arXiv:2601.11211v1 [math.GT] 16 Jan 2026

纽结手术4维流形 $E(n)_K$ 不含1-柄和3-手柄

JU A LEE 和 KI-HEON YUN

Abstract. 本文证明，对于任意正整数 n，结手术4-流形 $E(n)_K$ 具有不含1-手柄和3-手柄的手柄分解。这里， K 表示Conway记号中的纤维化二桥纽结 $C(2\epsilon_1, 2\epsilon_2, \cdots, 2\epsilon_{2g})$（$\epsilon_i \in \{1, -1\}$），或Stallings纽结 K_m ($m \in \mathbb{Z}$)。

1. Introduction

光滑4-流形理论中一个由来已久的问题是，闭单连通4维流形是否存在不含1-柄，或不含1-柄和3-手柄的手柄分解（Kirby问题列表4.18）。这一问题已取得重大进展：Akbulut [2, 1] 证明，Dolgachev 曲面 $E(1)_{2,3}$ 具有不含1-柄和3-手柄的手柄分解。Baykur [3]证明了不可约、闭且单连通的4维流形存在完美Morse函数。这些流形具有指定的符号和自旋类型，前提是符号能被16整除且欧拉示性数足够大。Monden和Yabuguchi [10] 证明，由$(2, 2h+1)$环面纽结（一个双桥纽结族）产生的经纽结手术的椭圆曲面也具有不含1-柄和3-手柄的手柄分解。

在本文中，我们将这些结果推广，证明对于任意正整数 n和纤维化二桥纽结 K，结手术4-流形 $E(n)_K$ 存在一种不含1-手柄和3-手柄的手柄分解。我们进一步证明，对于任意Stallings纽结 K_m，这一性质也成立；Stallings纽结是一种三桥结。

2. Knot surgery 4-manifolds $E(n)_K$ and Lefschhetz fibration

2.1. ()的单值化分解。设 X 是一个单连通光滑4-流形，其中包含一个自交数为0的嵌入环面 T 。对于任意纽结$K \subset S^3$，都可以构造一个新的4-流形，称为纽结手术4-流形，记作 X_K。这一构造通过进行纤维和实现

$$X_K = X \sharp_{T=T_m} (S^1 \times M_K)$$

沿着 X 中的环面 T和 $S^1 \times M_K$中的 $T_m = S^1 \times m$ ，其中 M_K 是沿 K进行零系数手术得到的3-流形，而 m 是 K的子午线。

Date：2026年1月19日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 57R65, 57R55。*Key words and phrases.* 手柄分解，椭圆曲面，纽结手术。第一作者获得韩国政府资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（RS-2024-00392067）支持。第二作者获得韩国政府资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（2019R1A2C1010302）支持。

如果 $E(n)$ 是单连通椭圆曲面 X， T 是椭圆纤维，并且 K 是亏格为 $g(K)$ 的纤维化纽结，那么结手术4-流形 $E(n)_K$ 同时具有辛结构和亏格为 $2g(K)$ 的 $+n-1$ Lefschetz 纤维化结构 [5, 13]。

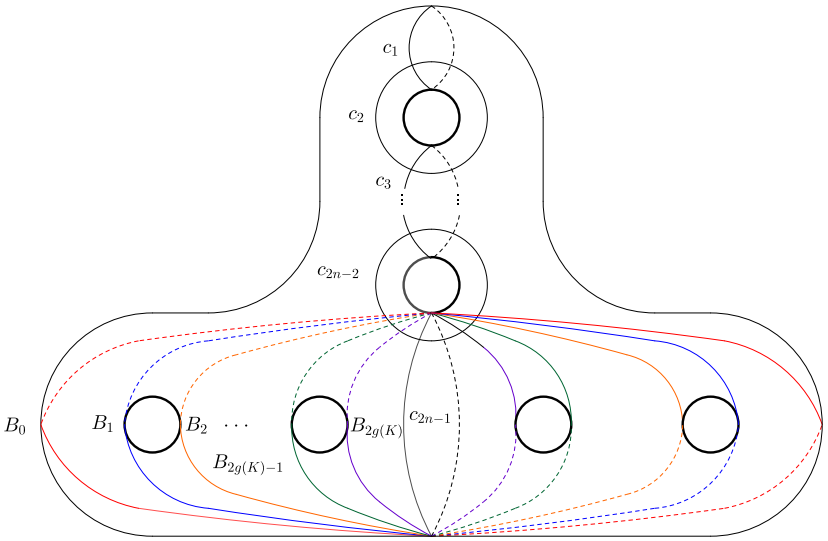

FIGURE 1. 关于 $E(n)_K$的消失圈

辛 Lefschetz 纤维化在 S^2 上由其单值化分解刻画。该分解是一个有序序列，由右手 Dehn 扭转组成，并且视 Hurwitz 变换和同步共轭为等价。已知 $E(n)_K$ 存在一个 Lefschetz纤维化，其单值化分解为

$$\Phi_K(W^2)\cdot W^2,$$

其中 $\phi_K : \Sigma^1_{g(K)} \to \Sigma^1_{g(K)}$ 是纤维化纽结 K的单值化，定义如下：

$$S^3 - \nu(K) = ([0,1]\times\Sigma^1_{g(K)})/_{(1,x)\sim(0,\phi_K(x))}$$

and

$$\begin{aligned}\Phi_K &= \phi_K \oplus id \oplus id : \Sigma_{g(K)}\sharp\Sigma_{n-1}\sharp\Sigma_{g(K)} \to \Sigma_{g(K)}\sharp\Sigma_{n-1}\sharp\Sigma_{g(K)},\\ W &= t_{c_{2n-2}}\cdots t_{c_2}t_{c_1}t_{c_1}t_{c_2}\cdots t_{c_{2n-2}}t_{B_0}t_{B_1}\cdots t_{B_{2g(K)}}t_{c_{2n-1}}.\end{aligned}$$

词 W 源自双曲 involution 和 Matsumoto 词 [9, 6, 12]。由于 W 对应于 $\Sigma_{2g(K)+n-1}$上的一个 involution，我们得到以下等价关系：

$$\Phi_K(W^2)\cdot W^2 \sim \Phi_K(W)\cdot W\cdot W\cdot\Phi_K(W).$$

令 X_1 为以闭二维圆盘 D^2 为底空间、单值化分解为 $\Phi_K(W)\cdot W$ 的 Lefschetz纤维化，并令 X_2 为以 D^2 为底空间、单值化分解为 $W\cdot\Phi_K(W)$ 的 Lefschetz纤维化。那么

$$E(n)_K = X_1 \cup_\psi X_2, \qquad \psi : \partial X_2 \to \partial X_1.$$

在此构造中，ψ 是一个保持纤维的定向反转微分同胚；具体而言，它在纤维 $\Sigma_{2g(K)+n-1}$ 上是恒等映射，在 $S^1 = \partial D^2$ 上是共轭映射。

2.2. 的手柄分解 X_i $(i = 1, 2)$**和** $E(n)_K$。由于曲面$\Sigma_{2g(K)+n-1}$ 具有一个由一个0-手柄、$(4g(K) + 2n - 2)$个1-手柄和一个2-手柄组成的二维手柄分解（如图4所示），其乘积

$$\Sigma_{2g(K)+n-1} \times D^2$$

具有一个手柄分解，包括一个四维0-柄、$(4g(K) + 2n - 2)$个四维1-手柄，以及一个框架为0的四维2-手柄。随后，我们为单值化分解 $\Phi_K(W) \cdot W$中的每个右手德恩扭转附加$4(g(K)+2n-1)$个四维2-手柄。每个2-手柄均依次附加，从最右侧的扭转开始。对于每个德恩扭转t_c，附着圆 c 位于一个不相交的纤维曲面上，其框架定义为比曲面框架小1。

因此，每个流形 X_i （对于 $i = 1, 2$）都具有如下手柄分解：

- 一个四维0-柄，
- $(4g(K) + 2n - 2)$ 个四维1-手柄，以及
- $(4g(K) + 8n - 3)$ 个四维2-手柄。

由于 $E(n)_K$ 分解为 $X_1 \cup_\psi X_2$，其手柄分解通过取 X_1 的手柄结构，并经由边界微分同胚附加 X_2 的倒置手柄体而形成。

2.3. 纤维化二桥纽结及其单值化。 假设 p 和 q 是互素整数，且 p 为奇数。我们考虑如下定义的双桥纽结 $b(p, q)$：

定义 2.1 ([4])。一个双桥链 $b(p, q)$具有如下Conway标准形

$$C(n_1, n_2, \cdots, n_k)$$

如图 2 所示，其中

$$\frac{p}{q} = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{n_{k-1} + \cfrac{1}{n_k}}}} = [n_1, n_2, \cdots, n_k].$$

该纽结与由以下辫定义的 4 股辫闭合同伦：

$$\begin{cases} \sigma_2^{n_1}\sigma_1^{-n_2}\sigma_2^{n_3}\sigma_1^{-n_4}\cdots\sigma_1^{-n_k+\epsilon}\sigma_2^{\epsilon}, & \text{if } k \text{ is even } (\epsilon \in \{+1, -1\}), \\ \sigma_2^{n_1}\sigma_1^{-n_2}\sigma_2^{n_3}\sigma_1^{-n_4}\cdots\sigma_2^{n_k}, & \text{if } k \text{ is odd.} \end{cases}$$

这里，σ_i 表示标准辫生成元。我们将 $C(2m_1, -2m_2, \cdots, 2m_{2k-1}, -2m_{2k})$ 记作 $D(m_1, m_2, \cdots, m_{2k-1}, m_{2k})$。

引理 2.2 ([4, 8])。(a) 两个双桥纽结 $b(p, q)$ 和 $b(p', q')$ 等价，当且仅当 $p = p'$，且 $q = q'$ 或 $qq' \equiv 1$ (模 p)。(b) 纽结 $D(n_1, n_2, \cdots, n_{2k})$ 是纤维化纽结，当且仅当每个 n_i 都是 1 或−1。

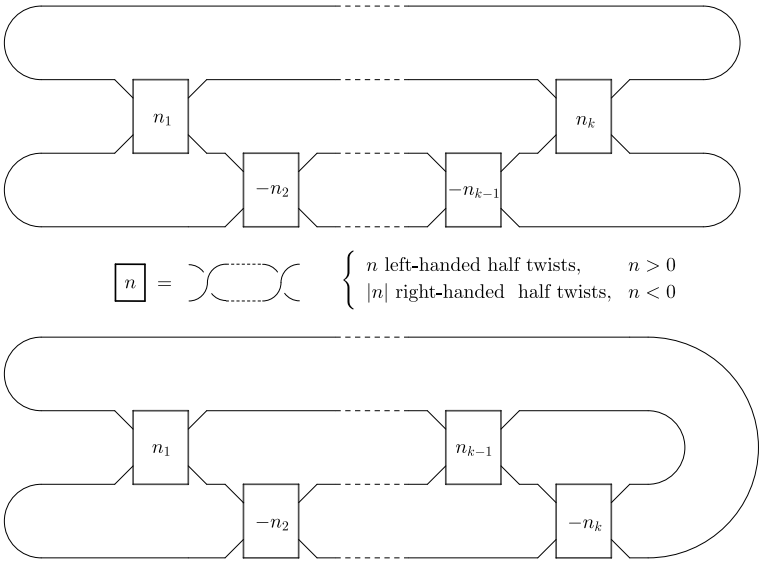

FIGURE 2. 一个二桥纽结 $C(n_1, n_2, \cdots, n_k)$（分别对应 k 奇数和 k 偶数）

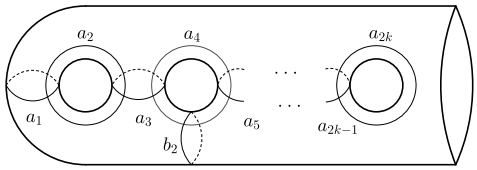

FIGURE 3. $\phi_{D(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_{2k}}$ 的曲线)

(c) 两个双桥纽结 $D(a_1, a_2, \cdots, a_{2k})$ 和 $D(b_1, b_2, \cdots, b_{2l})$ 环境同痕，当且仅当对所有 $1 \leq i \leq 2k$， $k = l$ 且 $a_i = b_i$ 或 $a_i = b_{2k+1-i}$。(d) 纽结 $K = D(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_{2k})$（其中每个 $\epsilon_i \in \{+1, -1\}$），其单值化为

$$\phi_K = t_{a_{2k}}^{\epsilon_{2k}} \circ \cdots \circ t_{a_2}^{\epsilon_2} \circ t_{a_1}^{\epsilon_1}.$$

证明。性质 (a)、(b) 和 (c) 是透镜空间分类中的众所周知的事实。$D(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_{2k})$ 的 Seifert 曲面由一系列正 Hopf 带（对应 $\epsilon_i = +1$ ）和负 Hopf 带（对应 $\epsilon_i = -1$）拼接而成。注意，正 Hopf 带是正 Hopf 链环的 Seifert 曲面。

每个正 Hopf 带贡献一个德恩扭转 t_c，而负 Hopf 带贡献一个德恩扭转 t_c^{-1}，其中 c 是相应 Hopf 带的核心圆。因此，我们得到单值化：

$$\phi_K = t_{a_{2k}}^{\epsilon_{2k}} \circ \cdots \circ t_{a_2}^{\epsilon_2} \circ t_{a_1}^{\epsilon_1}$$

其中， a_i 是图 3 中 $\Sigma^1_{g(K)}$ 上的简单闭曲线。回忆一下， ϕ_K 定义为

$$S^3 - \nu(K) = ([0,1] \times \Sigma^1_{g(K)})/_{(1,x)\sim(0,\phi_K(x))}$$

这考虑了与 Harer 的结果 [7] 相反的方向。 □

3. Fibered two-bridge knot K and handle decomposition of $E(n)_K$

本节中，我们找出 X_i的手柄分解中的$(4g(K)+2n-2)$ 1柄/2柄消去对。为了定位这些消去对，我们首先建立一种算法，用于分析单值化分解$\Phi_K(W)\cdot W$中的消失圈。每个消失圈都对应于$\Sigma^1_{2g(K)+n-1}$上的一条曲线；$\Sigma^1_{2g(K)+n-1}$是由一个二维0-手柄附加$(4g(K)+2n-2)$个二维1-手柄后得到的曲面。

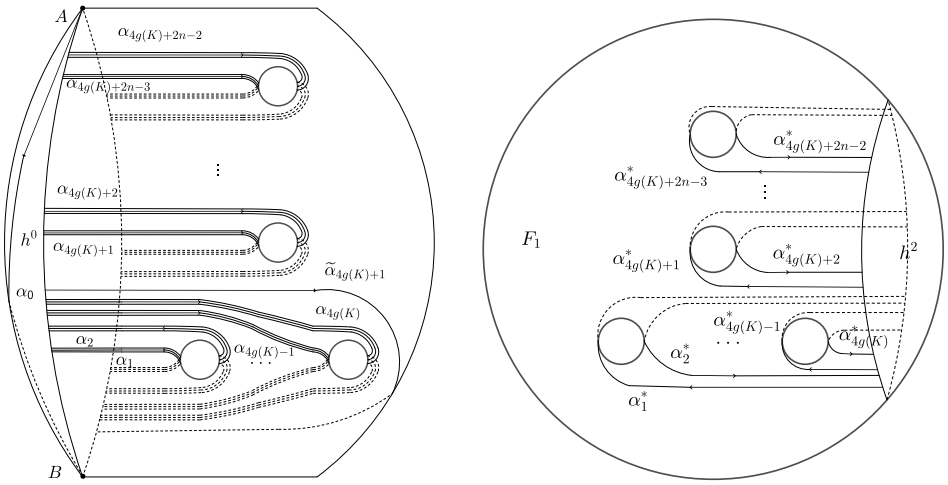

Figure 4. $\Sigma^1_{2g(K)+n-1}$的手柄分解：每个二维1-手柄的核 α_i 和余核 α_i^*（定向弧的有序集合$\{\alpha_i,\alpha_i^*\}$给出纤维曲面的正向。）

定义 3.1. 设 $F=\Sigma_{2g(K)+n-1}$ 为 Lefschetz 纤维化 X_i（第 2.2 小节）的固定纤维曲面， h^0 为二维0-手柄， $h^1_i=\alpha_i\times I$ 为二维1-手柄，其定向核为 α_i ，定向余核为 α_i^* ，对每个$i=1,2,\cdots,4g(K)$均如此，如图4所示。对于四维1-手柄 $h^1_i\times D^2=\alpha_i\times(I\times D^2)$，我们也采用相同的记号$\alpha_i^*$。

定义 3.2. 给定三条定向路径 α 、 β 和 δ ，其端点均在 h^0上，我们定义

$$\delta\simeq\alpha*\beta$$

如果路径 $\alpha*\beta$ （通过识别 α 的终点与 β的起点得到）在 $F_1\times D^2$中相对于边界与 δ 同伦，其中 $F_1=h^0\cup(\cup_{i=1}^{4g(K)+2n-2}h^1_i)$。将四维0-柄 $h^0\times D^2$ 压缩为一点 $(b_0,\mathbb{O})$ ，可得 $[\delta]=[\alpha]*[\beta]$ 属于 $\pi_1(F_1\times D^2,(b_0,\mathbb{O}))$。

注记 3.3. 尽管图4中的定向路径 α_0 和 $\widetilde{\alpha}_{4g(K)+1}$ 不是任何二维 1-柄的核，我们仍按惯例采用这一记号。我们将$\beta_0=\alpha_0^{-1}$定义为 α_0的反向路径。我们将 β_i 和 γ 视为定向路径，位于

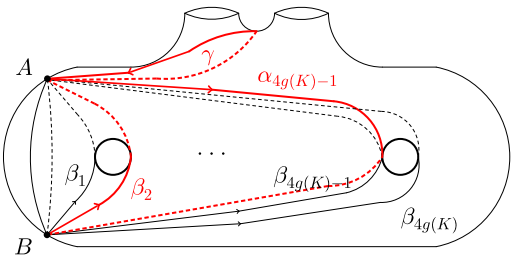

FIGURE 5.在 $\Sigma_{2g(K)+n-1}$ 上对 B_i 的分解（红色简单闭曲线是对 $B_2 \simeq \beta_2 * \gamma * \alpha_{4g(K)-1}$的分解）

图5。为简单起见，我们假设每条路径 α_i 都从 A 流向 B，每条路径β_i 都从 B 流向 A，而路径 γ 从 A流向 A。 α^{-1} 表示 α的反向路径。

注记 3.4。绘制完整的柯比图时，我们必须仔细描绘 $F_1 \times D^2$ 中所有四维2-手柄的附着球面，以及每个2-柄的框架。我们可以假设附着球面在任何四维1-手柄上都没有扭转，并且所有扭转信息都位于四维0-柄中。然而，要简单地识别1-柄/2-柄消去对，只需考虑 π_1中每个消失圈的同伦类型（$F_1 \times D^2$，（b_0，$\mathbb{O}$））。

3.1. $E(1)_K$情形。

引理3.5。在 $E(1)_K$ 的单值化分解中，其中 K 是亏格为 g（K）的纤维化纽结，对于每个 $i = 1$， B_i都与 $\beta_i * \alpha_{4g(K)+1-i}$同伦，2，$\cdots$，$2g$（$K$）。具体而言：

$$B_0 \simeq \beta_0 * \widetilde{\alpha}_{4g(K)+1} \simeq \alpha_0^{-1} * \alpha_{4g(K)} * \alpha_{4g(K)-1}^{-1} * \cdots * \alpha_2 * \alpha_1^{-1} * \alpha_0$$

and

$$B_i \simeq \alpha_0^{-1} * \alpha_1 * \cdots * \alpha_{i-1}^{(-1)^i} * \alpha_i^{(-1)^{i+1}} * \alpha_{i-1}^{(-1)^i} * \cdots * \alpha_1 * \alpha_0^{-1} * \alpha_{4g(K)+1-i}$$

对于每个 $i = 1$，2，$\cdots$，$2g(K)$。

证明。在 $E(1)_K$ 的情形下，每个 γ 都同伦于一个点。因此，定向环路 B_i 同伦于图5所示的 $\beta_i * \alpha_{2g(K)+1-i}$。

每条定向路径 β_i 都按如下方式定义一个由字母 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{4g(K)+2n-2}\}$ 组成的词：沿定向路径 β_i行进时，若我们从左向右穿过 α_j^*（相对于曲面定向），就将字母 α_j 加入词中。反之，从右向左穿过时则加入 α_j^{-1}。由于 β_i 从 B 流向 A，且我们要求该词在边界相对同伦，因此如果第一个或最后一个字母为正，就在词首或词尾加入 α_0^{-1}。

具体而言， β_i与 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_i^*$相交， α_j的符号为 $(-1)^{j+1}$(j =1, 2, $\cdots$, i)，随后又与 $\alpha_{i-1}^*, \alpha_{i-2}^*, \cdots, \alpha_1^*$ 相交， α_j的符号为 $(-1)^{j+1}$(j =$i-1, i-2, \cdots$, 1)。因此

$$\beta_i \simeq \alpha_0^{-1} * \alpha_1 * \cdots * \alpha_{i-1}^{(-1)^i} * \alpha_i^{(-1)^{i+1}} * \alpha_{i-1}^{(-1)^i} * \cdots * \alpha_1 * \alpha_0^{-1}$$

对每个 $i = 1, 2, \cdots, 4g(K)$ 都成立。类似地，由于 $\widetilde{\alpha}_{4g(K)+1}$ 与 $\alpha^*_{4g(K)}, \alpha^*_{4g(K)-1}, \cdots, \alpha^*_1$ 相交，其符号 $(-1)^j (j = 4g(K)\ 4g(K) - 1, \cdots, 1)$，

$$\widetilde{\alpha}_{4g(K)+1} \simeq \alpha_{4g(K)} * \alpha^{-1}_{4g(K)-1} * \cdots * \alpha_1^{-1} * \alpha_0.$$

由此得到所述公式。 □

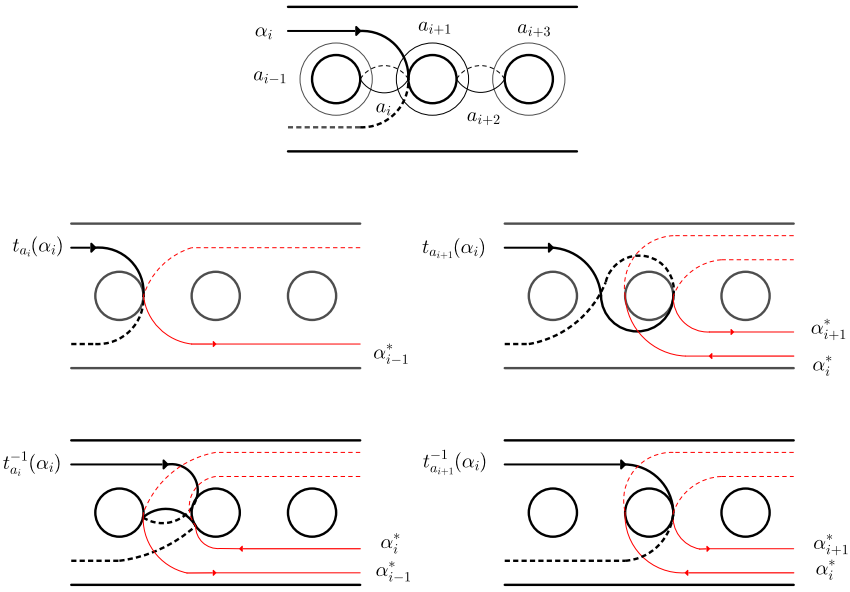

FIGURE 6. 词（用于 $t^{\pm 1}_{a_j}(\alpha_i)$）

引理3.6。以下是相对于边界成立的同伦关系：

(a) 对每个 $i = 0$，$t_{a_{i+1}}(\alpha_i) \simeq \alpha_i * \alpha^{-1}_{i+1} * \alpha_i$，*1*，$\cdots$，$2g(K) - 1$。

(b) 对每个 $i = 0$，$t^{-1}_{a_{i+1}}(\alpha_i) \simeq \alpha_{i+1}$，*1*，$\cdots$，$2g(K) - 1$。*(c)* 对每个 $i = 1$，$t_{a_i}(\alpha_i) \simeq \alpha_{i-1}$，*2*，$\cdots$，$2g(K)$。*(d)* 对每个 $i = 1$，$t^{-1}_{a_i}(\alpha_i) \simeq \alpha_i * \alpha^{-1}_{i-1} * \alpha_i$，*2*，$\cdots$，$2g(K)$。*(e)* 如果 $j \neq i$，$i + 1$，那么 $t_{a_j}(\alpha_i) = \alpha_i$。

证明。这可由图6直接看出。例如，$t_{a_{i+1}}(\alpha_i)$ 对应的词对应于路径 $\alpha_i * \alpha^{-1}_{i+1} * \alpha_i$，它相对于边界同伦。□

引理3.7. 若 $\phi = t^{\epsilon_1}_{a_1} \circ t^{\epsilon_2}_{a_2} \circ \cdots \circ t^{\epsilon_{2g(K)}}_{a_{2g(K)}}$ 满足 $\epsilon_i \in \{+1, -1\}$，则 $\phi(\alpha_i)$ 同伦于 $\{\alpha_0^{\pm 1}, \alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}, \cdots, \alpha_i^{\pm 1}, \alpha_{i+1}^{\pm 1}\}$ 中的一个词，其中对每个 $i = 0$，1、$\cdots$、$2g(K) - 1$，恰好包含一个 α_{i+1} 或 α^{-1}_{i+1}。

证明。对于 $i = 0$，

$$\phi(\alpha_0) = t^{\epsilon_1}_{a_1}(\alpha_0) \simeq \begin{cases} \alpha_0 * \alpha_1^{-1} * \alpha_0, & \epsilon_1 = +1, \\ \alpha_1, & \epsilon_1 = -1 \end{cases}$$

利用引理3.6。

我们断言，对于任意 $k=1,\ \cdots,\ 2g(K),\ \ t_{a_1}^{\epsilon_1}\circ\cdots\circ t_{a_k}^{\epsilon_k}(\alpha_k)$都是 $\{\alpha_0^{\pm1},\alpha_1^{\pm1},\alpha_2^{\pm1},\cdots,\alpha_{k-1}^{\pm1},\alpha_k^{\pm1}\}$ 中的一个词。这对 $k=1$ 成立，因为

$$t_{a_1}^{\epsilon_1}(\alpha_1)\simeq\begin{cases}\alpha_0, & \epsilon_1=1\\ \alpha_1*\alpha_0^{-1}*\alpha_1, & \epsilon_1=-1.\end{cases}$$

假设该结论对 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ i-1$ 成立。由于

$$\begin{aligned}&t_{a_1}^{\epsilon_1}\circ\cdots\circ t_{a_i}^{\epsilon_i}(\alpha_i)\simeq t_{a_1}^{\epsilon_1}\circ\cdots\circ t_{a_{i-1}}^{\epsilon_{i-1}}(t_{a_i}^{\epsilon_i}(\alpha_i))\\ \simeq\ &\begin{cases}t_{a_1}^{\epsilon_1}\circ\cdots\circ t_{a_{i-1}}^{\epsilon_{i-1}}(\alpha_{i-1}), & \epsilon_i=1,\\ t_{a_1}^{\epsilon_1}\circ\cdots\circ t_{a_{i-1}}^{\epsilon_{i-1}}(\alpha_i*\alpha_{i-1}^{-1}*\alpha_i)=\alpha_i*(t_{a_1}^{\epsilon_1}\circ\cdots\circ t_{a_{i-1}}(\alpha_{i-1}^{-1}))*\alpha_i, & \epsilon_i=-1\end{cases}\end{aligned}$$

由引理3.6，该结论对 $k=i$ 成立。

对于 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2g(K)-1$，我们知道

$$t_{a_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}}(\alpha_k)\simeq\begin{cases}\alpha_k*\alpha_{k+1}^{-1}*\alpha_k, & \epsilon_{k+1}=+1,\\ \alpha_{k+1}, & \epsilon_{k+1}=-1\end{cases}$$

and

$$\begin{aligned}\phi(\alpha_k)\ &\simeq\ t_{a_1}^{\epsilon_1}\circ\cdots\circ t_{a_k}^{\epsilon_k}(t_{a_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}}(\alpha_k))\\ &\simeq\ \begin{cases}(t_{a_1}^{\epsilon_1}\cdots t_{a_k}^{\epsilon_k}(\alpha_k))*\alpha_{k+1}^{-1}*(t_{a_1}^{\epsilon_1}\cdots t_{a_k}^{\epsilon_k}(\alpha_k)), & \epsilon_{k+1}=+1,\\ \alpha_{k+1}, & \epsilon_{k+1}=-1.\end{cases}\end{aligned}$$

根据上述断言，$t_{a_1}^{\epsilon_1}\circ\cdots\circ t_{a_k}^{\epsilon_k}(\alpha_k)$ 是 $\{\alpha_0^{\pm1},\alpha_1^{\pm1},\alpha_2^{\pm1},\cdots,\alpha_{k-1}^{\pm1},\alpha_k^{\pm1}\}$ 中的一个词。因此，$\phi(\alpha_k)$ 是 $\{\alpha_0^{\pm1},\alpha_1^{\pm1},\alpha_2^{\pm1},\cdots,\alpha_k^{\pm1},\alpha_{k+1}^{\pm1}\}$ 中的一个词，其中恰好包含一个 α_{k+1} 或 α_{k+1}^{-1}。□

定理 3.8。对于任意纤维化二桥纽结 K，$E(1)_K$ 存在一种不含1-把手和3-把手的把手分解。

证明。我们证明，$X_i\ (i=1,\ 2)$ 有一个不含 1-柄的手柄分解，其中 X_1 是基底为 D^2、单值化分解为$\Phi_K(W)\cdot W$ 的 Lefschetz纤维化，而 X_2 的单值化分解为 $W\cdot\Phi_K(W)$。

取 $K=D(\epsilon_1,\ \epsilon_2,\ \cdots,\ \epsilon_{2k})$ 的镜像，我们得到

$$K^*=D(-\epsilon_1,-\epsilon_2,\cdots,-\epsilon_{2k})$$

其单值化为 $\phi_{K^*}=t_{a_{2k}}^{-\epsilon_{2k}}\circ\cdots\circ t_{a_2}^{-\epsilon_2}\circ t_{a_1}^{-\epsilon_1}$。

由于 $\Phi_K(W)\cdot W=\Phi_K(W\cdot\Phi_K^{-1}(W))$，$X_1$ 同构于单值化分解为 $W\cdot\Phi_K^{-1}(W)$ 的 Lefschetz 纤维化。同理，X_2 同构于单值化分解为 $\Phi_K^{-1}(W)\cdot W$ 的 Lefschetz纤维化。因此，X_1 和 X_2 各自包含 $(4g(K)+5)$ 个 2-手柄，其附着球面由相应的消失圈给出：

$$B_0,B_1,\cdots,B_{2g(K)},c_1,\phi(B_0),\phi(B_1),\cdots,\phi(B_{2g(K)}),\phi(c_1),\partial F_1$$

其中 $\phi=t_{a_1}^{\epsilon_1}\circ t_{a_2}^{\epsilon_2}\circ\cdots\circ t_{a_{2g(K)}}^{\epsilon_{2g(K)}}$ 和 $\epsilon_i\in\{+1,-1\}$。

我们将 $\phi(B_0)$分解如下：

$$\begin{aligned}\phi(B_0)\ &=\ \phi(\beta_0*\widetilde{\alpha}_{4g(K)+1})=t_{a_1}^{\epsilon_1}(\alpha_0^{-1})*\alpha_{4g(K)+1}\\ &\simeq\ \begin{cases}\alpha_0^{-1}*\alpha_1*\alpha_0^{-1}*\widetilde{\alpha}_{4g(K)+1}, & \text{if } \epsilon_1=1,\\ \alpha_1^{-1}*\widetilde{\alpha}_{4g(K)+1}, & \text{if } \epsilon_1=-1.\end{cases}\end{aligned}$$

~令 H_1 为通过将 $\phi(B_0)$滑动经过 B_0得到的2-柄。 $\widetilde{H}_1$ 的附着圆与 $\begin{cases}\alpha_0^{-1}*\alpha_1, \\ \end{cases}$

$\epsilon_1=1$, $\alpha_1^{-1}*\alpha_0 \quad \epsilon_1=-1.$, 同伦。因此，2-柄 $\widetilde{H}_1$ 和1-柄 α_1^* 构成一对消去对。

我们有 $B_1 \simeq \beta_1 * \alpha_{4g(K)}$ 和 $\phi(B_1) \simeq \phi(\beta_1)* \alpha_{4g(K)}$。将 $\phi(B_1)$滑过 B_1，得到一个2-柄 H_2 ，其附着圆与 $\phi(\beta_1)*\beta_1^{-1}$同伦。由于

$$\begin{aligned}\phi(\beta_1) &= \phi(\alpha_0^{-1}*\alpha_1*\alpha_0^{-1}) = (t_{a_1}^{\epsilon_1}(\alpha_0))^{-1}*(t_{a_1}^{\epsilon_1}t_{a_2}^{\epsilon_2}(\alpha_1))*(t_{a_1}^{\epsilon_1}(\alpha_0))^{-1} \\ &\simeq \begin{cases}\alpha_0^{-1}*\alpha_1*\alpha_2^{-1}*\alpha_1*\alpha_0^{-1}, & \epsilon_2=1, \\ \alpha_0^{-1}*\alpha_1*\alpha_0^{-1}*\alpha_2*\alpha_0^{-1}*\alpha_1*\alpha_0^{-1}, & (\epsilon_1,\epsilon_2)=(1,-1), \\ \alpha_1^{-1}*\alpha_2*\alpha_1^{-1}, & (\epsilon_1,\epsilon_2)=(-1,-1).\end{cases}\end{aligned}$$

根据引理3.6,

$$\phi(\beta_1)*\beta_1^{-1} \simeq \begin{cases}\alpha_0^{-1}*\alpha_1*\alpha_2^{-1}*\alpha_0, & \epsilon_2=1, \\ \alpha_0^{-1}*\alpha_1*\alpha_0^{-1}*\alpha_2, & (\epsilon_1,\epsilon_2)=(1,-1), \\ \alpha_1^{-1}*\alpha_2*\alpha_1^{-1}*\alpha_0*\alpha_1^{-1}*\alpha_0, & (\epsilon_1,\epsilon_2)=(-1,-1).\end{cases}$$

每当出现字母 $\alpha_1^{\pm 1}$时，我们就将 H_2 滑过 $\widetilde{H}_1$ ，从而得到一个2-柄~H_2 ，其附着圆恰好穿过四维1-手柄α_2^* 一次。~因此， H_2 和 α_2^* 构成一个消去对。

一般而言，将 $\phi(B_{i-1})$ 滑过 B_{i-1} 会得到一个 2-柄 $H_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2g(K))$，其附着圆与.....同伦

$$\phi(\alpha_1)*\phi(\alpha_2)^{-1}*\cdots*\phi(\alpha_{i-1})^{(-1)^i}*\cdots*\phi(\alpha_1)*\alpha_1^{-1}*\alpha_2*\cdots*\alpha_{i-1}^{(-1)^{i-1}}*\cdots*\alpha_2*\alpha_1^{-1}.$$

应用引理3.7，它是 $\{\alpha_0^{\pm1},\alpha_1^{\pm1},\alpha_2^{\pm1},\cdots,\alpha_{i-1}^{\pm1},\alpha_i^{\pm1}\}$ 中的一个字母词，且该词恰好包含一个 α_i 或 α_i^{-1} 。我们将 H_i 滑过先前的把手$\widetilde{H}_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ i-1)$，以分离出 $\alpha_i^{\pm1}$，然后得到一个四维2-手柄~H_i。我们注意到，每个2-柄 $H_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2g(K))$ 都穿过四维1-手柄 $h_i^1\times D^2$ ，且不穿过任何其他1-手柄。~因此，对于每个 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2g(K)$，$(\alpha_i^*,\ H_i)$ 构成一个消去对。

我们有

$$B_i \simeq \alpha_0^{-1}*\alpha_1*\cdots*\alpha_{i-1}^{(-1)^i}*\alpha_i^{(-1)^{i+1}}*\alpha_{i-1}^{(-1)^i}*\cdots*\alpha_1*\alpha_0^{-1}*\alpha_{4g(K)+1-i}$$

~由引理3.5可知。对于每个 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2g(K)$，令 $H_{2g(K)+i}$为将 $B_{2g(K)+1-i}$滑动过 $H_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2g(K)+1-i)$ 后得到的 2-柄，以隔离 $\alpha_{2g(K)+i}$，~然后 $(\alpha_{2g(K)+i}^*,\ H_{2g(K)+i})$ 对每个 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2g(K)$ 形成一个消去对。

因此，每个 X_j 都有 $4g(K)$ 个 1-手柄和 2-柄消去对，

$$(\alpha_i^*,\widetilde{H}_i) \text{ and } (\alpha_{2g(K)+i}^*,\widetilde{H}_{2g(K)+i}) \quad (i=1,2,\cdots,2g(K)),$$

剩下一个 0-手柄和五个 2-手柄。因此， $E(1)_K$ 的全部把手结构由一个 0-手柄、一个 4-手柄和十个 2-手柄组成。□

注记 3.9。 在每个 X_i 上，我们额外有五个四维 2-手柄，它们未用于构造消去2-柄。通过 2-手柄滑动，可以对其中每一个进行修改，使其附着圆不经过任何 1-手柄。因此，它们不会给 1-手柄/2-手柄消去过程带来任何问题。

3.2. $E(n)_K$ **的情形** $n \geq 2$。证明基本上与$n = 1$的情形相同，不同之处在于将 $B_i(i = 0、1、\cdots、4g(K))$ 分解为子弧，以及为每个 1-手柄 $\alpha^*_{4g(K)+i}$ $(i =1、2、\cdots、2n-2)$ 构造额外的消去2-柄。

定理3.10. 对于任意纤维化二桥纽结 K 和任意整数 $n \geq 2$，纽结手术 4-流形 $E(n)_K$ 存在一种不含 1-柄和 3-柄的手柄分解。

证明。设 α_i、β_i 和 γ 为图5中所示的路径，则

$$B_i \simeq \beta_i * \gamma * \alpha_{4g(K)+1-i}, \qquad i = 1, 2, \cdots, 2g(K)$$

and

$$B_0 \simeq \beta_0 * \gamma * \widetilde{\alpha}_{4g(K)+1}.$$

设 $\phi = t^{\epsilon_1}_{a_1} \circ t^{\epsilon_2}_{a_2} \circ \cdots \circ t^{\epsilon_{2g(K)}}_{a_{2g(K)}}$ 如前所定义，则

$$\begin{aligned} \phi(B_0) &\simeq \phi(\beta_0) * \gamma * \widetilde{\alpha}_{4g(K)+1}, \\ \phi(B_i) &\simeq \phi(\beta_i) * \gamma * \alpha_{4g(K)+1-i} \quad (i = 1, 2, \cdots, 2g(K)), \end{aligned}$$

因为每个 a_i 都与 γ、$\widetilde{\alpha}_{4g(K)+1}$ 和$\alpha_{4g(K)+1-i}$不相交。

对每个 i =1, 2, $\cdots$, 2g(*K*)，设 H_i 为将 $\phi(B_{i-1})$ 沿 B_{i-1} 滑动后得到的 2-柄。于是，H_i的附着圆同伦于

$$\phi(\beta_{i-1}) * \beta^{-1}_{i-1}.$$

如引理3.5所述，每个 β_{i-1} 都是 $\{\alpha_0^{\pm1}, \alpha_1^{\pm1}, \cdots, \alpha_{i-1}^{\pm1}\}$ 中的一个词，且恰好包含一个 $\alpha_{i-1}^{\pm1}$。对词中的每个字母 $\phi(\alpha_j)$应用引理3.7（对于 $j = 0$，1，$\cdots$，$i-1$），可得到 $\{\alpha_0^{\pm1}, \alpha_1^{\pm1}, \cdots, \alpha_i^{\pm1}\}$ 中的一个词，且恰好包含一个 $\alpha_i^{\pm1}$，如定理 3.8 的证明所示。

Le通过将 H_i 滑动经过 $\widetilde{H}_j$（其中 $j < i$），得到H_i $(i \geq 2)$；对附着圆的~词中的每个字母 $\alpha_j^{\pm1}$ 都进行这样的滑动。于是，H_i 成为与 $\alpha_i(i = 1, 2, \cdots, 2g($*K*$))$相关联的1-柄的消去2-柄。

使用图4所示的1-手柄的核和余核，我们得到

$$\begin{aligned} c_1 &\simeq \alpha_{4g(K)+2n-3} * \alpha_0^{-1}, \\ c_{2i} &\simeq \alpha_{4g(K)+2n-2i} * \alpha^{-1}_{4g(K)+2n-2i-1}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ c_{2i+1} &\simeq \alpha_{4g(K)+2n-2i-3} * \alpha^{-1}_{4g(K)+2n-2i-1}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n-2, \\ c_{2n-1} &\simeq \alpha^{-1}_{2g(K)} * \alpha_{2g(K)-1} * \cdots * \alpha_1 * \alpha^{-1}_{4g(K)+1} * \alpha_{2g(K)} * \alpha^{-1}_{2g(K)-1} * \cdots * \alpha_1^{-1} * \alpha_0 \end{aligned}$$

by selecting an orientation for each c_i.

我们定义消去对如下：

(1) 令 $H_{4g(K)+2n-3}$ 为由 t_{c_1}导出的 2-柄；它与 1-柄 $\alpha^*_{4g(K)+2n-3}$构成一对消去对。(2) 令 $H_{4g(K)+2n-2}$ 为由 t_{c_2}导出的 2-柄。将其滑动过 $H_{4g(K)+2n-3}$~后得到 $H_{4g(K)+2n-2}$，它会消去 1-柄 $\alpha^*_{4g(K)+2n-2}$。(3) 一般地，定义 $H_{4g(K)+2n-2i-3}$ 为由 $t_{c_{2i+1}}$导出的 2-柄。将其滑~动过 $H_{4g(K)+2n-2i-1}$ 后得到 $H_{4g(K)+2n-2i-3}$，它会消去 1-柄 $\alpha^*_{4g(K)+2n-2i-3}$($i = 1, 2, \cdots, n-2$)。

(4) 类似地，定义 $H_{4g(K)+2n-2i}$ 为由 $t_{c_{2i}}$导出的 2-柄。将 $\widetilde{\ }$ 滑动过 $H_{4g(K)+2n-2i-1}$ 后得到 $H_{4g(K)+2n-2i}$，它会消去 1-柄$\alpha^*_{4g(K)+2n-2i}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$。

因此，$(\alpha^*_{4g(K)+i},\ H_{4g(K)+i})$ 对每个 i =1，2，$\cdots$，$2n-2$ 都构成1-柄/2-柄消去对。

接下来，需要为每个 $\alpha_{2g(K)+i}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2g(K))$ 找到一个消去2-柄。根据图4中的1-柄的核和余核，我们可以验证

$$\begin{aligned}
B_1 &\simeq \alpha_1 * \alpha^{-1}_{4g(K)+1} * \alpha_{4g(K)} * \alpha_0^{-1},\\
B_2 &\simeq \alpha_1 * \alpha_2^{-1} * \alpha_1 * \alpha^{-1}_{4g(K)+1} * \alpha_{4g(K)-1} * \alpha_0^{-1},\\
B_i &\simeq \alpha_1 * \cdots * \alpha_{i-1}^{(-1)^i} * \alpha_i^{(-1)^{i+1}} * \alpha_{i-1}^{(-1)^i} * \cdots * \alpha_1 * \alpha^{-1}_{4g(K)+1} * \alpha_{4g(K)+1-i} * \alpha_0^{-1},\\
&\quad (i=3,4,\cdots,2g(K)).
\end{aligned}$$

当 $B_{2g(K)+1-i}$ 的词包含字母 α_j 时，我们将 $B_{2g(K)+1-i}$ 滑过 $H_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2g(K)+1-i,\ 4g(K)+1)$。我们将得到的2-柄记为$\widetilde{\ }$ $H_{2g(K)+i}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2g(K))$，那么 $H_{2g(K)+i}$ 就消去1-柄 $\alpha^*_{2g(K)+i}$。□

4. Handle decomposition of $E(n)_K$ for a family of Stallings knot

本节考虑结手术4-流形 $E(n)_{K_m}$ 及其手柄分解，其中，K_m 是由 $3_1\sharp 3_1^*$经过 m 次 Stallings扭转（$m\in\mathbb{Z}$）得到的 Stallings纽结族 [11]，其中 3_1 是左手三叶结。已知 K_m 是三桥结。

定理 4.1. 对于任意正整数 n 和任意整数 $m\in\mathbb{Z}$，结手术4-流形 $E(n)_{K_m}$ 具有一个不含1-把手和3-把手的手柄分解。

证明。众所周知，K_m 是一个亏格2纤维结，其单值化为

$$\phi_m = t^m_{a_3}\circ t_{a_4}\circ t_{b_2}\circ t^{-1}_{a_2}\circ t^{-1}_{a_1}$$

其中，$a_i(i=1,2,3,4)$和 b_2 见图 2.3。

如第2.1小节所述，$E(n)_{K_m}$ 分解为两个在 D^2 上的Lefschetz纤维化 $X_i(i=1,2)$，其单值化分解分别为 $\Phi_{K_m}(W)\cdot W$和$W\cdot\Phi_{K_m}(W)$。我们注意到，$\Phi_{K_m}=\phi_m=t^m_{a_3}\circ\phi_0$。

情形 $n=1$**:**　X_1 包含 13 个 2-手柄

$$\phi_m(B_i),\phi_m(c_1),B_i,c_1,\partial F_1\quad (i=0,1,2,3,4),$$

从右向左附着。同样，X_2 也包含 13 个 2-手柄

$$B_{4-i},c_1,\phi_m(B_{4-i}),\phi_m(c_1),\partial F_1\quad (i=0,1,2,3,4).$$

令 η 为图7中的一条定向路径。于是 $\alpha_0*\eta\simeq\alpha_1*\alpha_2^{-1}*\alpha_3*\alpha_4^{-1}$。利用同伦，我们得到:

$$\begin{aligned}
\phi_m(B_0) &\simeq \eta * t^m_{a_3}(\alpha_3) * t^m_{a_3}(\alpha_2^{-1}) * \widetilde{\alpha}_9,\\
\phi_m(B_1) &\simeq \eta * t^m_{a_3}(\alpha_3) * \beta_0 * \alpha_8,\\
\phi_m(B_2) &\simeq \eta * t^m_{a_3}(\alpha_3) * \beta_1 * \alpha_7,\\
\phi_m(B_3) &\simeq \eta * t^m_{a_3}(\alpha_3) * \beta_4 * \alpha_6,\\
\phi_m(B_4) &\simeq \beta_4 * t^m_{a_3}(\beta_3^{-1}) * \beta_4 * \alpha_5.
\end{aligned}$$

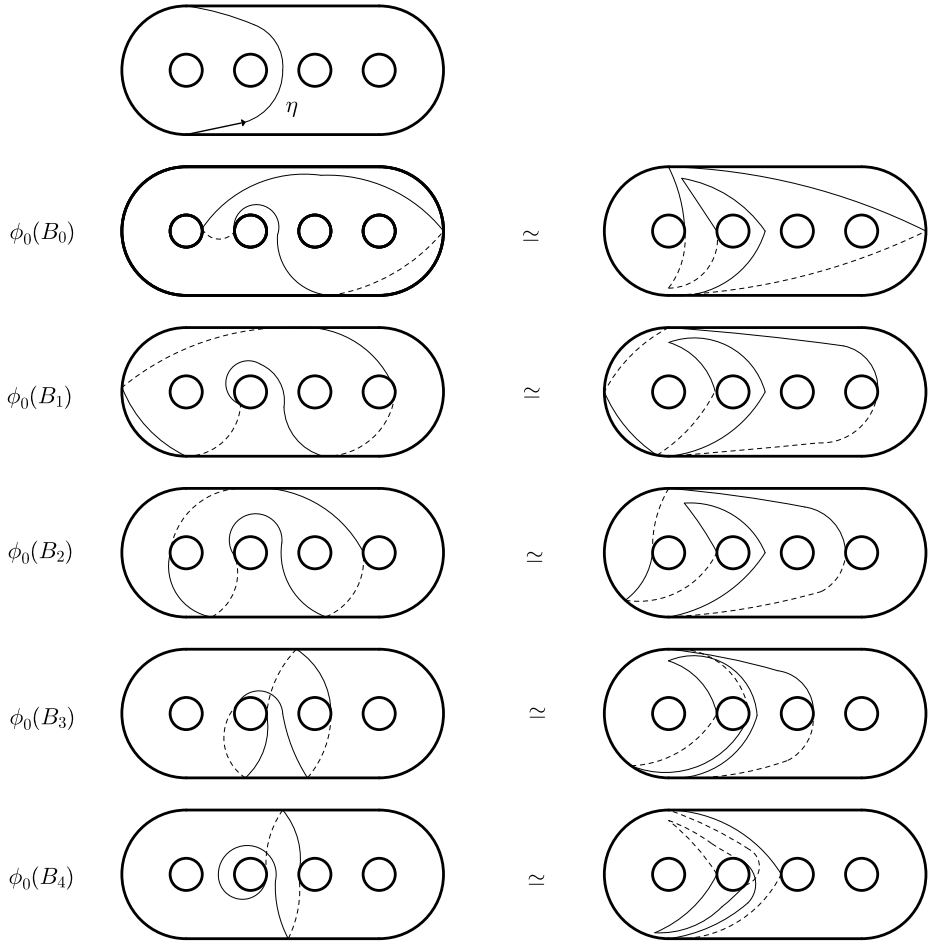

FIGURE 7. 词用于 $\phi_0(B_i)$

这是因为（如图7所示）：

$$\begin{aligned}
\phi_0(B_0) &\simeq \eta * \alpha_3 * \alpha_2^{-1} * \widetilde{\alpha}_9, \\
\phi_0(B_1) &\simeq \eta * \alpha_3 * \beta_0 * \alpha_8, \\
\phi_0(B_2) &\simeq \eta * \alpha_3 * \beta_1 * \alpha_7, \\
\phi_0(B_3) &\simeq \eta * \alpha_3 * \beta_4 * \alpha_6, \\
\phi_0(B_4) &\simeq \beta_4 * \beta_3^{-1} * \beta_4 * \alpha_5.
\end{aligned}$$

并且简单闭曲线 a_3 仅与 α_2^{-1}、 α_3 和 β_3^{-1} 相交。

我们还有

$$\begin{aligned} B_0 &\simeq \beta_0 * \widetilde{\alpha}_9, \\ B_1 &\simeq \beta_1 * \alpha_8, \\ B_2 &\simeq \beta_2 * \alpha_7, \\ B_3 &\simeq \beta_3 * \alpha_6, \\ B_4 &\simeq \beta_4 * \alpha_5. \end{aligned}$$

令 H_i 为将 $\phi_m(B_i)$滑动越过 B_i (i =0，1，2，3，4)后得到的4维2-手柄。附着圆同伦于:

$$\begin{aligned} H_0 &: \eta * t_{a_3}^m(\alpha_3) * t_{a_3}^m(\alpha_2^{-1}) * \beta_0^{-1} \simeq \eta * \alpha_3 * \alpha_2^{-1} * \alpha_0, \\ H_1 &: \eta * t_{a_3}^m(\alpha_3) * \beta_0 * \beta_1^{-1}, \\ H_2 &: \eta * t_{a_3}^m(\alpha_3) * \beta_1 * \beta_2^{-1} \simeq \eta * t_{a_3}^m(\alpha_3) * \alpha_0^{-1} * \alpha_2 * \alpha_1^{-1} * \alpha_0, \\ H_3 &: \eta * t_{a_3}^m(\alpha_3) * \beta_4 * \beta_3^{-1}, \\ H_4 &: \beta_4 * t_{a_3}^m(\beta_3^{-1}). \end{aligned}$$

令$\widehat{H}_{i,\ j}$ 为将 H_i 滑动越过 H_j 后得到的2-柄。则附着圆同伦于:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{1,2} &: \beta_2 * \beta_1^{-1} * \beta_0 * \beta_1^{-1} \simeq \alpha_2^{-1} * \alpha_0, \\ \widehat{H}_{3,2} &: \beta_4 * \beta_3^{-1} * \beta_2 * \beta_1^{-1} \simeq \alpha_0^{-1} * \alpha_1 * \alpha_2^{-1} * \alpha_3 * \alpha_4^{-1} * \alpha_0 \simeq \eta * \alpha_0. \end{aligned}$$

我们按以下顺序进行2-手柄滑动:

(1) 令 $\widetilde{H}_2 = \widehat{H}_{1,2}$。则（$\alpha_2^*, \widetilde{H}_2$）构成一个消去对。

(2) 令 $\widetilde{H}_3$ 为将 H_0 沿 $\widehat{H}_{3,2}$ 和 $\widetilde{H}_2$ 滑动后得到的对象。则（$\alpha_3^*, \widetilde{H}_3$）构成一个消去对。

(3) 令 $\widetilde{H}_1$ 为将 $\widetilde{H}_2$ 沿 $\widehat{H}_{3,2}$ 滑动，然后再沿对应于词 $\alpha_0^{-1} * t_{a_3}^m(\alpha_3)$ 中字母 $\alpha_2^{\pm 1}$和 $\alpha_3^{\pm 1}$的 $\widetilde{H}_2$ 或 $\widetilde{H}_3$ 滑动后得到的对象。$* \alpha_0^{-1} * \alpha_2$。则（$\alpha_1^*, \widetilde{H}_1$）构成一个消去对。（回忆一下，由于 $t_{a_3}(\alpha_3) \simeq \alpha_2$、$t_{a_3}(\alpha_2) \simeq \alpha_2 * \alpha_3^{-1} * \alpha_2$、$t_{a_3}^{-1}(\alpha_3) \simeq \alpha_3 * \alpha_2^{-1} * \alpha_3$ 且 $t_{\alpha_3}^{-1}(\alpha_2) \simeq \alpha_3$，根据引理3.6，$t_{a_3}^m(\alpha_3)$ 是 $\{\alpha_2^{\pm 1}, \alpha_3^{\pm 1}\}$ 中的一个词。）

(4) 令 $\widehat{H}_4$ 为将 $\widetilde{H}_3$ 沿 $\widetilde{H}_2$ （即 $\widehat{H}_{3,2}$）滑动，然后再沿$\widetilde{H}_1$、$\widetilde{H}_2$ 和 $\widetilde{H}_3$滑动后得到的对象。则（$\alpha_4^*, \widehat{H}_4$）构成一个消去对。

为了得到与1-柄α_{4+i}^*相消的2-柄 H_{4+i}($i = 1$，2，3，4)，每当 $\alpha_j^{\pm 1}$ 出现在 B_{5-i}的词中时，我们就将 B_{5-i} 滑过 $\widetilde{H}_j$($j = 1$，2，3，4)。

情形 $n \geq 2$**:** 寻找1-柄与2-柄消去对的过程与定理3.10完全相同。首先，如上面的 $n = 1$情形所示，我们找到 α_i^*($i = 1$，2，3，4)的消去2-柄。然后，我们按照定理3.10的证明，找到 α_{8+i}^*($i = 1$，2，$\cdots$，$2n-2$)的消去2-柄。最后，我们使用 B_{5-i}找到 α_i^*($i = 5$，6，7，8)的消去2-柄。□

References

[1] S. Akbulut. 一个不含　　1　　3　　*J.* - 和 -
Gökova Geom. Topol. GGT 3 22 43, 2009
把手的奇异 Dolgachev 曲面无穷族. , : – .[2] S. Akbulut. Dolgachev 曲面. 对 Harer-Kas-Kirby 猜想的反证.
Comment. , ( ): – . .
Math. Helv. 87 1 187 241, 2012 doi:10.4171/CMH/252

[3] R. I. Baykur. 关于不含 1- 和 3-手柄的四维流形. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 153 6 2681( ): –2685, 2025. doi:10.1090/proc/17215. [4] G. Burde 和 H. Zieschang. *Knots*, *de Gruyter Studies in Mathematics*第5卷. Walter de Gruyter & Co., 柏林，第2版，2003年.[5] R. Fintushel 和 R. Stern. 具有相同 Seiberg-Witten 不变量的单连通4维流形族. *Topology*, 43(6):1449–1467, 2004. [6] Y. Gurtas. 映射类群中若干新 involution 的正德恩扭转表达式，2004年。arXiv:math.GT/0404310. [7] J. Harer. 如何构造所有纤维化纽结和链环. *Topology*, 21(3):263–280, 1982. [8] A. Kawauchi. *A survey of knot theory*. Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1996年。由作者根据1990年日文原版翻译并修订。[9] Y. Matsumoto. 二属 Lefschetz纤维化——一种拓扑学方法。载于 *Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995)* 123 148 ，第 – 页。

World Sci. Publishing，里弗埃奇，新泽西州，1996年。[10] N. Monden 和 R. Yabuguchi. 关于 $(2, 2h + 1)$-环面纽结的纽结手术椭圆曲面，2025年。网址： https://arxiv.org/abs/2503.06102, arXiv:arXiv:2503.06102。[11] J. Stallings. 纤维化纽结和链环的构造。载于 *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976) Part 2* , ，《纯数学专题讨论会论文集》，XXXII，第55–60页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1978年。[12] K.-H. Yun. 关于由 involution 得到的 Lefschetz纤维化的符号. *Topology Appl.* 153 12 1994 2012, 2006 , ( ): – . [13] K.-H. Yun. Fintushel-Stern 纽结手术 4 *Trans. Amer. Math. Soc.* 360 11 5853 -流形的扭曲纤维和. , ( ): –5868, 2008.

Research institute of Mathematics, Seoul National University, Seoul 08826, Repub-lic of Korea*Email address*: jualee@snu.ac.kr

School of Mathematics, Statistics and Data science, Sungshin Women's University, Seoul 02844, Republic of Korea*Email address*: kyun@sungshin.ac.kr