

(U1) $u_i \in C \cap C_i$ 对每个整数 $i \in [\ell]$均成立。

(U2) $u_i \notin C_j$ 对每一对不同的整数 $i, j \in [\ell]$均成立。

(U3) $v \in C \setminus (C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_\ell)$.

那么存在一个由 $\mathcal{M}$ 构成的回路 C'，使得

$$C' \subseteq \big(C \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_\ell\big) \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_\ell\}.$$

2.2 拟阵的直和

假设给定拟阵 $\mathcal{M}_1 = (U_1, \mathcal{I}_1)$ $\mathcal{M}_2 = (U_2, \mathcal{I}_2) \ldots, \mathcal{M}_\ell = (U_\ell, \mathcal{I}_\ell)$，其中$U_1, U_2, \ldots, U_\ell$两两不相交。定义 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_\ell$的直和 $\mathcal{M} = (U, \mathcal{I})$如下。定义 U为 $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_\ell$。此外，我们将 $\mathcal{I}$定义为由满足以下条件的子集 $I \subseteq U$构成的族：对每个整数 $i \in [\ell]$，$I \cap U_i \in \mathcal{I}_i$。已知 $\mathcal{M}$ 是一个拟阵（例如，参见[23,命题 4.2.12]）。

2.3 公共独立集

在本小节中，设 $\mathcal{M}_1 = (U, \mathcal{I}_1)$ 和 $\mathcal{M}_2 = (U, \mathcal{I}_2)$ 为拟阵。众所周知，我们可以在关于 $|U|$ 的多项式时间内找到 $\mathcal{M}_1$，$\mathcal{M}_2$ 的最大规模公共独立集（例如参见 [1, 3]）。

定义函数 $\mu_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}$ 在 2^U 上如下：

$$\mu_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}(X) \coloneqq \mathbf{rk}_{\mathcal{M}_1}(U \setminus X) + \mathbf{rk}_{\mathcal{M}_2}(X).$$

引理 8 (Edmonds [4])。

$$\max\{|I| \mid I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{\mu_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}(X) \mid X \subseteq U\}. \tag{1}$$

由于 $\mu_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}$ 是次模的（参见例如 [23, 引理 1.3。1]），众所周知，式（1）右端包含关系下极小的极小化子是唯一确定的。此外，我们可以在时间复杂度受 $|U|$ 的多项式（参见例如 [20, 注 10。12]）所界定的时间内找到式（1）右端包含关系下极小的极小化子。我们将式（1）右端包含关系下极小的极小化子称为临界子集 $\mathcal{M}_1$，$\mathcal{M}_2$。

定义 4。 对于 $\mathcal{M}_1$、 $\mathcal{M}_2$的每个公共独立集 I ，我们定义如下简单有向图$\mathbf{G}_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}(I) = (U$、$\mathbf{A}_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}(I))$ 。

- 设 u 是 $U \setminus I$中的一个元素，并设 v 是 I中的一个元素。
  - $vu \in \mathbf{A}_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}(I)$ *if and only if* $u \in \mathbf{cl}_{\mathcal{M}_1}(I)$ *and* $v \in \mathbb{C}_{\mathcal{M}_1}(u, I)$.
  - $uv \in \mathbf{A}_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}(I)$ *if and only if* $u \in \mathbf{cl}_{\mathcal{M}_2}(I)$ *and* $v \in \mathbb{C}_{\mathcal{M}_2}(u, I)$.

设 I 是 $\mathcal{M}_1$、 $\mathcal{M}_2$的一个公共独立集。此外，设 C 是 $\mathbf{G}_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}(I)$中的一个简单有向环。设 X（分别为 Y）是 $U \setminus I$（分别为 I）中经过 C 的元素集合。于是我们定义 $I \ominus C := (I \cup X) \setminus Y$。

引理 9. 设 I 是 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$的一个公共独立集。设 C 是 $\mathbf{G}_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}(I)$ 中的一个简单有向环，且对于 C，$\mathbf{A}_{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}(I)$ 中不存在捷径弧。则 $I \ominus C$ 是 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$的一个公共独立集。

证明。 此引理可由引理 5 立即得出。 □

3 算法

为简化记号，我们定义

$$\mathbb{C}_S(\cdot,\cdot) := \mathbb{C}_{\mathcal{M}_S}(\cdot,\cdot), \quad \mathbf{rk}_S(\cdot) := \mathbf{rk}_{\mathcal{M}_S}(\cdot), \quad \mathbf{cl}_S(\cdot) := \mathbf{cl}_{\mathcal{M}_S}(\cdot)$$

对于每个元素 $S \in \{D, H\}$。对于每个元素 $S \in \{D, H\}$ 和每个子集 $F \subseteq E$，我们定义

$$\mathbf{he}_S(F) := \{e \in F \mid e \gtrsim_S f \text{ for every element } f \in F\}$$
$$\mathbf{ta}_S(F) := \{e \in F \mid f \gtrsim_S e \text{ for every element } f \in F\}.$$

定义 5。对于 $\mathcal{M}_D$、 $\mathcal{M}_H$的每个公共独立集 I，我们将**阻挡**(I) 定义为满足 $e \in \mathbf{cl}_H(I)$ 且 e 阻挡 I 的元素 $e \in E \setminus I$ 的集合。

3.1 子程序

对于每个子集 $F \subseteq E$，我们将算法 1、2 和 3 的输出分别定义为拟阵 $\mathcal{M}_D\langle F\rangle, \mathcal{M}_H\langle F\rangle$ 和子集 $\mathsf{Ch}_D(F) \subseteq F$。

尽管本小节中的引理类似的事实已在 [12, 13], 中得到证明，但为求完整，我们仍给出其证明。

算法 1: 用于定义 $\mathcal{M}_D\langle F\rangle$的算法

---

1 定义 $N_0 := F$ 和 $\mathcal{M}'_0 := \mathcal{M}_D$。 设 $s := 0$。 2 如果 $N_0 = \emptyset$， 则输出拟阵 $(\emptyset, \{\emptyset\})$ 作为 $\mathcal{M}_D\langle F\rangle$ 并停止。 3 当 $N_s \neq \emptyset$ 时执行 4 设 $s := s + 1$。 5 定义 $T_s := \mathsf{he}_D(N_{s-1})$、 $N_s := N_{s-1} \setminus T_s$、 $\mathcal{M}_s := \mathcal{M}'_{s-1}|T_s$和 $\mathcal{M}'_s := \mathcal{M}'_{s-1}/T_s$。 6 结束 7 输出 $\mathcal{M}_1$、 $\mathcal{M}_2$、 ……、 $\mathcal{M}_s$ 的直和作为 $\mathcal{M}_D\langle F\rangle$ 并停止。

引理10. 设 F 是 E 的一个子集。设 B 是 $\mathcal{M}_D\langle F\rangle$ 的一个基。假设当 $s = k$ 时算法 *1* 停止，并采用算法 *1* 中的记号。对每个整数 $s \in [k]$，定义 $F_s := \bigcup_{j=1}^{s} T_j$ 和 $B_s := B \cap F_s$。那么，对于每个整数 $s \in [k]$， B_s 都是 $\mathcal{M}_D|F_s$ 的一个基。

证明. 注意，由于 B 是 $\mathcal{M}_D\langle F\rangle$ 的一个基，对于每个整数 $s\in[k]$，$B\cap T_s$ 都是 $\mathcal{M}_s$ 的一个基。因此，由于 $\mathcal{M}_1=\mathcal{M}_D|T_1$，且 $B\cap T_1$ 是 $\mathcal{M}_1$ 的一个基，所以 B_1 是 $\mathcal{M}_D|F_1$ 的一个基。

设 s 是 $[k-1]$ 中的一个整数。假设 B_s 是 $\mathcal{M}_D|F_s$ 的一个基。注意到 $\mathcal{M}_D|F_s=(\mathcal{M}_D|F_{s+1})|F_s$，且由引理3可知

$$\mathcal{M}_{s+1}=\mathcal{M}'_s|T_{s+1}=(\mathcal{M}_D/F_s)|T_{s+1}=(\mathcal{M}_D|F_{s+1})/F_s.$$

由于 $B\cap T_{s+1}$ 是 $\mathcal{M}_{s+1}$ 的一个基，由引理 4 可知，$B_{s+1}=B_s\cup(B\cap T_{s+1})$ 是 $\mathcal{M}_D|F_{s+1}$ 的一个基。证明完毕。 □

由引理10可知，对于每个子集 $F\subseteq E$、$\mathcal{M}_D\langle F\rangle$ 的每个基 B 以及每个元素 $e\in F\setminus B$，都有 $e\in\mathbf{cl}_D(B)$。

引理 11. 设 F 是 E 的一个子集。设 B 是 $\mathcal{M}_D\langle F\rangle$ 的一个基。设 e 是 $F\setminus B$ 中的一个元素 .

(i) $e\sim_D f$ 对每个元素 $f\in\mathbb{C}_{\mathcal{M}_D\langle F\rangle}(e,B)$。

(ii) $\mathbb{C}_{\mathcal{M}_D\langle F\rangle}(e,B)\subseteq\mathbb{C}_D(e,B)$.

(iii) 对于每个元素 $f\in\mathbb{C}_D(e,B)\setminus\mathbb{C}_{\mathcal{M}_D\langle F\rangle}(e,B)$，我们有 $f\succ_D e$。

证明。 在此证明中，我们使用算法 1 中的记号。假设算法 1 在$s=k$时停止。此外，我们假设 $e\in T_\ell$。对于每个整数 $s\in[k]$，我们定义 $F_s:=\bigcup_{j=1}^s T_j$。定义 $F_0:=\emptyset$。定义 $C:=\mathbb{C}_{\mathcal{M}_D\langle F\rangle}(e,\ B)$。那么 C 是 $\mathcal{M}_\ell$ 的一个回路。因此，(i)成立。

令 f 为 C中的一个元素。那么 $f\in T_\ell$ 且$(B\cap T_\ell)+e-f$ 是 $\mathcal{M}_\ell$的一个独立集。因此，由于 B是 $\mathcal{M}_D\langle F\rangle$的一个基，$B+e-f$是 $\mathcal{M}_D\langle F\rangle$的一个基。这一点与引理10推出 $B+e-f\in\mathcal{I}_D$。因此，$f\in\mathbb{C}_D(e,\ B)$。

设 f 是 $\mathbb{C}_D(e,B)\setminus C$ 中的一个元素。假设 $e\gtrsim_D f$。定义 $B':=B+e-f$。那么，由于 $f\in\mathbb{C}_D(e,B)$，$B'\in\mathcal{I}_D$。由于 $e\gtrsim_D f$（即 $f\notin F_{\ell-1}$），$B\cap F_{\ell-1}=B'\cap F_{\ell-1}$。因此，由于$B'\cap F_\ell\in\mathcal{I}_D$，且引理10意味着 $B\cap F_{\ell-1}$ 是 $\mathcal{M}_D|F_{\ell-1}$的基，引理 4 意味着$B'\cap T_\ell$ 是 $\mathcal{M}_\ell$ 的独立集。然而，由于 $C\subseteq B'\cap T_\ell$，这就产生了矛盾。 □

引理 12. 设 F 是 E 的子集。设 C 是 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路，且满足 $C\subseteq F$。那么 $\mathbf{ta}_D(C)$ 是 $\mathcal{M}_D\langle F\rangle$ 的相关集。

证明。 为记号简便，我们定义 $X:=\mathbf{ta}_D(C)$。接下来，我们使用算法 1 中的记号。假设算法 1 在 $s=k$ 时终止，且 $X\subseteq T_\ell$。对每个整数 $s\in[k]$，定义 $F_s:=\bigcup_{j=1}^s T_j$。定义 $F_0:=\emptyset$。设 B 是 $\mathcal{M}\langle F\rangle$ 的基。定义 $B_{\ell-1}:=B\cap F_{\ell-1}$。

$\mathcal{M}_D\langle F\rangle$ 的定义意味着，我们的目标是证明 X 是 $\mathcal{M}_\ell$ 的相关集。由于 $\mathcal{M}_\ell=(\mathcal{M}_D/F_{\ell-1})|T_\ell$，只需证明 X 是 $\mathcal{M}_D/F_{\ell-1}$ 的相关集。

引理10意味着 $B_{\ell-1}$ 是 $\mathcal{M}_D|F_{\ell-1}$的基。我们证明存在$\mathcal{M}_D$的一个回路 C'，使得 $C'\cap T_\ell\subseteq X$ 且 $C'\setminus X\subseteq B_{\ell-1}$。若能证明这一点，则 $(C'\cap T_\ell)\cup B_{\ell-1}\notin\mathcal{I}_D$，因为 $C'\subseteq(C'\cap T_\ell)\cup B_{\ell-1}$。因此，根据引理 4，$C'\cap T_\ell$ 是$\mathcal{M}_D/F_{\ell-1}$的相关集。由于 $C'\cap T_\ell\subseteq X$，(I1) 意味着 X 是 $\mathcal{M}_D/F_{\ell-1}$ 的相关集。

若 $C\setminus X\subseteq B_{\ell-1}$，则由于 C 满足上述条件，证明完成。假设$C\setminus X\not\subseteq B_{\ell-1}$。接下来证明，对于每个元素 $f\in C\setminus(X\cup B_{\ell-1})$，都存在一个由 $\mathcal{M}_D$ 构成的回路C_f，使得 $f\in C_f$ 且 $C_f-f\subseteq B_{\ell-1}$。由于 $f\notin X$ 且 $C_f-f\subseteq B_{\ell-1}$，因此 $X\cap C_f=\emptyset$。由于 $X\neq\emptyset$，我们可以通过在 X 中任取一个元素并应用引理 7，证明存在一个满足上述条件的由 $\mathcal{M}_D$ 构成的回路 C'。

令 f 为 $C\setminus(X\cup B_{\ell-1})$ 中的一个元素。由于 $C\setminus X\subseteq F_{\ell-1}$，存在一个整数 $s\in[\ell-1]$使得 $f\in T_s$。因此，由引理10可知 $B\cap F_s$ 是 $\mathcal{M}_D|F_s$的一个基，故存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路 C_f，使得 $f\in C_f$ 且 $C_f-f\subseteq B\cap F_s\subseteq B_{\ell-1}$。 □

引理 13. 令 F 为 E 的一个子集，并令 C 为 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路，满足 $C \subseteq F$。那么对于每个元素 $e \in \mathbf{ta}_D(C)$，都存在 $\mathcal{M}_D\langle F\rangle$ 的一个回路 C'，使得 $e \in C' \subseteq \mathbf{ta}_D(C)$。

证明。 在此证明中，我们使用算法 1 中的记号。假设算法 1 在$s = k$时停止，并且$\mathbf{ta}_D(C) \subseteq T_\ell$。对每个整数 $s \in [k]$，定义 $F_s := \bigcup_{j=1}^{s} T_j$。定义 $F_0 := \emptyset$。令 B为 $\mathcal{M}\langle F\rangle$的一个基。定义 $B_{\ell-1} := B \cap F_{\ell-1}$。

令 e为$\mathbf{ta}_D(C)$中的一个元素。假设不存在 $\mathcal{M}_\ell$ 的回路 C' 使得 $e \in C' \subseteq \mathbf{ta}_D(C)$。定义 C^* 为 $\mathcal{M}_D$ 的一个满足以下条件的回路。

(A1) $C^* \subseteq F$ 以及 $e \in \mathbf{ta}_D(C^*) \subseteq \mathbf{ta}_D(C)$。

(A2) C^* 在满足 (A1) 的所有 $\mathcal{M}_D$ 的回路中，使 $|\mathbf{ta}_D(C^*)|$ 最小。

注意，由于 C 满足 (A1)， C^* 是定义良好的。接下来，我们证明存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路 C°，使得 C° 满足 (A1)，且 $|\mathbf{ta}_D(C^\circ)| < |\mathbf{ta}_D(C^*)|$。这与 C^*的定义矛盾。

为记号简便，我们定义 $X := \mathrm{ta}_D(C^*)$。引理 12 表明， X 是 $\mathcal{M}_\ell$ 的相关集。因此，存在 $\mathcal{M}_\ell$ 的一个回路 C°，使得 $C^\circ \subseteq X$。由于 $C^\circ \subseteq X \subseteq \mathrm{ta}_D(C)$，上述假设意味着 $e \notin C^\circ$。由于 C° 是 $\mathcal{M}_\ell$ 的相关集，引理 4 表明 $C^\circ \cup B_{\ell-1} \notin \mathcal{I}_D$。因此，存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路 $C^\bullet$，使得 $C^\bullet \subseteq C^\circ \cup B_{\ell-1} \subseteq F$。由于 $B_{\ell-1} \in \mathcal{I}_D$， $C^\bullet$ 含有一个元素 $f \in C^\circ \subseteq X \subseteq C^*$。由于 $e \notin C^\circ$， $e \notin C^\bullet$。因此，由于$e \in C^*$，引理 1 表明存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路 $C^\diamond$，使得 $e \in C^\diamond \subseteq (C^* \cup C^\bullet) - f$。由于 $\mathrm{ta}_D(C^\bullet) \subseteq C^\circ \subseteq X$， $e \in \mathrm{ta}_D(C^\diamond) \subseteq X - f$。因此， $C^\diamond$ 满足 (A1)，且 $|\mathrm{ta}_D(C^\diamond)| < |X|$。然而，这与 C^* 的定义矛盾。 □

算法 2： 用于定义 $\mathcal{M}_H\langle F\rangle$ 的算法

---

1 定义 $N_0 := F$ 和 $\mathcal{M}'_0 := \mathcal{M}_H$。令 $s := 0$。
2 如果 $N_0 = \emptyset$，则输出拟阵 $(\emptyset, \{\emptyset\})$ 作为 $\mathcal{M}_H\langle F\rangle$ 并停止。
3 **当** $N_s \neq \emptyset$ **时执行**
4 **对于** $j = 1,2$ **执行**
5 令 $s := s + 1$。
6 定义 $T_s := \mathbf{他}_H(N_{s-1}) \cap E_j$ 和 $N_s := N_{s-1} \setminus T_s$。
7 定义 $\mathcal{M}_s := \mathcal{M}'_{s-1}|T_s$ 和 $\mathcal{M}'_t := \mathcal{M}'_{t-1}/T_t$。
8 **end**
9 **结束**
10 输出 $\mathcal{M}_1$、$\mathcal{M}_2$、.....、$\mathcal{M}_s$ 的直和，记为 $\mathcal{M}_H\langle F\rangle$，然后停止。

引理14. 设 F 是 E 的子集，且 B 是 $\mathcal{M}_H\langle F\rangle$ 的基。假设当 $s = k$ 时算法 *2* 停止。我们使用算法 *2* 中的记号。对每个整数 $s \in [k]$，定义 $F_s : = \bigcup_{j=1}^{s} T_j$ 和 $B_s : = B \cap F_s$。那么，对每个整数 $s \in [k]$， B_s 是 $\mathcal{M}_H|F_s$ 的基。

证明。 这个引理可以用与引理10相同的方法证明。 □

引理14意味着，对于每个子集 $F \subseteq E$、 $\mathcal{M}_H\langle F\rangle$ 的每个基 B，以及每个元素 $e \in F \setminus B$，都有 $e \in \mathbf{cl}_H(B)$。

引理 15。 设 F 是 E 的子集。设 B 是 $\mathcal{M}_H\langle F\rangle$ 的基。设 e 是 $F \setminus B$ 中的一个元素。

(i) $e \sim_H f$ 对于每个元素 $f \in \mathbb{C}_{\mathcal{M}_H\langle F\rangle}(e, B)$。
(ii) $\mathbb{C}_{\mathcal{M}_H\langle F\rangle}(e, B) \subseteq \mathbb{C}_H(e, B)$。

(iii) F 对于每个元素 $f \in \mathbb{C}_H(e,B) \setminus \mathbb{C}_{\mathcal{M}_H\langle F\rangle}(e,B)$，如果 $e \in E_1$ 或者 $e, f \in E_2$，那么 $f \succ_H e$ 。

证明。在此证明中，我们使用算法 2 中的记号。假设算法 2 在$s = k$时终止。此外，假设 $e \in T_\ell$。对于每个整数 $s \in [k]$，定义 $F_s := \bigcup_{j=1}^{s} T_j$。定义 $F_0 := \emptyset$。定义 $C := \mathbb{C}_{\mathcal{M}_H\langle F\rangle}(e,B)$。那么 C是 $\mathcal{M}_\ell$的一个回路。因此，(i) 成立。

设 f是 C中的一个元素。那么 $f \in T_\ell$，且 $(B \cap T_\ell) + e - f$是 $\mathcal{M}_\ell$的一个独立集。因此，$B + e - f$是 $\mathcal{M}_H\langle F\rangle$的一个基。由此及引理14可知 $B + e - f \in \mathcal{I}_H$。因此，$f \in \mathbb{C}_H(e,B)$。

设 f是 $\mathbb{C}_H(e,B) \setminus C$中的一个元素。假设 $e \gtrsim_H f$。

断言 1. 如果 $e \in E_1$ 或 $e, f \in E_2$，那么 $f \notin F_{\ell-1}$。

证明. 如果 $e \in E_1$，那么对每个元素 $g \in F_{\ell-1}$都有 $g \succ_H e$。因此， $f \notin F_{\ell-1}$。

如果 $e \in E_2$ 和 $f \in F_{\ell-1}$，那么 $f \in E_1$、 $f \succ_H e$ 中至少有一个成立。因此，由于 $e \gtrsim_H f$，如果$f \in E_2$，那么 $f \notin F_{\ell-1}$。 □

假设 $e \in E_1$或 $e, f \in E_2$。定义 $B' := B + e - f$。由于 $f \in \mathbb{C}_H(e,B)$， $B' \in \mathcal{I}_H$。此外，由于 $f \notin F_{\ell-1}$ 可由断言 1 推出， $B \cap F_{\ell-1} = B' \cap F_{\ell-1}$。引理14意味着$B \cap F_{\ell-1}$是 $\mathcal{M}_H|F_{\ell-1}$的一个基。因此， $B' \cap T_\ell$是 $\mathcal{M}_\ell$的一个独立集。由于 $C \subseteq B' \cap T_\ell$，这就产生了矛盾。 □

算法3： 用于定义 $\mathrm{Ch}_D(F)$ 的算法

---

1 定义 $N_0 := F$, $T_0^* := \emptyset$ 和 $\mathcal{M}_0' := \mathcal{M}_D$。设 $s := 0$。**2** **当** $N_s \neq \emptyset$ **满足时** **3** 设 $s := s + 1$。**4** 定义 $T_s := \mathbf{he}_D(N_{s-1})$、 $N_s := N_{s-1} \setminus T_s$ 和 $\mathcal{M}_s' := \mathcal{M}_{s-1}'/T_s$。**5** 定义 $T_s^* := T_{s-1}^* \cup \{e \in T_s \mid \{e\}$是 $\mathcal{M}_{s-1}'\}$ 的独立集。**6** **结束** **7** 输出 T_s^*作为 $\mathrm{Ch}_D(F)$ 并停止。

引理 16。设 F 是 E 的子集，且 e 是 F 中的一个元素。假设存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路 C，使得对于每个元素 $f \in C - e$，都有 $e \in C \subseteq F$和 $f \succ_D e$。那么我们有$e \notin \mathrm{Ch}_D(F)$。

证明。在此证明中，我们使用算法3中的记号。假设 $e \in T_\ell$。由于 $\mathbf{ta}_D(C) = \{e\}$，引理 12 表明 $\{e\}$ 不是 $\mathcal{M}\langle F\rangle$的相关集。因此， $\{e\}$ 是 $\mathcal{M}_{\ell-1}'|T_\ell$的相关集。这意味着，由于 $\{e\}$ 是 $\mathcal{M}_{\ell-1}'$的相关集，$e \notin T_\ell^* \setminus T_{\ell-1}^*$。 □

引理 17。设 F是 E的子集，且设 e是 F中的一个元素。假设 $e \notin \mathrm{Ch}_D(F)$。那么，存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路 C，使得 $e \in C$、 $C - e \subseteq \mathrm{Ch}_D(F)$，并且对每个元素 $f \in C - e$，都有 $f \succ_D e$。

证明。在此证明中，我们使用算法3中的记号。假设 $e \in T_\ell$。由于 $e \notin \mathrm{Ch}_D(F)$ $\{e\}$是 $\mathcal{M}_{\ell-1}'$的相关集。由于 $\{e\} \in \mathcal{I}_D$， $\ell > 1$成立。定义 $F_{\ell-1} := \bigcup_{j=1}^{\ell-1} T_j$。引理3表明 $\mathcal{M}_{\ell-1}' = \mathcal{M}_D/F_{\ell-1}$。设 B是 $\mathcal{M}_D\langle F\rangle$的一个基。引理10表明，对于每个整数 $s \in [\ell-1]$， $B \cap F_s$是 $\mathcal{M}_D|F_s$的一个基。定义 $B' := B \cap F_{\ell-1}$。

断言 2. $B' \subseteq T_{\ell-1}^*$.

证明。 假设 $B' \not\subseteq T^*_{\ell-1}$。 令 f为 $B' \setminus T^*_{\ell-1}$中的一个元素。由于 $B' \subseteq F_{\ell-1}$，存在一个整数 $j \in [\ell-1]$ 使得 $f \in T_j$。于是 $\{f\}$ 是 $\mathcal{M}'_{j-1}$的一个相关集。因此，引理 4 推出 $(B \cap F_{j-1}) + f \notin \mathcal{I}_D$。然而，由于 $(B \cap F_{j-1}) + f \subseteq B$，这与 $B \in \mathcal{I}_D$这一事实矛盾。证毕。 □

由于 $\{e\}$ 是 $\mathcal{M}'_{\ell-1}$的相关集，引理 4 推出 $B' + e \notin \mathcal{I}_D$。因此，引理 2 推出 $e \in \mathbf{cl}_D(B')$。定义 $C := \mathbb{C}_D(e, B')$。接着，由于断言 2 推出 $B' \subseteq \mathsf{Ch}_D(F)$，因此$C - e \subseteq \mathsf{Ch}_D(F)$。此外，由于 $C - e \subseteq B' \subseteq F_{\ell-1}$ 和 $e \in T_\ell$，对每个元素$f \in C - e$都有 $f \succ_D e$。证明至此完成。 □

Lemma 18. 设 F 是 E的一个子集。定义 $K : = \mathrm{Ch}_D(F)$。那么$\mathbf{rk}_D(F) = \mathbf{rk}^{\mathcal{M}_D\langle K\rangle}(K)$.

证明。注意到引理 17 表明，对于每个元素 $e \in F \setminus K$， $\mathcal{M}_D$ 中都存在一个回路C，使得 $e \in C \subseteq K + e$。因此，由于引理 2 推出 $F \setminus K \subseteq \mathbf{cl}_D(K)$,

$$\mathbf{rk}_D(K) = \mathbf{rk}_D(K \cup (F \setminus K)) = \mathbf{rk}_D(F).$$

由于引理10蕴含$\mathbf{rk}_D(K) = \mathbf{rk}^{\mathcal{M}_D\langle K\rangle}(K)$，证明至此完成。 □

引理 *19.* 设 F 是 E的一个子集。定义 $K := \mathsf{Ch}_D(F)$。假设存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路C，使得 $C \subseteq F$ 且 $\mathsf{ta}_D(C) \cap K \neq \emptyset$。设 e 是 $\mathsf{ta}_D(C) \cap K$中的一个元素。那么存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路 C'，使得 $C' \subseteq K$ 且 $e \in \mathsf{ta}_D(C') \subseteq \mathsf{ta}_D(C) \cap K$。

证明。 若 $C \subseteq K$，则证明完成。因此，我们假设 $C \not\subseteq K$。由引理 17 可知，对于每个元素 $f \in C \setminus K$，都存在 $\mathcal{M}_D$的一个回路 C_f，使得 $f \in C_f$、$C_f - f \subseteq K$，并且对每个元素 $g \in C_f - f$都有 $g \succ_D f$。因此，由于对每个元素$f \in C \setminus K$都有 $e \notin C_f$，引理 7 蕴含存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路 C'，满足本引理中的条件。 □

3.2 主要算法

我们的主要算法见算法4。

在本小节余下部分中，我们使用算法4中的记号。注意，由于$P_{t,\,i-1} \subseteq P_{t,\,i}$ 和 $P_{t,\,i} \subseteq R_t$，算法4是一个多项式时间算法。

引理 20. 在算法*4*的步骤*22*中， $|I_{t,\,i}| \geq \mathbf{rk}_D(E \setminus P_{t,\,i-1})$。

证明. 只需证明，在算法4的步骤15中， $Z_{t,\,i} \neq \emptyset$。在算法4的步骤15中，引理18蕴含$|I_{t,\,i}| < \mathbf{rk}_D(E \setminus P_{t,\,i-1}) = \mathbf{rk}^{\mathcal{M}_D\langle K_{t,\,i}\rangle}(K_{t,\,i})$。因此，引理8蕴含$Z_{t,\,i} \neq \emptyset$。证明完毕。 □

引理 21. 在算法*4*的步骤*22*中， $I_{t,\,i}$ 是$\mathcal{M}_D\langle K_{t,\,i}\rangle$ 的基，且 $\mathcal{M}_D|(E \setminus P_{t,\,i})$。

证明。 为方便记号，我们定义

$$I := I_{t,i}, \quad P := P_{t,i} = P_{t,i-1}, \quad K := K_{t,i}, \quad \mathcal{K}_D := \mathcal{M}_D\langle K\rangle.$$

引理 20 推出 $|I| \geq \mathbf{rk}_D(E \setminus P)$。此外， $I \subseteq K \subseteq E \setminus P$。因此，如果我们能够证明 $I \in \mathcal{I}_D$，那么 I 就是 $\mathcal{M}_D|(E \setminus P)$ 的一个基。由此及引理10可知，只需证明 I 是 $\mathcal{K}_D$ 的一个基。为此，由于 I 是 $\mathcal{K}_D$ 的一个独立集，只需证明 $|I| \geq \mathbf{rk}^{\mathcal{K}_D}(K)$。引理10推出 $\mathbf{rk}^{\mathcal{K}_D}(K) = \mathbf{rk}_D(K)$。此外，由于$K \subseteq E \setminus P$，$\mathbf{rk}_D(E \setminus P) \geq \mathbf{rk}_D(K)$。由于 $|I| \geq \mathbf{rk}_D(E \setminus P)$，证明完毕。 □

引理 22。 在算法*4*的步骤*22*中， $I_{t,\,i}$ 是$\mathcal{M}_H\langle K_{t,\,i}\rangle$的基。

算法4: 所提算法

设置 $t \coloneqq 0$。定义 $R_0 \coloneqq \emptyset$
do
  设置 $t \coloneqq t+1$ 和 $i \coloneqq 0$。定义 $P_{t,0} \coloneqq R_{t-1}$。
  do
    设置 $i \coloneqq i+1$。
    定义 $K_{t,\ i} \coloneqq \mathsf{Ch}_D(E \setminus P_{t,\ i-1})$。定义 $Q_{t,\ i}$ 为 $\mathcal{M}_H\langle K_{t,\ i}\rangle$的一个基。
    如果 $\mathbf{rk}_D(E \setminus P_{t,i-1}) < \mathbf{rk}_H(K_{t,i})$ **则**
      定义 $P_{t\ ,i} \coloneqq P_{t\ ,i-1}$ 和 $R_t \coloneqq P_{t\ ,i}$。输出 **否**，然后停止。
    end
    如果 $Q_{t,i} \cap E_1 \neq K_{t,i} \cap E_1$ **则**
      定义 $P_{t,i} \coloneqq P_{t,i-1} \cup ((K_{t,i} \setminus Q_{t,i}) \cap E_1)$。
    else
      求 $I_{t,i}$ 的最大规模公共独立集 $\mathcal{M}_D\langle K_{t,i}\rangle, \mathcal{M}_H\langle K_{t,i}\rangle$。
      若 $|I_{t,i}| < \mathbf{rk}_D(E \setminus P_{t,i-1})$ **，则**
        求 $Z_{t,i}$ 的临界子集 $\mathcal{M}_D\langle K_{t,i}\rangle, \mathcal{M}_H\langle K_{t,i}\rangle$。
        定义 $P_{t\ ,i} \coloneqq P_{t\ ,i-1} \cup Z_{t,i}$.
      else
        定义 $P_{t\ ,i} \coloneqq P_{t\ ,i-1}$.
      end
    end
  当 $P_{t,\ i} \neq P_{t,\ i-1}$;
  如果 $P_{t,\ i} \cap$**块** $(I_{t,\ i}) \neq \emptyset$ **则**
    定义 b_t为 $P_{t,\ i} \cap$**块**$(I_{t,\ i})$ 中的一个元素。定义 $R_t \coloneqq P_{t,\ i} \cup \mathbf{ta}_H(\mathbb{C}_H(b_t,\ I_{t,\ i}))$.
  else
    定义 $R_t \coloneqq P_{t\ ,i}$.
  end
当 $R_t \neq P_{t$时$i}$;
如果 存在元素 $e_{\mathrm{R}} \in R_t$ 使得 $I_{t\ \ ,i} + e_{\mathrm{R}} \in \mathcal{I}_H$ **则**
  输出**否**，并停止。
否则
  输出 $I_{t\ \ ,i}$，然后停止。
结束

证明。 引理 20和算法4步骤 7中的条件表明

$$\mathbf{rk}_H(K_{t,i}) = \mathbf{rk}_{\mathcal{M}_H\langle K_{t,i}\rangle}(K_{t,i}) \geq |I_{t,i}| \geq \mathbf{rk}_D(E \setminus P_{t,i-1}) \geq \mathbf{rk}_H(K_{t,i}),$$

其中，该等式由引理10得出，第一个不等式则由$I_{t,i}$ 是$\mathcal{M}_H\langle K_{t,i}\rangle$的独立集这一事实得出。此时第一个不等式取等号。因此，$I_{t,i}$是$\mathcal{M}_H\langle K_{t,i}\rangle$的一个基。证明完毕。

□

引理 23. 在算法*4*的步骤*22*中，$K_{t,i} \cap E_1 \subseteq I_{t,i}$。

证明。 在此证明中，我们使用算法 2 中的记号，并将 F 替换为 $K_{t,\ i}$。假设算法 2 在 $s = k$时终止。那么，由于算法4第 10 步的条件意味着 $K_{t,\ i} \cap E_1$ 中的每个元素都包含在 $\mathcal{M}_H\langle K_{t,\ i}\rangle$的某个基中，因此，对于满足 s 为奇数的每个整数 $s \in [k]$， T_s 都是 $\mathcal{M}_s$的唯一基。此外，由于引理 22 意味着 $I_{t,\ i}$ 是 $\mathcal{M}_H\langle K_{t,\ i}\rangle$的一个基，因此对于满足 s 为奇数的每个整数 $s \in [k]$，$I_{t,\ i} \cap T_s$ 都是 $\mathcal{M}_s$ 的一个基。因此，对于每个整数 $s \in [k]$，$I_{t,\ i} \cap T_s = T_s$。证明完毕。 □

引理24。 假设算法*4*在 $t = k$时终止。若 $\mathcal{M}_D$、 $\mathcal{M}_H$存在非一致稳定公共独立集 J，则有 $J \cap R_k = \emptyset$。

我们在第5节证明引理24。

4 正确性

假设算法4在 $t = k$ 时终止。此外，我们假设对于每个整数 $t \in [k]$，都有 $P_{t,\ i_t} = P_{t,\ i_t - 1}$。也就是说，我们假设当 $i = i_t$ 时，算法4在步骤2到27的第 t 次迭代中继续执行步骤22。为记号简便，我们定义

$$I \coloneqq I_{k,i_k},\quad R \coloneqq R_k,\quad K \coloneqq K_{k,i_k},\quad \mathcal{K}_D \coloneqq \mathcal{M}_D\langle K\rangle,\quad \mathcal{K}_H \coloneqq \mathcal{M}_H\langle K\rangle.$$

注意，$R = P_{k,\ i_k} = P_{k,\ i_k - 1}$。

引理 25. 如果算法*4*在步骤*31*终止，那么算法*4*的输出是 $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_H$ 的非一致稳定公共独立集。

证明. 假设算法4在步骤31终止。令 e 是 $E \setminus I$ 中的一个元素，我们证明 e 不会阻塞 I。

首先，我们假设 $e \in R$。假设 e 阻挡了 I。于是我们推导出矛盾。由于算法4未在步骤 29 停止，$I + e \notin \mathcal{I}_H$。此外，引理14和引理22意味着$I$是 $\mathcal{M}_H$的独立集。因此， $e \in \mathbf{cl}_H(I)$。这意味着，由于 $e \in R$和 e阻挡了I， $e \in R \cap \mathbf{block}(I)$，即 $R \cap \mathbf{block}(I) \neq \emptyset$。由于我们假设对于每个元素 $f \in E$都有 $\{f\} \in \mathcal{I}_H$，因此有 $\mathbf{ta}_H(\mathbb{C}_H(b_k, I)) \neq \{b_k\}$。然而，这与$R = P_{k,i_k}$这一事实相矛盾。

从这里开始，我们假设 $e \in E \setminus R$。首先，我们假设 $e \in K$。然后，引理21和引理22意味着，对于每个元素 $S \in \{D, H\}$， $e \in \mathbf{cl}^{\mathcal{K}_S}(I)$。此外，引理11和引理15意味着，对于每个元素 $S \in \{D, H\}$，对于每个元素 $f \in \mathbb{C}_S(e, I)$都有 $f \gtrsim_S e$。注意，由于$e \notin I$，引理 23 意味着 $e \in E_2$。因此， e 不阻挡 I。

接下来，我们假设 $e \notin K$。由于 $e \in E \setminus R$，引理 2 和 21 推出 $e \in \mathbf{cl}_D(I)$。

断言3。 $f \succ_D e$ 对于每个元素 $f \in \mathbb{D}_D(e, I)$。

证明。 我们证明存在一个由 $\mathcal{M}_D$ 构成的回路 C'，使得 $e \in C' \subseteq I + e$，且对于每个元素 $f \in C' - e$ 都有 $f \succ_D e$。于是，由于 $C' = \mathbb{C}_D(e, I)$，证明得证。

由于 $e \notin K$，由引理 17 可知，存在一个由 $\mathcal{M}_D$ 构成的回路 C，使得对于每个元素 $f \in C - e$，$e \in C$、$C - e \subseteq K$ 和 $f \succ_D e$ 均成立。因此，只需证明，对于每个元素 $f \in C \setminus (I + e)$，都存在一个由 $\mathcal{M}_D$ 构成的回路 C_f，使得 $f \in C_f \subseteq I + f$，且对于每个元素 $g \in C_f$ 都有 $g \gtrsim_D f$。若此结论成立，那么对于每个元素 $f \in C \setminus (I + e)$，由于 $f \succ_D e$，因此 $e \notin C_f$。由此，引理 7 完成了该断言的证明。

令 f 是 $C \setminus (I + e)$ 中的一个元素。由于 $f \in K$，引理 21 表明 $f \in \mathbf{cl}^{\mathcal{K}_D}(I)$。因此，引理11表明，由于 $f \in \mathbb{C}_{\mathcal{K}_D}(f, I)$，对于每个元素 $g \in \mathbb{C}_D(f, I)$，都有 $g \gtrsim_D f$。因此，我们可以将 C_f 定义为 $\mathbb{C}_D(f, I)$。证明完毕。 □

断言3表明 e 不会阻塞 I。此情形的证明完毕。 □

引理 26。 如果算法*4*在第*8*步或步骤 *29* 终止，那么 $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_H$ 不存在非一致稳定公共独立集。

证明。 假设算法4在步骤 8 或步骤 29 处停止。此外，假设存在一个由 $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_H$构成的非一致稳定公共独立集 J。注意，引理24意味着 $J \subseteq E \setminus R$。定义子集 $I^+ \subseteq E$ 如下。若算法4在步骤 8 处停止，

则定义 I^+ 为 $\mathcal{M}_H|K$的一个基。又由于 $J \subseteq E \setminus R$ 和 $J \in \mathcal{I}_D$，算法4的步骤 7 中的条件意味着 $|I^+| > |J|$。若算法4在步骤 29 处停止，则定义$I^+ := I + e_{\mathrm{R}}$。由于引理 21意味着 I 是 $\mathcal{M}_D|(E \setminus R)$ 的一个基，因此 $|I^+| > |I| \geq |J|$。

断言 4. 设 e 是 $I^+ \setminus J$ 中的一个元素，使得 $e \in \mathbf{cl}_D(J)$。那么存在一个元素$f \in \mathbb{D}_D(e, J)$使得 $e \gtrsim_D f$。

证明。 假设对于每个元素 $f \in \mathbb{D}_D(e, J)$，都有 $f \succ_D e$。由于 $e \in I^+$，存在整数$t \in [k]$ 和 $i \in [i_t]$，使得$e \in K_{t,i}$。因此，$e \in E \setminus P_{t,i-1}$。由于 $J \subseteq E \setminus R$且$P_{t,i-1} \subseteq R$，我们有$J \subseteq E \setminus P_{t,i-1}$。这意味着 $\mathbb{C}_D(e, J) \subseteq E \setminus P_{t,i-1}$。因此，由引理 16 可得$e \notin K_{t,i}$。然而，这与$e \in K_{t,i}$这一事实矛盾。 □

由于 J 是非一致稳定的，由断言 4 可知，对于每个元素 $e \in I^+ \setminus J$，$e \in \mathbf{cl}_H(J)$，且对于每个元素 $f \in \mathbb{D}_H(e, J)$，都有 $f \gtrsim_H e$。

接下来，我们证明存在一个由 $\mathcal{M}_H$ 构成的回路 C，使得 $C \subseteq I^+$。这样的回路 C 的存在与以下事实矛盾： $I^+ \in \mathcal{I}_H$。为此，我们考虑一对满足以下条件的 E 子集（X， Y）。

(B1) $X \subseteq I^+ \setminus J$、 $Y \subseteq J \setminus I^+$和 $|X| > |Y|$。

(B2) 对于每个元素 $e \in X$，存在一个由 $\mathcal{M}_H$ 构成的回路 C_e，使得 $C_e \cap X = \{e\}$ 且 $C_e \subseteq I^+ \cup Y$。

注意， （$I^+ \setminus J$， $J \setminus I^+$）满足上述条件。

设（X， Y）是一对 E 的子集，满足 (B1) 和 (B2)，并且在所有满足 (B1) 和 (B2) 的 E 子集对中，使 $|Y|$最小。接下来，我们证明$|Y| = 0$。这意味着存在一个由 $\mathcal{M}_H$ 构成的回路 C，使得 $C \subseteq I^+$。

假设 $Y \neq \emptyset$。对于每个元素 $e \in X$，我们将 C_e 定义为满足 (B2) 中条件的 $\mathcal{M}_H$ 的一个回路。于是，由于 $I^+ \in \mathcal{I}_H$，对于每个元素 $e \in X$，都有 $C_e \cap Y \neq \emptyset$。由于 $|X| > |Y|$，存在一个元素 $e \in X$，使得对于某个元素 $f \in X - e$，有 $C_e \cap C_f \cap Y \neq \emptyset$。固定这样一个元素 $e \in X$。设 g是Y中的一个元素，使得对于某个元素 $f \in X - e$，有 $g \in C_e \cap C_f$。定义 W为满足 $g \in C_f$的元素 $f \in X - e$组成的集合。于是，对于每个元素 $f \in W$，引理 1 表明，存在 $\mathcal{M}_H$的一个回路 C'_f，使得 $f \in C'_f \subseteq I^+ \cup (Y - g)$ 且 $C'_f \cap (X - e) = \{f\}$。因此，$(X - e,\ Y - g)$ 满足 (B1) 和 (B2)。然而，由于 $|Y| > |Y - g|$，这与 $(X,\ Y)$ 的定义矛盾。证明完毕。 □

现在我们可以证明本文的主要结果了。

定理 1. 算法*4*能够正确判断是否存在由 $\mathcal{M}_D$、 $\mathcal{M}_H$构成的非一致稳定公共独立集，并在其存在时找出一个。

证明。 该定理由引理 25 和 26 得出。 □

5 引理24的证明

本节证明引理24。以下我们使用算法4中的记号。假设存在一个由 $\mathcal{M}_D$、 $\mathcal{M}_H$ 构成的非一致稳定公共独立集，其中包含 R_k中的一个元素。此时，若存在一个由 $\mathcal{M}_D$、 $\mathcal{M}_H$ 构成的非一致稳定公共独立集包含 e，则称元素 $e \in R_k$ 为一个坏元素。注意，上述假设意味着存在一个整数 $t \in [k]$，使得 $R_t \setminus R_{t-1}$ 包含一个坏元素。定义z 为所有满足 $t \in [k]$ 中存在坏元素的整数中最小的整数。

我们将证明分为以下两种情形。

情形 1. 存在一个整数 $i \in [i_z]$ 使得 $P_{z,i} \setminus P_{z,i-1}$ 包含一个坏元素 t.

情形 2。 对于任意整数 $i \in [i_z]$ $P_{z,\ i} \setminus P_{z,\ i-1}$ 均不包含坏元素。

5.1 情形 1

将 q 定义为 $[i_z]$ 中满足 $P_{z,\ q} \setminus P_{z,\ q-1}$ 包含坏元素 e的最小整数。于是，存在 $\mathcal{M}_D,\ \mathcal{M}_H$的非一致稳定公共独立集 J，使得 $e \in J$。由 q的最小性可知，$J \subseteq E \setminus P_{z,\ q-1}$。为记号简便，定义 $K := K_{z,\ q}$，$Q := Q_{z,\ q}$。此外，如果 $Q \cap E_1 = K \cap E_1$，则定义 $Z := Z_{z,\ q}$。

首先，假设 $e \in (K \setminus Q) \cap E_1$。由于 Q是 $\mathcal{K}_H$的一个基，$e \in \mathbf{cl}^{\mathcal{K}_H}(Q)$。定义 $C := \mathbb{C}_H(e,\ Q)$。于是，引理 15 蕴含，对于每个元素 $f \in C$，都有 $f \gtrsim_H e$。我们证明，对于每个元素 $f \in C \setminus J$，存在 $\mathcal{M}_H$的一个回路 C_f，使得 $f \in C_f$、$C_f - f \subseteq J$和 $e \notin C_f$。如果能够证明这一点，那么由于 $e \in C$，引理 7 蕴含存在 $\mathcal{M}_H$的一个回路C'，使得 $C' \subseteq J$。然而，这与 $J \in \mathcal{I}_H$这一事实矛盾。

令 f 为 $C \setminus J$ 中的一个元素。由于 $f \in C - e \subseteq K$，引理 16 蕴含，若 $f \in \mathbf{cl}_D(J)$，则存在一个元素 $g \in \mathbb{D}_D(f, J)$，使得 $f \gtrsim_D g$。因此，由于 J 是 $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_H$ 的非一致稳定公共独立集，我们有 $f \in \mathbf{cl}_H(J)$，且对每个元素 $g \in \mathbb{C}_H(f, J)$，都有 $g \gtrsim_H f$。定义 $C_f := \mathbb{C}_H(f, J)$。剩下要证明的是 $e \notin C_f$。若 $f \succ_H e$，则由于对每个元素 $g \in C_f$，都有 $g \gtrsim_H f$，故 $e \notin C_f$。因此，我们假设 $f \sim_H e$。由于 $e \in E_1$，若 $f \notin \mathbb{C}_{\mathcal{K}_H}(e, Q)$，则引理 15 蕴含 $f \succ_H e$。然而，这与假设 $f \sim_H e$ 矛盾。因此，$f \in \mathbb{C}_{\mathcal{K}_H}(e, Q)$。这意味着，由于 $e \in E_1$，$f \in E_1$。因此，由于 J 是 $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_H$ 的非一致稳定公共独立集，对每个元素 $g \in \mathbb{D}_H(f, J)$，都有 $g \succ_H f$。这意味着 $e \notin C_f$。至此，本情形的证明完成。

接下来，我们假设 $e \in Z$。定义

$$U := Z \setminus \mathbf{cl}_{\mathcal{K}_D}(K \setminus (Z \setminus J)).$$

Since $e \notin U$ 由 $e \in J$ 得出，因此我们有 $U \subsetneq Z$。因此，Z 的最小性意味着

$$\mathbf{rk}_{\mathcal{K}_D}(K \setminus U) + \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_H}(U) > \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_D}(K \setminus Z) + \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_H}(Z). \tag{2}$$

定义 B 为 $\mathcal{K}_H|U$ 的一个基。则由 (2) 可知

$$|B| > \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_H}(Z) - \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_D}(K \setminus U) + \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_D}(K \setminus Z). \tag{3}$$

由于 $K \setminus U = \mathbf{cl}^{\mathcal{K}_D}(K \setminus (Z \setminus J))$，我们有

$$\mathbf{rk}_{\mathcal{K}_D}(K \setminus U) = \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_D}(K \setminus (Z \setminus J)).$$

因此，由 (3) 可知

$$|B| + \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_D}(K \setminus (Z \setminus J)) - \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_D}(K \setminus Z) > \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_H}(Z).$$

此外，由于 $\mathbf{rk}^{\mathcal{K}_D}(\cdot)$ 是一个次模函数（例如参见 [23, 引理 1.3.1]），我们有

$$\mathbf{rk}_{\mathcal{K}_D}(K \setminus (Z \setminus J)) - \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_D}(K \setminus Z) \leq \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_D}(Z \cap J).$$

因此，由于显然有 $|Z \cap J| \geq \mathbf{rk}^{\mathcal{K}_D}(Z \cap J)$，我们得到

$$|B| + |Z \cap J| \geq |B| + \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_D}(Z \cap J) > \mathbf{rk}_{\mathcal{K}_H}(Z). \tag{4}$$

定义 I 为满足以下条件的$\mathcal{K}_H$ 独立集。

- $B \subseteq I \subseteq B \cup (Z \cap J)$。

- 对于任意元素 $f \in (Z \cap J) \setminus I$， $I + f$是 $\mathcal{K}_H$的相关集。

也就是说， I是 $\mathcal{K}_H|(B \cup (Z \cap J))$ 的一个基，使得 $B \subseteq I$。于是，由 (4) 可得 $(Z \cap J) \setminus I \neq \emptyset$。令 f为 $(Z \cap J) \setminus I$中的一个元素。定义 $C := \mathbb{C}_{\mathcal{K}_H}(f, I)$。

令 B^* 为 $\mathcal{K}_H$ 的一个基，使得 $I \subseteq B^*$。注意到 $f \notin B^*$，且由引理 2 可知$f \in \mathbf{cl}^{\mathcal{K}_H}(B^*)$。此外，引理 1 意味着 $\mathbb{C}_{\mathcal{K}_H}(f, B^*) = C$。定义 $C^* := \mathbb{C}_H(f, B^*)$。然后我们证明，对于每个元素 $g \in C^* \setminus J$，存在 $\mathcal{M}_H$ 的一个回路 C_g，使得$g \in C_g$、 $C_g - g \subseteq J$和 $f \notin C_g$。如果能够证明这一点，那么由引理 7 可知，存在一个 $\mathcal{M}_H$ 的回路，该回路包含于 J 这个子集之中。这与 $J \in \mathcal{I}_H$的事实矛盾。在下文中，我们固定一个元素 $g \in C^* \setminus J$。

首先，我们考虑 $g \notin \mathbf{cl}_D(J)$ 的情形。在这种情况下，由于 J 是 $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_H$ 的非一致稳定公共独立集，$g \in \mathbf{cl}_H(J)$，并且对每个元素 $h \in \mathbb{D}_H(g, J)$， $h \succ_H g$。由引理 15 可知 $g \gtrsim_H f, f \notin \mathbb{C}_H(g, J)$。因此，我们可以定义 $C_g := \mathbb{C}_H(g, J)$。

在本情形证明的其余部分中，我们假设 $g \in \mathbf{cl}_D(J)$。若存在元素$h \in \mathbb{D}_D(g, J)$，使得 $g \succ_D h$，那么由于 J 是 $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_H$ 的非一致稳定公共独立集， $g \in \mathbf{cl}_H(J)$，并且对每个元素 $h \in \mathbb{D}_H(g, J)$， $h \succ_H g$。由引理 15 可知 $g \gtrsim_H f, f \notin \mathbb{C}_H(g, J)$。因此，我们可以定义 $C_g := \mathbb{C}_H(g, J)$。

在下文中，我们假设对于每个元素 $h \in \mathbb{C}_D(g, J)$， $h \gtrsim_D g$。

引理 27. $\{g\} \subsetneq \mathbf{ta}_D(\mathbb{C}_D(g, J))$.

证明。 假设 $\{g\} = \mathbf{ta}_D(\mathbb{C}_D(g, J))$。那么，对于每个元素 $h \in \mathbb{D}_D(g, J)$，都有 $h \succ_D g$。回忆一下，$J \subseteq E \setminus P_{z,q-1}$。此外，$g \in C^* \subseteq K \subseteq E \setminus P_{z,q-1}$。由此及引理 16 可得$g \notin K$。然而，这与 $g \in K$ 这一事实矛盾。 □

引理 27 蕴含 $g \in \mathbf{cl}_H(J)$，并且对于每个元素 $h \in \mathbb{C}_H(g, J)$，都有 $h \gtrsim_H g$。我们将证明的其余部分分为以下几种情况。

(1-1) $g \notin C$ 和 $f \in E_1$。

(1-2) $g \notin C$ 和 $f \in E_2$。

(1-3) $g \in C$。

(1-1) 在此情形下，引理 15 推出 $g \succ_H f$。这意味着 $f \notin \mathbb{C}_H(g, J)$。因此，我们可以定义 $C_g := \mathbb{C}_H(g, J)$。

(1-2) 若 $g \in E_2$，则引理 15 推出 $g \succ_H f$。这意味着 $f \notin \mathbb{C}_H(g, J)$，并且我们可以定义 $C_g := \mathbb{C}_H(g, J)$。假设 $g \in E_1$。在此情形下，由于对于每个元素 $h \in \mathbb{D}_H(g, J)$， J都是 $\mathcal{M}_D$， $\mathcal{M}_H$, $g \in \mathbf{cl}_H(J)$ 和 $h \succ_H g$ 的非一致稳定公共独立集。因此， $f \notin \mathbb{C}_H(g, J)$，我们定义 $C_g := \mathbb{C}_H(g, J)$。

(1-3)我们先证明以下引理。

引理28. $g \in U$。

证明。 由于 $f \in J$且 $g \notin J$，我们有 $g \neq f$。此外， $C - f \subseteq I \subseteq B \cup (Z \cap J)$。因此，由于 $g \in C - f$且 $g \notin J$，我们有 $g \in B \subseteq U$。 □

在本证明的其余部分中，我们证明 $g \in \mathbf{cl}^{\mathcal{K}_D}(K \setminus (Z \setminus J))$，这与引理28矛盾。为此，引理 2 表明，只需证明存在一个 $\mathcal{K}_D$的回路 C'，使得 $g \in C'$ 且 $C' - g \subseteq K \setminus (Z \setminus J)$。

定义 $C^\circ \coloneqq \mathbb{C}_D(g, J)$。则 $C^\circ \cap (Z \setminus J) = \{g\}$，从而 $\mathbf{ta}_D(C^\circ) \cap (Z \setminus J) = \{g\}$。由于$J \subseteq E \setminus P_{z, q-1}$，引理 19 表明存在一个 $\mathcal{M}_D$ 的回路 $C^\bullet$，使得 $C^\bullet \subseteq K$ 且$g \in \mathbf{ta}_D(C^\bullet) \subseteq \mathbf{ta}_D(C^\circ) \cap K$。因此，由于

$$g \in \mathbf{ta}_D(C^\bullet) \cap (Z \setminus J) \subseteq \mathbf{ta}_D(C^\circ) \cap K \cap (Z \setminus J) = \{g\},$$

我们有 $\mathbf{ta}_D(C^\bullet) \cap (Z \setminus J) = \{g\}$。引理 13 表明，存在一个由 $\mathcal{K}_D$ 构成的回路 $C^\diamond$，使得 $g \in C^\diamond \subseteq \mathbf{ta}_D(C^\bullet)$。由于 $\mathbf{ta}_D(C^\bullet) \cap (Z \setminus J) = \{g\}$，$C^\diamond - g \subseteq K \setminus (Z \setminus J)$。证明至此完成。

5.2 情形 2

为方便记号，我们定义

$$I \coloneqq I_{z,i_z},\ \ b \coloneqq b_z,\ \ P \coloneqq P_{z,i_z},\ \ K \coloneqq K_{z,i_z},\ \ \mathcal{K}_D \coloneqq \mathcal{M}_D\langle K\rangle,\ \ \mathcal{K}_H \coloneqq \mathcal{M}_H\langle K\rangle.$$

那么 $\mathbf{ta}_H(\mathbb{C}_H(b,\ I)) - b$含有一个坏元素 ξ。根据坏元素的定义，存在一个由 $\mathcal{M}_D,\ \mathcal{M}_H$构成的非一致稳定公共独立集 J，使得 $\xi \in J$。由于 P不含坏元素，因此 $J \subseteq E \setminus P$。由于 $b \in P,\ \ b \notin J$。

引理 29。 $b \in \mathbf{cl}_H(J)$且对每个元素 $e \in \mathbb{D}_H(b,\ J)$。

证明。 由于 $b \in \mathbb{C}_H(b,\ I)$ 且 $\xi \in \mathbf{ta}_H(\mathbb{C}_H(b,\ I))$，因此我们有 $b \gtrsim_H \xi$。

由于 J 是 $\mathcal{M}_D,\ \mathcal{M}_H$ 的非一致稳定公共独立集，若 $b \notin \mathbf{cl}_D(J)$，则$b \in \mathbf{cl}_H(J)$，并且对于每个元素 $e \in \mathbb{D}_H(b,\ J)$ 都有 $e \succ_H b$。这意味着，由于 $b \gtrsim_H \xi$，对于每个元素 $e \in \mathbb{D}_H(b,\ J)$ 都有 $e \succ_H \xi$。证明完毕。

在下文中，我们假设 $b \in \mathbf{cl}_D(J)$。定义 $C' \coloneqq \mathbb{C}_D(b,\ J)$。

断言 5。 存在一个元素 $e^* \in C' - b$，使得 $b \gtrsim_D e^*$。

证明。 假设对于每个元素 $e \in C' - b$ 都有 $e \succ_D b$。注意，由于 $J \subseteq E \setminus P$，我们有$C' - b \subseteq E \setminus P$。此外，由于 $b \in P$，存在整数 $t \in [z]$ 和 $i \in [i_t]$，使得$b \in K_{t,\ i}$。因此，$b \in E \setminus P_{t,\ i-1}$。由于 $P_{t,\ i-1} \subseteq P$，所以 $C' \subseteq E \setminus P_{t,\ i-1}$。然而，引理 16 表明$b \notin K_{t,\ i}$。这与$b \in K_{t,\ i}$这一事实矛盾。证明完毕。 □

于是断言 5 推出 $b \in \mathbf{cl}_H(J)$，并且对每个元素 $e \in \mathbb{C}_H(b, J)$，都有 $e \gtrsim_H b$。若 $e \in E_1$，那么由于 J 是 $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_H$ 的非一致稳定公共独立集，对每个元素 $e \in \mathbb{D}_H(b, J)$，都有 $e \succ_H b$。因此，由于 $b \gtrsim_H \xi$，对每个元素 $e \in \mathbb{D}_H(b, J)$，都有 $e \succ_H \xi$。

在本证明的其余部分，我们假设 $b \in E_2$。若 $b \succ_H \xi$，则对每个元素$e \in \mathbb{D}_H(b, J)$，都有 $e \succ_H \xi$。因此，我们假设 $b \sim_H \xi$。于是 $b \in \mathbf{ta}_H(\mathbb{C}_H(b, I))$。

若存在一个元素 $f \in C'$ 使得 $b \succ_D f$，那么由于 J 是 $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_H$ 的非一致稳定公共独立集，对每个元素 $e \in \mathbb{D}_H(b, J)$，都有 $e \succ_H b$。由于 $b \gtrsim_H \xi$，对每个元素 $e \in \mathbb{D}_H(b, J)$，都有$e \succ_H \xi$。因此，我们假设对每个元素 $e \in C'$，都有 $e \gtrsim_D b$。

断言 6. $b \in \mathbf{cl}_D(I)$ 并且 $e \gtrsim_D b$ 对每个元素 $e \in \mathbb{C}_D(b, I)$。

证明。 假设 $C' - b \subseteq I$。那么引理 2 意味着 $b \in \mathbf{cl}_D(I)$，而引理 1 意味着 $\mathbb{C}_D(b, I) = C'$。由于 $e \gtrsim_D b$ 对每个元素 $e \in C'$都成立，证明完毕。接下来，我们假设 $C' - b \nsubseteq I$。

令 f 为 $C' \setminus (I + b)$ 中的一个元素。我们证明，存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路 C_f，使得对于每个元素 $e \in C_f$，都有 $f \in C_f$、$C_f - f \subseteq I$、$b \notin C_f$ 和 $e \gtrsim_D f$。如果我们能够证明这一点，那么引理 7 蕴含存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路 C°，使得对于每个元素 $e \in C^\circ$，都有 $b \in C^\circ$ 和 $C^\circ - b \subseteq I$ 以及$e \gtrsim_D b$。由于引理 1 蕴含 $\mathbb{C}_D(b,\ I) = C^\circ$，故证明完成。

如果 $f \in K$，那么引理 21 蕴含 $f \in \mathbf{cl}^{\mathcal{K}_D}(I)$。定义 $C_f := \mathbb{C}_D(f,\ I)$。于是 $C_f - f \subseteq I$。由于 $f \neq b$、$C_f - f \subseteq I$ 和 $b \notin I$，我们有 $b \notin C_f$。引理11 蕴含对于每个元素 $e \in C_f$ 都有 $e \gtrsim_D f$。该情形的证明完成。

若 $f \notin K$，则由引理 17 可知，存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路 $C^\bullet$，使得 $f \in C^\bullet$、$C^\bullet - f \subseteq K$，并且对每个元素 $e \in C^\bullet - f$都有 $e \succ_D f$。由于 $b \in P$，$b \notin K$。这意味着$b \notin C^\bullet$。令 g为 $C^\bullet \setminus (I + f)$中的一个元素。由于 $g \in K$，由引理 21 可知 $g \in \mathbf{闭包}^{\mathcal{K}_D}(I)$。定义 $C^\diamond := \mathbb{C}_D(g,\ I)$。于是 $C^\diamond - g \subseteq I$。由于 $g \neq b$、$C^\diamond - g \subseteq I$和 $b \notin I$，我们有 $b \notin C^\diamond$。此外，由引理11可知，对每个元素 $e \in C^\diamond$都有 $e \gtrsim_D g$。由于 $g \succ_D f$，$f \notin C^\diamond$。因此，由引理 7 可知，存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路 C_f，使得 $f \in C_f$、$C_f - f \subseteq I$、$b \notin C_f$，并且对每个元素 $e \in C_f$ 都有 $e \gtrsim_D f$。证明完毕。□

回顾一下，$b \in \mathbf{块}(I)$。此外，$b \in E_2$和 $b \in \mathbf{ta}_H(\mathbb{C}_H(b,\ I))$。因此，$b \notin \mathbf{cl}_D(I)$，或者$b \in \mathbf{cl}_D(I)$，并且存在一个元素 $g \in \mathbb{D}_D(b,\ I)$ 使得 $b \succ_D g$。然而，这与断言 6 矛盾。证明完毕。□

我们考虑一个满足以下条件的最大规模公共独立集 L of $\mathcal{K}_D$，$\mathcal{K}_H$。

(C1) $b \in \mathbf{cl}_H(L) \setminus L$.

(C2) $\xi \gtrsim_H e$对于每个元素 $e \in \mathbf{ta}_H(\mathbb{C}_H(b,\ L))$。

(C3) $J \cap \mathbf{ta}_H(\mathbb{C}_H(b, L)) \neq \emptyset$.

(C4) L 在 $\mathcal{K}_D$，$\mathcal{K}_H$的所有满足（C1）、（C2）和（C3）的最大规模公共独立集中使 $|J \cap L|$ 最大。

由于 I 满足 (C1)、(C2) 和 (C3)，因此 L定义良好。

引理 30. 设 e是 $\mathbb{D}_H(b, L) \setminus J$中的一个元素，满足 $e \in \mathbf{cl}_D(J)$。那么存在一个元素 $f \in \mathbb{D}_D(e, J)$，使得 $e \succ_D f$。

在证明引理 30 之前，我们先证明引理 30 完成了本情形的证明。设 e是 $\mathbb{C}_H(b, L) \setminus (J + b)$中的一个元素，且设 η是 $J \cap \mathsf{ta}_H(\mathbb{C}_H(b, L))$中的一个元素。由于 J是 $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_H$的非一致稳定公共独立集，引理 30 蕴含$e \in \mathbf{cl}_H(J)$，并且对每个元素 $f \in \mathbb{D}_H(e, J)$，都有 $f \succ_H e$。由于 $\eta \in \mathsf{ta}_H(\mathbb{C}_H(b, L))$，因此 $e \gtrsim_H \eta$。这意味着 $\eta \notin \mathbb{C}_H(e, J)$。由于 $\xi \gtrsim_H \eta$，引理 29 蕴含 $\eta \notin \mathbb{C}_H(b, J)$。因此，引理 7 蕴含存在 $\mathcal{M}_H$ 的一个回路 C'，使得 $C' \subseteq J$。证明完毕。

剩下的工作是证明引理 30。为此，我们先证明一个必要的引理 .

令 e 为 $L \setminus J$ 中满足 $e \in \mathbf{cl}_D(J)$ 的一个元素。那么，由于 $L \subseteq K$，我们有 $e \in K$。这意味着，由于 $J \subseteq E \setminus P$，引理 16 表明存在一个元素 $f \in \mathbb{D}_D(e,\ J)$，使得 $e \gtrsim_D f$。因此，由于对于每个元素 $f \in \mathbb{C}_H(e,\ J)$，$J$ 是 $\mathcal{M}_D$，$\mathcal{M}_H$、$e \in \mathbf{cl}_H(J)$ 和 $f \gtrsim_H e$ 的非一致稳定公共独立集。

引理 31。令 e 为 $L \setminus J$ 中满足 $e \in \mathbf{cl}_D(J)$ 的一个元素。假设对于每个元素 $g \in \mathbb{C}_D(e、\ J)$，都有 $g \gtrsim_D e$。那么，以下陈述成立。

(D1) 存在一个元素 $f \in J \setminus L$，使得 $f \in \mathbf{cl}^{\mathcal{K}_D}(L)$ 且 $e \in \mathbb{C}_{\mathcal{K}_D}(f、\ L)$。

(D2) $f \in \mathbf{闭包}^{\mathcal{K}_H}(L)$，并且存在一个元素 $g \in L \setminus J$，使得 $g \in \mathbb{C}_{\mathcal{K}_H}(f, L)$，$g \in \mathbf{闭包}_D(J)$，且对于每个元素 $h \in \mathbb{C}_D(g, J)$，都有 $h \gtrsim_D g$。

证明。 **(D1)** 为记号简便，我们定义 $\Delta := J \setminus L$。

我们证明，存在 $\mathcal{K}_D$ 的一个回路 C，使得 $e \in C \subseteq L \cup J$ 且 $|C \cap \Delta| = 1$。令 f 为 $C \cap \Delta$ 中的元素。于是，引理 2 蕴含 $f \in \mathbf{cl}^{\mathcal{K}_D}(L)$。此外，引理 1 蕴含 $C = \mathbb{C}_{\mathcal{K}_D}(f, L)$。这就完成了 (D1) 的证明。

定义 $C_1 := \mathbb{C}_D(e, J)$。于是，引理 19 蕴含存在 $\mathcal{M}_D$ 的一个回路 C_2，使得 $C_2 \subseteq K$ 且 $e \in \mathsf{ta}_D(C_2) \subseteq \mathsf{ta}_D(C_1) \cap K \subseteq L \cup J$。因此，由于 $e \in \mathsf{ta}_D(C_2)$，引理 13 蕴含存在 $\mathcal{K}_D$ 的一个回路 C_3，使得 $e \in C_3 \subseteq \mathsf{ta}_D(C_2)$。令 C_4 为 $\mathcal{K}_D$ 的一个回路，使得 $e \in C_4 \subseteq L \cup J$，且在所有满足 $e \in C' \subseteq L \cup J$ 的 $\mathcal{K}_D$ 的回路 C' 中，$|C_4 \cap \Delta|$ 取最小值。C_3 的存在表明 C_4 定义良好。若 $C_4 \subseteq L$，则这与 L 是 $\mathcal{K}_D$ 的独立集这一事实矛盾。因此，$C_4 \cap \Delta \neq \emptyset$。若 $|C_4 \cap \Delta| = 1$，则证明完成。因此，我们假设 $|C_4 \cap \Delta| \geq 2$。由于引理 21 蕴含 I 是 $\mathcal{K}_D$ 的基，且 $|I| = |L|$，所以 L 是 $\mathcal{K}_D$ 的基。因此，对每个元素 $g \in C_4 \cap \Delta$，都有 $g \in \mathbf{cl}^{\mathcal{K}_D}(L)$。若存在元素 $g \in C_4 \cap \Delta$，使得 $e \notin \mathbb{C}_{\mathcal{K}_D}(g, L)$，则引理 1 蕴含存在 $\mathcal{K}_D$ 的一个回路 C'，使得 $e \in C' \subseteq L \cup J$ 且 $C' \cap \Delta \subseteq (C_4 \cap \Delta) - g$。这与 C_4 的定义矛盾。因此，对每个元素 $g \in C_4 \cap \Delta$，都有 $e \in \mathbb{C}_{\mathcal{K}_D}(g, L)$。令 h, h' 为 $C_4 \cap \Delta$ 中满足 $h \neq h'$ 的元素。于是，引理 1 蕴含存在 $\mathcal{K}_D$ 的一个回路 C_5，使得 $h \in C_5 \subseteq L \cup J$、$e \notin C_5$ 且 $C_5 \cap \Delta \subseteq \{h, h'\} \subseteq C_4 \cap \Delta$。由此以及引理 1 可知，存在 $\mathcal{K}_D$ 的一个回路 C'，使得 $e \in C' \subseteq L \cup J$ 且 $C' \cap \Delta \subseteq (C_4 \cap \Delta) - h$。这与 C_4 的定义矛盾。这就完成了 (D1) 的证明。

(D2) 由于引理 22 意味着 L 是 $\mathcal{K}_H$, $f \in \mathbf{cl}^{\mathcal{K}_H}(L)$ 的一个基。

假设对于每个元素 $g \in \mathbb{C}_{\mathcal{K}_H}(f, L)$，(i) $g \notin \mathbf{cl}_D(J)$，或者 (ii) $g \in \mathbf{cl}_D(J)$，并且存在一个元素 $h \in \mathbb{D}_D(g, J)$，使得 $g \succ_D h$。

定义 $C := \mathbb{C}_H(f, L)$。我们证明，对于每个元素 $g \in C \setminus J$，存在一个 $\mathcal{M}_H$ 的回路 C_g，使得 $g \in C_g$, $C_g - g \subseteq J$ 和 $f \notin C_g$。由此及引理 7 可知，存在一个 $\mathcal{M}_H$ 的回路 C'，使得 $C' \subseteq J$。然而，这与 $J \in \mathcal{I}_H$ 这一事实矛盾。令 g 为 $C \setminus J$ 中的一个元素。

首先，假设 $g \notin \mathbf{cl}_D(J)$。由于 J 是 $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_H$ 的非一致稳定公共独立集，对于每个元素 $h \in \mathbb{D}_H(g, J)$，$g \in \mathbf{cl}_H(J)$ 且 $h \succ_H g$。由引理 15 可得 $g \sim_H f$，因此我们可以定义 $C_g := \mathbb{C}_H(g, J)$。接下来，假设 $g \in \mathbf{cl}_D(J)$。

接下来，我们假设 $g \in \mathbb{C}_{\mathcal{K}_H}(f, L)$。那么，上述假设意味着存在一个元素 $h \in \mathbb{D}_D(g, J)$，使得 $g \succ_D h$。这意味着 $g \in \mathbf{cl}_H(J)$，并且对于每个元素 $h \in \mathbb{D}_H(g, J)$，都有 $h \succ_H g$。由于 $g \sim_H f$，我们可以定义 $C_g := \mathbb{C}_H(g, J)$。

第三，我们假设 $g \in C \setminus \mathbb{C}_{\mathcal{K}_H}(f, L)$。如果存在一个元素 $h \in \mathbb{D}_D(g, J)$，使得 $g \succ_D h$，那么 $g \in \mathbf{cl}_H(J)$，并且对于每个元素 $h \in \mathbb{D}_H(g, J)$，都有 $h \succ_H g$。这意味着我们可以定义 $C_g := \mathbb{C}_H(g, J)$。下文中，我们假设对于每个元素 $h \in \mathbb{C}_D(g, J)$，都有 $h \gtrsim_D g$。由于 $g \in K$，引理 16 意味着 $\mathsf{ta}_D(\mathbb{C}_D(g, J)) \neq \{g\}$。这意味着，如果 $g \in E_1$，那么由于 J 是 $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_H, g \in$ 的非一致稳定公共独立集，${}_H\mathbf{cl}_J(h \succ_H g)$，并且对于每个元素 $h \in \mathbb{D}_H(g, J)$，都有 $h \succ_H g$。因此，在这种情况下，我们可以定义 $C_g := \mathbb{C}_H(g, J)$。假设 $g \in E_2$。由于 J 是 $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_H, g \in$ 的非一致稳定公共独立集，${}_H\mathbf{cl}_J(h \gtrsim_H g)$，并且对于每个元素 $h \in \mathbb{C}_H(g, J)$，都有 $h \gtrsim_H g$。如果 $f \in E_2$，那么由于 $g, f \in E_2$，引理 15 意味着 $g \succ_H f$。如果 $f \in E_1$，那么引理 15 意味着 $g \succ_H f$。因此，我们可以定义 $C_g := \mathbb{C}_H(g, J)$。证明完毕。

□

现在我们可以证明引理 30。

引理 *30* 的证明。 假设存在一个元素 $e \in \mathbb{D}_H(b, L) \setminus J$，使得 $e \in \mathbf{cl}_D(J)$，并且对于每个元素 $f \in \mathbb{C}_D(e, J)$，$f \gtrsim_D e$ 都成立。由于 E 是有限的，根据引理 31，$\mathbf{G}^{\mathcal{K}_D\mathcal{K}_H}(L)$ 中存在一个有向圈。因此，$\mathbf{G}^{\mathcal{K}_D\mathcal{K}_H}(L)$ 中存在一个不含捷径弧的简单有向环。假设该简单有向环依次经过元素 $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots\ldots, e_\ell, f_\ell \in K$，并满足以下条件。

- $e_1, e_2, \ldots, e_\ell \in J \setminus L$ and $f_1, f_2, \ldots, f_\ell \in L \setminus J$.
- $f_i \in \mathbb{C}_{\mathcal{K}_H}(e_i, L)$ for every integer $i \in [\ell]$.

对于每个整数 $i \in [\ell]$，我们定义

$$M_i \coloneqq (L \setminus \{f_1, f_2, \ldots, f_i\}) \cup \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}.$$

定义 $M_0 \coloneqq L$。接下来我们证明，对于每个整数 $i \in [\ell] \cup \{0\}$， M_i 满足 (C1)、(C2) 和 (C3)。引理 9 表明， M_ℓ 是 $\mathcal{K}_D$， $\mathcal{K}_H$ 的最大规模公共独立集。由于 $|J \cap M_\ell| > |J \cap L|$，这与 L 的定义矛盾。证明完毕。

由于 L 是 $\mathcal{K}_H$ 的独立集，引理 5 表明，对于每个整数 $i \in [\ell]$， M_i 都是 $\mathcal{K}_H$ 的独立集。因此，对于每个整数 $i \in [\ell]$， $f_i \in \mathbb{C}_{\mathcal{K}_H}(e_i, M_{i-1})$。

令 i为 $[\ell]$ 中的一个整数。假设 M_{i-1} 满足 (C1)、(C2) 和 (C3)。接下来我们证明 M_i 满足 (C1)、(C2) 和 (C3)。我们可以如下证明 M_i 满足 (C1)：由于M_{i-1} 满足 (C1)，引理 5 表明，只需证明 $b \neq e_i$。这是由 $b \notin J$ 这一事实得出的。

接下来，我们证明 M_i 满足 (C2) 和 (C3)。定义 $C_{i-1} \coloneqq \mathbb{C}_H(b, M_{i-1})$，以及$C_i \coloneqq \mathbb{C}_H(b, M_i)$。设 η是 $J \cap \mathbf{ta}_H(C_{i-1})$ 中的一个元素。我们将证明分为以下三种情形。

(2-1) $f_i \succ_H \eta$.

(2-2) $\eta \succ_H f_i$.

(2-3) $f_i \sim_H \eta$.

注意，由于 $f_i \in \mathbb{C}_{\mathcal{K}_H}(e_i, L)$，引理 15 蕴含 $e_i \sim_H f_i$。

(2-1) 对于每个整数 $j \in \{i, i-1\}$，我们将 C'_j 定义为满足$\eta \gtrsim_H g$的元素 $g \in C_j$ 所组成的集合。由于 $\eta \in \mathbf{ta}_H(C_{i-1})$，因此 $C'_{i-1} = \mathbf{ta}_H(C_{i-1})$。于是，对于任意一对元素 $g, g' \in C'_{i-1}$，我们都有 $g \sim_H g'$。断言7表明，如果我们能够证明 $C'_{i-1} = C'_i$，那么由于 M_{i-1} 满足 (C2) 和 (C3)， M_i 也满足 (C2) 和 (C3)。

断言7。 假设 $C'_{i-1} = C'_i$。那么 $\mathbf{ta}_H(C_{i-1}) = \mathbf{ta}_H(C_i)$。

证明。 设 g 是 $\mathbf{ta}_H(C_{i-1}) = C'_{i-1}$ 中的一个元素。那么，由于 $C'_{i-1} = C'_i$， $g \in C'_i$。假设 $g \notin \mathbf{ta}_H(C_i)$。那么存在一个元素 $h \in C_i$，使得 $g \succ_H h$。由于 $g \in C'_i$， $\eta \gtrsim_H g$。因此， $\eta \gtrsim_H h$。这意味着 $h \in C'_i$。由于 $C'_{i-1} = C'_i$， $h \in C'_{i-1}$。然而，这与 $g \sim_H h$ 这一事实矛盾。

设 g 是 $\mathbf{ta}_H(C_i)$ 中的一个元素。那么，对于每个元素 $h \in C_i$， $h \gtrsim_H g$。因此，若 $g \notin C'_i$，则 $C'_i = \emptyset$。然而，由于 $\eta \in C'_{i-1} = C'_i$， $C'_i \neq \emptyset$。这就产生了矛盾。这意味着 $g \in C'_i = C'_{i-1} = \mathbf{ta}_H(C_{i-1})$。证明完毕。 □

由于 $e_i \sim_H f_i \succ_H \eta$，我们有 $f_i \notin C'_{i-1}$ 和 $e_i \notin C'_i$。因此，为了证明 $C'_{i-1} = C'_i$，只需证明对于每个满足 $\eta \gtrsim_H g$的元素 $g \in M_{i-1}$， $g \notin \mathbb{C}_H(e_i, M_{i-1})$。若能证明这一点，那么引理 5 表明，对于每个满足 $\eta \gtrsim_H g$的元素 $g \in M_{i-1} - f_i$， $g \in C'_{i-1}$ 当且仅当 $g \in C'_i$。

由于 $e_i \in \mathbf{cl}^{\mathcal{K}_H}(M_{i-1})$，引理 15 表明，对于每个元素 $h \in \mathbb{C}_H(e_i, M_{i-1})$， $h \gtrsim_H e_i$。因此，对于每个满足 $\eta \gtrsim_H g$的元素 $g \in M_{i-1}$，由于 $e_i \succ_H \eta \gtrsim_H g$， $g \notin \mathbb{C}_H(e_i, M_{i-1})$。

(2-2) 在这种情况下，我们证明 $C_{i-1} = C_i$。如果能证明这一点，那么由于 M_{i-1} 满足 (C2) 和 (C3)， M_i 也满足 (C2) 和 (C3)。注意，由于 $\eta \in \mathbf{ta}_H(C_{i-1})$ 和 $\eta \succ_H f_i$，我们有 $f_i \notin C_{i-1}$。利用这一点，可以如下证明 $C_{i-1} = C_i$。引理 6 意味着

$e_i \notin C_i$。此外，引理 6 意味着，对于每个元素 $g \in M_{i-1} - f_i$，$g \in C_{i-1}$ 当且仅当 $g \in C_i$。证明至此完成。

(2-3) 如果 $f_i \notin C_{i-1}$，那么 $f_i \neq \eta$，且由引理 6 可得 $\eta \in C_i$。此外，如果 $f_i \in C_{i-1}$，那么由引理 6 可得 $e_i \in C_i$。回顾一下，$e_i \sim_H \eta$。因此，由于 $\xi \gtrsim_H \eta \sim_H e_i$ 和 $e_i \in J$，只需证明对于每个满足 $\eta \succ_H g$ 的元素 $g \in M_{i-1}$，都有 $g \notin \mathbb{C}_H(e_i, M_{i-1})$。引理 15 表明，对于每个元素 $h \in \mathbb{C}_H(e_i, M_{i-1})$，都有 $h \gtrsim_H e_i$。因此，对于每个满足 $\eta \succ_H g$ 的元素$g \in M_{i-1}$，都有 $g \notin \mathbb{C}_H(e_i, M_{i-1})$。□

参考文献

[1] Joakim Blikstad。用于拟阵交的 Breaking $O(nr)$。载于 Nikhil Bansal、Emanuela Merelli 和 James Worrell 编，第*48*届自动机、语言与编程国际研讨会论文集，第198卷，莱布尼茨国际信息学会议论文集，第31:1–31:17页，德国瓦德恩，2021年。Schloss Dagstuhl – 莱布尼茨信息学中心。[2] Ning Chen 和 Arpita Ghosh。强稳定分配。载于 Mark de Berg 和 Ulrich Meyer 编，第*18*届欧洲算法年会论文集（第二部分），第6347卷，《计算机科学讲义》，第147–158页，德国柏林、海德堡，2010年。施普林格。[3] William H. Cunningham。拟阵划分与交算法的改进界。*SIAM*计算杂志，15(4):948–957，1986年。[4] Jack Edmonds。次模函数、拟阵与某些多面体。载于 Richard Guy、Haim Hanani、Norbert Sauer 和 Johanan Sch¨onheim 编，组合结构及其应用，第69–87页。戈登-布里奇，纽约，纽约州，1970年。[5] Tam´as Fleiner。稳定匹配的不动点方法及其若干应用。运筹学数学，28(1):103–126，2003年。[6] David Gale 和 Lloyd S. Shapley。大学招生与婚姻稳定性。美国数学月刊，69(1):9–15，1962年。[7] Masao Iri 和 Nobuaki Tomizawa。寻找最优“独立分配”的算法。日本运筹学会杂志，19:32–57，1976年。[8] Robert W. Irving。稳定婚姻与无差异。离散应用数学，48(3):261–272，1994年。[9] Robert W. Irving、David F. Manlove 和 Sandy Scott。带并列偏好的医院/住院医师问题。载于 Magn´us M. Halld´orsson 编，第7届斯堪的纳维亚算法理论研讨会论文集，第1851卷，《计算机科学讲义》，第259–271页，德国柏林、海德堡，2000年。施普林格。[10] Robert W. Irving、David F. Manlove 和 Sandy Scott。医院/住院医师问题中的强稳定性。载于 Helmut Alt 和 Michel Habib 编，第*20*届计算机科学理论方面年会论文集，第2607卷，《计算机科学讲义》，第439–450页，德国柏林、海德堡，2003年。施普林格。[11] Kazuo Iwama 和 Shuichi Miyazaki。带并列偏好和不完整列表的稳定婚姻。载于 Ming-Yang Kao 编，算法百科全书。施普林格，波士顿，马萨诸塞州，2008年版，2008年。

[12] Naoyuki Kamiyama。超稳定匹配问题的拟阵推广。《*SIAM*离散数学杂志》，36(2):1467–1482，2022年。[13] Naoyuki Kamiyama。拟阵约束下的强稳定匹配。《*SIAM*离散数学杂志》，39(3):1471–1490，2025年。[14] Naoyuki Kamiyama。非一致稳定匹配。《*ACM*经济学与计算汇刊》，即将出版。[15] Telikepalli Kavitha、Kurt Mehlhorn、Dimitrios Michail 和 Katarzyna E. Paluch。时间复杂度为 $O(nm)$ 的强稳定匹配算法及其在医院-住院医生问题中的扩展。《*ACM*算法汇刊》，3(2):文章15，2007年。[16] Adam Kunysz。用于强稳定匹配问题的更快算法。载于 Pinar Heggernes 编，第*11*届国际算法与复杂性会议论文集，第11485卷，《计算机科学讲义》，第299–310页，瑞士 Cham，2019年。施普林格。[17] Varun S. Malhotra。带并列偏好的多伴侣稳定婚姻的稳定性。载于 Susanne Albers 和 Tomasz Radzik 编，第*12*届欧洲算法年会论文集，第3221卷，《计算机科学讲义》，第508–519页，德国柏林、海德堡，2004年。施普林格。[18] David F. Manlove。带并列偏好和不可接受伴侣的稳定婚姻。技术报告 TR-1999-29，格拉斯哥大学计算机科学系，1999年。[19] David F. Manlove。偏好匹配算法学。世界科学出版社，新加坡，2013年。[20] Kazuo Murota。离散凸分析，第10卷，*SIAM*离散数学与应用专著。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，2003年。[21] Sofiat Olaosebikan 和 David F. Manlove。带并列偏好的学生-项目分配问题中实现强稳定性的算法。载于 Manoj Changat 和 Sandip Das 编，第 *8* 届算法与离散应用数学国际年会论文集，第 12016 卷，《计算机科学讲义》，第384–399页，瑞士 Cham，2020年。施普林格。[22] Sofiat Olaosebikan 和 David F. Manlove。带并列偏好的学生-项目分配问题中的超稳定性。《组合优化杂志》，43(5):1203–1239，2022年。[23] James G. Oxley。拟阵理论。牛津大学出版社，英国牛津，第2版，2011年。[24] Sandy Scott。带并列偏好的稳定婚姻问题研究。博士论文，格拉斯哥大学，2005年。