arXiv:2601.11278v1 [math.RT] 16 Jan 2026

有限模式群的伴随表示

CHUFENG NIEN 和 CHENYAN WU

Abstract. 本文研究如何利用 Panov 的结合极化构造有限模式群的不可约表示。Panov 的结合极化是 Kirillov 轨道方法在有限域上的类比。利用这一构造，首先，我们能够分类具有 4 个部分的 GL_n 标准抛物子群的幺正根基的不可约表示；其次，对于任意有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的有限模式群 G，我们能够通过基数为 q^2 的余伴随轨道，为次数为 q 的不可约特征建立参数化。，其中$\mathbb{F}_q$ 是含有 q 个元素的有限域。

1. Notation and Preliminary

设 F 是一个自对偶域，即有限域，或 $\mathbb{R}$，或 $\mathbb{C}$，或 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，或一个形式 Laurent 级数域 $\mathbb{F}_q((t))$，其变量为一个变量，系数取自有限域。我们考虑 F 上的 GL_n 型李群。令 S 表示 GL_n 的对角环面， U_n 表示 GL_n 的上三角幺正子群， Δ_n 表示正根集合：

$$\Delta_n = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \,|\, 1 \le i < j \le n\}.$$

令 $\mathfrak{g}_\alpha$ 表示 $\mathfrak{gl}_n$ 的根空间，并令 U_α 表示 GL_n 中与 α 相关联的根子群。固定一个群同构

$$x_\alpha : F \to U_\alpha$$

该同构由如下条件唯一确定：对于所有 $t \in S$ 和 $\xi \in F$， $tx_\alpha(\xi)t^{-1} = x_\alpha(\alpha(t)\xi)$。

我们注意到交换子关系。设 α， $\beta \in \Delta_n \cup -\Delta_n$，并假设 $\alpha + \beta \neq 0$。那么对于 ξ，$\eta \in F$，若 $\alpha + \beta \in \Delta_n \cup -\Delta_n$，则

$$x_\alpha(\xi)x_\beta(\eta)x_\alpha(\xi)^{-1}x_\beta(\eta)^{-1} = x_{\alpha+\beta}(\pm\xi\eta);$$

否则， $x_\alpha(\xi)$ 与 $x_\beta(\eta)$ 交换。更准确地说，若 $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ 且 $\beta = \varepsilon_j - \varepsilon_k$，则取 $+$ 号；若 $\alpha = \varepsilon_j - \varepsilon_k$ 且 $\beta = \varepsilon_i - \varepsilon_j$，则取 $-$ 号。

设 $D \subseteq \Delta_n$。令 $\mathfrak{g}_D = \oplus_{\alpha \in D}\mathfrak{g}_\alpha$。

如果对于满足 $\alpha, \beta \in D$ 的 $\alpha+\beta \in \Delta_n$，都有 $\alpha + \beta \in D$，我们就称子集 $D \subseteq \Delta_n$ 是封闭的。现在假设 $D \subseteq \Delta_n$ 是封闭的。若 $\alpha \in D$ 不能写成 D 中两个根之和，则称其为本原元素。用 D^0 表示 D 中本原元素的集合，用 $D^\sharp$ 表示 D 中非本原元素的集合。根据交换子关系，$[\mathfrak{g}_D, \mathfrak{g}_D] = \mathfrak{g}_{D^\sharp}$。我们称 $\mathfrak{g}_D$ 为模式代数。记 $\mathfrak{g}_D^*$ 为它的 F-线性对偶。令 G_D 为由满足 $\alpha \in D$ 的 U_α 生成的 GL_n 的子群。

Date: 2026年1月19日。*Key words and phrases.* 余伴随轨道、单位上三角群、幺幂群、模式群、希格曼猜想、艾萨克斯猜想、莱勒猜想。

它是 U_n 的一个子群。我们称它为模式群。给定一个模式代数 $\mathfrak{g}$ 或一个模式群 G，我们用 $\Delta_{\mathfrak{g}}$ 或 Δ_G 表示分别与 $\mathfrak{g}$ 或 G 相关联的封闭集。

接下来，我们讨论由 $\mathfrak{g}_D^*$上的余伴随作用 $\mathrm{Ad}^*$of G_D 所产生的余伴随轨道。我们用 $\langle\ ,\ \rangle$ 表示 $\mathfrak{g}_D^*$ 与 $\mathfrak{g}_D$之间的自然配对。对于 $T\in\mathfrak{g}_D^*$和 $g\in G_D$， G_D 在 $\mathfrak{g}_D^*$ 上的余伴随作用为

$$\langle \mathrm{Ad}^*(g)T, X\rangle = \langle T, \mathrm{Ad}(g^{-1})X\rangle \quad \text{for all } X\in\mathfrak{g}_D. \tag{1.1}$$

我们有一个完美配对

$$\begin{aligned}\mathfrak{gl}_n\times\mathfrak{gl}_n &\to F\\ (X,Y)&\mapsto \mathrm{tr}(XY).\end{aligned}$$

它限制为一个完美配对（其中 D 不一定是封闭的）

$$\mathfrak{g}_D\times\mathfrak{g}_{-D}\to F.$$

因此，我们有一个同构$\mathfrak{g}_D^*\cong\mathfrak{g}_{-D}$。因此，有时我们将用$\langle T,\ X\rangle$表示 $\mathrm{tr}(TX)$，其中 $T\in\mathfrak{g}_{-D}$和 $X\in\mathfrak{g}_D$。

现在我们明确写出 G_D 在 $\mathfrak{g}_{-D}$ 上的余伴随作用。设 $T\in\mathfrak{g}_{-D}$。由 (1.1) 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathrm{Ad}^*(g)TX) &= \mathrm{tr}(T\,\mathrm{Ad}(g^{-1})X)\\ &= \mathrm{tr}(Tg^{-1}Xg) = \mathrm{tr}(gTg^{-1}X) = \mathrm{tr}([gTg^{-1}]_{\mathfrak{g}_{-D}}X),\end{aligned}$$

其中，我们令$[\cdot]_{\mathfrak{g}_{-D}}$ 为从 $\mathfrak{gl}_n$ 到 $\mathfrak{g}_{-D}$的投影。总之， G_D 对 $\mathfrak{g}_{-D}$ 的余伴随作用为

$$\mathrm{Ad}^*(g)T = [gTg^{-1}]_{\mathfrak{g}_{-D}}.$$

接下来，我们写出 G_D的线性特征。固定一个非平凡加性特征 $\psi: F\to\mathbb{C}^\times$。$G_D$ 的导出群 G_D^{der}由 D 中遍历非本原根的 α 所对应的 U_α 生成，并且它是一个李代数为$\mathfrak{g}_{D^\sharp}$的模式群。G_D 的线性特征可以与以下对象的线性特征相对应

$$G_D/G_D^{\mathrm{der}}\cong\prod_{\alpha\in D^0}U_\alpha\cong\prod_{\alpha\in D^0}\mathfrak{g}_\alpha=\mathfrak{g}_{D^0}.$$

这个同构导出了投影映射 $G_D\to\mathfrak{g}_{D^0}$，我们将其记为$[\cdot]_{\mathfrak{g}_{D^0}}$。那么 $[g_1g_2]_{\mathfrak{g}_{D^0}}=[g_1]_{\mathfrak{g}_{D^0}}+[g_2]_{\mathfrak{g}_{D^0}}$，对于 $g_1,\ g_2\in G_D$。

令 $T\in\mathfrak{g}_{-\Delta_n}$。设 $\psi_T(g):=\psi(\mathrm{tr}(T(g-I)))=\psi(\mathrm{tr}(Tg))$，其中 $g\in G_D$。一般来说，它不是 G_D的线性特征。当且仅当 $\langle T,\ \mathfrak{g}_{D^\sharp}\rangle=0$，或者等价地，$\mathrm{tr}\,T\mathfrak{g}_D^2=0$时，它才是 G_D 的线性特征。G_D的所有线性特征都以这种方式得到。

2. Auxiliary Results

本节回顾一些记号和辅助结果。

引理 2.1。 [DI08，引理 4.1。] 设 $\mathfrak{a}$ 是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的有限维结合幂零代数。那么余伴随轨道的数量与共轭类的数量相同，也等于 $1+\mathfrak{a}$ 的不可约表示同构类的数量。

令 Ind^G 表示诱导函子。设 $\mathfrak{a}$ 是定义在 F 上的有限维结合幂零代数。那么 $\mathfrak{a}$ 从 F继承自然拓扑，而 $1+\mathfrak{a}$成为一个局部紧（豪斯多夫）、第二可数的拓扑群。此外，它是幺模的。若 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{a}$的一个 F-子代数，则 $1+\mathfrak{b}$ 可视为 $1+\mathfrak{a}$. 的闭子群。在此情形下，Mitya Boyarchenko [B011] 通过证明下述定理，验证了 E. Gutkin [Gut73]于 1973年提出的一个猜想。

定理2.2。 [B011，定理1.3。] 设 π： $1+\mathfrak{a}\mapsto U(H)$ 是一个酉不可约表示。则存在一个 F-子代数 $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{a}$ 以及一个酉特征α： $1+\mathfrak{b}\mapsto\mathbb{C}^\times$，使得 $\pi\cong$ u-归纳 $_{1+\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}}\alpha$，其中u-归纳 表示酉诱导这一操作。

假设有限群 $G=M\ltimes N$ 是 M与 N的半直积，$\widehat{\ }$其中 N是 G的阿贝尔正规子群。设 $m\in M$通过 $m\cdot\chi=\chi^m,\widehat{\ }$作用于 N，其中 $\chi^m\in N$ 由下式给出

$$\chi^m(n)=\chi(m^{-1}nm)\text{ for }n\in N.$$

设 $R_\chi=\{m\in M\mid\chi^m=\chi\}$ 是 M中 χ 的稳定子。那么， G 的不可约表示可以用以下形式的诱导表示来描述。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$**定理2.3**。 [Se77，第8.2节，命题25。] 对于 χ， $\chi'\in N$，以及 $\pi\in R_\chi$， $\pi'\in\frown R_{\chi'}$，有如下结论。

(1) 诱导$_{R_\chi\ltimes N}^G\pi\otimes\chi$ 是 G的不可约表示。*(2)* 诱导$_{R_\chi\ltimes N}^G\pi\otimes\chi\cong$ 诱导 $_{R_{\chi'}\ltimes N}^G\pi'\otimes\chi'$ 当且仅当 χ 和 χ' 属于同一个M-轨道，并且 $\pi\cong\pi'$。*(3)* G 的每个不可约表示 π 都同构于诱导$_{R_\chi\ltimes N}^G\pi\otimes\chi$，其中$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，对某个 $\chi\in N$，并且 $\pi\in R_\chi$.

现在令 $F=\mathbb{F}_q$。令 $U_n=1+\mathfrak{u}_n$ 为对应于闭集 Δ_n. 的幺幂群。令 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{u}_n$的一个子代数，且 $G=1+\mathfrak{g}$。用 $\mathfrak{O}_G$ 表示余伴随轨道的集合，用 $\mathfrak{O}_\lambda$ 表示包含 $\lambda\in\mathfrak{g}^*$ 的余伴随轨道。令 ψ 为 $\mathbb{F}_q$的任意固定非平凡加性特征。注意，若 $\mathfrak{g}^\lambda$ 是 $\lambda\in\mathfrak{g}^*$的稳定子，则子群 $G^\lambda=1+\mathfrak{g}^\lambda$ 是 $\lambda\in\mathfrak{g}^*$ 的稳定子，并且

$$\frac{|\,G\,|}{|\,G^\lambda\,|}=\frac{|\,\mathfrak{g}\,|}{|\,\mathfrak{g}^\lambda\,|}=q^{\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}^\lambda}=q^{\dim\mathfrak{O}_\lambda}.\tag{2.1}$$

定义 2.4。 设 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{g}$. 的一个子代数。对于 $\lambda\in\mathfrak{g}^*$，定义一个斜对称双线性形式

$$B_\lambda(x,y):=\lambda([x,y]),\text{ for }x,\ y\in\mathfrak{g},\text{ where }[x,y]=xy-yx.$$

若对所有 $x,\ y\in\mathfrak{p}$，均有 $B_\lambda(x,y)=0,$，则称空间 $\mathfrak{p}$ 为**各向同性的**。若 $\mathfrak{p}$ 是斜对称双线性形式 $B_\lambda(x,y)$在 $\mathfrak{g}$上的极大各向同性子空间，则称空间 $\mathfrak{p}$ 是 $\lambda\in\mathfrak{g}^*$的 **极化**。

命题 2.5。 [Pa14，命题 1。] 幂零李代数 $\mathfrak{g}$上的任意线性形式 λ 都有一个极化 $\mathfrak{p}_\lambda$.

注意，任意极化都包含稳定子 $\mathfrak{g}^\lambda$.

命题 2.6. [Pa14，命题 2。] 设 $\mathfrak{p}$ 是 $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ 的一个极化，$P = 1 + \mathfrak{p}$是从 $\mathfrak{g}^*$ 到 $\mathfrak{p}^*$ 的自然投影，且 $L(\lambda) := j^{-1}j(\lambda)$。那么

(i) 维数 $\mathfrak{p} = \frac{1}{2}$(维数 $\mathfrak{g}$ + 维数 $\mathfrak{g}^\lambda$). *(ii)* $|L(\lambda)| = \sqrt{|\mathfrak{O}_\lambda|}$.*(iii)* $\overline{L(\lambda)} = \mathrm{Ad}_P^* \lambda$. 特别地，$L(\lambda) \subset \mathfrak{O}_\lambda$.

当指数映射存在且是从李代数 $\mathfrak{g}$ 到单三角群 U_n的子群 $G = \exp(\mathfrak{g})$的双射时，经典轨道方法$\widehat{\ }$的类比给出如下对 G的分类。

回忆一下，$\psi : \mathbb{F}_q \mapsto \mathbf{C}^\times$ 是一个非平凡的加性特征。将 λ限制在其极化 $\mathfrak{p}$ 上，通过公式定义群 $P = \exp(\mathfrak{p})$的特征（一维表示） η_λ

$$\eta_\lambda(\exp(x)) = \psi(\lambda(x)).$$

定理 2.7。 [Pa14，定理 2.] 设 $T^\lambda := \mathrm{Ind}_P^G \eta_\lambda$. 则

(1) 维数 $T^\lambda = q^{\frac{1}{2}\text{维数}\,\mathfrak{O}_\lambda} = \sqrt{|\mathfrak{O}_\lambda|}$.*(2)* 表示 T^λ 不依赖于极化的选择。*(3)* 表示 T^λ 是不可约的。*(4)* 表示 T^λ与 $T^{\lambda'}$等价，当且仅当 λ与 λ'属于同一个余伴随轨道。*(5)* 对于任意 $\pi \in \widehat{G}$，存在 $\lambda \in \mathfrak{g}^*$，使得 π 与 T^λ.等价

令 p 为 $\mathbb{F}_q$. 的特征。当 $p > n$，指数映射是一个双射$\widehat{\ }$，将李代数 $\mathfrak{u}_n(q)$ 映到 $U_n(q)$ 上，而 $U_n(q)$ 的分类由定理 2.7 建立。

另一方面，当指数映射不适用时，可以对轨道方法作如下修改。

定义 2.8. $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ 的结合极化是满足以下条件的极化 $\mathfrak{p}$：

(1) $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{g}$的结合子代数。(2) $\lambda(\mathfrak{p}^2) = 0$。

当 $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ 存在结合极化 $\mathfrak{p}$时，$\psi_\lambda(1 + x) := \psi(\lambda(x))$ 是 $P = 1 + \mathfrak{p}$. 的一个表示。同理，设

$$\eta_\lambda(1 + x) = \psi \circ \lambda(x).$$

考虑诱导表示 $M^\lambda := \mathrm{Ind}_P^G \eta_\lambda$.

定理 2.9。 [Pa15，命题 2.3。]

(1) 维数 $M^\lambda = q^{\mathrm{codim}\,\mathfrak{p}} = \sqrt{|\mathfrak{O}_\lambda|}$，其中 余维数 $\mathfrak{p}$表示 $\mathfrak{p}$在 $\mathfrak{g}$中的余维数。*(2)* 表示 M^λ 不依赖于结合极化的选择。*(3)* 表示 M^λ 是不可约的。*(4)* 假设 λ 和 λ' 都具有结合极化。那么，当且仅当 λ和 λ'属于同一个余伴随轨道时，表示 M^λ和 $M^{\lambda'}$等价。

3. Finite Groups of Good Types

定义 3.1。 设 $G = 1 + \mathfrak{g}$ 是域 $\mathbb{F}_q$ 上的一个有限模式群，其关联的幂零代数为 $\mathfrak{g}$. 对于 $S \in \mathfrak{g}^t$， 令 $\lambda_S \in \mathfrak{g}^*$ 表示映射

$$\lambda_S : \mathfrak{g} \mapsto \mathbb{F}_q \text{ given by } \lambda_S(x) = \mathrm{tr}(SX).$$

那么我们称 G 是**良类型，**如果对任意 λ_S， 其中 $S \in \mathfrak{g}^t$.， 都存在结合极化

如果 G 是良类型，那么根据引理 2.1 和定理 2.9,

$$\widehat{G} = \{\mathrm{Ind}_{1+\mathfrak{b}_S}^{G} \psi_S \mid S \in \mathfrak{O}_G\},$$

其中 $\psi_S(1 + x) = \psi(\mathrm{tr}\, Sx)$。

在 [Ni20], [Ni21] [LN23]， 和 [Ni24]， 中，除那些在 $\mathfrak{g}$ 与 G 之间存在双射指数映射的模式群 $G = 1 + \mathfrak{g}$ 外，还验证了若干系列的有限模式群属于良类型。然而， [Ev11] 给出了不属于良类型的有限模式群的例子。

3.1. 四部分幺正根。 令U_{n_1,n_2,n_3,n_4} 表示标准抛物子群 P_{n_1,n_2,n_3,n_4} 的幺正根基，它们对应于 U_n 中 $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4,\ n_i \in \mathbb{N}$. 的划分

定理 3.2。 令 $G := U_{n_1,n_2,n_3,n_4}$. 则 G 属于良类型。

证明。 根据定理 2.9，要证明 $G = 1 + \mathfrak{g}$ 属于良类型，只需证明存在 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数 $\mathfrak{b}_T$，满足 $\mathrm{tr}\ T\mathfrak{b}_T^2 = 0$ 且 $\mathrm{codim}\ \mathfrak{b}_T = \frac{1}{2}\text{维数}\mathfrak{O}_T$,对任意 $T \in \mathfrak{g}^t$. ———

令 $T \in \mathfrak{g}^t$ ，其分块由 T_{ij} 给出，其中 $T_{ij} = 0$ ，对 $i \le j$ 成立。我们求 $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(T)$ 的维数，即集合 $\{X \in \mathfrak{g} \mid [[X, T]]_{\mathfrak{g}^t} = 0\}$。回忆一下， $[\cdot]_{\mathfrak{g}^t}$ 是 $\mathfrak{gl}_n$ 到 $\mathfrak{g}^t$ 的投影。

令 $X \in \mathfrak{g}$。首先注意到

$$\mathrm{Ad}^*(1 + X) \cdot T - T = [[X, T](1 + X)^{-1}]_{\mathfrak{g}^t} = [[[X, T]]_{\mathfrak{g}^t}(1 + X)^{-1}]_{\mathfrak{g}^t}.$$

具体而言，我们有

$$[[X, T]]_{\mathfrak{g}^t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{23}T_{31} + X_{24}T_{41} & 0 & 0 & 0 \\ X_{34}T_{41} & -T_{31}X_{12} + X_{34}T_{42} & 0 & 0 \\ 0 & -T_{41}X_{12} & -T_{41}X_{13} - T_{42}X_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}} T$ 由满足以下条件的 $X \in \mathfrak{g}$ 构成

$$\begin{aligned} X_{23}T_{31} + X_{24}T_{41} &= 0, \\ X_{34}T_{41} &= 0, \\ -T_{31}X_{12} + X_{34}T_{42} &= 0, \\ -T_{41}X_{12} &= 0, \\ -T_{41}X_{13} - T_{42}X_{23} &= 0. \end{aligned}$$

$[[X, T]]_{\mathfrak{g}^t}$ 的表达式表明，我们可以在同一余伴随轨道中选择另一个 T，使得 $\mathrm{spanrow}(T_{31}) \cap \mathrm{spanrow}(T_{41}) = 0$ 且 $\mathrm{spancol}(T_{42}) \cap$

spancol(T_{41}) $= 0$，其中我们用 spanrow（分别用 spancol）表示矩阵的行（分别为列）空间。于是，对于这样的 T，Stab$_{\mathfrak{g}}T$由满足以下条件的 X 组成:

$$\begin{aligned} X_{23}T_{31} &= 0,\\ X_{24}T_{41} &= 0,\\ X_{34}T_{41} &= 0,\\ -T_{31}X_{12} + X_{34}T_{42} &= 0,\\ T_{41}X_{12} &= 0,\\ T_{41}X_{13} &= 0,\\ T_{42}X_{23} &= 0. \end{aligned}$$

关于 X_{13} 的约束贡献

$$\operatorname{rank}(T_{41})n_3$$

余维。关于 X_{24} 的约束贡献

$$\operatorname{rank}(T_{41})n_2$$

余维。根据引理 3.3(1)，关于 X_{23} 的约束贡献

$$\operatorname{rank}(T_{31})n_2 + \operatorname{rank}(T_{42})n_3 - \operatorname{rank}(T_{31})\operatorname{rank}(T_{42})$$

余维。有三个方程对 X_{12} 和 X_{34}施加约束，根据引理 3.3(2)，这些约束贡献

秩(T_{41})n_2 +秩(T_{41})n_3
$+ \operatorname{rank}(T_{31})\operatorname{rank}(T_{42}) + (n_2 - \operatorname{rank}(T_{42}))\operatorname{rank}(T_{31}) + (n_3 - \operatorname{rank}(T_{31}))\operatorname{rank}(T_{42})$

其余维。因此， $\mathfrak{g}$ 中 Stab$_{\mathfrak{g}}T$ 的余维为（
3.1)
2(n_3秩(T_{41}) $+ n_2$秩(T_{41}) $+ n_2$秩(T_{31}) $+ n_3$秩(T_{42}) −秩(T_{31}) 秩(T_{42})).

接下来，我们给出 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数 $\mathfrak{b}_T$，其余维等于（3.1）的一半，且满足 tr $T\mathfrak{b}_T^2 = 0$。对于 X， $Y \in \mathfrak{g}$，我们有

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_{12}Y_{23} & X_{12}Y_{24} + X_{13}Y_{34} \\ 0 & 0 & 0 & X_{23}Y_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $\mathfrak{b}_T$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数，由满足以下条件的 Y 组成

$$\begin{aligned} Y_{23}T_{31} &= 0,\\ T_{42}Y_{23} &= 0,\\ T_{41}Y_{12} &= 0,\\ Y_{34}T_{41} &= 0. \end{aligned}$$

在这些条件下，对所有 X， $Y \in \mathfrak{b}_T$都有 tr $TXY = 0$，换言之，tr $T\mathfrak{b}_T^2 = 0$。由对 Y_{12}和 Y_{34} 施加的约束所贡献的余维为 rank(T_{41})($n_2 + n_3$)；根据引理 3.3(1)，Y_{23} 所贡献的余维为 n_2 rank(T_{31}) $+ n_3$rank(T_{42}) −rank(T_{31}) rank(T_{42})。因此，$\mathfrak{b}_T$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的余维为 ($n_2 + n_3$) rank(T_{41}) $+ n_2$ rank(T_{31}) $+ n_3$ rank(T_{42}) − rank(T_{31}) rank(T_{42})，这恰好是 (3.1) 的一半。

□

引理 3.3。 (1) 子空间的余维

$$\{X_{23} \in \mathrm{Mat}_{n_2,n_3} \mid T_{42}X_{23} = 0, X_{23}T_{31} = 0\}$$

矩阵空间的 $n_2 n_3$ is

$$n_3 \operatorname{rank}(T_{42}) + n_2 \operatorname{rank}(T_{31}) - \operatorname{rank}(T_{31}) \operatorname{rank}(T_{42}),$$

其中 T_{31}, T_{42} 是适当的矩阵，使得 $T_{42}X_{23}$ 和 $X_{23}T_{31}$ 有定义。

（2）该子空间的余维

$$\{X_{12} \in \mathrm{Mat}_{n_1,n_2}, X_{34} \in \mathrm{Mat}_{n_3,n_4} \mid T_{31}X_{12} = X_{34}T_{42}, T_{41}X_{12} = 0, X_{34}T_{41} = 0\}$$

of $\mathrm{Mat}_{n_1,n_2} \times \mathrm{Mat}_{n_3,n_4}$ is

秩(T_{41})n_2 +秩(T_{41})n_3
+ 秩(T_{31}) 秩(T_{42}) + (n_2 − 秩(T_{42})) 秩(T_{31}) + (n_3 − 秩(T_{31})) 秩(T_{42})

其中， T_{31}, T_{42}, T_{41} 是适当的矩阵，使得 $T_{31}X_{12}$、 $X_{34}T_{42}$、 $T_{41}X_{12}$和 $X_{34}T_{41}$ 有定义，且 spanrow(T_{31})∩spanrow(T_{41}) $= 0$ 以及 spancol(T_{42})∩spancol(T_{41}) $= 0$。

证明。 考虑第一部分。设 r_{42} = rank(T_{42}) 且 r_{31} = rank(T_{31})。设P_1, P_2, P_3, P_4 为可逆矩阵，使得

$$P_4 T_{42} P_2 = \begin{pmatrix} I_{r_{42}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: U_{42}, \quad P_3 T_{31} P_1 = \begin{pmatrix} I_{r_{31}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: U_{31}.$$

那么，定义该子空间的方程等价于

$$U_{42} P_2^{-1} X_{23} P_3^{-1} = 0$$
$$P_2^{-1} X_{23} P_3^{-1} U_{31} = 0.$$

将 $P_2^{-1}X_{23}P_3^{-1}$重命名为 X_{23}。于是只需求由下式定义的 X_{23} ∈矩阵空间$_{n_2,\ n_3}$ 子空间的余维

$$U_{42} X_{23} = 0$$
$$X_{23} U_{31} = 0.$$

容易看出，余维由下式给出

$$n_3 r_{42} + n_2 r_{31} - r_{31} r_{42}$$

正如所需。

考虑第二部分。设 r_{42} = 秩(T_{42})、 r_{31} = 秩(T_{31})，且 r_{41} =秩(T_{41})。设 P_4, P_1 为可逆矩阵，使得 $P_4 T_{41} P_1 = \begin{pmatrix} I_{r_{41}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: U_{41}$。将 $P_1^{-1}X_{12}$重命名为 X_{12}，并将 $X_{34}P_4^{-1}$重命名为 X_{34}，我们可以假设这些方程为

$$T_{31} X_{12} = X_{34} T_{42},$$
$$U_{41} X_{12} = 0,$$
$$X_{34} U_{41} = 0,$$

其中，列张成空间(T_{31})∩列张成空间(U_{41}) $= 0$ 且行张成空间(T_{42})∩行张成空间(U_{41}) =0。然后我们还可以进一步要求，对于某个大小为 $n_3 \times (n_1 - r_{41})$ 的 S_{31}，有 $T_{31} = (0 \ S_{31})$

且秩为 r_{31}，并且对于某个大小为 $(n_4 - r_{42}) \times n_2$ 的 S_{42}，秩为r_{42}。

设 $X_{12} = \begin{pmatrix} X_{12}^{(1)} \\ X_{12}^{(2)} \end{pmatrix}$，其中 $X_{12}^{(1)}$ 有 r_{41} 行，$X_{12}^{(2)}$ 有 $n_1 - r_{41}$ 行。设$X_{34} = \begin{pmatrix} X_{34}^{(1)} & X_{34}^{(2)} \end{pmatrix}$，其中 $X_{34}^{(1)}$ 有 r_{41} 列，$X_{34}^{(2)}$ 有 $n_4 - r_{41}$ 列。等式 $U_{41}X_{12} = 0$ 和 $X_{34}U_{41}$ 表明 $X_{12}^{(1)} = 0$ 和 $X_{34}^{(1)} = 0$，由此得到 $r_{41}n_2 + r_{41}n_3$ 对余维的贡献。

接下来分析这些方程

$$S_{31}X_{12}^{(2)} = X_{34}^{(2)}S_{42}. \tag{3.2}$$

设 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 为可逆矩阵，使得

$$Q_3 S_{31} Q_1 = \begin{pmatrix} I_{r_{31}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: U_{31}, \quad Q_4 S_{42} Q_2 = \begin{pmatrix} I_{r_{42}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: U_{42}.$$

于是 (3.2) 等价于

$$U_{31}Q_1^{-1}X_{12}^{(2)}Q_2 = Q_3X_{34}^{(2)}Q_4^{-1}U_{42}.$$

将 $Q_1^{-1}X_{12}^{(2)}Q_2$ 重命名为 $X_{12}^{(2)}$，并将 $Q_3X_{34}^{(2)}Q_4^{-1}$重命名为 $X_{34}^{(2)}$，得到方程

$$U_{31}X_{12}^{(2)} = X_{34}^{(2)}U_{42},$$

这对余维的贡献为 $r_{31}r_{42} + r_{31}(n_2 - r_{42}) + r_{42}(n_3 - r_{31})$。将所有贡献相加，即得所需的余维。□

定义 3.4。给定一个模式群 $G = 1 + \mathfrak{a}$，若 $\Delta_G \subset \Delta_n$ 且 $\Delta_G \not\subset \Delta_{n-1}$，则称 G（分别地，$\mathfrak{a}$）具有 u-秩 n。

定义 3.5。给定一个模式群 $G = 1 + \mathfrak{a}$，对于任意 $0 \neq T \in \mathfrak{a}^t$，若存在 $\mathfrak{a}$ 的一个子代数 $\mathfrak{b}_T$，其 u-秩与 $\mathfrak{a}$ 相同，且满足 $\operatorname{tr} T(\mathfrak{b}_T)^2 = 0$，则称 $(T, \mathfrak{b}_T)$ 是 G 的一个可诱导对。

当我们有一个可诱导对 $(T, \mathfrak{b}_T)$ 时，$\psi_T(1 + x) := \psi(\operatorname{tr} Tx)$ 是 $1 + \mathfrak{b}_T$ 的一个定义良好的特征。

定理 3.6。假设 $G = 1 + \mathfrak{a}$ 的 u-秩为 $n \geq 2$. 对于任意 $0 \neq T \in \mathfrak{a}^t$，存在 $\mathfrak{b}_T$，使得 $(T, \mathfrak{b}_T)$ 是一个可诱导对。

证明。我们对 u-秩 n应用归纳法。当 $n = 2$时，对于任意 $T \in \mathfrak{a}^t$，我们可以选取 $\mathfrak{b}_T = \mathfrak{a}$。于是 $\operatorname{tr} T(\mathfrak{b}_T)^2 = 0$，因为 $\mathfrak{a}^2 = 0$. 假设该陈述对任何 u-秩为 $n \leq k$.的模式群都成立

对于 u-秩为 $n = k + 1$ 的 $1 + \mathfrak{a}$ 以及 $T = (T_{i,j}) \in \mathfrak{a}^t$，通过在同一个余伴随轨道中选取适当的代表元，我们可以假设 $T_{n,i} = 0$；如果 $(j, i), (i, n) \in \Delta_\mathfrak{a}$ 且 $T_{n,j} \neq 0$，则对某个 $j < i$成立。令 T'为 T在$M = 1 + \mathfrak{m}$上的限制，其中 $G = M \ltimes Z$，其中 $Z = 1 + \mathfrak{z}$，并且 $\Delta_\mathfrak{z} = \{(i, n) \mid (i, n) \in \Delta_\mathfrak{a}\}$以及 $\Delta_\mathfrak{m} = \{(i, j) \mid (i, j) \in \Delta_\mathfrak{a}, j < n\}$.

根据归纳假设，令 $\mathfrak{c}$为 $\mathfrak{m}$的一个子代数，使得 $(T', \mathfrak{c})$ 是一个可诱导对。令

$$\mathfrak{n}_1 = \{(n_1, \cdots, n_k) \mid n_i = 0 \text{ if } (j, i), (i, n) \in \Delta_\mathfrak{a} \text{ and } T_{n,j} \neq 0\}.$$

Let $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} \mathfrak{c} & \mathfrak{n}^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \mathfrak{a}$, where $\mathfrak{n}_1 \supset \mathfrak{n}$ and

$\mathfrak{n} := \{(n_1, \cdots, n_k) \mid n_r = 0$，若存在某个 $1 \le j \le k$，$(j, r) \in \Delta_{\mathfrak{m}}$，且 $(r, n) \in \Delta_j \backslash \Delta_{\mathfrak{n}_1^t}\}$。则 $(T, \mathfrak{b})$ 是一个可诱导对。

□

我们回顾关于可诱导对的两个先前结果。

定理 3.7。 [LN23，定理 3。1] 对于任意有限模式群 $G = 1 + \mathfrak{a}$，其模式代数为 $\mathfrak{a}$，给定任意单项矩阵 $T = (t_{i,j}) \in \mathfrak{a}^t$，存在 G 的一个模式子群 H_T，它与归纳定义的闭集 Δ_{H_T} 相关，使得诱导 $\mathrm{Ind}_{H_T}^G \psi_T$ 是 G 的不可约表示，其中 $\psi_T(x) =: \psi(trTx)$ 对 $x \in H_T$ 成立。此外，对于单项的 T、$S \in \mathfrak{a}^t$，

$$\mathrm{Ind}_{H_T}^G \psi_T \cong \mathrm{Ind}_{H_S}^G \psi_S \text{ if and only if } T = S.$$

定理 3.8。 [Ni24，定理 2。2] 设 $G = 1 + \mathfrak{a}$ 是一个模式群，其模式代数为 $\mathfrak{a}$，定义在有限域 $\mathbb{F}_q$ 上。那么，G 的每个次数为 q 的不可约特征都同构于

$$\mathrm{Ind}_{1+\mathfrak{b}}^G \psi_T, \text{ for some } T \in \mathfrak{a}^t,$$

其中，$\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一个模式子代数，满足 $\mathrm{tr}\, T\mathfrak{b}^2 = 0$. 此外，若 $\mathrm{Ind}_{1+\mathfrak{b}}^G \psi_S \cong \mathrm{Ind}_{1+\mathfrak{c}}^G \psi_T$，则 S 和 T 属于同一个余伴随轨道。

对于定义在特征为 $p > 2$ 的有限域上的经典群的 Sylow p-子群 G，以及与之关联的李代数 $\mathfrak{g}$，Sangroniz, Josu 在 [Sa09] 中证明，次数足够大的 p^f 的不可约特征可以由大小为 p^{2f} 的 G 的余伴随轨道参数化。本文证明了一个类似结果：有限模式群的次数为 q 的特征。

定理 3.9。 设 $G = 1 + \mathfrak{a}$ 是有限域 $\mathbb{F}_q$ 上模式代数为 $\mathfrak{a}$ 的模式群。那么，次数为 q 的不可约特征的数量等于基数为 q^2 的余伴随轨道的数量。

证明。令 D_q 表示次数为 q 的不可约特征集合，C_{q^2} 表示基数为 q^2. 的余伴随轨道集合。首先，我们证明，对于 $X \in \mathfrak{O}_X \in C_{q^2}$ 中的任意余伴随轨道，都可以选取一个代表元 $Y \in \mathfrak{b}^t \cap \mathfrak{O}_X$，使其对应于 $\mathfrak{a}$ 中余维为 1 的某个模式子代数 $\mathfrak{b}$。令 $X = (x_{i,j}) \in \mathfrak{a}^t$.

由于 $|\mathfrak{O}_X| = q^2$，至多有两个非零项 $x_{t,s}$、$x_{k,m}$，满足 $s < k$，使得 (s,t)、$(m,k) \in \Delta_{\mathfrak{a}^2}$。于是 $t < m$，且 (s,k)、(k,t)、$(t,m) \in \Delta_{\mathfrak{a}}$.。令 $\mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{a}$ 的子代数，使得 $\Delta_{\mathfrak{b}} = \Delta_{\mathfrak{a}} \setminus \{(k,t)\}$.。于是我们可以选取代表元 $Y = (y_{i,j}) \in \mathfrak{b}^t \cap \mathfrak{O}_X$，其中 $y_{t,k} = 0$.。于是 $Y \in (\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{b}^2)^t$，且根据定理 2.9，$\mathrm{Ind}_{1+\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}} \psi_Y$ 不可约。

若恰有 1 个非零项 $x_{t,s}$ 且 $(s,t) \in \Delta_{\mathfrak{a}^2}$，则存在唯一的 r，满足 $s < r < t$，使得 (s,r)，$(r,t) \in \Delta_{\mathfrak{a}}$. 令 $\mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{a}$ 的子代数，使得 $\Delta_{\mathfrak{b}} = \Delta_{\mathfrak{a}} \setminus \{(s,r)\}$. 那么我们可以选取一个代表元 $Y = (y_{i,j}) \in \mathfrak{b}^t \cap \mathfrak{O}_X$，满足 $y_{r,s} = 0$. 于是 $Y \in (\mathfrak{b} \setminus \mathfrak{b}^2)^t$，且根据定理 2.9，$\mathrm{Ind}_{1+\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}} \psi_Y$ 不可约。

另一方面，如果 π 是次数为 q 的不可约特征，那么对于某个 $T \in \mathfrak{b}^t$，$\pi \cong \mathrm{Ind}_{1+\mathfrak{b}}^G \psi_T$，且 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的余维为 1 的子代数。于是 $|\mathfrak{O}_T| = q^2$. 因此，次数为 q 的不可约特征的数量等于基数为 q^2. □的余伴随轨道的数量

References

[安16] Andrews, Scott: *Supercharacter theories constructed by the method of little groups*。《Comm. Algebra》44 (2016)，第 5 期，2152–2179。[Al17] Aliniaeifard, Farid: *Normal supercharacter theories and their supercharacters.*《J. Algebra》469 (2017)，464–484。[Al06] Alperin, J.: *Unipotent conjugacy in general linear groups.*《Comm. Algebra》34 (2006)，889–891。[AT20] Aliniaeifard, Farid 和 Thiem, Nathaniel: *The structure of normal lattice supercharacter theories.* 3 2020 1059 1078 《Algebraic Combinatorics》，第 () 卷，第 5 期，第 – 页。[B011] Boyarchenko, Mitya: *Representations of unipotent groups over local fields and Gutkin's conjecture.* 18 2011 3, 539 557 《Math. Res. Lett.》 ()，第 – 期。[Bu98] D. Bump: *Automorphic forms and representations.*《Cambridge Studies in Advanced Mathematics》第 55 卷，1998。[DI08] Diaconis, P. 和 Isaacs, I. M.: *Supercharacters and superclasses for algebra groups.*《Trans. AMS》360 (2008)，2359–2392。[DT09] Diaconis, Persi 和 Thiem, Nathaniel: *Supercharacter formulas for pattern groups.*《Trans. Amer. Math. Soc.》361 (2009)[Ev11] Evseev, Anton: *Reduction for characters of finite algebra groups.*《Journal of Algebra》，第 325 卷，第 1 期，2011 年 1 月 1 日，321–351。[Gi11] Ginzburg, D.: *On the representations of q unipotent groups over a finite field.*《Israel J. Math.》181 (2011)，387–422。[Gut73] E. A. Gutkin。《自对偶域上的代数幺幂群表示》。*Funkcional. Anal. i Prilož en.*，7(4):80, 1973年。[Ha04] Halasi, Zolt´an: *On the characters and commutators of finite algebra groups.*《J. Algebra》275 (2004)，第 2 期，481–487。[He09] Hendrickson, Anders O. F.: *Construction of supercharacter theories of finite groups* https://arxiv.org/pdf/0905.3538.pdf[Hi60I] Higman, G: *Enumerating p-groups. I. Inequalities.*《Proc. LMS》3 (1960)，24–30。[HP11] Halasi, Zolt´an; Palfy, Peter P.: *The number of conjugacy classes in pattern groups is not a polynomial function.* 14 2011 6, 841 854 《J. Group Theory》 ()，第 – 期。[Hu98] Huppert, B.: *Character Theory of Finite Groups.*《de Gruyter Expositions in Mathematics》第 25 卷，Walter de Gruyter，柏林，1998。[Is95] Isaacs, I. M.: *Characters of groups associated with finite algebras.*《Journal of Algebra》177 (1995)，708–730。[Is07] Isaacs, I. M.: *Counting characters of upper triangular groups.*《Journal of Algebra》315 (2007)，698–719。[Ki95] Kirillov, A. A.: *Variations on the triangular theme.*《李群与李代数：E. B. Dynkin 研讨会》，43–73，《Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2》169，普罗维登斯，罗德岛州，1995。[Ki99] Kirillov, A. A.: *Merits and demerits of the orbit method.*《Bull. Amer. Math. Soc.》36 (1999)，433–488。[Le10] Le, Tung: *Counting irreducible representations of large degree of the upper triangular groups.* 324 2010 8, 1803 1817 《J. Algebra》 ()，第 – 期。[Leh74] Lehrer, G. I.: *Discrete series and the unipotent subgroup.*《Compositio Mathematica》28 (1974)，9–19。[LM12] Le, T. 和 Magaard, K.: *Representations of Unitriangular Groups.*《建筑、有限几何与群》，Springer Proc. Math.，10，Springer，纽约，（2012），163–174。[LN23] Li, Yike 和 Nien, Chufeng: *Characters arising from nonnormal conjugacy orbits for finite pattern groups.* 619 2023 558 571 《J. Algebra》 ()，–[11] Lo Loukaki, M.: *Counting characters of small degree in upper triangular groups.*《J. Pure Appl. Algebra》215 (2011)，第 2 期，154–160。[Ma97] Marjoram, M.: *Irreducible characters of Sylow p-subgroups of classical groups.* 博士论文，爱尔兰国立大学都柏林分校，1997。[Ma99] Marjoram, M.: *Irreducible characters of small degree of the unitriangular group.*《Irish Math. Soc. Bull.》第 42 期（1999），21–31。

Superclasses and supercharacters of normal pattern subgroups of
[Mar10] Marberg, Eric：*the unipotent upper triangular matrix group.* 2010,

May《代数与组合学杂志》35(1)[Mar11] Marberg, Eric：
Combinatorial methods of character enumeration for the unitriangular group 345 2011 295 323 《代数杂志》（）–。[
Superclasses and supercharacters of normal pattern subgroups of the
Mar12] Marberg, Eric：*unipotent upper triangular matrix group.* 35 2012

《代数组合杂志》（），第1期，61 92–[Ni20] Nien, Chufeng:
Characters of 2-layered Heisenberg groups. 《线性与多重线性代数》在线发表：2020年11月18日，
https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1849005[Ni21] Nien, Chufeng:
Characters of unipotent radicals of standard parabolic subgroups
with 3 parts Journal of Algebraic Combinatorics 。《代数与组合学杂志》，

发布日期： 2021 09 23 , 10 1007 10801 021 01052 8 - - DOI：。/s - - - Ni Nien,
[24]
Chufeng： *A conjecture about characters of finite pattern groups.* 已被《代数杂志》接受。[Pa14] Panov, A. N.： *The orbit method for unipotent groups over a finite field.*《圣彼得堡数学研究所科学研讨会记录》（POMI）414（2013），127–137。《数学科学杂志》（纽约）199（2014），第3期，313–318。[Pa15] Panov, A. N.：
Representations of Gelfand-Graev type for the unitriangular group.《基础与应用数学》18（2013），第3期，161–178；译载于《数学科学杂志》（纽约） 206 2015 5, 570 582 （），第–期 PS Pak, Igor
[15]
and Soffer, Andrew： *Higman's* $k(U_n(\mathbb{F}_q))$ *conjecture.* https://arxiv.org/abs/
1507 00411 。Sa Sangroniz, J.:
[04]
*Characters of algebra groups and unitriangular groups.*有限群
2003, 2004, 335 349 柏林：Walter de Gruyter, – Sa Sangroniz, J.
[09] *Irreducible characters of large degree of Sylow p-subgroups of classical*
groups. 321 2009 1480 《代数杂志》（）–
1496
[77] *Linear Representation of Finite Groups.* Serre, J. P.《数学研究生教材》第42卷（
Springer-Verlag, 1977）。[V-LA03] Vera-Lopez, A. and Arregi, J. M.:
Conjugacy classes in unitriangular matrices.《线性代数及其应用》370（2003），85–124。

Key Laboratory of Computing and Stochastic Mathematics (Ministry of Education), School of Mathematics and Statistics, Hunan Normal University, Changsha, Hunan 410081,P. R. China*Email address*: nienpig@hotmail.com

School of Mathematics and Statistics, the University of Melbourne, Victoria 3010, Australia*Email address*: chenyan.wu@unimelb.edu.au